

Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
*Memorie di Matematica*
112° (1994), Vol. XVIII, fasc. 1, pagg. 143-169

GIORGIO LETTA (*)

# Le condizioni di Riemann per l'integrabilità e il loro influsso sulla nascita del concetto di misura (**)

RIASSUNTO. — Si analizza la parte della celebre memoria di Riemann del 1854 che riguarda l'integrazione. Si passano quindi in rassegna i principali lavori dedicati all'integrabilità secondo Riemann che videro la luce tra il 1870 e il 1882. In particolare, si descrive il cammino attraverso il quale questi lavori condussero alla nozione di insieme «trascurabile» (destinata a sua volta a suggerire, qualche anno più tardi, la prima grossolana definizione di misura di un insieme).

## Les conditions de Riemann pour l'intégrabilité et leur influence sur la naissance de la notion de mesure

RÉSUMÉ. — On analyse la partie du célèbre mémoire de Riemann de 1854 qui concerne l'intégration. On examine ensuite les principaux articles parus entre 1870 et 1882 au sujet des conditions d'intégrabilité de Riemann. On décrit notamment le chemin par lequel ces travaux menèrent à la notion d'ensemble «négligeable» (destinée à son tour à suggérer, quelques années plus tard, la première ébauche de la définition de mesure d'un ensemble).

## 1. - INTRODUZIONE

È noto che l'origine storica del concetto di misura è da ricercare nei lavori della seconda metà del secolo scorso dedicati allo studio dell'integrale di Riemann e delle condizioni per l'integrabilità di una funzione. Questi lavori, cui dette l'avvio la pubblicazione postuma (1867) della celebre memoria nella quale Riemann aveva esposto la sua nuova concezione dell'integrale, si susseguirono senza interruzione (soprattutto in Germania e in Italia) per tutto il ventennio 1870-90. Essi vanno inquadrati in quel più vasto movimento di revisione critica dei fondamenti dell'analisi reale che, iniziato in Germa-

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, I-56127 Pisa.
(**) Memoria presentata il 14 ottobre 1994 da Giorgio Letta, uno dei XL.

nia da K. Weierstrass, G. Cantor e dallo stesso Riemann, si sviluppò anche in Italia, dove ebbe in U. Dini il suo massimo rappresentante, e solo più tardi (e tra non poche difficoltà e incomprensioni) prese piede in Francia. È da questi stessi studi critici (oltre che dai sottili problemi posti dallo studio delle serie trigonometriche) che G. Cantor fu condotto in quegli anni a enucleare i primi concetti della teoria degli insiemi e della topologia della retta reale, destinati a loro volta a influire in modo determinante sul successivo sviluppo del concetto di misura.

Nella sua memoria, Riemann aveva tra l'altro fornito due condizioni (ciascuna necessaria e sufficiente) per l'integrabilità di una funzione $f$, definita e limitata in un intervallo $[a, b]$. Queste condizioni erano formulate attraverso il concetto di *oscillazione* di una funzione *in un intervallo* e traducevano in forma matematica precisa l'idea intuitiva secondo la quale una funzione è integrabile se non è «troppo discontinua», cioè se non sono «troppo grandi» le sue oscillazioni in piccoli intervalli. Questa idea e gli esempi di funzioni discontinue integrabili studiati nella memoria di Riemann e nei lavori da essa originati suggerivano a loro volta un'idea più sottile: sostituire il concetto di oscillazione di una funzione in un intervallo con quello di *oscillazione in un punto* o con quello di *salto in un punto*, e caratterizzare le funzioni integrabili come quelle per le quali «non siano troppi» i punti in cui l'oscillazione superi un assegnato numero maggiore di zero. Questa seconda idea, dal punto di vista che a noi qui interessa (cioè lo studio delle circostanze che prepararono la nascita del concetto di misura), costituisce un decisivo progresso rispetto alla precedente: essa infatti riconduce l'integrabilità di una funzione al fatto che un certo insieme di punti «eccezionali» sia «non troppo grande» o, più precisamente, sia «trascurabile ai fini dell'integrazione». Fu proprio per questa via che si giunse al primo concetto di insieme «trascurabile» (o «di misura nulla»), dal quale nacque a sua volta il concetto di misura di un insieme. Ma questo cammino non fu semplice, bensì lento e tortuoso. Infatti non subito la buona nozione di insieme «trascurabile ai fini dell'integrazione» s'impose all'attenzione dei matematici (anche se presente di continuo nei loro ragionamenti) perché si trovò all'inizio mescolata, e spesso confusa, con nozioni ad essa insidiosamente simili, ma di natura diversa, come quella di insieme non denso in alcun intervallo o quella di insieme di prima specie secondo Cantor.

Nella presente esposizione ci proponiamo di ricostruire il faticoso processo di chiarificazione di questi concetti, al termine del quale si giunse alla prima grossolana idea di misura di un insieme: precisamente, alle definizioni di *Inhalt* (Stolz [1884], Cantor [1884], Harnack [1885]) e di *estensione interna ed esterna* (Peano [1883] e [1887], Jordan [1893]). Fu questo processo che preparò il terreno sul quale dovevano nascere, al sorgere del nuovo secolo, la misura di Borel e l'integrale di Lebesgue. E possiamo aggiungere che soltanto allora la condizione per l'integrabilità secondo Riemann poté trovare la sua formulazione «definitiva» nel seguente enunciato di G. Vitali [1904]:

*Una funzione limitata è integrabile se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile secondo Lebesgue.*

(In questa formulazione, i punti di discontinuità, ossia i punti in cui l'oscillazione puntuale è maggiore di zero, intervengono finalmente nel loro complesso, e non più graduati in base alla grandezza dell'oscillazione puntuale.) Se si pensa che mezzo secolo esatto divide la formulazione di questo risultato (1904) dalla redazione della memoria di Riemann (1854), si può forse capire quanto lento e faticoso sia stato il cammino di questi concetti.

Nella nostra analisi noi prenderemo le mosse dalla memoria di Riemann. Ci è tuttavia necessario accennare rapidamente a due importanti antefatti:

(*a*) la definizione di integrale data da Cauchy nelle sue celebri lezioni sul calcolo infinitesimale [1823];

(*b*) la cosiddetta «condizione di Dirichlet».

È noto che Cauchy aveva rimesso in auge la nozione di *integrale definito* (prima di lui sempre più sacrificata a quella di *integrale indefinito*, vista come operazione inversa della derivazione). Egli aveva definito, per una funzione $f$ continua su $[a, b]$, l'integrale come limite di somme integrali. Inoltre, fatto insolito per i suoi tempi, aveva sentito il bisogno di dimostrare l'esistenza di questo limite (anche se la sua dimostrazione non si può considerare del tutto soddisfacente). Infine, servendosi del teorema del valor medio, aveva dimostrato il teorema fondamentale del calcolo integrale.

La storia dei successivi sviluppi del concetto di integrale è strettamente collegata con lo studio della rappresentabilità di una funzione mediante serie trigonometriche e con l'evoluzione del concetto stesso di funzione.

In realtà, i risultati di Fourier [1822] sulla possibilità di rappresentare mediante serie trigonometriche funzioni anche non continue suggerivano tre ordini di problemi:

(1) dare un senso preciso agli enunciati un po' vaghi di Fourier, e fornirne delle vere dimostrazioni;

(2) estendere a classi sempre più vaste di funzioni la validità della rappresentazione mediante serie trigonometriche;

(3) stabilire se questa validità non sussistesse addirittura «per funzioni del tutto arbitrarie».

Il primo ad affrontare seriamente questi problemi fu il matematico tedesco Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), formatosi a Parigi, alla scuola dello stesso Fourier. Nella sua celebre memoria [1829], pubblicata dopo il suo rientro in Germania, egli comincia col definire il concetto generale di funzione: si tratta della prima definizione esplicita e non ambigua di questo concetto.

Egli osserva quindi che, per una funzione continua, gli integrali che ne forniscono i coefficienti di Fourier esistono, nel senso definito da Cauchy, grazie alla continuità della funzione integranda. A questo proposito egli si limita a citare il risultato di Cauchy sull'integrabilità di una funzione continua, definendolo «facile à démontrer». Probabil-

mente egli alhude con ciò alla non impeccabile dimostrazione fornita dallo stesso Cauchy.

Alla fine della sua memoria, Dirichlet s'interroga poi sulla possibilità di estendere i risultati ottenuti a una classe più vasta di funzioni, e affronta la questione pregiudiziale di vedere per quali funzioni conservino un senso gli integrali che forniscono i coefficienti di Fourier. A questo proposito, egli sembra affermare che una condizione *necessaria* perché l'integrale di una funzione abbia senso è che questa ammetta un insieme denso di intervalli di continuità, ossia che l'insieme dei suoi punti di continuità abbia interno denso. («On verra ... que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée.»)

In realtà, la condizione enunciata da Dirichlet non è, come si vedrà più avanti, né necessaria né sufficiente per l'integrabilità di una funzione.

Resta tuttavia a Dirichlet il merito di aver per primo tentato di formulare condizioni per l'integrabilità di una funzione non assoggettata *a priori* all'ipotesi restrittiva della continuità. Non solo, ma, per quanto falso sia ciò ch'egli sembra voler affermare nel passo citato, egli ebbe il merito d'intuire che l'integrabilità di una funzione è una proprietà legata all'insieme dei punti di discontinuità.

## 2. - La memoria di Riemann

Dalla pubblicazione della memoria di Dirichlet [1929] dovevano trascorrere ben venticinque anni prima che qualcuno tornasse ad occuparsi dell'integrabilità di funzioni non continue. Infatti la memoria di Riemann (allievo di Dirichlet) «Sulla rappresentabilità mediante serie trigonometriche» fu presentata (come *Habilitationsschrift* all'Università di Gottinga) nel 1854. Non solo: ma essa rimase praticamente sconosciuta fino al 1867, anno in cui fu pubblicata postuma nelle *Abhandlungen* dell'Accademia delle Scienze di Gottinga.

