DIAGRAMMES

C. LAIR

Diagrammes localement libres extensions de corps et théorie de Galois

Diagrammes, tome 10 (1983), exp. n° 2, p. L1-L17

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1983__10__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol. 10 , 1983.

A.M.S. Sub. Class.
18 A 40 , 20 J 99,
12 A 55.

DIAGRAMMES LOCALEMENT LIBRES
EXTENSIONS DE CORPS
ET
THEORIE DE GALOIS

C. Lair

Introduction.

En (C.M.C.F.) nous avons introduit la notion de "diagramme localement libre" qui généralise celle d'objet libre et celle de "famille localement libre" de (C.A.L.O.): si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur entre deux catégories localement petites, on dit que le foncteur $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ est un diagramme localement libre (relativement à U) sur l'objet B de $\underline{B}$ si, et seulement si, on dispose, naturellement en tout objet A de $\underline{A}$, d'une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\underline{B}}(B,UA) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{D \in \underline{D}} \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\delta D, A)$$

entre ensembles (on trouvera une définition équivalente plus "concrète" au §1).

Avec cette terminologie, tout objet B de $\underline{B}$ possède toujours le foncteur canonique $U/B \longrightarrow \underline{A}$ pour diagramme localement libre: il est, en quelque sorte, maximum. Plus généralement, un même objet B de $\underline{B}$ peut fort bien posséder deux diagrammes lo-

calement libres $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ et $\delta': \underline{D}' \longrightarrow \underline{A}$ distincts: bien qu'on puisse toujours les "comparer" formellement (dans un sens que nous ne préciserons pas ici), ils ne sont pas nécessairement naturellement isomorphes (au sens précis du §1). En fait, la notion générale de diagramme localement libre ne prend d'intérêt que si l'on spécifie la forme de la catégorie $\underline{D}$ recherchée. Par exemple:

- si l'on impose que $\underline{D} = \underline{1}$, écrire que $\delta: \underline{1} \longrightarrow \underline{A}$ est localement libre sur B équivaut à écrire que $\delta(1)$ est un objet de $\underline{A}$ libre sur B (au sens usuel); dans ce cas, un tel diagramme est évidemment unique à isomorphisme près;

- si l'on impose que $\underline{D}$ est petite et discrète, écrire que $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ est localement libre sur B équivaut à écrire que la famille $(\delta(D))_{D \in Ob\underline{D}}$ est localement libre sur B (au sens particulier de (C.A.L.O.)); dans ce cas, un tel diagramme est encore unique à isomorphisme près;

- en pratique, on impose toujours que $\underline{D}$ est, au moins, une catégorie petite ... mais ceci n'implique pas, en général, son unicité à isomorphisme près.

Dans ce texte, nous décrivons quelques exemples de diagrammes localement libres petits dont les spécifications de forme en assurent l'unicité à isomorphisme près. Cependant, notre souci n'est pas seulement d'ajouter de nouveaux exemples au développement d'un corps de doctrine déjà bien fourni. Il est surtout de montrer (certes, brièvement) que, même - et, peut-être, justement - dans des situations fort classiques, la notion de diagramme localement libre petit s'impose naturellement, sans aucune "acrobatie" conceptuelle, méthodologique ou technique. Ainsi, le lecteur sera peut-être convaincu que la "théorie des extensions de corps commutatifs" (en particulier, la "théorie de Galois") est très exactement une méthode de calcul explicite de petits diagrammes

localement libres et que c'est vraisemblablement ainsi que Galois concevait les choses (certes, en des termes bien différents)!

1. Diagrammes localement libres et isomorphismes.

Nous supposons encore que $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur entre deux catégories localement petites.

On établit facilement (voir (C.M.C.F.)) que le foncteur $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ est un diagramme localement libre sur l'objet B de $\underline{B}$ si, et seulement si, on dispose d'un cône projectif $e = (e_D: B \longrightarrow U\delta D)_{D \in \underline{D}}$ de base $\underline{D}$ tel que, pour tout objet A de $\underline{A}$ et toute flèche $b: B \longrightarrow UA$ de $\underline{B}$:

- il existe un objet D de $\underline{D}$ et une flèche $a: \delta D \longrightarrow A$ de $\underline{A}$ vérifiant $Ua.e_D = b$ (on dit, alors que (D,a) est une factorisation de (A,b)),

- si (D_0,a_0) et (D_∞,a_∞) sont deux factorisations de (A,b), alors a_0 et a_∞ sont deux objets d'une même composante connexe de la catégorie δ/A (autrement dit, il existe dans $\underline{D}$ un zig-zag

$$Z: \quad D_0 \longleftarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longleftarrow \dots \longrightarrow D_{2n} \longleftarrow D_{2n+1} \longrightarrow D_\infty$$

et il existe dans $\underline{A}$ un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} \delta Z: & \delta D_0 & \longleftarrow & \delta D_1 & \longrightarrow & \delta D_2 & \longleftarrow \dots \longrightarrow & \delta D_{2n} & \longleftarrow & \delta D_{2n+1} & \longrightarrow & \delta D_\infty \\ & & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & & & A & & & & & & & & \end{array}$$

).

