Les esquisses, entre logique et géométrie: *La théorie des espèces de structures de Charles Ehresmann*

Sylvain Cabanacq

Laboratoire SPHERE, UMR 7219 CNRS - Université Paris Diderot

Journée "Informatique, Philosophie, Mathématiques", Toulouse – le 29 novembre 2013

Charles Ehresmann : 1905 - 1979.

Les esquisses : "*a way of bringing the formal system closer to the mathematician's naive description*". (Barr and Wells, 1984).

Une esquisse des groupes, des corps, des modèles bien-fondés de ZF... des esquisses...

Définition

Une esquisse S est la donnée de :

- un graphe orienté G_S
- un ensemble de diagrammes D_S dans G_S
- un ensemble de cônes L_S dans G_S
- un ensemble de cocônes C_S dans G_S

Exemple : l'esquisse des monoïdes

Charles Wells :

> *"There is a clear analogy with the way a path is defined as a continuous map from a closed interval to a space."*

Définition

Un modèle M d'une esquisse S dans une catégorie A est un morphisme de graphes, de G_S dans le graphe sous-jacent à A, associant à chaque diagramme de D_S un diagramme commutatif dans A, à chaque cône de L_S un cône limite dans A et à chaque cocône de C_S un cocône colimite de A.

$Mod_A(S)$ catégorie des modèles d'une esquisse S dans une catégorie A.

Définition

Une catégorie D est *esquissable* s'il existe une esquisse S et une catégorie A, telle que D est équivalente à $Mod_A(S)$.

Théorème (Lair 1981, Makkai-Paré 1985)

Une catégorie C est `esquissable` *ssi elle est* `accessible` *ssi elle est* `axiomatisable` *dans une logique infinitaire du premier ordre* $L_{\infty,\infty}$.

Mais : la catégorie *Top* des espaces topologiques *n'*est *pas* esquissable dans *Set* ni dans *Pos*.

Makkai-Paré :

> *"[there is] an (obvious) identification of a class of sketches S so that the categories Mod(S) for such sketches are precisely the categories of models of complete theories with elementary embeddings as morphisms"*

1. une esquisse *triviale* : seulement un graphe
2. *élémentaire* ou *linéaire* : un graphe, des diagrammes, mais pas de cônes ni de cocônes
3. *linéaire avec constantes* : un graphe, des diagrammes, cônes et cocônes seulement sur le diagramme vide
4. "*finite product*" : un graphe, des diagrammes, pas de cocônes et des cônes seulement sur des diagrammes discrets finis
5. "*finite discrete*" : un graphe, des diagrammes, des cônes et des cocônes sur des diagrammes discrets
6. "*finite limit*" ou "*left exact*" : un graphe, des diagrammes, des cônes et des cocônes sur des diagrammes finis
7. *projective* : un graphe, des diagrammes, des cônes quelconques mais pas de cocônes
8. *régulière* : un graphe, des diagrammes, des cônes quelconques et des cocônes permettant de spécifier les épimorphismes dans le modèle
9. *cohérentes* : un graphe, des diagrammes, des cônes sur des diagrammes finis, des cocônes sur des diagrammes finis soit discrets soit des "spécifications épi régulières"
10. *géométrique* : un graphe, des diagrammes, des cônes sur des diagrammes finis et des cocônes arbitraires
11. *mixte* : esquisse au sens le plus général.

Jean-Pierre Marquis (2009) :

> *"there is a natural classification of sketches that led to an intrinsic classification of categories. Furthermore, since a sketch is fondamentally a geometric notion, it is possible that some geometric measure of complexity could be devised and would reflect a different kind of complexity than the standard measures. The idea is not to replace the standard measures, but to have a (potentially) different notion at hand."*

Le problème principal : "Introduction to the theory of structured categories" (1966)

> *If p is a functor from a category C to a category C′, a unit s of C is called a p-structure on p(s) [...] From now on, we suppose that p is a functor from C to the category M of mappings associated to a universe M_0. How to define "canonically", for a category H, the notion of a structure of kind p over H (or more strictly on a unit e de H), so that a p-structure be a structure of kind p over M."*

Ehresmann et Bourbaki :

- 22 mars 1936 : Ehresmann rejoint le groupe
- 6 juillet 1936 : après le rapport d'Ehresmann sur la géométrie, "quelques échanges de vues sur la notion d'objet géométrique, la notion d'invariant en géométrie"
- septembre 1936 : "Congrès de l'Escorial" : la notion générale de structure est discutée, et définie dans les archives *après* celle de "structure locale"
- août 1942 : "Congrès de Clermont" : rapport d'Ehresmann sur les revêtements, pour le volume de Topologie Générale : "il y a intérêt à étendre la théorie aux cas où les espaces sont pourvus d'une structure locale" et Ehresmann promet d'examiner "la question des revêtements d'un point de vue algébrique (rapports avec la théorie des groupes libres, ou définis par générateurs et relations)".

