CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E. )

C. LAIR

# MORPHISMES ET STRUCTURES ALGEBRIQUES

Corso tenuto a Varenna dal 12 al 21 settembre 1971

## Introduction

Dans ce qui suit exposons les fondements de la théorie des esquisses, c'est-à-dire de la théorie des structures algébriques décrites au moyen d'un graphe multiplicatif, telle qu'elle a été introduite par C. Ehresmann dans [E. T. S. A.] Elle constitue une généralisation des théories de Lawvere et Bénabou.

Nous développons, d'autre part, deux résultats récents qui résolvent le problème, pour une catégorie donnée, de trouver une description (i. e. une esquisse) de ses unités et de ses morphismes, lorsqu'ils sont considérés comme des structures et des homomorphismes algébriques d'un certain type. Ces résultats généralisent ceux obtenus par Gabriel et Ulmer dans [L. P. L. G.] .

Nous nous sommes efforcé de rédiger un texte qui puisse être lu indépendamment de toute référence ou connaissance préalable.

C'est pourquoi les parties I, II et III sont consacrées à l'introduction des notions de graphe multiplicatif, de préesquisse, de type, de catégorie de morphismes entre structures algébriques.... ainsi qu'à l'établissement des notations que nous utilisons.

Les parties IV et V sont consacrées à l'etude des deux résultats signalés précédemment.

Le lecteur désireux d'approfondir les notions introduites dans I pourra se référer à [M. M. A.] et [C. S.]

Celui qui souhaiterait bénéficier de plus de détails concernant les parties II et III pourra consulter [E. T. S. A.].

Enfin, les démonstrations des résultats de IV, V, VI sont rédigées dans [F. O. S. A.] .

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans un bon modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, i. e. nous admettons l'axio-

me de l'infini, l'axiome du choix et l'axiome des univers. Nous supposons que $M_o$ est un univers. Rappelons qu'alors :

- $M_o$ est un ensemble (d'ensembles) qui admet au-moins un ensemble infini pour élément,
- si $E \in M_o$ et si $E' \subset E$, alors $E'$ et $P(E)$ appartiennent à $M_o$,
- si $I \in M_o$ et si $E_i \in M_o$, pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ appartient à $M_o$.

L'axiome des univers implique l'existence d'un univers $\hat{M}_o$ tel que $M_o \in \hat{M}_o$ et $M_o \subset \hat{M}_o$, voir [T. E].

On désigne, alors, par M (resp. $\hat{M}$) la catégorie pleine d'applications entre éléments de $M_o$ (resp. $\hat{M}_o$).

C. Lair

# I. GRAPHIES MULTIPLICATIFS.

## I. a. Définition.

Une structure, notée $U^*$, de graphe multiplicatif sur un ensemble $U \in M_o$, appelé ensemble des morphismes de $U^*$, est constituée des données suivantes : - une partie $U_o^*$ de U dite ensemble des unités ou des objets de $U^*$, caractérisée par l'injection $i : U_o^* \longrightarrow U$,
- deux applications $\alpha : U \to U_o^*$ et $\beta : U \to U_o^*$ dites applications source et but des morphismes, ou domaine et codomaine,
- si U' est le produit fibré de $\alpha$ et $\beta$, avec les projections canoniques $v_1$ et $v_2$ (donc telles que $\alpha . v_1 = \beta . v_2$), $U^* * U^*$ est une partie de U', appelée ensemble des couples de morphismes composables de $U^*$,
- une application $k : U^* * U^* \longrightarrow U$, appelée loi de composition de $U^*$ ; on note $k(x,y) = x.y$,
ces données étant astreintes aux conditions suivantes :
- si le couple $(x,y)$ appartient à $U^* * U^*$, alors $\alpha(x) = \beta(y)$, $\alpha(x.y) = \alpha(y)$ et $\beta(x.y) = \beta(x)$:
- si x appartient à U, alors le couple $(x, \alpha(x))$ et le couple $(\beta(x), x)$ appartiennent à $U^* * U^*$; de plus $x.\alpha(x) = x - \beta(x).x$.

## I. b Exemples.

Une structure de catégorie sur un ensemble C est un graphe multiplicatif $C^*$ tel que :
- $(x,y) \in C^* * C^*$ équivaut à $\alpha(x) = \beta(y)$,
- la loi de composition est associative

Si $F = (D^*, \underline{F}, C^*)$ est un foncteur d'une catégorie $C^*$ vers une catégorie $D^*$, de surjection sous-jacente $\underline{F}$, la structure $D^*$ induit sur F(C) une structure de graphe multiplicatif qui n'est pas, en général,

une catégorie.