Come giustamente osserva Bourbaki [1960: pag. 247], la ragione di questo silenzio è probabilmente nel fatto che i tempi non eran maturi per la considerazione di funzioni dotate, in un intervallo limitato, di infiniti punti di discontinuità: siffatte funzioni sarebbero apparse troppo «patologiche» per poter servire a qualcosa. È significativo, a questo riguardo, il fatto che, nella sua memoria, al termine del paragrafo introduttivo (contenente notizie storiche sulle serie trigonometriche), Riemann senta il dovere di giustificare proprio con considerazioni di varia utilità (concettuale e pratica) il proposito di estendere i risultati di Dirichlet sulla sviluppabilità in serie di Fourier a una classe di funzioni ancora più ampia.

Precisamente, dopo aver elogiato i risultati del suo maestro, e aver espresso l'opinione che ben difficilmente possano presentarsi, nelle applicazioni fisiche, casi non coperti da quei risultati, egli aggiunge:

«Ciò nonostante, i casi non trattati da Dirichlet meritano attenzione per una duplice ragione. Innanzitutto, come lo stesso Dirichlet osserva alla fine della sua memoria,

questo argomento è in intima connessione con i principi del Calcolo infinitesimale, e può quindi portare questi principi a maggiore chiarezza e determinatezza ... In secondo luogo, le serie di Fourier non sono applicabili soltanto alle ricerche fisiche; oggi esse si applicano con successo in un campo della matematica pura, la Teoria dei numeri, e in questo contesto appaiono essere interessanti proprio quelle funzioni la cui rappresentabilità mediante serie trigonometriche non è stata studiata da Dirichlet.»

Nel successivo paragrafo («Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültichkeit») Riemann riprende la definizione d'integrale formulata da Cauchy: ma, anziché restringerla *a priori*, come quest'ultimo, alle sole funzioni continue, egli, seguendo il suo maestro Dirichlet, considera la classe di tutte le funzioni integrabili, e si propone di cercare delle condizioni per l'appartenenza di una funzione a tale classe.

Precisamente, data una funzione $f$ definita (e limitata) in un intervallo $[a, b]$, egli considera, per ogni partizione finita $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[a, b]$ costituita da intervalli, la somma

$$\sum_{J \in \mathcal{P}} \lambda(J)\, \omega_f(J),$$

dove $\lambda(J)$ e $\omega_f(J)$ denotano rispettivamente la lunghezza dell'intervallo $J$ e l'oscillazione di $f$ su $J$ (ossia la differenza tra gli estremi superiore e inferiore di $f$ su $J$).

Egli dimostra quindi che, affinché $f$ sia integrabile, occorre e basta che la suddetta somma converga verso zero al tendere a zero della più grande delle lunghezze degli intervalli della partizione.

Subito dopo egli osserva che la precedente condizione (che noi chiameremo *Prima condizione di Riemann per l'integrabilità*) può esser messa nella seguente forma equivalente (*Seconda condizione di Riemann per l'integrabilità*): Per ogni fissato numero $\sigma > 0$, la somma

$$\sum_{J \in \mathcal{P},\ \omega_f(J) > \sigma} \lambda(J)$$

converga verso zero (nello stesso senso sopra precisato).

Non meno importante di questi criteri d'integrabilità è l'esempio che Riemann espone a illustrazione di essi. L'esempio riguarda una funzione integrabile, dotata di un insieme ovunque denso di punti di discontinuità (e non verificante, dunque, la condizione ritenuta da Dirichlet necessaria per l'integrabilità).

«Da diese Funktionen noch nirgends betrachtet sind, — osserva l'autore con l'aria di giustificarsi — wird es gut, von einem bestimmten Beispiele auszugehen.»

A questo scopo, egli parte dalla funzione $g$, periodica di periodo 1, che è nulla nei punti $\pm 1/2$ e che coincide su $]-1/2, 1/2[$ con l'applicazione identica. Servendosi

di $g$, definisce poi $f$ nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} g(nx).$$

La funzione $f$ così definita è discontinua in un insieme denso di punti razionali. Ciò nonostante, la sua restrizione a un qualsiasi intervallo compatto $[a, b]$ è integrabile, in quanto verifica la seconda condizione di Riemann.

Questa conclusione — sottolinea Riemann — si basa sulle sole due proprietà seguenti della funzione $f$:

(*a*) $f$ possiede in ciascun punto limiti sinistro e destro;

(*b*) per ogni numero $\sigma$ maggiore di zero, è finito l'insieme costituito dai punti di $[a, b]$ nei quali uno dei salti di $f$ (destro o sinistro) superi $\sigma$ in valore assoluto.

In qual modo, però, da queste due proprietà (la seconda delle quali è tra l'altro una conseguenza della prima) si deduca la condizione di Riemann non appare in modo chiaro dalla sbrigativa dimostrazione schizzata da Riemann.

## 3. - La memoria di Hankel

Come si è già detto, la memoria di Riemann rimase sconosciuta al grosso pubblico fino a quando nel 1867 (un anno dopo la scomparsa dell'autore) essa fu pubblicata, a cura di R. Dedekind, nelle *Abhandlungen* dell'Accademia delle Scienze di Gottinga. Ma questa volta i tempi erano finalmente maturi perché le nuove idee intorno all'integrazione (e, più in generale, intorno alle funzioni di variabile reale) non cadessero nel vuoto. E difatti la memoria di Riemann fu subito studiata da molti matematici e dette ben presto l'avvio, soprattutto in Germania e in Italia, a tutta una serie di lavori dedicati a chiarire, approfondire, estendere, applicare le idee di Riemann sull'integrazione, sviluppando quanto di ancora implicito vi fosse nel breve paragrafo in cui egli le aveva condensate.

Il primo di questi lavori è la memoria di H. Hankel (1839-1873) sulle funzioni discontinue (presentata all'Università di Tubinga nel 1870 e stampata postuma nel 1882 nei *Math. Ann.*).

È impossibile, in questa sede, addentrarsi in un'analisi completa di questa ponderosa memoria e della sua importanza per i fondamenti della teoria delle funzioni di variabile reale. Ci limiteremo a citare la minuziosa analisi che Hankel fa del comportamento di una funzione in relazione alle sue discontinuità, e le conseguenze, in parte fallaci, ch'egli ne trae in ordine all'integrabilità.

Precisamente, Hankel osserva ([1882: § 6, p. 84]) che una funzione $f$ è discontinua in un punto $x$ se, e solo se, esiste un numero $\sigma > 0$ tale che $f$ «compia, in $x$, salti maggiori di $\sigma$», nel senso che, in ogni intorno di $x$, esista un punto $y$ verificante la relazione $|f(y) - f(x)| > \sigma$. Egli considera allora, per ogni $\sigma > 0$, l'insieme, diciamolo $D_\sigma$, co-

stituito dai punti in cui $f$ compie salti maggiori di $\sigma$, e distingue due casi ([1882: § 7, p. 87]):

*Primo caso*: per qualche $\sigma > 0$, l'insieme $D_\sigma$ «riempie tutto un tratto», nel senso che è denso in un opportuno intervallo aperto $U$.

*Secondo caso*: per ogni $\sigma > 0$, l'insieme $D_\sigma$ è rado (*zerstreut*), cioè non denso in alcun intervallo aperto.

Nel primo caso, osserva Hankel, l'oscillazione di $f$ su un qualsiasi intervallo aperto che incontri $U$ è maggiore di $\sigma$, e quindi:

(*a*) $f$ è discontinua in ciascun punto di $U$;

(*b*) $f$ non verifica la seconda condizione di Riemann per l'integrabilità: infatti, per ogni partizione finita $\mathscr{P}$ di $[a, b]$, costituita da intervalli, si ha

$$\lambda(U) = \sum_{J \in \mathscr{P},\, \lambda(J \cap U) > 0} \lambda(J \cap U) \leqslant \sum_{J \in \mathscr{P},\, \omega_f(J) > \sigma} \lambda(J)\,.$$

Nel secondo caso, Hankel prova ([1882, p. 90]) che in ogni intervallo aperto $U$ contenuto in $[a, b]$ esiste almeno un punto di continuità per $f$.

Il ragionamento è lo stesso col quale Osgood [1897] e Baire [1899] dimostreranno, quasi trent'anni più tardi, il «teorema di Baire», cioè il fatto che una riunione numerabile d'insiemi radi è priva di punti interni. Fissato invero $\sigma > 0$, si prenda un intervallo $[a_1, b_1]$ contenuo in $U$ (e non ridotto a un punto) nel quale non cadano punti di $D_\sigma$; indi si prenda un intervallo $[a_2, b_2]$ contenuto in $[a_1, b_1]$ (e non ridotto a un punto) nel quale non cadano punti di $D_{\sigma/2}$. Così proseguendo, si costruisce una successione decrescente $([a_n, b_n])$ d'intervalli, tale che in $[a_n, b_n]$ non cadano punti di $D_{\sigma/2^n}$. Questi intervalli hanno almeno un punto in comune: un tal punto è di continuità per $f$.

Dalla sottile analisi di Hankel risulta dunque che il secondo dei due casi da lui considerati ha luogo se, e solo se, l'insieme dei punti che sono di continuità per $f$ è denso in $[a, b]$. Questa condizione, che chiameremo *condizione di Hankel*, appare come un indebolimento della «condizione di Dirichlet» vista sopra: quest'ultima impone infatti che esista un insieme denso di *intervalli* di continuità, ossia che l'insieme dei punti di continuità, non solo sia denso, ma abbia *interno* denso. Tuttavia è chiaro che, per una funzione suscettibile di soli valori interi (per esempio, per una funzione indicatrice), le due condizioni sono equivalenti.

Si è visto sopra che, se siamo nel primo dei due casi considerati da Hankel, la funzione $f$ non è integrabile secondo Riemann. In altre parole, la condizione di Hankel è *necessaria* per l'integrabilità. Nella sua memoria, Hankel credette erroneamente di poter dimostrare anche la *sufficienza* della sua condizione. Questo non è che uno dei molti errori contenuti nella memoria di Hankel. Ma, nonostante questi errori (o forse proprio in ragione di essi, e delle molte polemiche che suscitarono), la memoria di Hankel era destinata a rimanere per diversi anni al centro dell'attenzione dei matematici e, per

molti di essi, doveva servire di stimolo a cimentarsi sul nuovo terreno dell'integrazione delle funzioni discontinue. Ben cinque lavori, dedicati in tutto o in parte a questo argomento, videro la luce nel 1875: ci occuperemo dei tre più importanti, quelli di Darboux, Ascoli, Smith.