La notion "bourbakiste" de structure dans les travaux d'Ehresmann :

- 1952 : cours de Rio sur les "Structures locales et revêtements"
- 1957 : "Gattungen von lokalen Strukturen" : il montre que sa définition coïncide avec celle de Bourbaki dans le cas ensembliste
- 1960 : "Catégorie des foncteurs types" : reformulation catégorique (et itération transfinie) de la procédure proposée par Bourbaki de description des espèces de structure par schéma de construction d'échelons

Introduction de *Catégories et structures* (1963)

"Deux attitudes sont possibles :

- *le point de vue "constructif", partant de la question : comment définir d'une façon générale une structure d'une certaine espèce au-dessus d'un ensemble E ? Ceci conduit Bourbaki à la définition de l'échelle des ensembles associés à E [...].*
- *le point de vue "algébriste" : oubliant comment les structures ont été construites, on ne conserve que l'ensemble des structures au-dessus de E et l'ensemble des homomorphismes entre les structures. On est ainsi amené à la théorie algébrique de la catégorie des homomorphismes et du foncteur p de cette catégorie vers une autre (dans les cas usuels, le foncteur "oubliant" les structures)."*

"Il est évident que, en partant uniquement des propriétés algébriques du foncteur p, on ne peut espérer obtenir tous les résultats spécifiques relatifs à une situation particulière, c'est-à-dire à une espèce de structure construite explicitement. Pour aller plus loin, il faut recourir aux espèces de structures et aux catégories dominées. Ceci n'est pas encore suffisant ; le stade ultérieur est celui des catégories structurées (ordonnées, inductives, topologiques, différentiables, etc...). Ainsi développée, la théorie des catégories tend réellement à unifier les mathématiques actuelles".

Ehresmann et Albert Lautman, le 4 février 1939, devant la Société Française de Philosophie :

> *"Il me paraît extrêmement intéressant d'y voir dégagés des problèmes généraux que l'on retrouve dans plusieurs théories mathématiques."*

"Étant donné un ensemble fondamental muni d'une structure mathématique ***particulière****, par exemple une structure de groupe ou une structure d'espace topologique, le rapport entre cet Ensemble fondamental et une de ses parties se traduit par la notion* ***mathématique*** *de structure induite sur la partie. Je ne peux pas préciser davantage, parce qu'il faudrait d'abord définir la notion générale de structure mathématique. Le problème des relations entre propriétés intrinsèques et extrinsèques et le problème des propriétés de situation d'une partie dans un ensemble fondamental, ce n'est pas autre chose que le problème des relations entre la structure de l'ensemble fondamental et les structures induites sur une partie et sur la partie complémentaire."*

La Géométrie selon Ehresmann :

- au milieu des années 1950, comme "théorie des structures plus ou moins riches, dans lesquelles les structures algébriques et topologiques sont généralement entremêlées",
- en 1973, comme théorie des catégories différentiables.

1. Autour de la notion de structure locale : 1950-1952
2. L'émergence du contexte catégorique : "Gattungen von lokalen Strukturen" en 1957
3. Vers une théorie des catégories structurées : 1961-1963
4. La théorie des esquisses : *Introduction to the theory of structured categories* en 1966

Une espèce de structure est définie par :

- la donnée d'un ensemble de départ E quelconque et d'ensembles auxilaires $A_1, ..., A_k$
- une loi de formation d'un ensemble M à partir de l'ensemble E et des ensembles auxiliaires, en utilisant les opérations "ensemble des parties" et "produit de deux ensembles"
- un système d'axiomes déterminant une partie W de M

$W \subset M$ est alors une espèce de structure sur E, et $s \in W$ est une structure d'espèce W sur E