Dans ces conditions, nous dirons aussi que δ est un diagramme localement libre sur B naturalisé par e , ou encore que (δ,e) est un diagramme localement libre naturalisé sur B .

Bien entendu, les conditions précédentes constituent une autre dé-

finition - "concrète" - de la notion de diagramme localement libre: c'est celle que nous utiliserons, pour plus de commodité, dans la suite.

Supposons que $(\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}\ ,\ e)$ et $(\delta': \underline{D}' \longrightarrow \underline{A}\ ,\ e')$ sont deux diagrammes localement libres naturalisés sur le même objet B de $\underline{B}$. Nous dirons qu'ils sont <u>isomorphes</u> si, et seulement si, il existe:

- un foncteur inversible $\Gamma : \underline{D}' \longrightarrow \underline{D}$,
- une équivalence naturelle $\gamma: \delta.\Gamma \longrightarrow \delta' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{A}$,

tels que:

- pour tout objet D' de $\underline{D}'$, on a $U\gamma_{D'}.e_{\Gamma D'} = e'_{D'}$.

2. <u>Cas d'unicité, à isomorphisme près, de diagrammes localement libres.</u>

Nous supposons toujours que $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur entre deux catégories localement petites.

Dans le but d'unifier l'énoncé des résultats de ce §2, nous nous permettons de dire (très pompeusement!) qu'un diagramme localement libre naturalisé $(\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}\ ,\ e)$ sur un objet B de $\underline{B}$ est un <u>objet localement libre naturalisé sur</u> B (i. e. un objet libre naturalisé sur B ... au sens usuel) si, et seulement si, $\underline{D} \tilde{=} \underline{1}$. Dans ces conditions, il est parfaitement trivial de constater que:

<u>Proposition 1 (premier cas d'unicité). Deux objets localement libres naturalisés sur un même objet sont isomorphes.</u>

De même, nous dirons qu'un diagramme localement libre naturalisé $(\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}\ ,\ e)$ sur un objet B de $\underline{B}$ est une <u>famille localement libre naturalisée sur</u> B si, et seulement si, $\underline{D}$ est une catégorie petite et discrète. On établit facilement (voir (C.A.L.O.)) que:

Proposition 2 (deuxième cas d'unicité). Deux familles localement libres naturalisées sur un même objet sont isomorphes.

Corollaire. Si B admet une famille localement libre naturalisée de cardinal strictement supérieur à 1 , il ne peut admettre d'objet (localement) libre (naturalisé).

Disons, maintenant, qu'un diagramme localement libre naturalisé $(\delta : \underline{D} \longrightarrow \underline{A}\ ,\ e)$ sur un objet B de $\underline{B}$ est un sous-groupe localement libre naturalisé sur B si, et seulement si, $\underline{D}$ est un groupe petit et δ est injectif (autrement dit, si δ identifie $\underline{D}$ à un sous-groupe de $\underline{A}$). Dans ces conditions, prouvons que:

Proposition 3 (troisième cas d'unicité). Deux sous-groupes localement libres naturalisés sur un même objet sont isomorphes.

Preuve. Supposons que $(\delta : \underline{D} \longrightarrow \underline{A}\ ,\ e)$ (resp. $(\delta' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{A}, e')$) est un sous-groupe localement libre naturalisé sur B . Nous notons D (resp. D') l'unique objet de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) que nous identifions à un sous-groupe de $\underline{A}$, en même temps que δ (resp. δ') est assimilée à l'injection canonique.

Par hypothèse, il existe une factorisation $(D,\gamma_{D'})$ (resp. (D',γ'_D)) de $(D',e'_{D'})$ (resp. (D,e_D)) . Nous avons donc:

(1) $U\gamma_{D'}.e_D = e'_{D'}$ (resp. $U\gamma'_D.e'_{D'} = e_D$) .

On en déduit que:

- $U(\gamma_{D'}.\gamma'_D).e'_{D'} = e'_{D'} = U(Id_{D'}).e'_{D'}$,

(resp. $U(\gamma'_D.\gamma_{D'}).e_D = e_D = U(Id_D).e_D$) .

Par connexité, puisque toutes les flèches de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$) sont inversibles, on en conclut qu'il existe une flèche $d'_0 : D' \longrightarrow D'$ (resp. $d_0 : D \longrightarrow D$) de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$) telle que:

(2) $\gamma_{D'}.\gamma'_D = d'_0.Id_{D'} = d'_0$ (resp. $\gamma'_D.\gamma_{D'} = d_0.Id_D = d_0$).

Supposons, maintenant, que $d' : D' \longrightarrow D'$ (resp. $d : D \longrightarrow D$) est une flèche de $\underline{D}'$ (resp. de $\underline{D}$) .