I. c. Néofoncteurs.

Si $D^\bullet$ et $C^\bullet$ sont deux graphes multiplicatifs, $F = (D^\bullet, \underline{F}, C^\bullet)$ est un néofoncteur de $C^\bullet$ vers $D^\bullet$ lorsque $\underline{F}$ est une surjection de C sur une partie de D telle que :

- $\underline{F}\ (C^\bullet_o) \subseteq D^\bullet_o$,
- $(x, y) \in C^\bullet * C^\bullet$ implique $(F(x), F(y)) \in D^\bullet * D^\bullet$ et $F(x.y) = F(x) \cdot F(y)$.

Les foncteurs entre deux catégories sont les néofoncteurs entre ces catégories, considérées comme graphes multiplicatifs.

I. d. Transformations naturelles.

Si $C^\bullet$ et $D^\bullet$ sont deux graphes multiplicatifs, F et G deux néofoncteurs de $C^\bullet$ vers $D^\bullet$, une transformation naturelle de F vers G est un triplet $(G, \underline{n}, F)$ tel que :

- $\underline{n}$ est une surjection de $C^\bullet_o$ sur une partie de D.
- pour tout $f \in C$. $n(\beta(f))$. $F(f)$ et $G(f)$. $n(\alpha(f))$ sont définis et égaux dans $D^\bullet$.

Si $D^\bullet$ est une catégorie, on note $\mathcal{M}(D^\bullet, C^\bullet)^{\infty}$ la catégorie longitudinale des transformations naturelles entre néofoncteurs de $C^\bullet$ vers $D^\bullet$. Rappelons que $(G', \underline{n}', F') \circ\!\!\circ (G, \underline{n}, F)$ est défini et égal à $(G', \underline{n}', \underline{n}, F)$, si et seulement si $F' = G$.

$\hat{N}'$ (resp. $N'$) et $\hat{F}$ (resp. $F$) désignent les catégories pleines de néofoncteurs et de foncteurs associées à l'univers $\hat{M}_o$ (resp. $M_o$).

II. a PREESQUISSES. PROTOTYPES. TYPES.

Soit 1 et 1' deux parties de $\hat{F}_o$.

1'1. a. Préesquisses.

Une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$ - préesquisse est un triplet $\sigma = (U^\bullet, \mu_{U^\bullet}, \mu'_{U^\bullet})$ tel que :

- $U \in \hat{N}'_o$,

- $\mu_{U^\bullet}$ (resp. $\mu'_{U^\bullet}$) est un choix partiel, dans $U^\bullet$, de $I^\bullet$-cônes projectifs (resp. inductifs) pour tout $I^\bullet \in \mathcal{I}$ (resp. $I^\bullet \in \mathcal{I}'$) ; ceci signifie que, si $\mu_{U^\bullet}(\hat{\phi})$ (resp. $\mu'_{U^\bullet}(\hat{\phi})$) est défini, c'est une transformation naturelle de la forme $(\phi, \underline{n}, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \underline{n}, \phi)$), où $\hat{e}$ est le néofoncteur, de $I^\bullet$ vers $U^\bullet$, constant sur e appartenant à $U^\bullet_o$.

II. b. Prototypes. Types.

Si U est une catégorie et si, dès que $\mu_{U^\bullet}(\hat{\phi})$ (resp. $\mu'_{U^\bullet}(\hat{\phi})$) est défini, c'est une $I^\bullet$-limite projective (resp. inductive), on dit que $\sigma$ est un $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ - prototype.

Si, de plus, le choix est total, i.e. si $\mu'_{U^\bullet}(\hat{\phi})$ (resp. $\mu'_U(\hat{\phi})$) est défini pour tout $I^\bullet \in \mathcal{I}$ (resp. $I^\bullet \in \mathcal{I}'$) et tout néofoncteur $\phi$ de $I^\bullet$ vers $U^\bullet$, on dit que $\sigma$ est un $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-type.