Une *espèce de structures locales* est une espèce de structure (λ) munie d'une loi d'induction, qui associe à toute structure s d'espèce (λ), donnée sur un ensemble E, un ensemble $\Phi \subset P(E)$ et qui détermine sur tout ensemble $U \in \Phi$ une structure d'espèce (λ) (la structure induite par s sur U, U étant un sous-espace distingué de E), de sorte que les conditions soient satisfaites :

1. Φ est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur E
2. la loi d'induction est canonique
3. transitivité des structures induites
4. axiome de recollement

Axiome de recollement : Soit E' la réunion d'une famille de sous-ensembles de E dont chacun est muni d'une structure d'espèce (α) telle que la condition suivante soit satisfaite : si E_i et E_j sont deux ensembles de la famille dont l'intersection $E_i \cap E_j$ ne soit pas vide, celle-ci est sous-espace distingué de E_i et E_j et les structures induites sur $E_i \cap E_j$ par les structures données sur E_i et E_j sont identiques. Il existe alors sur E' une structure S' d'espèce (α) bien déterminée telle que chaque E_i muni de sa structure soit sous-espace distingué de E' muni de S'.

En 1955 :

"d'une part, on a les structures essentiellement algébriques définies sur un ensemble par un groupe de transformations (suivant l'idée développée, par exemple, par Félix Klein dans son programme d'Erlangen) ; d'autre part, on a les structures topologiques, qui forment l'objet de la Topologie. Mais la notion de groupe de transformations est un cas particulier de la notion de pseudogroupe de transformations, dont les transformations ne sont définies que sur certains sous-ensembles de l'espace considéré. Ces sous-ensembles sont les ensembles ouverts d'une structure topologique, de sorte qu'on admet déjà une structure topologique sous-jacente. On est conduit ensuite à une notion générale de structure locale étroitement liée à celle de pseudogroupe [...]. C'est l'exposé d'Elie Cartan sur les espaces localement euclidiens ("Leçons sur la théorie des espaces de Riemann") et le livre de Veblen-Whitehead sur "The foundations of differential geometry" qui m'ont conduit à étudier les espaces localement homogènes de Lie et à chercher une définition générale des structures de caractère local".

Soit $s \in (\lambda)_E$. Un automorphisme local de E est un isomorphisme entre deux sous-espaces distingués de E. L'ensemble des automorphismes locaux forment un "pseudogroupe" Γ.
Soient $s \in (\lambda)_E$ et $s' \in (\lambda)_{E'}$. Un isomorphisme d'un sous-espace distingué de E vers un sous espace distingué de E' est une *carte locale*. Au couple de deux cartes locales (f_1, f_2) est associé l'automorphisme local ϕ_{21} de E tel que pour $x, x' \in E$ on a $f_1(x) = f_2(x')$ ssi $x' = \phi_{21}(x)$. ϕ_{21} est le *changement de cartes* locales associé à (f_1, f_2). Un *atlas* de E sur E' est un ensemble (f_i) de cartes locales de E sur E' telles que leur but recouvrent E'.

Définition

Un atlas complet de E sur E' compatible avec Γ définit sur E' une structure associée à Γ. La classe des structures associées à Γ, sur un ensemble quelconque, est l'espèce des structures associées à Γ.

Soit E défini comme R^n, avec une topologie Hausdorff usuelle :

- le pseudogroupe des automorphismes locaux de R^n : : variétés topologiques
- le sous-pseudogroupe des automorphismes locaux de degré topologique +1 : : variétés topologiques orientées
- variétés fibrées, variétées feuilletées...

Soient deux pseudogroupes de transformations Γ_1 et Γ sur E tels que $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Soit A_1 un atlas compatible avec Γ_1 de E sur E'. Comme A_1 est aussi compatible avec Γ, il est contenu dans un atlas complet A compatible avec Γ. Ainsi toute structure associée à Γ_1 détermine une unique structure S associée à Γ.
Mais : étant donné un atlas A complet compatible avec Γ, il n'existe pas nécessairement un atlas A_1 contenu dans A et compatible avec Γ_1.

- *problème d'existence* des structures locales associées à Γ_1 qui soient subordonnées à une structure locale donnée S associée à Γ ;
- problème d'isomorphisme de deux structures locales subordonnées à S.