Nous avons, en vertu de (1) et puisque e' (resp. e) est naturelle :

$$- \; U(d'.\gamma_{D'}).e_D = Ud'.U\gamma_{D'}.e_D = Ud'.e'_{D'} = e'_{D'} = U\gamma_{D'}.e_D \quad ,$$

(resp. $U(d.\gamma'_D).e'_{D'} = Ud.U\gamma'_D.e'_{D'} = Ud.e_D = e_D = U\gamma'_D.e_D$).

Par connexité et puisque toutes les flèches de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) sont inversibles, il existe donc une flèche $\Gamma(d') : D \longrightarrow D$ (resp. $\Gamma'(d) : D' \longrightarrow D'$) telle que :

$$(3) \quad d'.\gamma_{D'} = \gamma_{D'}.\Gamma(d') \quad \text{(resp. } d.\gamma'_D = \gamma'_D.\Gamma'(d) \text{)} .$$

De plus, si $d_1 : D \longrightarrow D$ (resp. $d'_1 : D' \longrightarrow D'$) est une autre flèche de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) vérifiant :

$$- \; d'.\gamma_{D'} = \gamma_{D'}.d_1 \quad \text{(resp. } d.\gamma'_D = \gamma'_D.d'_1 \text{)} \quad ,$$

nous avons, compte tenu de (3) :

$$- \; \gamma'_D.d'.\gamma_{D'} = \gamma'_D.\gamma_{D'}.d_1 = \gamma'_D.\gamma_{D'}.\Gamma(d') \quad ,$$

(resp. $\gamma_{D'}.d.\gamma'_D = \gamma_{D'}.\gamma'_D.d'_1 = \gamma_{D'}.\gamma'_D.\Gamma'(d)$) .

En utilisant (2), il vient donc :

$$- \; d_0.d_1 = d_0.\Gamma(d') \quad \text{(resp. } d'_0.d'_1 = d'_0.\Gamma'(d) \text{)} .$$

D'où il résulte (puisque tout élément d'un groupe est simplifiable !) $d_1 = \Gamma(d')$ (resp. $d'_1 = \Gamma'(d)$).

En conséquence :

(4) il existe une et une seule flèche $\Gamma(d')$ (resp. $\Gamma'(d)$) vérifiant $d'.\gamma_{D'} = \gamma_{D'}.\Gamma(d')$ (resp. $d.\gamma'_D = \gamma'_D.\Gamma'(d)$).

En utilisant, de nouveau, (2) nous obtenons :

$$- \; d'_0.\gamma_{D'} = \gamma_{D'}.\gamma'_D.\gamma_{D'} = \gamma_{D'}.d_0 \quad \text{(resp. } d_0.\gamma'_D = \gamma'_D.\gamma_{D'}.\gamma'_D = \gamma'_D.d'_0 \text{)}.$$

De (4) résulte donc, en particulier :

$$(5) \quad \Gamma(d'_0) = d_0 \quad \text{(resp. } \Gamma'(d_0) = d'_0 \text{)}.$$

Clairement, de (4) on déduit immédiatement que:

- l'application $d' \longmapsto \Gamma(d')$ (resp. $d \longmapsto \Gamma'(d)$) définit un foncteur (i. e. un homomorphisme de groupes) $\Gamma : \underline{D}' \longrightarrow \underline{D}$ (resp. $\Gamma' : \underline{D} \longrightarrow \underline{D}'$) dont Γ' (resp. Γ) est l'inverse,

- $\gamma_{D'} : D \longrightarrow D'$ (resp. $\gamma'_D : D' \longrightarrow D$) définit une transformation naturelle $\gamma : \delta.\Gamma \longrightarrow \delta'$ (resp. $\gamma' : \delta'.\Gamma' \longrightarrow \delta$).

Enfin, de (2) et (5) et puisque Γ est un homomorphisme, il résulte que:

- $\gamma_{D'}.(\gamma'_D.d_0'^{-1}) = (\gamma_{D'}.\gamma'_D).d_0'^{-1} = Id_{D'}$,
- $(\gamma'_D.d_0'^{-1}).\gamma_{D'} = \gamma'_D.\gamma_{D'}.d_0^{-1} = Id_D$.

En conséquence, γ est bien une équivalence naturelle.

En utilisant (1), on conclut facilement. ☺ .

Corollaire. Si B admet un sous-groupe localement libre naturalisé non trivial, il ne peut admettre d'objet (localement) libre (naturalisé).

Avant d'énoncer un dernier cas d'unicité, procédons à quelques mises au point terminologiques.

Supposons que $\underline{D}_0$ est une catégorie associée à un ensemble ordonné $(E, \leq)$ dont toute partie non vide admet un sup . En particulier, on suppose E non vide et alors:

- on note $\tilde{D} = \text{Sup } E$,

- si $D \leq D'$ sont deux objets de E , on note $j_{DD'} : D \longrightarrow D'$ l'unique flèche de $\underline{D}_0$ qui leur est associée.