II. c. Réalisations.

Soit $\sigma_s = (U^\bullet_s, \mu_{U^\bullet_s}, \mu'_{U^\bullet_s})$, $s = 1, 2$, deux $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-préesquisses. Une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-réalisation de $\sigma_1$ vers $\sigma_2$ est un triplet $\overline{F} = (\sigma_2, F, \sigma_1)$ tel que :

- $F = (U^\bullet_2, \underline{F}, U^\bullet_1)$ est un néofoncteur,

- si $\mu_{U^\bullet_1}(\hat{\phi})$ (resp. si $\mu'_{U^\bullet_1}(\hat{\phi})$) est défini, alors $\mu_{U_2}(F, \hat{\phi})$ (resp. $\mu'_{U_2}(F, \hat{\phi})$) est défini et égal à $F\mu_{U_1}(\hat{\phi})$ (resp. $F\mu'_{U_1}(\hat{\phi})$).

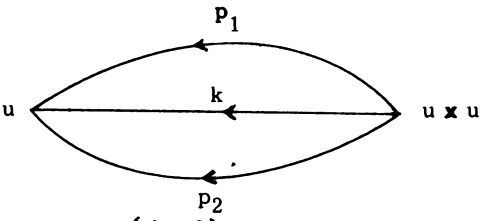
On désigne par $S'^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ la catégorie pleine de réalisations entre $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$- préesquisses, associée à l'univers $M_o$.

$F'^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ (resp. $F^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$) en est la sous-catégorie pleine dont les unités sont les $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$- prototypes (resp. -types).

II. d. Exemples.

Supposons que $U^\bullet_m$ soit le graphe multiplicatif (trivial) associé

**à la figure** ci-dessous :




Posons $I' = \phi$ et $I = \{\{1,2\}\}$, où $\{1,2\}$ est la catégorie discrète sur l'ensemble $\{1,2\}$ Nous définissons $\mu U_{m^\bullet}(\phi)$ si, et seulement si, est le néofoncteur de $\{1,2\}^\bullet$ dans $U^\bullet_m$ défini par :

- $\phi(1) = \phi(2) = u$,

dans ce cas, c'est la transformation naturelle $(\phi, \underline{n}, u \hat{x} u)$ telle que :

- $\underline{n}(s) = p_s$, $s = 1,2$.

Alors $\sigma_m = (U^\bullet_m, \mu_{U^\bullet_m}, \phi)$ est une $(\{\{1,2\}^\bullet\}, \phi)$-préesquisse appelée préesquisse des magmas. (Cette terminologie sera justifiée en III).

Des descriptions analogues permettent de construire, à partir de classes I et I' bien choisies, les préesquisses de monoïdes, groupes, groupes abéliens, anneaux, corps, graphes multiplicatifs, catégories, groupoïdes, topologies, quasi-topologies, catégories à limites. . . .

## III CATEGORIES DE MORPHISMES ENTRE STRUCTURES ALGEBRIQUES.

I et I' sont encore deux parties de $\hat{F}_o$. Soit $C^\bullet$ une catégorie (i.e. $C^\bullet \in \hat{F}_o$) et $\sigma = (U^\bullet, \mu_{U^\bullet}, \mu'_{U^\bullet})$ une $(I, I')$-préesquisse.

### III. a. Réalisations vagues.

Une réalisation vague de $\sigma$ vers $C^\bullet$ est un néofoncteur $F = (C^\bullet, \underline{F}, U')$ tel que :

- si $\mu_{U^\bullet}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U^\bullet}(\phi)$) est défini, $F\mu_{U^\bullet}(\phi)$ (resp. $F\mu'_{U^\bullet}(\phi)$) est une $I^\bullet$-limite projective (resp. inductive) dans $C^\bullet$, lorsque $I^\bullet$ est la sour-

ce de $\Phi$.

On désigne, alors, par $V(C^\bullet, \sigma)^{\infty}$ la sous-catégorie pleine de $(C^\bullet, U^\bullet)^{\Omega}$ dont les unités sont ces réalisations vagues.

On dit qu'une catégorie $L^\bullet$ est une catégorie de morphismes entre $C^\bullet$-structures algébriques d'espèce $\sigma$, lorsqu'elle équivalente à $V(C^\bullet, \sigma)^{\Omega}$. Si $C^\bullet = M$, on dira que $L^\bullet$ est une catégorie de morphismes entre structures algébriques d'espèce $\sigma$.

III. b. Foncteurs d'omission

A tout $u \in U_o^\bullet$, associons le foncteur $p_u^{C^\bullet} = (C^\bullet, \underline{p}_u^{C^\bullet}, V(C^\bullet, \sigma)^{\Omega})$ "évaluation en u", i. e. qui à tout $(F', \underline{n}, F)$ associe $\underline{n}(u)$.

$p_u^{C^\bullet}$ est appelé foncteur d'omission relatif à u.