Définition

Une catégorie est la donnée d'une classe C d'éléments pour lesquels est définie une multiplication $(f, g) \to fg$ pour une certaine paire (f, g) d'éléments de C, multiplication satisfaisant les conditions suivantes :

1. si $h(fg)$ ou $(hf)g$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $h(fg) = (hf)g$;
2. si hf et fg sont définis, alors $h(fg)$ est défini ;
   Un élément e de C est appelé une *unité* si $fe = f$ et $eg = g$ pour tous les éléments f et g de C pour lesquels fe et eg sont définis ;
3. pour tout $f \in C$ il existe deux unités $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ telles que $f\alpha(f)$ et $\beta(f)f$ sont définis.

Les éléments $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ sont uniques, et fg est défini ssi $\alpha(f) = \beta(g)$.

Définition

Une catégorie d'opérateurs sur une classe S_0 est une catégorie C munie d'une multiplication $(f, z) \to fz$ définie pour certaines paires (f, z) où $f \in C$, $z \in S_0$, $fz \in S_0$, et satisfaisant les conditions suivantes :

1. si $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $g(fz) = (gf)z$,
2. si gf et fz sont définis, $g(fz)$ est défini,
3. si e est une unité de C et si ez est défini, alors $ez = z$,
4. pour tout $f \in C$ il existe un $z \in S_0$ tel que fz est défini et pour tout $z \in S_0$, il existe un $f \in C$ tel que fz est défini.

On a alors

- une "projection" $p : S_0 \to C_0$, telle que fz est défini ssi $\alpha(f) = p(z)$,
- et on a un foncteur $\Phi : C \to \Phi(C)$ donné par $f \mapsto (\Phi(f) : z \mapsto fz)$, de $p^{-1}(\alpha(f))$ vers $p^{-1}(\beta(f))$.

Les notions suivantes sont équivalentes :

- actions d'une catégorie C sur un ensemble,
- foncteurs $C \to Set$ (avec certaines propriétés additionnelles),
- fibrations discrètes sur C,

On a aussi une classe S de paires $(f, z) \in C \times S_0$ telles que fz est défini. S est une catégorie, avec S_0 comme classe d'unités, mais héritant des propriétés de C.

Soit C un groupoïde d'opérateurs sur S_0, S le groupoïde des paires. La projection $p : S_0 \to C_0$ peut être étendu en un foncteur-projection $p : S \to C$.

Définition

S_0 est une espèce de structure sur C. Un élément $s \in S_0$ est une structure sur $p(s) \in C_0$. Un élément $(f, s) \in S$ est un isomorphisme entre s et fs. S est alors le groupoïde des isomorphismes.

Définition

Soit K une catégorie contenant S comme sous-catégorie, telle que $K_0 = S_0$ et S est le groupoïde des éléments inversibles de K,
K est une *catégorie d'homomorphismes* relativement à S.

Dans le cas local, K est la classe de tous les atlas entre éléments de S_0.

Un foncteur généralisé de C vers C' est une fonction Φ associant à chaque $f \in C$ une classe $\Phi(f)$ d'éléments de C' avec les propriétés suivantes :

- si $f, g \in C$ et fg sont définis, alors $\Phi(fg) = \Phi(f) \times \Phi(g)$
- si e est une unité de C, alors $\Phi(e)$ est une classe d'unité de C'

Définition

Un groupoïde S est un groupoïde local si on a un foncteur généralisé Φ de S vers S (le foncteur d'induction), satisfaisant :

- pour tout $s \in \Phi(\alpha(f))$ il y a un unique élément $g \in \Phi(f)$ tel que $s = \alpha(g)$, g étant l'élément induit par f sur s
- pour tout $g \in \Phi(f)$ on a $\Phi(g) \subset \Phi(f)$
- Φ est "injectif"
- pour toute classe A de $\Phi(f)$ il y a un unique $j \in S$ tel que $A \subset \Phi(g)$ et $g \in \Phi(f')$ pour tout f' tel que $A \subset \Phi(f')$
- un axiome de distributivité

Soit C un sous-groupoïde du groupoïde local C' avec le foncteur d'induction Φ, et soit S_0 une espèce de structures sur C, S le groupoïde des isomorphismes associé, avec le foncteur projection p sur C.