Dans ces conditions, supposons de plus que

$$F : \underline{D}_0 \longrightarrow \text{Grp} \longleftarrow \text{Cat}$$

(où Grp est la catégorie des groupes) est un foncteur tel que:

- si $D \leq D'$ sont deux objets de E , alors $F(j_{DD'}) : FD \longrightarrow FD'$

est une injection canonique (ainsi, les $F(D)$ sont tous des sous-groupes du groupe $F(\tilde{D})$) ,

- si P est une partie non vide de E , alors $F(\mathrm{Sup}\ P)$ est le sous-groupe de $F(\tilde{D})$ engendré par $\bigcup_{D \in P} F(D)$ (autrement dit, F est "compatible avec les sup").

On dit alors que la 2-limite inductive $\underline{D}$ du foncteur F dans Cat est une catégorie prégaloisienne; si F est un foncteur injectif, on dit que $\underline{D}$ est galoisienne. Rappelons, notamment, que:

- les objets de $\underline{D}$ sont les éléments D de E (ils sont donc comparables selon l'ordre $\leq$ de E),

- ses flèches sont les $d'_{D'} \cdot j_{DD'} : D \longrightarrow D'$, où d' est élément de $F(D')$ (en particulier, on a $Id_D = j_{DD} = 1_D \cdot j_{DD}$, où 1 est l'élément neutre de $F(D)$, et $d_D : D \longrightarrow D$, pour tout élément de $F(D)$),

- pour toutes flèches $d_D : D \longrightarrow D$ et $j_{DD'} : D \longrightarrow D'$ de $\underline{D}$, on a $j_{DD'} \cdot d_D = F(j_{DD'})(d)_{D'} \cdot j_{DD'} = d_{D'} \cdot j_{DD'}$ (il est alors facile de constater que toute flèche de $\underline{D}$ est un monomorphisme).

Nous disons, maintenant, qu'un diagramme localement libre naturalisé $(\delta : \underline{D} \longrightarrow \underline{A}\ ,\ e)$ sur un objet B de $\underline{B}$ est galoisien (resp. prégaloisien) si, et seulement si:

- $\underline{D}$ est une catégorie galoisienne (resp. prégaloisienne),

- $\delta : \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur injectif (alors, on identifie $\underline{D}$ à une sous-catégorie de $\underline{A}$ et δ à l'injection canonique),

- si D et D' sont deux objets de $\underline{D}$ et $a : D \longrightarrow D'$ est une flèche de $\underline{A}$ telle que $Ua \cdot e_D = e_{D'}$, alors a est une flèche de $\underline{D}$ (on dira que δ est e-plein),

- si A est un objet de $\underline{A}$, si P est une partie non vide de $E = \mathrm{Ob}\ \underline{D}$, si $b : B \longrightarrow UA$ est une flèche de $\underline{B}$ et si, pour

tout $D \in P$, $a_D : D \longrightarrow A$ est une flèche de $\underline{A}$ telle que $Ua_D.e_D = b$, alors il existe une famille $(d(D)_{\overline{D}} : \overline{D} \longrightarrow \overline{D})_{D \in P}$ de flèches de $\underline{D}$ et une flèche $a : \overline{D} = \mathrm{Sup}\ P \longrightarrow A$ de $\underline{A}$ telles que:

+ $Ua.e_{\overline{D}} = b$,

+ $a.d(D)_{\overline{D}} .j_{D\overline{D}} = a_D$, pour tout $D \in P$,

(on dira que δ est e-filtrant).

Nous pouvons alors énoncer:

Proposition 4 (quatrième cas d'unicité). Deux diagrammes localement libres naturalisés galoisiens sur un même objet sont isomorphes.

Preuve. Supposons que $(\delta : \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$, e) (resp. $(\delta' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{A}, e')$) est un diagramme localement libre naturalisé galoisien sur B .

Si D' (resp. D) est un objet de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$), on note:

- P(D') (resp. P'(D)) l'ensemble des objets D_1 (resp. D'_1) de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) tels qu'il existe une factorisation (D_1, a) (resp. (D'_1, a')) de $(D', e'_{D'})$ (resp. (D, e_D)).

Comme δ (resp. δ') est localement libre sur B , il est clair que P(D') (resp. P'(D)) n'est pas vide. On pose alors $\Gamma(D') = \mathrm{Sup}\ P(D')$ (resp. $\Gamma'(D) = \mathrm{Sup}\ P'(D)$) et l'on choisit, pour chaque $D_1 \in P(D')$ (resp. $D'_1 \in P'(D)$) une flèche $a_{D_1} : D_1 \longrightarrow D'$ (resp. $a'_{D'_1} : D'_1 \longrightarrow D$) de $\underline{A}$ telle que $Ua_{D_1}.e_{D_1} = e'_{D'}$ (resp. $Ua'_{D'_1}.e'_{D'_1} = e_D$).

Comme δ (resp. δ') est e-filtrant, il existe bien une flèche $\gamma_{D'} : \Gamma(D') \longrightarrow D'$ (resp. $\gamma'_D : \Gamma'D \longrightarrow D$) de $\underline{A}$ telle que (en particulier):

(1) $U\gamma_{D'}.e_{\Gamma D'} = e'_{D'}$ (resp. $U\gamma'_D.e_{\Gamma' D} = e_D$).