Si $L^\bullet$ est une catégorie de morphismes entre $C^\bullet$-structures algébriques d'espèce $\sigma$, on en déduit les foncteurs $\tilde{p}_u^{C^\bullet} = p_u^{C^\bullet} . q$ encore appelés foncteurs d'omission relatifs à u, lorsque q est un foncteur de $L^\bullet$ vers $V(C^\bullet, \sigma)^{\Omega}$ associé à l'équivalence de ces deux catégories.
Si $C^\bullet = M$, on posera $\tilde{p}_u^{M} = \tilde{p}_u$.

III. c. Exemples

La catégorie $\mathcal{S}$ des homomorphismes entre magmas, associée à l'univers $M_o$, est équivalente à $V(M, \sigma_m)^{\Omega}$; c'est donc une catégorie de morphismes entre structures algébriques d'espèce $\sigma_m$, ce qui justifie la terminologie de II d.

Les autres terminologies de II d. ont des justifications analogues.

De plus, les foncteurs d'oubli usuels de ces catégories dans M sont alors des foncteurs d'omissions relatifs à certaines unités de l'espèce considérée.

III. d. Problèmes

La théorie des préesquisses pose de nombreux problèmes parmi lesquels on peut notamment citer les suivants :

- $L^*$ étant une catégorie de morphismes entre $C^*$-structures algébriques d'espèce $\sigma$, admet-elle certaines limites projectives ou inductives ?

- Sous les mêmes hypothèses, les foncteurs d'omissions relatifs aux unités de $\sigma$ admettent-ils des adjoints ou des coadjoints? Sont-ils-engendrants?

Sont-ils à structures quasi-quotients?

- Si $L^*$ est une catégorie quelconque, existe-t-il une préesquisse $\sigma$ telle que $L^*$ soit une catégorie de morphismes entre structures algébriques d'espèce $\sigma$ ?

Ces trois questions sont étudiées dans [F. O S. A.]. Dans IV et V nous exposons brièvement deux solutions au dernier problème.

## IV. CATEGORIES FORTEMENT SPECIFIABLES.

Nous désignerons, désormais, par $\tilde{M}_o$ l'ensemble des unités de $\hat{M}_o$ équipotentes à une unité de $M_o$. Si $\hat{M}$ est la sous-catégorie pleine de $\hat{M}$ dont la classe des unités est $\tilde{M}_o$, on a $M \subset \tilde{M}$ et il existe un foncteur $m = (M, \underline{m}, \tilde{M})$ tel que $\underline{m}(f) = f$, pour tout $f \in M$.

Nous supposons, de plus, que $I = F_o$ et que $I'$ est une partie de $\hat{F}_o$.

### IV. a. Préesquisses fortes

Si J et J' sont deux parties de $\hat{F}_o$ et si $\sigma = (U^*, \mu_{U^*}, \mu'_{U^*})$ est une (J, J')- préesquisse, nous désignons par $\sigma/_{U'^*}$ la (J, J')-préesquisse restriction de $\sigma$ à $U'^*$, lorsque $U'^*$ est un sous-graphe multiplicatif de $U^*$.

On définit $\sigma/_{U'^*} = (U'^*, \mu_{U'^*}, \mu'_{U'^*})$ comme suit :

- si $\phi$ est un néofoncteur de $I^* \varepsilon J$ (resp. $I^* \varepsilon J'$) vers $U'^*$, alors $\mu_{U'^*}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U'^*}(\phi)$) est défini si, et seulement si, $\mu_{U^*}(\ell.\phi)$ (resp. $\mu'_{U^*}(\ell.\phi)$ est défini et si $\underline{n}(j) \in U'$, pour tout $j \in I^*_o$, où $\mu_{U^*}(\ell.) =$

$= (l.\phi\ ,\underline{n}\ ,\hat{e})$ (resp. $\mu'_U\ (l.\phi) = (\hat{e},\underline{n},l.\phi)$), lorsque $l$ est le néofoncteur injection canonique de $U'^{\bullet}$ vers $U^{\bullet}$; dans ces conditions, $\mu_{U'^{\bullet}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U'^{\bullet}}(\phi)$ ) est l'unique transformation naturelle telle que :

- $l\mu_{U'^{\bullet}}(\phi) = \mu_{U^{\bullet}}(l.\phi)$ (resp. $l\mu'_{U'^{\bullet}}(\phi) = \mu'_{U^{\bullet}}(l.\phi)$ ).