## 4. - La memoria di Darboux

Nella sua memoria [1875], Darboux non si occupa soltanto dell'integrale e delle condizioni per l'integrabilità, bensì anche della questione della derivabilità delle funzioni continue.

Per quel che riguarda l'integrale, egli riprende la definizione di Riemann, facendo però intervenire, accanto alle «somme di Riemann», quelle somme inferiori e superiori che oggi si chiamano «somme di Darboux».

Egli comincia col richiamare la memoria di Riemann con queste parole: «A proposito delle serie trigonometriche, l'illustre geometra espone le sue idee sui principi del Calcolo infinitesimale; egli generalizza, mediante una di quelle visioni che non appartengono se non agli spiriti di primaria grandezza, la nozione d'integrale definito; mostra che essa è applicabile anche a funzioni discontinue in ogni intervallo, ed enuncia condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione, continua o discontinua, sia suscettibile d'integrazione.»

Di Hankel, egli dice: «Purtroppo le conclusioni del suo lavoro non sono irreprensibili, e un illustre geometra, Gilbert, ha mosso alle dimostrazioni di Hankel delle obiezioni che potrebbero rivolgersi agli stessi enunciati.»

Tuttavia egli intende con ciò riferirsi soltanto alla parte del lavoro di Hankel che riguarda le questioni di derivabilità, non alla sufficienza della condizione di Hankel per l'integrabilità.

Venendo ad analizzare le condizioni d'integrabilità, Darboux, comincia col dimostrare che, qualunque sia la funzione $f$ (limitata su $[a, b]$), la relativa somma superiore

$$\sum_{J \in \mathcal{P}} \lambda(J) \sup f(J)$$

decresce al raffinarsi della partizione $\mathcal{P}$, e ammette un limite al tendere a zero della massima delle lunghezze degli intervalli della partizione; così pure, la somma inferiore

$$\sum_{J \in \mathcal{P}} \lambda(J) \inf f(J)$$

cresce al raffinarsi della partizione, e ammette pur essa un limite (nello stesso senso). Di conseguenza, la differenza tra le due somme, superiore e inferiore, ossia la somma

(già considerata da Riemann)

$$\sum_{J \in \mathcal{P}} \lambda(J)\, \omega_f(J),$$

decresce al raffinarsi della partizione, e ammette a sua volta un limite. La prima condizione di Riemann per l'integrabilità si esprime allora imponendo a questo limite (sempre esistente) di essere eguale a zero.

Darboux dimostra poi in modo molto rigoroso l'equivalenza tra la prima e la seconda condizione di Riemann per l'integrabilità. Come prima applicazione, egli dimostra, per la prima volta in modo completo, l'integrabilità di una funzione continua. Egli si vale, a questo scopo, del seguente lemma, sostanzialmente equivalente alla continuità uniforme della funzione $f$:

*Data una funzione $f$ continua in $[a, b]$, si può trovare, per ogni $\sigma > 0$, un $\delta > 0$ tale che, se si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in intervalli tutti di lunghezza minore di $\delta$, le oscillazioni di $f$ in questi intervalli risultino tutte minori di $\sigma$.*

Egli rimanda per questo lemma al libro di M. Thomae [1873]. Tuttavia preferisce darne una nuova dimostrazione, che — osserva — ha il vantaggio di essere applicabile anche a funzioni di più variabili.

Darboux passa poi a esporre varie proprietà generali dell'integrale di Riemann, tra le quali il teorema d'integrazione per serie (relativo al caso della convergenza uniforme). Servendosi anche di questo risultato, egli studia in seguito una vasta classe di funzioni integrabili, dotate di un insieme denso di punti di discontinuità. Si tratta di uno sviluppo sistematico del metodo impiegato da Riemann per costruire il suo esempio. Le funzioni ottenute con questo metodo sono peraltro di un tipo assai speciale: esse possiedono, in ciascun punto, un limite sinistro e un limite destro. A questo proposito, rendendo esplicito quanto implicitamente affermato da Riemann, Darboux dimostra che, per una qualsiasi funzione $f$ limitata su $[a, b]$, la sola proprietà di avere in ciascun punto un limite destro e un limite sinistro è sufficiente ad assicurare l'integrabilità. La dimostrazione di Darboux merita un cenno per il suo rigore e la sua ingegnosità. La parte essenziale di essa consiste nel provare che, nelle ipotesi poste, si può trovare, per ogni $\sigma > 0$, una partizione finita $\mathcal{P}$ di $[a, b]$, costituita da intervalli, in modo tale che, per il generico $J$ di questi intervalli, l'oscillazione di $f$ nella parte interna di esso non superi $\sigma$. A questo scopo, Darboux comincia con l'osservare che esiste un sottointervallo aperto di $]a, b[$, della forma $]a, a + \delta[$, sul quale la funzione $f$ si discosti per meno di $\sigma / 2$ dal suo limite destro relativo al punto $a$. Tra tutti gli intervalli con questa proprietà, egli sceglie *il massimo*, che indica con $]a, x_1[$. Se questo coincide con l'intero intervallo $]a, b[$, l'affermazione è provata. Altrimenti, la costruzione precedente, applicata partendo da $x_1$ anziché da $a$, fornisce un nuovo intervallo aperto $]x_1, x_2[$. Iterando il procedimento, afferma Darboux, si giunge necessariamente, dopo un numero finito di passi, a un intervallo $]x_{n-1}, x_n[$ con $x_n = b$. Si ottiene così una partizione di $[a, b]$ con le desiderate proprietà.

### 5. - Il criterio di Ascoli

Nello stesso anno 1875 G. Ascoli pubblicava una nota lincea, dal titolo: *Sul concetto di integrale definito*. Anche se l'esposizione, lenta e involuta, è ben lontana dalla chiarezza ed eleganza di Darboux, questa nota segna, per quel che riguarda le condizioni d'integrabilità, un netto progresso rispetto alla memoria di Darboux. Come in questa, la trattazione è fondata sull'uso delle somme integrali inferiori e superiori e dei loro limiti. A questo proposito, giova sottolineare che tutti i limiti considerati da Ascoli sono relativi a una fissata successione $(\mathcal{P}_n)$ di partizioni di $[a, b]$, con $\lim_n \|\mathcal{P}_n\| = 0$ (dove $\|\mathcal{P}_n\|$ denota la massima delle lunghezze degli intervalli di $\mathcal{P}_n$). Inoltre l'indipendenza dalla particolare successione scelta viene di volta in volta accuratamente verificata. Questo modo di procedere, che contribuisce a rendere ancora più pesante l'esposizione, è forse suggerito dal desiderio di far apparire più intuitive e più «operative» le definizioni, oppure dall'esigenza di applicare la definizione e le proprietà formali dell'operazione di limite soltanto al caso ben sicuro e consolidato delle successioni. Questa non può che apparire come una giusta esigenza di rigore, se si pensa che, a quell'epoca, non era ancora disponibile una teoria generale dei limiti che comprendesse anche il caso del limite delle somme di Riemann (o di Darboux) «al tendere a zero della massima delle lunghezze degli intervalli della partizione».

Anche Ascoli, come Darboux, si preoccupa innanzitutto di dimostrare l'esistenza del limite delle somme superiori. Ma egli dimostra qualcosa di più: cioè che nulla cambia in questo limite se, nella definizione della somma superiore, si sostituisce, per ogni intervallo $J$ della partizione, l'estremo superiore di $f$ su $J$ con quello su uno qualsiasi degli altri intervalli aventi gli stessi estremi di $J$. Egli ritrova così le condizioni d'integrabilità di Riemann con una piccola precisazione supplementare: cioè che, in ciascuna di esse, l'oscillazione di $f$ nel generico intervallo $J$ della partizione può essere sostituita con l'oscillazione di $f$ sull'intervallo *aperto*, oppure su quello *chiuso*, avente gli stessi estremi di $J$. (Egli distingue i due casi parlando, nel primo, di *oscillazione minima*; nel secondo, di *oscillazione massima*.)

Ma il progresso veramente sostanziale è compiuto da Ascoli nel passare, dalla seconda condizione di Riemann per l'integrabilità, ad una condizione equivalente, nella quale interviene, anziché l'oscillazione intesa come funzione d'intervallo, l'oscillazione intesa come funzione di punto. Precisamente, dopo aver definito con estrema accuratezza l'oscillazione puntuale di $f$ come la funzione che ad ogni punto $c$ di $[a, b]$ associa il numero

$$O_c = \limsup_{x \to c} f(x) - \liminf_{x \to c} f(x),$$

e aver confrontato questo concetto con quelli di *oscillazione a sinistra* e di *oscillazione a destra*, egli dimostra il seguente criterio d'integrabilità:

*Sia* $(\mathcal{P}_n)$ *una successione di partizioni finite di* $[a, b]$, *costituite da intervalli, con* $\lim_n \|\mathcal{P}_n\| = 0$.