Il en résulte que:

- $U(\gamma_{D'}.\gamma_{\Gamma D'}).e_{\Gamma\Gamma D'} = e'_{D'}$.

(resp. $U(\gamma'_D.\gamma_{\Gamma,D}).e_{\Gamma\Gamma,D} = e_D$),

et, puisque δ' (resp. δ) est e'-plein (resp. e-plein), il vient:

(2) $\gamma_{D'}.\gamma_{\vdash D'} : \Gamma'\Gamma D' \longrightarrow D'$ (resp. $\gamma'_D.\gamma_{\Gamma,D} : \Gamma\Gamma' D \longrightarrow D$)
est une flèche de $\underline{D}'$ (resp. de $\underline{D}$).

Supposons, maintenant, que $z' : D' \longrightarrow D'$ (resp. $z : D \longrightarrow D$) est une flèche fermée de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$). De (1) nous déduisons que, puisque e' (resp. e) est naturelle:

$- Uz'.U\gamma_{D'}.e_{\Gamma D'} = Uz'.e'_{D'} = e'_{D'} = U\gamma_{D'}.e_{\Gamma D'}$,

(resp. $Uz.U\gamma'_D.e_{\vdash,D} = Uz.e_D = e_D = U\gamma'_D.e_{\Gamma,D}$).

On en déduit facilement, par construction et puisque δ (resp. δ') est e-filtrant (resp. e'-filtrant), qu'il existe une flèche $\Gamma z' : \Gamma D' \longrightarrow \Gamma D'$ (resp. $\Gamma' z : \Gamma' D \longrightarrow \Gamma' D$) de $\underline{D}$ telle que:

(3) $\gamma_{D'}.\Gamma z' \quad z'.\gamma_{D'}$ (resp. $\gamma'_D.\Gamma' z = z.\gamma'_D$) .

En vertu de (2) et puisque toutes les flèches de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$) sont des monomorphismes, il vient:

$- \Gamma'\Gamma z' : \Gamma'\Gamma D' \longrightarrow \Gamma'\Gamma D'$ (resp. $\Gamma\Gamma' z : \Gamma\Gamma' D \longrightarrow \Gamma\Gamma' D$)
est l'unique flèche de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$) telle que
$\gamma_{D'}.\gamma_{\vdash D'}.\Gamma'\Gamma z' = z'.\gamma_{D'}.\gamma'_{\vdash D'}$ (resp. $\gamma'_D.\gamma_{\Gamma,D}.\Gamma\Gamma' z = z.\gamma'_D.\gamma_{\Gamma,D}$).
Ainsi, on dispose d'un homomorphisme de groupes:

$$h_{D'} : F'(D') \longrightarrow F'(\Gamma'\Gamma D'), \quad z' \longmapsto \Gamma'\Gamma z'$$

$$(\text{resp. } h'_D : F(D) \longrightarrow F(\Gamma\Gamma' D), \quad z \longmapsto \Gamma\Gamma' z \ ),$$

tel que $F'(j_{\Gamma'\Gamma D',D'}).h_{D'}$ (resp. $F(j_{\Gamma\Gamma' D,D}).h'_D$) est un automorphisme intérieur de $F'(D')$ (resp. $F(D)$). On en déduit que $F'(D') = F'(\Gamma'\Gamma D')$ (resp. $F(D) = F(\Gamma\Gamma' D)$) et, puisque F' (resp. F) est injectif, il vient:

(4) pour tout objet D' (resp. D) de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$) on a $\Gamma'\Gamma D' = D'$ (resp. $\Gamma\Gamma' D = D$).

Si $z' : D' \longrightarrow D_1'$ (resp. $z : D \longrightarrow D_1$) est une flèche quelconque de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$), un raisonnement analogue montre qu'il existe une flèche $\Gamma z' : \Gamma D' \longrightarrow \Gamma D_1'$ (resp. $\Gamma' z : \Gamma' D \longrightarrow \Gamma' D_1$) de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) telle que:

(5) $\gamma_{D_1'}.\Gamma z' = z'.\gamma_{D'}$ (resp. $\gamma'_{D_1}.\Gamma' z = z.\gamma'_D$).

Si $z_1 : \Gamma D' \longrightarrow \Gamma D_1'$ (resp. $z_1' : \Gamma' D \longrightarrow \Gamma' D_1$) est une autre flèche de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) telle que $\gamma_{D_1'}.z_1 = z'.\gamma_{D'}$ (resp. $\gamma'_{D_1}.z_1' = z.\gamma'_D$), nous avons, en utilisant (4):

- $\gamma'_{\Gamma D_1'}.\gamma_{D_1'}.z_1 = \gamma'_{\Gamma D_1'}.\gamma_{D'}.\Gamma z' = \gamma'_{\Gamma D_1'}.z'.\gamma_{D'}$,

(resp. $\gamma_{\Gamma' D_1}.\gamma'_{D_1}.z_1' = \gamma_{\Gamma' D_1}.\gamma'_{D_1}.\Gamma' z = \gamma_{\Gamma' D_1}.z.\gamma'_D$).