Si $C^{\bullet} \in \hat{F}_o$, nous dirons que $\sigma$ est forte pour $C^{\bullet}$ si, et seulement si:

- $U^{\bullet}$ admet un sous-graphe multiplicatif $U'^{\bullet}$ tel que $U' \in \tilde{M}_o$.

- si $F_s \in V(C^{\bullet};\sigma)^{\varpi}_o$ , $s = 1,2$ , sont tels que $F_{1/U'^{\bullet}} = F_{2/U'^{\bullet}}$, alors $F_1$ et $F_2$ sont équivalents,

- si $T' = (F'_2\ ,\ \underline{T'},F'_1) \in V(C^{\bullet};\sigma_{/U'^{\bullet}})^{\varpi}$, où $F'_s = F_{s/U'^{\bullet}}$ et $s = 1,2$ , alors il existe une unique $T = (F_2,\ \underline{T}, F_1) \in V(C^{\bullet}\ ,\sigma)^{\varpi}$ telle que $\underline{T}_{/U'^{\bullet}_o} = \underline{T'}$.

IV. b Catégories fortement spécifiables.

On dit que $L^{\bullet} \in \hat{F}_o$ est une $\tilde{M}_o$-catégorie si, et seulement si, l'ensemble $\hom_{L^{\bullet}}(e',e)$ des morphismes de $L^{\bullet}$ de source $e$ et de but $e'$ est un élément de $\tilde{M}_o$, pour tout couple $(e',e) \in L^{\bullet}_o \times L^{\bullet}_o$ . On pose alors $\mathrm{Hom}_{L^{\bullet}}(e',e) = m(\hom_{L^{\bullet}}(e',e))$.

On en déduit un foncteur $Y_{L^{\bullet}} = \mathcal{M}(M,L^{\bullet})^{\varpi}, \underline{Y}_{L^{\bullet}}, L^{\bullet *})$ , où $L^{\bullet *}$ est la catégorie duale de $L^{\bullet}$ et $\underline{Y}_{L^{\bullet}}(e) = \mathrm{Hom}_{L^{\bullet}}(-,e)$, pour tout $e \in L^{\bullet}_o$ (en général le foncteur de Yoneda usuel prend ses valeurs dans $\mathcal{M}(\hat{M},L^{\bullet})^{\varpi}$).

Désignons par $\hat{M}\ \hat{F}.I^{\bullet}$ l'ensemble des foncteurs de $L^{\bullet}$ dans $M$. Si $F$ en est un élément, $H(F)^{\bullet}$ désigne la catégorie des hypermorphismes de $F$, à savoir l'ensemble des couples $(f,x)$ tels que $f \in L$ et $x \in F(\alpha(f))$ muni de la loi de composition:

- $(f',x').(f,x) = (f'.f,x)$, si, et seulement si, $\alpha(f') = \beta(f)$ et $F(f)(x) = x'$.

On désigne par $P(F) = (L^{\bullet},\underline{P(F)},\ H(F)^{\bullet})$ le foncteur défini par $P(F)(f,x) = f$, pour tout $(f,x) \in H(F)$. Alors, $H(F)^{\bullet *}$ (resp. $P(F)^{*}$ ) désigne la catégorie duale (resp. le foncteur dual) de $H(F)^{\bullet}$ (resp. de $P(F)$ ).

Posons : $\mathcal{I}'_L = \{\Gamma \times \{1\} \,/\, I^\bullet \in \mathcal{I}'\} \cup \{H(F)^* \times \{2\} / F \in M.F.L^\bullet\}$

On dira que $L^\bullet$ est une $\tilde{M}_o$-catégorie fortement spécifiable relativement à $\mathcal{I}'$ si, et seulement si, il existe une $(\Gamma_o, \mathcal{I}'_L)$-préesquisse $\sigma$ telle que les catégories $L^\bullet$ et $V(M,\sigma)^\square$ soient équivalentes.

IV c. Condition nécessaire et suffisante de spécifiabilité forte

Soit $\sum = (M, \mu_M, \mu'_M)$ une $(\Gamma_o, \mathcal{I}'_L)$-préesquisse telle que :

- si $\phi$ est un néofoncteur de $I^\bullet \in \Gamma_o$ (resp. $I^\bullet \in \{1\} \times \mathcal{I}'_L$) vers M et si $\mu_M(\phi)$ (resp. $\mu'_M(\phi)$) est défini, c'est une limite projective (resp. inductive),
- si $\phi$ est un néofoncteur de $H(F) \times \{2\}$ vers M, où $F \in M.\hat{F}.L^\bullet$, alors $\mu'_M(\phi))$ est défini si, et seulement si, il existe $e \in L^\bullet_o$ tel que, pour tout $(f,x) \in H(F)$, on ait $\phi((f,x),2) = (Y_{L^\bullet} \cdot P(F)(f,x))(e)$ et $\mu'_M(\phi)$ définit alors F(e) comme une limite inductive.