*Se $f$ è integrabile, allora, per ogni fissato $\sigma > 0$, la somma delle lunghezze degli intervalli di $\mathcal{P}_n$ nella cui chiusura cadano punti nei quali l'oscillazione di $f$ superi $\sigma$ converge verso zero al tendere di $n$ all'infinito.*

*Reciprocamente, se, per ogni $\sigma > 0$, la somma delle lunghezze degli intervalli di $\mathcal{P}_n$ nel cui interno cadano punti nei quali l'oscillazione di $f$ superi $\sigma$ converge verso zero, allora $f$ è integrabile.*

La dimostrazione è fondata sul lemma seguente:

*Se l'oscillazione di $f$ in ciascun punto di $[a, b]$ è minore di $\sigma$, è possibile trovare una partizione finita di $[a, b]$, costituita da intervalli, in modo tale che, per ciascuno di questi intervalli, la corrispondente oscillazione massima di $f$ risulti minore di $\sigma$.*

L'ingegnosa dimostrazione che Ascoli dà di questo lemma si può così schizzare: grazie all'ipotesi, esistono, per ogni punto $x$ di $[a, b]$, dei numeri reali $r$ maggiori di zero, tali che sia

$$\omega_f\{z \in [a, b]: \ |z - x| \leqslant r\} < \sigma .$$

Si denoti con $\eta(x)$ l'estremo superiore di tali numeri. Si può naturalmente supporre che $\eta(x)$ sia finito per ogni $x$. (Infatti, se così non fosse, si avrebbe $\omega_f([a, b]) < \sigma$, e non ci sarebbe nulla da dimostrare.) Basta allora provare che la funzione $x \mapsto \eta(x)$ ammette minimo valore. Ma ciò discende dal fatto che questa funzione è continua (anzi, come si direbbe oggi, *lipschitziana*, con costante di Lipschitz eguale a 1). Infatti, per ogni coppia $x, y$ di elementi di $[a, b]$, non potendo l'intervallo

$$\{z \in [a, b]: \ |z - x| \leqslant \eta(x)\}$$

essere contenuto nell'intervallo

$$\{z \in [a, b]: \ |z - y| < \eta(y)\} ,$$

esiste un elemento $z$ appartenente al primo, ma non al secondo, di questi due intervalli, ossia verificante le relazioni

$$|z - x| \leqslant \eta(x) , \qquad |z - y| \geqslant \eta(y) .$$

Da queste si ricava

$$\eta(y) - \eta(x) \leqslant |z - y| - |z - x| \leqslant |y - x| .$$

OSSERVAZIONE: Se $(\mathcal{P}_n)$ è una successione di partizioni finite di $[a, b]$, costituite da intervalli, con $\lim_n \|\mathcal{P}_n\| = 0$, e se $A$ è un'assegnata parte di $[a, b]$, la condizione

$$\lim_n \sum_{J \in \mathcal{P}_n, \ J \cap A \neq \emptyset} \lambda(J) = 0$$

(cioè il fatto che la somma delle lunghezze degli intervalli di $\mathcal{P}_n$ che incontrano $A$ converga verso zero al tendere di $n$ all'infinito) equivale al fatto che l'insieme $A$ possa esser

rinchiuso nella riunione di un numero finito d'intervalli disgiunti, di lunghezza complessiva arbitrariamente piccola. Sarebbe naturale chiamare *trascurabile* un insieme $A$ verificante questa condizione. Se si avesse, a questo stadio, il diritto d'impiegare una tal locuzione, si potrebbe formulare il criterio di Ascoli nel modo seguente:

*Affinché la funzione $f$ (limitata su $[a, b]$) sia integrabile, occorre e basta che, per ogni $\sigma > 0$, l'insieme costituito dai punti di $[a, b]$ nei quali l'oscilazione puntuale di $f$ supera $\sigma$ sia* «trascurabile».

Naturalmente, una tale formulazione non è corretta, sul piano storico, perché la nozione di insieme «trascurabile» non sarà introdotta — in maniera esplicita — se non sei anni dopo la pubblicazione della nota di Ascoli. Tuttavia, qui come altre volte nel seguito, ci permetteremo l'impiego di questo linguaggio anacronistico, al solo scopo di rendere certi enunciati più concisi. (In simili casi, adotteremo la precauzione che consiste nello scrivere il termine *trascurabile* tra virgolette.)

Purtroppo il criterio d'integrabilità di Ascoli passò quasi del tutto inosservato. Ed è anzi da credere che ancor oggi la sua esistenza sia sconosciuta agli storici della teoria dell'integrazione. Ad esempio, Pesin [1970: pag. 15], ripetendo un errore già presente nella pur splendida monografia di Pia Nalli [1914: pag. 15], afferma che il criterio in questione sarebbe stato dimostrato per la prima volta da du Bois-Reymond [1882], e aggiunge: «This assertion was almost simultaneously formulated by Hankel without a satisfactory proof.» (Anche l'affermazione riguardante Hankel è falsa.) Analogo errore commette Hawkins [1970: pag. 59], il quale attribuisce il risultato a Harnack, senza menzionare la nota di Ascoli (che pur cita nella bibliografia posta in fondo al volume).

## 6. - L'esempio di Smith

Nello stesso anno 1875 vedeva la luce un notevole articolo del matematico inglese H. J. S. Smith (studioso di teoria dei numeri), dal titolo *On the integration of discontinuous functions*.

Questo articolo contiene considerazioni generali sulla definizione d'integrale, e sulle condizioni d'integrabilità di Riemann, che fanno largo impiego delle somme inferiori e superiori e che, per molti aspetti, sono simili a quelle di Darboux e di Ascoli. Si tratta in sostanza di dimostrazioni esplicite e rigorose di alcuni degli enunciati di Riemann, come indica chiaramente la seguente frase dell'introduzione: «Some further discussion of this theorem would seem to be desirable, partly because, in one particular at least, Riemann's demonstration is wanting in formal accuracy, and partly because the theorem itself appears to have been misunderstood, and to have been made the basis of erroneous inferences.»

Smith riprende poi l'esempio, dato da Riemann, di una funzione integrabile, per la quale è denso l'insieme dei punti di discontinuità. Sotto l'influsso di questo esempio, e

di quanto osservato in proposito dallo stesso Riemann, Smith enuncia una condizione *sufficiente* per l'integrabilità. Egli conviene di dire che in un punto $x$ c'è, per la funzione $f$, «una discontinuità superiore a $\sigma$» se, per ogni intorno $I$ di $x$, la relativa oscillazione $\omega_f(I)$ (detta da Smith *ordinate difference*) è superiore a $\sigma$. Usando questo linguaggio (che è simile, ma non identico, a quello di Hankel), egli enuncia il seguente criterio:

*Se, per ogni $\sigma > 0$, è finito il numero $\psi(\sigma)$ dei punti di $[a, b]$ nei quali c'è, per la funzione $f$, una discontinuità superiore a $\sigma$, allora $f$ è integrabile.*

Questo criterio è corretto (come si deduce facilmente dal criterio di Ascoli) e segna un progresso rispetto a quello che Riemann aveva enunciato (in modo implicito) a proposito del suo esempio: infatti esso non impone l'esistenza dei limiti sinistro e destro. Tuttavia è puramente illusoria la frettolosa dimostrazione che Smith ne dà: «For, in any division of norm $d$, the sum of the segments having ordinate differences which surpass $\sigma$, cannot surpass $2d \times \psi(\sigma)$; and, however small $\sigma$ may be, $d$ can be taken so small that $2d \times \psi(\sigma)$ shall be less than any quantity that can be assigned.»

Per convincersi che la prima di queste affermazioni è falsa, basta pensare al caso in cui la funzione $f$ sia continua, ma non costante. In questo caso, il numero $\psi(\sigma)$ è nullo, qualunque sia $\sigma$; al contrario, per una fissata partizione finita $\mathcal{P}$ di $[a, b]$, costituita da intervalli, la somma

$$\sum_{I \in \mathcal{P},\ \omega_f(I) > \sigma} \lambda(I)$$

è maggiore di zero se $\sigma$ è abbastanza piccolo.

Ma la parte veramente interessante dell'articolo di Smith è quella dedicata al problema della sufficienza della condizione di Hankel (problema sul quale sia Darboux sia Ascoli avevano sorvolato). Riprendendo il punto di vista di Hankel, Smith considera, per ogni $\sigma > 0$, l'insieme dei punti nei quali c'è una discontinuità superiore a $\sigma$, e osserva che se, per qualche $\sigma$, questo insieme è denso in qualche porzione di $[a, b]$, allora certamente la funzione $f$ non è integrabile. Prima di passare a esaminare il caso contrario, ossia il caso in cui l'insieme in questione sia rado per ogni $\sigma$, egli si preoccupa di illustrare la nozione di insieme rado con un certo numero di esempi, via via più sofisticati. Per indicare che un insieme è rado (cioè non denso in alcuna porzione di $[a, b]$), egli conviene di dire che i suoi punti sono «in loose order», e spiega che preferisce non usare l'equivalente inglese del termine tedesco *zerstreut* impiegato da Hankel (ossia *dispersed* o *scattered*) al fine di evitare che quel termine possa erroneamente suggerire l'idea di un insieme privo di punti di accumulazione o avente soltanto un numero finito di siffatti punti.

L'ultimo, e il più importante, degli esempi di Smith si può così descrivere. Si fissi un intero $m > 2$. Si decomponga $[0, 1]$ in $m$ intervalli di egual lunghezza, e si escluda l'ultimo di essi da ogni ulteriore suddivisione. Si decomponga ciascuno dei rimanenti $m - 1$ intervalli in $m^2$ intervalli di egual lunghezza, e si escluda l'ultimo di questi da

ogni ulteriore suddivisione. Su ciascuno dei rimanenti $(m-1)(m^2-1)$ intervalli si operi in modo analogo, suddividendolo in $m^3$ intervalli di egual lunghezza, ed escludendo l'ultimo di essi da ogni ulteriore suddivisione. Così proseguendo, si giunge a un insieme $Q$ di punti di suddivisione. Si vede facilmente che l'unione $U$ delle parti interne degli intervalli via via esclusi è densa in $[0, 1]$ (sicché l'insieme $Q$ è rado). Infatti, supposto per assurdo che un punto $x$ di $[0, 1]$ possieda un intorno $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ disgiunto da $U$, si vede che, per ogni $n$, l'intervallo $]x-\varepsilon/2, x+\varepsilon/2[$ incontra uno degli intervalli non esclusi della suddivisione $n$-esima, diciamolo $J_n$. Per $n$ abbastanza grande, si ha

$$J_n \subset ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\,,$$

e ciò è assurdo perché $J_n$ contiene a sua volta un intervallo escluso dello stadio successivo. Tuttavia, con un accurato conto, Smith verifica che l'insieme $Q$ non è rinchiudibile in una riunione finita d'intervalli disgiunti di lunghezza complessiva arbitrariamente piccola. (Quest'ultimo risultato, se si adopera la convenzione da noi introdotta nell'osservazione finale del paragrafo precedente, si può brevemente enunciare dicendo che l'insieme $Q$ non è «trascurabile».) E Smith aggiunge: «The result obtained in the last example deserves attention, because it is opposed to a theory of discontinuous functions, which had received the sanction of an eminent geometer, Dr. Hermann Hankel, whose recent death at an early age is a great loss to mathematical science.» A queste parole segue una serrata critica del ragionamento col quale Hankel aveva creduto di dimostrare la sufficienza della sua condizione. Smith osserva giustamente che il punto cruciale di questo ragionamento consiste nel mostrare che ogni insieme rado è «trascurabile»: e questa affermazione è smentita dal suo esempio.