En utilisant (2) et le fait que toute flèche de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) est un monomorphisme, on en déduit $z_1 = \Gamma z'$ (resp. $z_1' = \Gamma' z$) et donc:

(6) il existe une et une seule flèche $\Gamma z' : \Gamma D' \longrightarrow \Gamma D_1'$ (resp. $\Gamma' z : \Gamma' D \longrightarrow \Gamma' D_1$) de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$) vérifiant $\gamma_{D_1'}.\Gamma z' = z'.\gamma_{D'}$ (resp. $\gamma'_{D_1}.\Gamma' z = z.\gamma'_D$).

Clairement, de (6) il résulte immédiatement que:

- l'application $z' \longrightarrow \Gamma z'$ (resp. $z \longrightarrow \Gamma' z$) définit un foncteur $\Gamma : \underline{D}' \longrightarrow \underline{D}$ (resp. $\Gamma' : \underline{D} \longrightarrow \underline{D}'$),

- la famille $(\gamma_{D'} : \Gamma D' \longrightarrow D')_{D' \in Ob\underline{D}'}$ (resp. $(\gamma'_D : \Gamma' D \longrightarrow D)_{D \in Ob\underline{D}}$) définit une transformation naturelle $\gamma : \delta.\Gamma \longrightarrow \delta'$ (resp. $\gamma' : \delta'.\Gamma' \longrightarrow \delta$).

Utilisant 4 posons, pour tout objet D' (resp. D) de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$):

(7) $\gamma_{D'}.\gamma_{\Gamma D'} = \overline{d}'_{D'} : D' \longrightarrow D'$ (resp. $\gamma'_D.\gamma_{\Gamma' D} = \overline{d}_D : D \longrightarrow D$).

Nous avons donc:

$$- \ \bar{d}'_{D'} \cdot \gamma_{D'} = \gamma_D \cdot \gamma \vdash_{D'} \cdot \gamma_{D'} = \gamma_D \cdot \bar{d} \vdash_{D'} \quad ,$$

$$(\text{resp. } \bar{d}_D \cdot \gamma'_D = \gamma'_D \cdot \gamma \vdash_{,D} \cdot \gamma'_D = \gamma'_D \cdot \bar{d} \vdash_{,D} \ ).$$

En vertu de (6), nous en déduisons:

$$(8) \quad \Gamma(\bar{d}'_{D'},) = \bar{d}_{\Gamma D'} \qquad (\text{resp. } \Gamma'(\bar{d}_D) = \bar{d} \vdash_{,D} \ ) \ .$$

Appliquant (7) et (8), il vient:

$$- \ \gamma_{D'} \cdot (\gamma \vdash_{D'} \cdot \bar{d}'^{-1}_{D'}) = \bar{d}'_{D'} \cdot \bar{d}'^{-1}_{D'} = Id_{D'},$$

$$(\text{resp. } \gamma'_D \cdot (\gamma \vdash_{,D} \cdot \bar{d}_D^{-1}) = \bar{d}_D \cdot \bar{d}_D^{-1} = Id_D \ ),$$

$$- \ (\gamma \vdash_{D'} \cdot \bar{d}'^{-1}_{D'}) \cdot \gamma_{D'} = \gamma \vdash_{D'} \cdot \gamma_{D'} \cdot \bar{d} \vdash_{D'}^{-1} = \bar{d} \vdash_{D'} \cdot \bar{d} \vdash_{D'}^{-1} = Id \vdash_{D'},$$

$$(\text{resp. } (\gamma \vdash_{,D} \cdot \bar{d}_D^{-1}) \cdot \gamma'_D = \gamma \vdash_{,D} \cdot \gamma'_D \cdot \bar{d} \vdash_{,D}^{-1} = \bar{d} \vdash_{,D} \cdot \bar{d} \vdash_{,D}^{-1} = Id \vdash_{,D} \ ).$$

En conséquence, γ (resp. γ') est une équivalence naturelle.

Enfin, pour toute flèche $z: D \longrightarrow D_1$ (resp. $z': D' \longrightarrow D'_1$) de $\underline{D}$ (resp. $\underline{D}'$), posons:

$$(9) \qquad \tilde{\Gamma}'(z) = \bar{d} \vdash_{,D_1} \cdot \Gamma'(z) \cdot \bar{d} \vdash_{,D}^{-1}$$

$$(\text{resp. } \tilde{\Gamma}(z') = \bar{d} \vdash_{D'_1} \cdot \Gamma(z') \cdot \bar{d} \vdash_{D'}^{-1} \ ).$$

Clairement, on définit ainsi un foncteur $\tilde{\Gamma}': \underline{D} \longrightarrow \underline{D}'$

(resp. $\tilde{\Gamma}: \underline{D}' \longrightarrow \underline{D}$) .