Définition

S_0 est une espèce de structure locale sur C (et S un groupoïde local d'isomorphismes sur C) si on a dans S un foncteur d'induction Ψ satisfaisant les conditions suivantes :

- soit $(f, s) \in S$, $p(f, s) = f \in C$, alors $\Psi(f, s)$ est appliqué bijectivement par p sur un sous-ensemble de $\Phi(f)$,
- si $s, s' \in \Psi(S)$ alors $p(s \cap s') = p(s) \cap p(s')$,
- si $A \subset \Psi(S)$ alors il y a un $\in \Psi(S)$ tel que $p(\sigma) = \cup p(A)$

Une espèce de structures locales dans le premier sens (1952) est alors une espèce complète de structures locales sur le groupoïde local des homéomorphismes entre espaces topologiques.

Catégories inductives, différentiables, doubles, topologiques $\mapsto$ la théorie des catégories structurées.

Définition

Soit H et C deux catégories. On dira que (C, p, H, S) est une catégorie d'homomorphismes si elle satisfait les conditions suivantes :

- $p : H \to C$ est un foncteur "injectif"
- S est une sous-catégorie de H contenant H_0
- S est une espèce de structures sur C, avec une projection p' restriction de p à S.

Exemple : soit T_0 la classe des topologies sur une classe $m \in M_0$, T^* la catégorie des applications continues de s vers s', deux topologies respectivement sur m et m', un foncteur $\theta : T^* \to M$, T le groupoïde des éléments inversibles de T^* (les homéomorphismes). (M, θ, T^*, T) est une catégorie d'homomorphismes.

Une catégorie H-structurée (ou $p-$structurée) est une catégorie dans laquelle les applications α, β et la composition sont définies relativement à une catégorie d'homomorphismes.
Problèmes avec cette définition :

- elle fait encore intervenir la notion d'espèce de structures,
- la catégorie des homomorphismes vient avec un foncteur d'oubli $p : V \to Set$ devant satisfaire certaines propriétés.

Le problème principal : "Introduction to the theory of structured categories" (1966)

> *If p is a functor from a category C to a category C', a unit s of C is called a p-structure on $p(s)$ [...] From now on, we suppose that p is a functor from C to the category M of mappings associated to a universe M_0. How to define "canonically", for a category H, the notion of a structure of kind p over H (or more strictly on a unit e de H), so that a p-structure be a structure of kind p over M."*

Vers une théorie des "catégories structurées généralisées" : en oubliant le foncteur d'oubli...

Trois moyens de structurer les catégories :

1. en utilisant les foncteurs représentables et le lemme de Yoneda, "à la Grothendieck" dans "Techniques de descente et théorème d'existence en géométrie algébrique II" (1960),
2. en utilisant les catégories dominées (exemple : les sites)
3. en utilisant les esquisses.

Une catégorie topologique, différentiable ou double est un morphisme de graphe de l'esquisse des catégories dans *Top*, *Diff* or *Cat*
→ moyen le plus général de définir un objet interne à une catégorie donnée.

Grothendieck, 1960 :

> *"La notion de structure de "C-groupe", "C-anneau", etc. s'exprime de la façon la plus commode (en théorie comme en pratique) en disant que pour tout Y de C on a une loi de groupes (resp. anneau, etc.) au sens usuel sur l'ensemble $h_X(Y)$, les applications $h_X(Y) \to h_X(Y')$ correspondant à des morphismes $Y \to Y'$ devant être des homomorphismes de groupes (resp. anneaux, etc.).C'est la façon la plus intuitive et la plus commode par exemple, pour définir les divers groupes classiques G_a, G_m, $Gl(n)$, etc. sur un pré-schéma S de base quelconque [...] le yoga général étant d'identifier purement et simplement, à l'aide du foncteur canonique h, les objets de C à des foncteurs contravariants particuliers, les foncteurs représentables, de C dans la catégorie des ensembles."*

Conclusion :

- esquissabilité : "internalisabilité"
- complexité géométrique : conditions nécessaires imposées par la notion à son "contexte"
- la sémantique ensembliste comme un cas particulier
- un outil de "définition" de concepts structurels sans la distinction syntaxe-sémantique
- lieu de synthèse du local et de l'algébrique

"le mathématicien est engagé dans la poursuite d'un rêve sans fin, dont la traduction en formules précises exige un travail extraordinaire [...]. Je ne crois pas qu'un mathématicien voit dans cette efficacité [dans les applications pratiques] la justification de ses efforts car le vrai but de son rêve perpétuel est de comprendre la structure de toute chose".