È poi evidente che questo stesso esempio basta anche a smentire la sufficienza della condizione di Hankel: infatti la funzione che vale 1 sull'insieme $Q$ di Smith, e 0 altrove, verifica la condizione di Hankel, ossia ha un insieme denso di punti di continuità (essendo costantemente nulla sull'insieme aperto $U$, denso in $[0, 1]$), ma, ciò nonostante, non è integrabile secondo Riemann, come subito si riconosce applicando, ad esempio, il criterio di Ascoli.

Tuttavia Smith non nomina mai, in modo esplicito, questa funzione (o altra funzione consimile), limitandosi ad affermare: «But a function having finite discontinuities at the points $Q$ would be incapable of integration.»

Giova da ultimo osservare che la parte finale dell'articolo contiene un accenno a quelli che, alcuni anni più tardi, saranno chiamati (da Volterra [1881*a*], [1881*b*]) l'*integrale superiore* e l'*integrale inferiore*. Smith osserva infatti che, quando la funzione non sia integrabile, per modo che il simbolo d'integrale risulti indeterminato, tuttavia «the maximum and minimum values attribuable to that symbol are perfectly determinate.» In modo esplicito, egli definisce questi due valori estremi, rispettivamente, come il limite superiore delle somme superiori e come il limite inferiore delle somme inferiori (senza peraltro accorgersi che si tratta, in realtà, di veri e propri limiti, e senza proporre, per essi, né un nome né un simbolo).

Il procedimento impiegato da Smith per costruire il suo insieme somiglia un poco a

quello che, qualche anno più tardi, G. Cantor [1883] impiegherà per costruire il suo celebre «insieme triadico».

Purtroppo però l'esempio di Smith non ebbe alcuna influenza perché rimase per lunghi anni sconosciuto ai matematici del continente. Così l'errore di Hankel, che consisteva essenzialmente nel confondere la nozione topologica di insieme rado con quella (non topologica) di insieme «trascurabile», fu ripreso, e persino aggravato, in Germania, da du Bois-Reymond e da Harnack. Fin verso il 1881, nei lavori di questi due autori gli insiemi «trascurabili» saranno variamente confusi (come vedremo meglio nel seguito), non solo con gli insiemi radi, ma anche con gli insiemi *di prima specie*. Cantor aveva così chiamato un insieme il cui derivato $n$-esimo sia vuoto per $n$ abbastanza grande. E per questi insiemi aveva tra l'altro dimostrato [1872] un importante risultato sull'unicità della rappresentazione di una funzione mediante serie trigonometriche. I due concetti topologici di insieme di prima specie e di insieme rado avevano così acquistato una notevole importanza; ed è perciò naturale che si tendesse a farli entrare anche in questioni nelle quali il ruolo naturale spettava invece al concetto non topologico di insieme «trascurabile».

## 7. - I Fondamenti di U. Dini

Nel 1878 vedeva la luce la famosa opera di Ulisse Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. L'importanza di quest'opera, in relazione al processo di revisione critica che andava sviluppandosi in quegli anni intorno ai fondamenti dell'analisi reale, e in particolare intorno al concetto d'integrale, fu grandissima, non soltanto per i decisivi contributi apportati dall'autore, ma anche perché il libro del Dini costituiva la prima esposizione sistematica delle nuove idee. A riprova di ciò sta il fatto che, proprio in quei circoli matematici tedeschi nei quali quelle idee erano scaturite, fu avvertita la necessità di una traduzione dell'opera del Dini. E quando nel 1892 comparve in lingua tedesca un'edizione rielaborata dei *Fondamenti*, questi, secondo il giudizio espresso nella prefazione dai curatori J. Lüroth e A. Schepp, erano ancora da considerarsi, nonostante i quattordici anni trascorsi dalla pubblicazione in lingua italiana, «das einzige Lehrbuch der modernen Theorie der Functionen einer reellen Veränderlichen».

L'opera del Dini contribuì così, in modo determinante, non solo alla costruzione, ma anche all'affermazione della nuova teoria. Non va infatti dimenticato che, negli anni in cui essa comparve, le nuove idee suscitate dalla memoria di Riemann, pur essendosi già notevolmente sviluppate, erano rimaste circoscritte a una cerchia relativamente ristretta di matematici (quasi esclusivamente tedeschi e italiani), mentre i grandi trattati di Calcolo differenziale e integrale (soprattutto francesi) che dominavano il campo erano rimasti, in fatto d'integrale, addirittura a prima di Cauchy.

Osserva a questo riguardo lo stesso Dini, all'inizio del capitolo dedicato agli integrali definiti [1878: § 178]: «Nei trattati di calcolo differenziale e integrale l'integrale definito $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ fra due limiti reali $\alpha$ e $\beta$ per le funzioni reali e finite $f(x)$ si definisce ordi-

nariamente dicendo che esso non è altro che la quantità $f_1(\beta) - f_1(\alpha)$, ove $f_1(\beta)$ e $f_1(\alpha)$ sono i valori per $x = \beta$ e $x = \alpha$ di una funzione finita e continua $f_1(x)$ legata a $f(x)$ dalla relazione

$$\frac{df_1(x)}{dx} = f(x).$$

Con questa definizione però la dimostrazione che si dà ordinariamente della esistenza dell'integrale di una funzione $f(x)$, anche limitata alle sole funzioni continue, non può dirsi rigorosa ...».

Notevole è nell'opera del Dini l'influsso della memoria di Hankel [1870]. I risultati di questo autore sulle funzioni discontinue trovano nei *Fondamenti* una sistemazione impeccabile. Liberati dalle scorie dei numerosi enunciati erronei, essi vengono completati, approfonditi, ampliati e soprattutto dimostrati con grande rigore ed eleganza. Particolare attenzione viene dedicata a quelle funzioni che, pur ammettendo infiniti punti di discontinuità nell'intervallo $[a, b]$ in cui sono definite, verifichino la condizione che, nel paragrafo 3, abbiamo convenuto di chiamare «condizione di Hankel». Queste funzioni erano state chiamate da Hankel *punktirt unstetige Functionen*, in contrapposizione alle funzioni non verificanti la suddetta condizione (*total unstetige Functionen*). Stranamente il Dini (seguito poi da Volterra [1881*a*], [1881*b*]) traduce bene quest'ultima locuzione (*funzioni totalmente discontinue*), mentre storpia malamente l'altra (*funzioni punteggiate discontinue*).

Nella sua memoria ([1882: pag. 90]), Hankel aveva erroneamente creduto che ogni funzione verificante la sua condizione fosse provvista di limiti destro e sinistro in ciascun punto. Questo errore era già stato rilevato da Thomae [1875] e da Smith [1875]. Dini, dal canto suo, dimostra la seguente proposizione [1878: §§ 62-64 e 151]:

*Affinchè una funzione f verifichi la condizione di Hankel, occorre e basta che l'insieme dei punti nei quali f ammette uno almeno dei due limiti (destro o sinistro) sia denso.*

Sensibile è nell'opera del Dini anche l'influsso delle nuove idee di Cantor sugli insiemi di punti della retta reale. Ciò si avverte in particolare nel frequente impiego della nozione topologica di *derivato* di un insieme e di *insieme di prima specie*. Lo stesso Cantor, in un articolo del 1879, parlando del concetto di derivato, osserva: «in dem jüngst erschienenen Werke Dini's ... sehen wir diesen Begriff noch weiter entwickelt, indem er als Ausgangspunkt für eine Reihe bemerkenswerther Verallgemeinerungen von bekannten analytischen Sätzen genommen wird» [1879: pag. 1].

In un successivo articolo dello stesso Cantor [1882], si legge, a proposito della memoria di Hankel: «Jedenfalls hat diese Arbeit anregend auf die bezügliche Richtung der mathematischen Forschung gewirkt, wie man an vieler später erschienenen Untersuchungen anderer Mathematiker ersehen kann, z. B. an dem verdienstvollen Werke von Herrn Ulisse Dini: *Fondamenti* ...» E ancora: «Der interessanteste Abschnitt in der Hankel'schen Arbeit, auf dessen völlige Klarstellung die Bestrebungen des Herrn Dini mit Erfolg gerichtet waren, bezieht sich auf

eine Methode, welche von Hankel 'Condensationsprincip der Singularitäten' genannt wird ...».

Nell'opera del Dini, alla cantoriana nozione di insieme di prima specie è purtroppo sacrificata, almeno formalmente, la nozione di insieme «trascurabile». Tuttavia quest'ultima nozione, anche se non introdotta in modo esplicito, è spesso presente (nelle dimostrazioni, se non negli enunciati) e, a differenza di quel che avviene presso altri autori, non viene mai confusa con quella di insieme di prima specie né con quella di *insieme rado*. Al contrario, sin dalle prime pagine del libro (pag. 18-19) i rapporti tra queste nozioni sono precisati col seguente enunciato:

*... pei gruppi di prima specie in ogni porzione dell'intervallo* $(\alpha, \beta)$ *esistono sempre alcuni intervalli nei quali non cadono punti del gruppo, e la stessa porzione può sempre dividersi in intervalli tali che la somma di quelli nei quali cadono punti del gruppo sia minore di quella quantità che più ci piace* $\sigma$.

Ora, in termini moderni, questo enunciato si può così tradurre: «*Ogni insieme di prima specie è rado e trascurabile.*» Ma forse una traduzione ancor più fedele è la seguente: «*Ogni insieme di prima specie è rado, anzi trascurabile*».