Pour toute flèche $z': D' \longrightarrow D'_1$ (resp. $z: D \longrightarrow D_1$) de $\underline{D}'$ (resp. $\underline{D}$), nous avons alors, en utilisant (6):

$$- \ z' \cdot \gamma_{D'} \cdot \gamma \vdash_{D'} = \gamma_{D'_1} \cdot \Gamma z' \cdot \gamma \vdash_{D'} = \gamma_{D'_1} \cdot \gamma \vdash_{D'_1} \cdot \Gamma' \Gamma z'$$

$$(\text{resp. } z \cdot \gamma'_D \cdot \gamma \vdash_{,D} = \gamma'_{D_1} \cdot \Gamma' z \cdot \gamma \vdash_{,D} = \gamma'_{D_1} \cdot \gamma \vdash_{,D_1} \cdot \Gamma \Gamma' z' \ ) \ ,$$

ce qui s'écrit encore, en utilisant (7) et (9):

$$- \ z' = \tilde{\Gamma}' \Gamma(z') \quad (\text{resp. } z = \tilde{\Gamma} \cdot \Gamma'(z) \ ).$$

Autrement dit, Γ (resp. Γ') est un foncteur inversible, d'inverse $\tilde{\Gamma}'$ (resp. $\tilde{\Gamma}$).

D'où la conclusion. ⊡ .

Corollaire. Si B admet un diagramme localement libre naturalisé galoisien non trivial (i. e. non réduit à un seul objet), il ne peut admettre d'objet (localement) libre (naturalisé).

3. Exemples et applications.

Notons Corab la catégorie des corps commutatifs, Corabcl la sous-catégorie pleine de Corab dont les objets sont les corps commutatifs algébriquement clos et I: Corabcl ——> Corab le foncteur injection canonique.
Dans ces conditions, nous avons:

Exemple 1. Tout objet de Corab possède un sous-groupe localement libre naturalisé (relativement à I), unique à isomorphisme près.

Preuve. Soit K un corps commutatif et $k: K \longrightarrow \overline{K}$ un homomorphisme de corps présentant $\overline{K}$ comme clôture algébrique de K (on sait qu'un tel k existe!).
On note:

- $\underline{D}$ le sous-groupe de Corabcl constitué des K-automorphismes de $\overline{K}$, i. e. des automorphismes $d: \overline{K} \longrightarrow \overline{K}$ tels que $d.k = k$,

- $\delta: \underline{D} \longrightarrow$ Corabcl le foncteur injection canonique,

- $e = (e_K = k : K \longrightarrow \overline{K})$.

On vérifie aisément que (δ, e) est bien un sous-groupe localement libre naturalisé sur K. Son unicité résulte alors du troisième critère du §2. ⊡ .

Il convient de remarquer que, dans les traités classiques de "théorie des corps commutatifs", on établit bien que "tout corps commutatif K engendre une clôture algébrique $\overline{K}$" (c'est d'ailleurs ce résultat que nous nous contentons de formuler de manière précise!). Cependant, on n'y fait jamais remarquer expli-

citement que $\overline{K}$ n'est pas, en général, un objet libre sur K (relativement à I): comme, par contre, on n'omet pas de souligner que deux clôtures algébriques de K sont isomorphes, on incite plutôt le lecteur (novice) à penser le contraire (faute d'exposer les "raisons" de cette unicité à isomorphisme près ... i. e. la proposition 3).

Désignons, maintenant, par Corab_p la catégorie telle que:

- ses objets sont les corps commutatifs "pointés" par un polynome, i. e. les couples (K,P) formés d'un corps commutatif K et d'un polynome P à coefficients dans K , de degré supérieur ou égal à 1 ,

- ses morphismes sont les $((K,P),k,(K',P')): (K,P) \longrightarrow (K',P')$, où $k: K \longrightarrow K'$ est un homomorphisme transformant les coefficients de P (c'est-à-dire P) en ceux de P' (c'est-à-dire en P'); pour plus de commodité, nous noterons d'ailleurs $P' = P$.

Notons Corab_{clp} la sous-catégorie pleine de Corab_p dont les objets sont les (K,P) où K est "clos pour les racines de P", i. e. où P a toutes ses racines dans K .
On désigne alors par $I_p: \mathrm{Corab}_{clp} \longrightarrow \mathrm{Corab}_p$ le foncteur injection canonique.
Dans ces conditions, nous avons:

Exemple 2. Tout objet de Corab_p possède un sous-groupe localement libre naturalisé (relativement à I_p) unique à isomorphisme près.

Preuve. Soit K un corps commutatif, P un polynôme à coefficients dans K , de degré supérieur ou égal à 1 et $k: K \longrightarrow \overline{K}$ un homomorphisme présentant $\overline{K}$ comme clôture algébrique de K . Comme $\overline{K}$ est algébriquement clos, P admet toutes ses racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans $\overline{K}$. On désigne alors par:

- K(P) le plus petit sous-corps de $\overline{K}$ contenant K (i. e. k(K)) et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

- $k(P)$: $K \longrightarrow K(P)$ la restriction de k .