On en déduit une $(\Gamma_o, \mathcal{I}'_L)$-préesquisse $\sum_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}(M, L^\bullet), \mu_{\mathcal{M}}, \mu'_{\mathcal{M}})$, où $\mu_{\mathcal{M}}$ et $\mu'_{\mathcal{M}}$ sont définies "point par point"

On démontre alors le théorème suivant, si L est une $\tilde{M}_o$-catégorie:

Théorème. Pour que $L^\bullet$ soit fortement spécifiable relativement à $\mathcal{I}'$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- $\sum_{\mathcal{M}}$ est une $(\Gamma_o, \mathcal{I}'_L)$-présquisse forte pour M,
- $L^\bullet$ est équivalente à $V(M, \sum_{\mathcal{M}})^\square$

Intuitivement, ceci signifie que, si $L^\bullet$ est fortement spécifiable, i.e. est équivalente à une catégorie de la forme $V(M,\sigma)^\square$ où $\sigma$ est forte pour M, les foncteurs d'omission de $L^\bullet$ vers M associés à cette équivalence et relatifs aux unités de $U'^\bullet$ (voir IV a ), déterminent une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(M, L^\bullet)^\square$ qui en est un "système de générateurs" par composition, $\Gamma_o$-limites projectives et $\mathcal{I}'_L$-limites inductives. Ainsi, les foncteurs d'omission d'une catégorie de morphismes entre structures algébriques d'un certain type en définissent entièrement

l'espèce

## V. CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE DE SPECIFIABILITE TRES FORTE.

Nous reprenons les notations de IV et nous supposons de plus que $\mathcal{I}' = \phi$

V. a. Catégories très fortement projectives

Une $M_o$-catégorie $K^\bullet$ est dite très fortement projective si, et seulement si, $K^\bullet$ est à $F_o$- limites projectives et si, pour toute structure de $(F_o, \phi)$-type $\sum_{K^\bullet}$ sur $K^\bullet$ (correspondant à un choix de limites projectives dans $K^\bullet$), $\sum_{K^\bullet}$ vérifie les conditions de VI. a., pour toute catégorie $C^\bullet \varepsilon \hat{F}_o$ à $F_o$-limites projectives.

V. b. Catégories très fortement spécifiables

Une $M_o$-catégorie $L^\bullet$ sera dite très fortement spécifiable si, et seulement si, il existe un $F_o$-type projectif $\sum_{K^\bullet}$ sur $K^\bullet \varepsilon \hat{F}_o$ tel que:
- $K^\bullet$ est une $\tilde{M}_o$ - catégorie très fortement projective,
- $L^\bullet$ est équivalente à $V(M, \sum_{K^\bullet})^{\mathfrak{m}}$

Soit $\sum_o$ le $F_o$-type projectif canonique sur $M$, c'est dire que l'on choisit, pour foncteur de $I^\bullet \varepsilon F_o$ vers $M$, sa limite projective "canonique" usuelle. On en déduit une structure de $F_o$-type projectif $\Sigma_c$ sur $\mathcal{M}(M, L^\bullet)^{\mathfrak{m}}$ lorsque $L^\bullet$ est une $\tilde{M}_o$-catégorie.
Désignons alors par $\sum(\bar{L}^{\bullet *})$ la $F_0$-préesquisse projective restriction de $\sum_c$ à la sous-catégorie $L^\bullet$ de $\mathcal{M}(M, L^\bullet)^{\mathfrak{m}}$ et dont les unités sont tous les foncteurs équivalents aux de la forme $Y_{L^\bullet}(e)$, où $e \varepsilon L^\bullet_o$ (voir VI. b).

On montre alors que $\sum(\bar{L}^{\bullet *})$ est un $F_o$-type projectif et l'on a:

Théorème Pour q'une $\tilde{M}_o$-catégorie $L^\bullet$ à $F_o$-limites inductives soit très fortement spécifiable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- $L^\bullet$ est très fortement projective,
- $L^\bullet$ est équivalente à $V(M, \sum(\overline{L}^\bullet * ))^{\square}$

V. c Remarques.

Ce dernier théorème est une généralisation des résultats de Ulmer [L. P. L. G.], qui fournissent, d'ailleurs, des critères pour qu'une catégorie soit très fortement projective (catégorie localement $\alpha$-présentable et localement $\alpha$-engendrée).