Con ciò il Dini mostra di trattare la classe degli insiemi trascurabili, non solo come ovviamente contenuta nella classe degli insiemi radi, ma anche come presumibilmente (o almeno *possibilmente*) distinta da essa.

Se poi si esamina con cura la dimostrazione che il Dini fornisce del teorema sopra enunciato, si scopre che essa consiste sostanzialmente nel provare che un insieme con derivato trascurabile è esso stesso trascurabile. (In modo esplicito, questa proprietà verrà enunciata da Harnack [1885: pag. 244].)

D'altra parte, leggendo il capitolo dei *Fondamenti* dedicato all'integrale di Riemann, ci si accorge subito che, salvo pochissime eccezioni, quando in un enunciato compare l'ipotesi che un certo insieme sia di prima specie (o addirittura finito), questa ipotesi viene in realtà impiegata, nella dimostrazione, *soltanto* per dedurne che l'insieme in questione è trascurabile. In simili casi, nel riportare — tradotto in linguaggio moderno — l'enunciato del Dini, noi ci permetteremo di aggiungere, accanto alla locuzione *insieme di prima specie* (risp. *insieme finito*), l'aggettivo *trascurabile* racchiuso tra parentesi quadre. Con questa convenzione, ecco alcuni dei più interessanti criteri d'integrabilità che figurano nei *Fondamenti*. Essi si riferiscono, come al solito, a una funzione limitata $f$, definita su un intervallo $[a, b]$. Inoltre, secondo la terminologia del Dini [1878: § 34], il *salto* di $f$ nel generico punto $x$ di $[a, b]$ è il numero $\limsup_{y \to x} |f(y) - f(x)|$.

[1878: § 187, 2°]: *Condizione sufficiente affinché la funzione* $f$ *sia integrabile è che i suoi punti di discontinuità formino un insieme di prima specie* [*trascurabile*].

[1878: §187, 3°]: *Condizione sufficiente affinché la funzione* $f$ *sia integrabile è che, per ogni* $\sigma > 0$, *i punti di* $[a, b]$ *nei quali il salto di* $f$ *è maggiore di* $\sigma$ *formino un insieme finito* [*trascurabile*].

[1878: § 187, 5°]: *Condizione sufficiente affinché la funzione f sia integrabile è che i punti di* $]a, b]$ *nei quali f è sprovvista di limite sinistro formino un insieme di prima specie [trascurabile].*

Si osservi che il secondo di questi criteri, quando vi si sostituisca la parola *finito* con la parola *trascurabile*, si riduce sostanzialmente alla parte, del criterio di Ascoli, riguardante la sufficienza. Quanto al terzo criterio, esso costituisce un notevole perfezionamento del criterio di Darboux. (La dimostrazione del Dini è chiaramente ispirata a quella di Darboux, ma assai più sottile, data la maggiore generalità delle ipotesi.)

A proposito dell'erroneo criterio d'integrabilità di Hankel, il Dini, dopo aver osservato che ogni funzione integrabile verifica necessariamente la condizione di Hankel, ossia possiede un insieme denso di punti di continuità, afferma testualmente [1878: § 188]:

«Per quanto poi Hankel abbia creduto di dimostrare inversamente che ogni funzione punteggiata discontinua fra $\alpha$ e $\beta$ è sempre atta alla integrazione definita nell'intervallo $(\alpha, \beta)$, non credo che ciò possa assicurarsi perché la dimostrazione di Hankel non mi sembra del tutto rigorosa; e d'altro lato poi, all'infuori di questa dimostrazione, io non conosco, rispetto alle funzioni punteggiate discontinue atte alla integrazione, nessun altro teorema più generale di quelli enunciati nel paragrafo precedente.»

(Sembra lecito dedurre, da questo passo, che il Dini non fosse a conoscenza né del criterio d'integrabilità di Ascoli né dell'esempio di Smith.)

A completamento dei criteri d'integrabilità, il Dini aggiunge poi alcune interessanti proposizioni:

[1878: § 190, 9°]: *Se due funzioni coincidono sul complementare di un insieme di prima specie [trascurabile], l'integrabilità dell'una equivale all'integrabilità dell'altra.*

[1878: § 190, 10°]: *Due funzioni integrabili, che coincidano su un insieme denso, ammettono lo stesso integrale.*

[1878: § 190, 11°]: *Se una funzione f è integrabile, tale è anche ogni funzione g che sia compresa tra le due funzioni* $f_*$, $f^*$ *così definite:*

$$f_*(x) = \liminf_{y \to x} f(y), \qquad f^*(x) = \limsup_{y \to x} f(y).$$

*Inoltre f e g ammettono lo stesso integrale, in quanto coincidono sull'insieme denso costituito dai punti di continuità di f.*

Infine il Dini passa ad occuparsi di quelle particolari funzioni integrabili, la cui restrizione a ciascun intervallo contenuto in $[a, b]$ abbia integrale nullo. Egli non riserva alcun nome particolare a queste funzioni. Se conveniamo di chiamarle *funzioni trascurabili secondo Dini*, possiamo così enunciarne le proprietà messe in luce dal Dini:

[1878: § 190, 14°]: *Ogni funzione trascurabile secondo Dini è nulla in un insieme denso di punti (ed è dunque identicamente nulla, qualora sia continua).*

[1878: § 190, 12°]: *Esistono funzioni trascurabili secondo Dini che assumono valori diversi da zero in un insieme denso di punti.*

Più in generale, il Dini considera coppie $f, g$ di funzioni integrabili, tali che le restrizioni di $f$ e di $g$ a un qualsiasi intervallo contenuto in $[a, b]$ abbiano lo stesso integrale (ossia tali che la differenza $f - g$ sia trascurabile). Due siffatte funzioni si potrebbero chiamare *equivalenti secondo Dini*.

## 8. - L'esempio di Volterra

Come si è visto nel paragrafo precedente, il Dini, nei suoi *Fondamenti*, aveva mostrato di considerare la classe degli insiemi «trascurabili» come presumibilmente più ristretta di quella degli insiemi radi (e, in corrispondenza, la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann come più ristretta di quella delle funzioni verificanti la condizione di Hankel).

Tuttavia egli non aveva fornito alcun controesempio (ed era manifestamente ignaro di quello costruito da Smith [1875]). Fu così che un suo giovane allievo, Vito Volterra, sentì il bisogno di colmare la lacuna, esibendo un esempio di insieme rado, non «trascurabile».

L'esempio figura, insieme con molti altri interessanti risultati, in un articolo dal titolo *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue*, presentato al Giornale di Matematiche del Battaglini nel febbraio del 1880 (quando l'autore era ancora «Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa»), e pubblicato nel 1881.

Volterra costruisce il suo insieme con una tecnica simile a quella di Smith, ma decomponendo ciascun intervallo in una *successione* d'intervalli, anziché in un numero finito d'intervalli. Egli osserva quindi:

«Ciò premesso consideriamo una funzione che abbia il valore 0 in tutti i punti del gruppo e in tutti i punti limiti, ed il valore 1 in tutti gli altri punti. Questa funzione è una punteggiata discontinua, perché, preso un intervallo qualunque, entro di esso si può trovarne un altro in cui mancano punti del gruppo; in un punto interno qualunque di questo intervallo la funzione è continua. È poi evidente che in tutti i punti del gruppo e in tutti i punti limiti la funzione è discontinua ed i salti che essa fa in quei punti sono eguali a 1. Poiché dunque i punti del gruppo non sono rinchiudibili in intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole, così ne risulta, che la funzione non è atta alla integrazione.»

Non possiamo qui descrivere minutamente la tecnica con la quale Volterra costruisce il suo insieme rado, né il ragionamento col quale egli dimostra che questo insieme non è «trascurabile». Ci limitiamo ad osservare che, quando Volterra scriveva il suo articolo, non erano state ancora introdotte né la nozione di insieme aperto né quella di insieme chiuso. (Quest'ultima sarà introdotta tre anni più tardi da Cantor [1884].)

È dunque tanto più notevole il fatto che egli, occupandosi della chiusura del suo in-

sieme, e del complementare di questa chiusura, abbia concepito l'idea di componente connessa di un insieme aperto della retta reale. Questa idea traspare ancor più chiaramente dal seguente passo (sempre riguardante lo stesso insieme rado), che si trova in un altro lavoro di Volterra [1881b], pubblicato nello stesso volume del Giornale di Matematiche del Battaglini:

«... preso poi un punto qualsiasi che non appartiene al gruppo né è suo punto limite e determinato il massimo intorno di esso $(a, b)$ in cui non esistono punti del gruppo, ...».

Non è poi da sottovalutare il fatto che, nel ragionamento col quale Volterra dimostra che il suo insieme non è «trascurabile», si può ravvisare in germe la nozione di misura di un insieme aperto della retta reale (definita come somma delle lunghezze delle componenti connesse).

## 9. - I criteri d'integrabilità di Volterra

Oltre all'esempio di cui ci siamo occupati nel paragrafo precedente, l'articolo di Volterra [1881*a*] contiene alcuni notevoli criteri d'integrabilità e vari risultati riguardanti le funzioni discontinue. Questi ultimi, in termini moderni, si possono vedere come conseguenze del fatto che le funzioni verificanti la condizione di Hankel sono caratterizzabili, non solo come quelle i cui punti di continuità formino un insieme denso, ma anche come quelle i cui punti di discontinuità formino un insieme *magro* (unione numerabile d'insiemi radi).

I criteri d'integrabilità di Volterra non sono espressi, come il criterio di Ascoli, mediante l'oscillazione puntuale, bensì mediante le tre funzioni

$$x \mapsto \limsup_{y \to x} |f(y) - f(x)|,$$

$$x \mapsto \limsup_{y \to x,\, y \leqslant x} |f(y) - f(x)|,$$

$$x \mapsto \limsup_{y \to x,\, y \geqslant x} |f(y) - f(x)|,$$

che Volterra chiama rispettivamente la *funzione dei salti*, la *funzione dei salti di sinistra* e la *funzione dei salti di destra*. Egli osserva che, se $f$ verifica la condizione di Hankel, ciascuna di queste tre funzioni si annulla sull'insieme denso costituito dai punti di continuità di $f$, sicché, qualora sia integrabile, ha integrale nullo.