Bien entendu, $K(P)$ est "le" corps de rupture de P , de même que $(K(P),P)$ est un objet de Corab_{clp} et $((K,P),k(P),(K(P),P))$ est une flèche de Corab_{p}.
On note:

- $\underline{D}$ le sous-groupe de Corab_{clp} formé des $((K(P),P),d,(K(P),P))$ où $d: K(P) \longrightarrow K(P)$ est un K-automorphisme, i. e. vérifie $d.k(P) = k(P)$,

- $\delta: \underline{D} \longrightarrow \mathrm{Corab}_{clp}$ le foncteur injection canonique ,

- $e = (((K,P),k(P),(K(P),P)): (K,P) \longrightarrow (K(P),P)$) .

On vérifie aisément que (δ,e) est bien un sous-groupe localement libre naturalisé sur (K,P) . Son unicité résulte alors du troisième cas du §2. ☺ .

Remarquons que, dans les traités classiques de "théorie des corps commutatifs" , on énonce évidemment que "tout polynôme P, de degré supérieur ou égal à 1 , à coefficients dans un corps commutatif K , possède un plus petit corps de rupture $K(P)$ " (c'est évidemment ce résultat que nous nous contentons de formuler avec précision). Cependant, on ne précise pas que $K(P)$ n'est pas, en général, librement engendré par P (i. e. que $(K(P),P)$ n'est pas un objet libre sur (K,P) , relativement à I_p), comme, par contre, on n'omet pas d'insister sur le caractère "minimum" de $K(P)$ et sur son unicité à isomorphisme près, on incite le lecteur (novice) à penser le contraire (à moins de disposer des considérations du §2 !).

Notons, enfin, Corab_{racp} la sous-catégorie pleine de Corab_{p} dont les objets sont les (K,P) tels que P admet au moins une racine dans K et désignons par $I_{racp}: \mathrm{Corab}_{racp} \longrightarrow \mathrm{Corab}_{p}$ le foncteur injection canonique.
Dans ces conditions, nous avons:

Exemple 3. Tout objet (K,P) de Corab_p possède un diagramme localement libre naturalisé prégaloisien (relativement à I_{racp}). Si, de plus, le polynome P est séparable, ce diagramme est galoisien et donc unique à isomorphisme près.

Preuve. Nous reprenons les notations de la preuve de l'exemple 2 et nous identifions K à son image par $k(P)\colon K \longrightarrow K(P)$. On désigne par $\underline{D}'$ la sous-catégorie de Corab dont:

- les objets sont les sous-corps K' de $K(P)$ contenant K et dans lesquels P a au moins une racine,

- les morphismes sont les K-homomorphismes.

Alors, on note:

- $\underline{D}$ la sous-catégorie de Corab_{racp} constituée des $((K',P),k',(K'',P))\colon (K',P) \longrightarrow (K'',P)$ tels que $k'\colon K' \longrightarrow K''$ est une flèche de $\underline{D}'$,

- $\delta\colon \underline{D} \longrightarrow \mathrm{Corab}_{racp}$ le foncteur injection canonique,

- $e = (((K,P),k_{|K'},(K',P))\colon (K,P) \longrightarrow (K',P))_{(K',P) \in \mathrm{Ob}\,\underline{D}'}$

Evidemment, (δ,e) est un diagramme localement libre naturalisé prégaloisien sur (K,P).
De plus, si P est séparable, $K(P)$ est une extension galoisienne de K. Il en résulte que, si K' et K'' sont deux sous-corps de $K(P)$ contenant K et tels que $K\text{-Aut}(K') = K\text{-Aut}(K'')$, alors $K' = K''$ ("théorème fondamental de la Théorie de Galois"). Autrement dit, $\underline{D}'$ est une catégorie galoisienne, de même que $\underline{D}$, et (δ,e) est bien un diagramme localement libre naturalisé galoisien sur (K,P). D'où la conclusion, si l'on utilise le quatrième critère du §2. ☺ .

4. Remarques complémentaires.

On peut évidemment "combiner" entre eux les différents cas d'unicité (étudiés au §2). Par exemple: un diagramme localement libre

naturalisé "somme" de sous-groupes est unique à isomorphisme près.

Il ne faut pas croire qu'un cas d'unicité de diagramme localement libre naturalisé en assure, en général, la "minimalité". Ainsi, un sous-groupe localement libre naturalisé peut fort bien contenir un diagramme localement libre naturalisé "plus petit": par exemple, un sous-monoïde qui l'engendre.

Un autre type de spécification de formes de diagrammes localement libres naturalisés peut être recherché: plutôt que de s'attacher à des formes qui en assurent l'unicité (à isomorphisme près), on peut essayer de préciser des formes qui en assurent la naturalité quand B varie . Il se trouve que, dans les exemples du §3, on peut établir que les formes utilisées impliquent effectivement la naturalité. Ce point sera développé ultérieurement (voir, cependant, (S.M.M.L.)).

Bibliographie.

(C.A.L.O.) Y. Diers, Catégories localisables, Thèse, Paris 1977.

(C.M.C.F.) R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4, Paris 1980.

(S.M.M.L.) C. Lair, Sesqui-monades et monades locales, 1ère partie, Diagrammes 9, Paris 1983.

Université Paris 7
U.E.R. de Mathématiques
Tours 45-55, 5ème étage
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
FRANCE