De plus, ce théorème montre que les foncteurs d'omission sont représentables dans le cas projectif (i. e $\mathcal{I}' = \phi$) et donc que, dans le cas non projectif (i. e $\mathcal{I}' \neq \phi$), ils peuvent être considérés comme une généralisation des foncteurs représentables.

## VI. TRIPLABILITE DES FONCTEURS D'OMISSION.

Dans ce qui suit, nous résumons quelques unes des propriétés des foncteurs d'omission. Nous reprenons les notations introduites dans ce qui précède.

VI. a. Cas projectif : existence de limites et adjonction.

Supposons que $\mathcal{I}' = \phi$ et que $C^\bullet \in F_o$ soit une catégorie à J-limites projectives, où $J \in F_o$ Alors, on obtient la proposition :

Proposition. La catégorie $V(C^\bullet, \sigma)^{\square}$ est à J-limites projectives et les foncteurs $p_u^{C^\bullet}$ sont compatibles (i. e. commutent) avec ces limites, pour tout $u \in U_o^\bullet$, lorsque $\sigma = (U^\bullet, \mu_{U^\bullet}, \phi) \in S'^{\mathcal{I}\phi}_o$

Conservant ces hypothèses et ces notations, supposons de plus que:

1° $\mathcal{I} \subset F_o$ et $\mathcal{I} \in \widetilde{M}_o$ ; on désigne par $\lambda$ l'ordinal borne supérieure des ordinaux initiaux $\overline{I}$, lorsque $I^\bullet \in \mathcal{I}$ et $\overline{I}$ est l'ordinal initial qui a même cardinal que I ;

2° $\hat{C}^\bullet \in \hat{F}_o$ et $U \in \widetilde{M}_o$ ;

3° $\delta = (M, \underline{\delta}, C)$ est un foncteur restriction à la sous-catégorie pleine $C^\bullet$ de $\hat{C}^\bullet$ d'un foncteur $\Delta = (\hat{M}, \underline{\Delta}, \hat{C}^\bullet)$, supposé d'homomorphismes

saturé (i.e. toute bijection de but $\Delta(e)$, où $e \in \hat{C}^\bullet_o$, se relève en un unique inversible de $\hat{C}^\bullet$ de but $e$ ):

4° $\hat{C}^\bullet$ est à $F_o$-limites projectives et $\Delta$ est compatible avec ces limites ;

5° $C^\bullet$ est à noyaux et $\delta$ est compatible avec ces noyaux;

6° $\hat{C}^\bullet$ est à $<\xi>$-limites inductives et $\Delta$ est compatible avec ces limites pour tout ordinal $\xi < \omega_{\lambda+1}$ (ordinal initial régulier d'indice $\lambda+1$), lorsque $<\xi>$ est la catégorie associée au bon ordre canonique sur $\xi$,

7° $\Delta$ est $(M, X, C^\bullet_o)$-engendrant, lorsque $X$ est la classe des $\Delta$-monomorphismes de $\hat{C}^\bullet$ (i.e. pour tout $e \in \hat{C}^\bullet_o$, toute partie $M$ de $\Delta(e)$ telle que $M \in M_o$ engendre une $\Delta$-sous-structure de $e$ appartenant à $C^\bullet_o$).

Nous énonçons alors

Proposition. $V(C^\bullet, \sigma)^{\infty}$ est à $F_o$-limites inductives.

Cependant les foncteurs d'omission ne sont pas en général compatibles avec ces limites.

Nous obtenons, enfin, la proposition :

Proposition. Si la condition 1 précédente est vérifiée, les foncteurs $p^{C^\bullet}_u$ admettent des adjoints (à gauche), pour tout $u \in U^\bullet_o$.

On démontre ces propositions en utilisant les théorèmes d'existence de structures libres ou de limites inductives de [C. S L.] .

Ces résultats s'appliquent notamment aux esquisses de groupes, groupes abéliens graphes multiplicatifs, catégorie, citées précédemment.