I criteri di Volterra si basano sul seguente risultato preliminare, che egli applica senza neppure enunciarlo in modo esplicito perché evidentemente lo considera (a ragione) come già contenuto, in modo implicito, nei *Fondamenti* del Dini:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f$ sia integrabile è che, per ogni $\sigma > 0$, i punti di $[a, b]$ nei quali il salto di $f$ è maggiore di $\sigma$ formino un insieme «trascurabile»*.

Se ci si riferisce alla funzione dei salti di sinistra, i criteri di Volterra possono essere riassunti nel seguente unico enunciato (un enunciato analogo vale naturalmente per la funzione dei salti di destra):

*Per una funzione $f$, le condizioni che seguono sono equivalenti:*

(a) *$f$ è integrabile.*

(b) *Per ogni $\sigma > 0$, è «trascurabile» l'insieme costituito dai punti nei quali la funzione dei salti di sinistra supera $\sigma$.*

(c) *$f$ verifica la condizione di Hankel, e la funzione dei salti di sinistra è integrabile (con integrale necessariamente nullo).*

La dimostrazione di Volterra è fondata sul lemma seguente (ch'egli dimostra ispirandosi al ragionamento impiegato dal Dini per dimostrare un risultato analogo):

*Si supponga che $f$ verifichi la condizione di Hankel e che la funzione dei salti di sinistra risulti dappertutto minore di $\sigma$.*

*Allora è «trascurabile» l'insieme costituito dai punti nei quali la funzione dei salti è maggiore di $2\sigma$.*

## 10. - Gli errori di du Bois-Reymond e di Harnack

Si è visto, nei paragrafi precedenti, come reagirono i matematici italiani di fronte all'erroneo criterio d'integrabilità di Hankel. Ascoli [1875], senza pronunciarsi sulla sua validità, ne dimostrò un altro, che sostanzialmente si può ottenere sostituendo, nel criterio di Hankel, il concetto di insieme rado con quello di insieme «trascurabile» (anche se non introdusse in modo esplicito quest'ultimo concetto). Dini [1878] dichiarò non corretta la dimostrazione di Hankel, e presumibilmente falso il suo enunciato, e non cadde quindi in quella confusione tra i due concetti di insieme rado e di insieme « trascurabile» che, come giustamente aveva osservato Smith [1875], era alla base dell'erronea dimostrazione di Hankel. Infine Volterra [1881*a*] smentì col suo esempio la sufficienza della condizione di Hankel e dimostrò criteri d'integrabilità più raffinati di quello di Ascoli [1875].

Ben diversamente andarono le cose in Germania. Qui Paul du Bois-Reymond (1831-1889), che era stato sin dal primo momento un sostenitore della nuova teoria dell'integrazione e si era dato con entusiasmo e con successo ad applicarla alle serie di Fourier, al concetto di lunghezza di una curva e al Calcolo delle variazioni, non si accorse se non assai tardi dell'errore di Hankel e della necessità di distinguere il concetto di insieme rado da quello di insieme «trascurabile».

In un articolo del 1875, dopo aver citato la memoria di Dirichlet [1829] e aver enunciato la prima delle due condizioni di Riemann per l'integrabilità, egli aggiunge, in nota [1875: pag. 22]:

«A. a. O. hatte Dirichlet eine andere engere Bedingung für die Integrirbarkeit angegeben, und ist meines Wissens auf diesen Punkt nicht wieder zurückgekommen.»

Ora, se la condizione di Dirichlet (che equivale ad imporre all'insieme dei punti di discontinuità della funzione di essere rado) fosse veramente più restrittiva (*engere*) di quella di Riemann, dato nell'intervallo $[a, b]$ un qualsiasi insieme chiuso $R$ privo di punti interni, la sua funzione indicatrice, ammettendo $R$ come insieme dei propri punti di discontinuità, sarebbe integrabile, sicché $R$, grazie al criterio di Ascoli, sarebbe «trascurabile».

In un successivo passo, in verità assai nebuloso, dello stesso articolo [1875: pag. 35-36], du Bois-Reymond sembra addirittura confondere la classe degli insiemi radi con quella degli insiemi di prima specie.

La stessa confusione ritorna in una memoria del 1879: qui, non solo gli insiemi radi sembrano essere identificati con quelli di prima specie, ma si indica anche come loro comune proprietà caratteristica quella di essere rinchiudibili in un numero finito di intervalli di lunghezza complessiva arbitrariamente piccola (cioè di essere «trascurabili»). Precisamente, occupandosi di condizioni da imporre all'insieme dei punti di discontinuità di una funzione al fine di assicurare la rettificabilità del relativo grafico, du Bois-Reymond afferma [1879: pag. 287]:

«Nur pantachisch vertheilte Sprünge verträgt der Begriff der Rectificirbarkeit auch nicht in kleinsten Intervall, weil es alsdann dort keinen Differentialquotienten giebt.»

Egli spiega, in nota, che con la locuzione *pantachische Vertheilung* vuole intendere un insieme denso. La precedente frase significa dunque che per la rettificabilità è necessario che i punti di salto formino un insieme che non sia denso in alcun intervallo (ossia un insieme rado). Egli aggiunge quindi:

«Die sprungstellen können sich nach einzelnen Punkten ins Unbegrenzte verdichten ... Die verdichtungspunkte I. Ordnung können sich wieder nach einzelnen Punkten zu unbegrenzt verdichten, u. s. f. *Charakteristisch für diese Art Punktvertheilung ist, dass man stets durch eine endliche Anzahl Strecken des betrachteten Intervalls, die zusammengefügt eine beliebig kleine Strecke geben, so viel Sprungstellen ausschliessen kann, dass der Rest eine endliche Anzahl bildet.*»

La confusione tra insiemi «trascurabili» e insiemi di prima specie assume poi carattere ufficiale in un lavoro del matematico tedesco Axel Harnack [1880]. Qui infatti la proprietà di essere rinchiudibile in una unione finita d'intervalli di lunghezza complessiva arbitrariamente piccola viene addirittura assunta come *definizione* di insieme di prima specie: e, a scanso di ogni equivoco, Harnack osserva esplicitamente in nota [1880: pag. 128] che questa definizione non è che una riformulazione equivalente di quella di Cantor. Egli dimostra poi — ma la dimostrazione è assai contorta — che gli insiemi così definiti sono radi.

Solo in un articolo del 1880 du Bois-Reymond comincia ad avvertire la distinzione

tra il concetto d'insieme rado e quello d'insieme «trascurabile». In una lunga nota a pie' di pagina, contenuta in questo articolo [1880: pag. 127], dopo aver osservato che, se una funzione $f$ è integrabile, l'insieme dei suoi punti di continuità è necessariamente denso (*pantachisch*), egli afferma che la proposizione inversa non ha luogo, e che persino la condizione di Dirichlet (cioè il fatto che l'insieme dei punti di continuità di $f$ abbia interno denso) non basta ad assicurare l'integrabilità di $f$.

Egli aggiunge poi:

«Hiergegen ist heute einzuwenden, dass man auch *Intervalle* pantachisch vertheilen kann. D. i. ich kann ein gegebenes Intervall $D < 2\pi$ so eintheilen, dass, wenn ich mit seinen Theilstrecken das Intervall $-\pi \ldots + \pi$ an den geeigneten Stellen bedecke, in jedem noch so kleinen Ausschnitt des Intervalls $-\pi \ldots + \pi$ zusammenhängende Theilstrecken von $D$ vorkommen. Sei nun $\varphi(x)$ in diesen Null und sei Eins in jenen nicht bedeckten Theilen von $-\pi \ldots + \pi$, so ist sie nicht integrirbar, obschon jedes noch so kleine Intervall innerhalb $-\pi \ldots + \pi$ Strecken enthält, in denen sie stetig, nämlich Null ist.

Auf diese Art der Intervallvertheilung, zu der ich verschiedene Beispiele bei der Hand habe, wird man geführt, wenn man die Verdichtungspunkte der Ordnung $\infty$ aufsucht, deren Vorhandensein ich vor Jahren Herrn Cantor in Halle brieflich anzeigte. Auf diese Vertheilung, ferner auf die Verdichtungspunkte endlicher und unendlicher Ordnung von immer kleiner werdenden *Strecken*, endlich auf meine Wahl des Ausdrucks «pantachisch» verglichen mit dem später von Herrn Cantor angenommenen überalldicht gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit einzugehen.»

Il passo citato suggerisce, come si vede, solo una vaga idea sul modo per ottenere un insieme rado, non «trascurabile». Un esempio esplicito di un siffatto insieme fu fornito da du Bois-Reymond nel suo libro *Die allgemeine Functionentheorie* pubblicato nel 1882. Nello stesso libro compare anche, per la prima volta, la definizione esplicita del concetto di insieme «trascurabile» (*integrirbare Punktmenge*, secondo la terminologia di du Bois-Reymond).

Ma fu soprattutto Harnack che, dopo essersi reso conto dell'errore commesso nel confondere il concetto di insieme di prima specie con quello di insieme «trascurabile», pose l'accento sull'importanza di quest'ultimo concetto.

Nel suo libro *Die Elemente der Differential- und Integralrechnung*, pubblicato nel 1881, dopo aver introdotto gli insiemi trascurabili (*discrete Punktmengen*) contrapponendoli agli insiemi non trascurabili (*lineare Punktmengen*), egli non solo dimostra che ogni insieme di prima specie è trascurabile (ciò che già Dini aveva fatto nei suoi *Fondamenti*), ma si preoccupa anche di avvertire [1881: nota a pag. 262] che l'implicazione inversa è falsa, come mostra un esempio costruito (per altri fini) da Cantor [1880: pag. 358].

Egli tuttavia persevera nella confusione tra insiemi radi e insiemi trascurabili:

«Bei einer discreten Punktmenge ist es immer möglich, in beliebiger Nähe jedweder Stelle ein endliches Intervall anzugeben, in welchem kein Punkt der gegebenen

Menge liegt ... Bei einer linearen Punktmenge ist dieses nicht an jeder Stelle möglich.» [1881: pag.260].

In altri termini: ogni insieme trascurabile è rado, mentre ogni insieme non trascurabile è non rado.

Così, credendo semplicemente di riformulare con linguaggio diverso la definizione di Hankel, egli chiama *punktirt unstetige Funktion* una funzione che, pur avendo infiniti punti di discontinuità nell'intervallo $[a, b]$ in cui è definita, sia tale che, per ogni $\sigma > 0$, i punti in cui l'oscillazione puntuale supera $\sigma$ formino un insieme trascurabile [1881: pag. 262]. Ogni siffatta funzione — aggiunge Harnack, convinto di rienunciare semplicemente il criterio di Hankel — è integrabile perché verifica la seconda delle due condizioni di Riemann per l'integrabilità. Egli è tanto convinto di star rienunciando il criterio di Hankel, che non è neppure sfiorato dall'idea di doverne fornire una dimostrazione.

Soltanto in un successivo lavoro [1882*a*] Harnack si rende conto del grave equivoco nel quale è incorso. Egli ne fa lealmente ammenda con queste parole [1882*a*: pag. 238-239]:

«Mit Benutzung einer Bezeichnung von Hrn. Cantor lautet der Satz: Die discrete Menge ist in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht. Aber es ist zu beachten, dass dieser Satz nicht umkehrbar ist. Zwar hat Hankel seine Umkehrbarkeit in den oben genannten Abhandlungen zu beweisen versucht; jedoch ist sein Beweis unzugänglich. Ich selbst habe die Umkehr in meinem Lehrbuche (pag. 260) ausgesprochen, ohne Beweis und ohne weitere Schlüsse daraus zu ziehen. Die Frage ist wichtig, denn sie enthält, wie schon Herr du Bois-Reymond (Math. Ann. Bd. XVI, pag.128, Anmerk.) angedeutet hat, den Grund dafür, dass die Dirichlet'sche Bedingung der Integrirbarkeit (Journal f. Math. Bd. 4, pag. 169) nicht zulässig ist, dass überhaupt der Riemann'sche Integralsatz durch keine andere Fassung ersetzt werden kann.

Auch eine lineare Menge kann so vertheilt sein, dass sie in keinem Intervalle überall dicht ist. Man wird die Möglichkeit am besten durch ein Beispiel einsehen.»

L'esempio che segue è simile a quelli di Smith e di Volterra.

Poco più in là [1882*a*: pag. 242] Harnack riformula la definizione di funzione «punktirt unstetige» ripetendo le stesse parole che aveva già adoperate negli *Elemente* (ma cosciente — questa volta — di star modificando il contenuto della definizione originaria di Hankel). Inoltre egli rienuncia il solito criterio d'integrabilità, che però ora, col nuovo significato attribuito ai vecchi termini, viene a coincidere con la parte essenziale del criterio di Ascoli:

*Die in einem Intervalle punktirt unstetige Functionen sind integrierbar.*

Di questo criterio egli tuttavia non fornisce alcuna dimostrazione, limitandosi a dire che si tratta di una conseguenza immediata della definizione d'integrale.

Gli stessi concetti e gli stessi risultati compaiono poi in forma lievemente rielaborata, ma senza sostanziali novità, nei paragrafi iniziali del successivo lavoro di Harnack ([1882*c*]), il quale è, in gran parte, nulla più che una versione francese degli articoli [1880] e [1882*a*].

## 11. - Conclusione

Spetta senza dubbio a du Bois-Reymond e a Harnack il merito di avere per primi enucleato il concetto di insieme trascurabile, avviando uno studio sistematico delle sue proprietà e, soprattutto, inventando per esso un nome specifico (anche se, in verità, né il nome proposto da du Bois-Reymond, *integriebare Punktmenge*, né quello proposto da Harnack, *discrete Punktmenge*, e *masse discrète* nella versione francese, sembrano molto felici).

Sarà proprio lo studio degli insiemi trascurabili che condurrà Harnack, qualche anno più tardi, alla sua definizione del *contenuto* (*Inhalt*) di un insieme (alla luce della quale gli insiemi trascurabili appariranno come gli insiemi di contenuto nullo).

Hawkins [1970: pag. 59] attribuisce a Harnack anche il merito di avere per primo corretto l'errore di Hankel nel 1881 («fourteen years after Riemann's paper appeared in print») enunciando il suo criterio d'integrabilità. Questa affermazione appare tuttavia sorprendente, per le ragioni sopra esposte, che converrà qui brevemente riassumere:

1) Nel 1881 Harnack enunciò sì il «suo» criterio in maniera formalmente corretta, ma solo per caso: in realtà, persistendo nell'errore di identificare gli insiemi trascurabili con gli insiemi radi [1881: pag. 260], egli era convinto (come confesserà egli stesso un anno più tardi [1882*a*: pag. 238-239]) di star semplicemente rienunciando, con linguaggio diverso, il criterio di Hankel.

2) Harnack non fornì alcuna dimostrazione del «suo» criterio (né nel 1881 né negli anni successivi).

3) Lo stesso criterio era stato enunciato sei anni prima (persino con qualche precisazione ulteriore) da Ascoli [1875], il quale ne aveva fornita una dimostrazione completa e rigorosa, fondata sulla compattezza dell'intervallo $[a, b]$.

4) Un criterio ancor più raffinato di quello di Ascoli era stato dimostrato, nello stesso anno 1881, da Volterra [1881*a*].

## BIBLIOGRAFIA


Ascoli, G.

[1875] *Sul concetto di integrale definito*, Rend. R. Acc. Lincei, serie II, vol. 2, 863-872.

Baire, R.

[1899] *Sur les fonctions de variables réelles*, Ann. di Mat. (3), t. III, 1-123.

Bourbaki, N.

[1960] *Éléments d'histoire des Mathématiques*, Hermann (Paris).

Cantor, G.

[1872] *Ueber der Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Ann., 5, 92-101.

[1879] *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, I. Math. Ann., 1, 1-7.

[1880] *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, II. Math. Ann., 17, 355-358.

[1882] *Ueber ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Functionen*, Math. Ann., 19, 588-594.

[1883] *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, IV. Math. Ann., 21, 51-58, 545-591.

[1884] *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, V. Math. Ann., 23, 453-488.

CAUCHY, A.

[1823] *Résumé des Leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, de Bure (Paris).

DARBOUX, G.

[1875] *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. Ec. Norm. Sup. (2), t. IV, 57-112.

DINI, U.

[1878] *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Nistri (Pisa).

[1892] *Grundlagen der Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse* (Edizione tedesca dell'opera precedente, a cura di J. Lüroth e A. Schepp.), B. G. Teubner (Leipzig).

[1990] *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Ristampa anastatica dell'edizione del 1878, a cura dell'Un. Mat. It.), Pitagora (Bologna).

DIRICHLET, G. P.

[1829] *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, Crelle, J. Math., 4, 157-169.

DU BOIS-REYMOND, P.

[1873] *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen*, Crelle, J. Math., 79, 21-37.

[1879] *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung*, Math. Ann., 15, 282-315, 564-567.

[1880] *Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung* $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$, Math. Ann., 16, 115-128.

[1882] *Die allgemeine Functionentheorie*, H. Laupp (Tübingen).

[1887] *Théorie générale des fonctions* (Edizione francese dell'opera precedente, a cura di A. Girot.) (Nice).

FOURIER, J.

[1822] *La théorie analytique de la chaleur*, Didot (Paris).

HANKEL, H.

[1870] *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen*, Memoria presentata il 6 marzo 1870 come «Gratulationsprogramm der Tübinger Universität».

[1882] *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen* (Ristampa postuma della precedente memoria) Math. Ann., 20, 63-112.

HARNACK, A.

[1880] *Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen*, Math. Ann., 17, 122-132.

[1881] *Die Elemente der Differential- und Integralrechnung*, B. G. Teubner (Leipzig).

[1882a] *Vereinfachung der Beweis in der Theorie der Fourier'schen Reihe*, Math. Ann., 19, 235-279.

[1882b] *Berichtigung dem Aufsatz: «Über die Fourier'sche Reihe»*, Math. Ann., 19, 524-528.

[1882c] *Théorie de la série de Fourier*, Bull. Sci. Math., 6 (1ª partie), 242-260, 265-280, 282-300.

[1885] *Ueber den Inhalt von Punktmengen*, Math. Ann., 25, 241-250.

HAWKINS, T.

[1970] *Lebesgue's theory of Integration*, The Univ. of Wiskonsin Press (Madison).

JORDAN, C.

[1893] *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2ª édition, vol. I, Gauthier-Villars (Paris).

NALLI, P.

[1914] *Esposizione e confronto critico delle diverse definizioni proposte per l'integrale definito di una funzione limitata o no*, Virzì (Palermo). [Ristampa anastatica in *Opere scelte*, a cura dell'Un. Mat. It., 1976.]

OSGOOD, W.

[1897] *Non uniform convergence and the integration of the series term by term*, Amer. Journ. of Math., t. XIX, 155-190.

PEANO, G.

[1883] *Sull'integrabilità delle funzioni*, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XVIII, 439-446.

[1887] *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Bocca (Torino).

PESIN, I. N.

[1970] *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press (New York).

RIEMANN, B.

[1892] *Gesammelte mathematische Werke*, B. G. Teubner (Leipzig).

SMITH, H. J. S.

[1875] *On the integration of discontinuous functions*, Proc. of the London Math. Soc., 6, 140-153.

STOLZ, O.

[1884] *Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth*, Math. Ann., 23, 152-156.

THOMAE, O.

[1873] *Abriss einer Theorie der complexen Functionen*, Halle.

[1875] *Einleitung in die Theorie der bestimmte Integrale*, Halle.

VITALI, G.

[1904] *Sulla condizione di integrabilità delle funzioni*, Rend. Ist. Lomb., (2), 37, 69-73.

VOLTERRA, V.

[1881a] *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue*, Giorn. Mat., 19, 76-86.

[1881b] *Sui principii del calcolo integrale*, Giorn. Mat., 19, 333-372.