VI. b. Triplabilité des foncteurs d'omission

Nous supposons que $\mathfrak{I} \cup \mathfrak{I}' \in \tilde{M}_o$ et que $\sigma = (U^\bullet, \mu_{U^\bullet}, \mu'_{U^\bullet})$ est une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$ préesquisse telle que :

- $U \in \hat{F}_o$,
- si $\mu_{U^\bullet}(\hat{\phi})$ (resp. $\mu'_{U^\bullet}(\hat{\phi})$) est défini, c'est une limite projective (resp. inductive),

- $U^\bullet$ possède un système de générateurs, par composition et adjonction de limites projectives et inductives telles que $\mu_{U^\bullet}(\phi)$ et $\mu'_{U^\bullet}(\phi)$, que l'on note $M^\bullet$ (et qui constitue un sous-graphe multiplicatif trivial de $U^\bullet$)

Pour tout $u \in U^\bullet_o$, on désigne par $\Xi_u$ (resp. $\Xi'_u$) l'ensemble des néofoncteurs $\phi$ de $I \in \mathfrak{I}$ (resp. $I \in \mathfrak{I}'$) vers $U^\bullet$ tels que $\mu_{U^\bullet}(\phi)$ (resp. $\mu'_U(\phi)$ soit défini et admette pour sommet $u$.

Si $\lambda$ est l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\overline{I}$, lorsque $I^\bullet \in I \cup \mathfrak{I}'$, on pose $\omega_{\lambda+1} = \Lambda$ et :

- $W_o = \{u' \in M^\bullet_o / \Xi_{u'} \cup \Xi'_{u'} = \emptyset\}$,

- si $\xi \leqslant \Lambda$, avec $\xi = \xi'+1$, et si $W_\xi$, est défini, soit $W'_\xi$ (resp. $W''_\xi$) l'ensemble des $u' \in M^\bullet_o$ tels que $\Xi_{u'} \neq \emptyset$ (resp. $\Xi'_{u'} = \emptyset$) et que

$$\phi(I^\bullet_o) \subset W_\xi, \text{ si } \phi = (U^\bullet, \underline{\phi}, I) \in \Xi_{u'} \text{ (resp. } \in \Xi'_{u'}),$$

alors $W_\xi = W'_\xi \cup W''_\xi$

- si $\xi < \Lambda$ est un ordinal limite et si $W_{\xi'}$ est défini pour tout $\xi' < \xi$, alors on pose $W_\xi = \bigcup_{\xi' < \xi} W_{\xi'}$

Dans tout ce qui suit, nous supposons que :

- $W_\Lambda = M^\bullet_o$,

- si $\sum = (M, \mu_M, \mu'_M)$ est le $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-type canonique sur M, toute réalisation vague de $\sigma$ vers M (voir III a) est équivalente à une réalisation (stricte) de $\sigma$ vers $\sum$ (voir II. c.)

- $e \in U^\bullet_o$ est une unité fixée de $U^\bullet$

Alors on démontre la proposition et le théorème qui suivent :

Proposition Si, pour tout $u' \in W_o$, il existe $f \in e.U^\bullet u'$ et $g \in u'.U^\bullet e$ tels que $g.f = u'$, alors $p_e$ est un foncteur fidèle.

Théorème Si $e \in W_o$ et si la condition 1 de VI. a. est vérifiée, ainsi que les deux conditions suivantes :

- $W_o = \{e\}$,
- $\mathcal{I}' = \emptyset$ (on sait qu'alors $p_e$ admet un adjoint en vertu de VI. a. ) et $I^* \varepsilon \mathcal{I}$ implique $I^*$ est une catégorie discrète, alors le foncteur $p_e$ est triplable.

La proposition se démontre directement et le théorème se démontre en utilisant le critère de triplabilité de Beck

VI. c. Remarques.

Le théorème précédent montre qu'il existe beaucoup de catégories de structures algébriques au-dessus de M qui ne peuvent s'interpréter comme des catégories d'algèbres associées à un triple.
De plus, il est une formulation différente d'un résultat de Lawvere relatif aux théories.

## Bibliographie


[T. E.] A. Bastiani, Théorie des ensembles, C. D. U., Paris 1970

[M. M. A.] C. Ehresmann, Maîtrise de Mathématiques, Algèbre I° Partie, C. D. U., Paris 1968.

[C. S.] C. Ehresmann, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

[E. T. S. A.] C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Ins. Poli. Iasi, Vol. XIV (XVIII), 1968

[C. S. L.] C. Ehresmann, Constructions de structures libres, Lecture Notes in Math., vol. n. 92, Springer 1969.

[F. O. S. A.] Ch. Lair, Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cahiers de Top. et Géom. diff., vol. XII, 2, Paris 1971.

[L. P. L. G] F. Ulmer, Locally presented and locally generated categories, Lecture Notes in Math., Vol. n. 195, Springer 1971.