Revue d'histoire des sciences

La position de Cavaillès dans le problème des fondements en mathématiques, et sa différence avec celle de Lautman

M Gerhard Heinzmann

Citer ce document / Cite this document :

Heinzmann Gerhard. La position de Cavaillès dans le problème des fondements en mathématiques, et sa différence avec celle de Lautman. In: Revue d'histoire des sciences, tome 40, n°1, 1987. Mathématique et philosophie : Jean Cavaillès et Albert Lautman. pp. 31-47;

doi : https://doi.org/10.3406/rhs.1987.4486

https://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1987_num_40_1_4486

Fichier pdf généré le 08/04/2018

Abstract

Summary. — When one examines the philosophical dispute over the foundations of mathematics around 1939, in retrospect one notes on the one hand a lack of recognition of intuition on the part of strict formalism, and on the other an underestimation of language on the part of mental intuitionism (section 1). Cavaillès attempts at unifying these two neglected aspects in a dialectical formalism. Starting from a pragmatic standpoint — where there is a mutual dépendance of object-constitution and description — one can go beyond the constructive mathematics provided that different levels of generation of formel objects are accompanied by correlative transformation of the initial intuition, i.e. the schemes of action constituting the primitive objects. A presentation of the technical means which Cavaillès proposed in order to realize the dialectical organisation of mathematics concludes section 2. Whereas by rejecting Platonism, Cavaillès faces difficulties in justifying abstractions, Lautman's rooting of the dialectical relations in Platonistic ideas is susceptible to Occam's razer. The proposed solution is to reinterpret the ideal schemes of Lautman in termes of language schemes (section 3).

Résumé

Résumé. — Un examen rétrospectif de la dispute philosophique sur les fondements des mathématiques aux alentours de 1939 montre un déficit de l'intuition du côté d'un formalisme strict et une sous-estimation du langage du côté d'un intuitionnisme mental (§ 1). Cavaillès cherche à unifier ces deux aspects négligés par un formalisme dialectique qui, partant d'une position pragmatiste où règne une dépendance mutuelle entre les objets et leurs descriptions, dépasse les mathématiques constructives sous la condition que les différents plans du processus d'engendrement d'objets formels soient accompagnés d'une transformation corrélative de l'intuition initiale, c'est-à-dire des schemes d'action constituant les objets primitifs. Une présentation des moyens techniques que Cavaillès compte faire intervenir pour réaliser l'organisation dialectique des mathématiques conclut le § 2. Si, en réfutant le platonisme, Cavaillès a des difficultés à justifier les abstractions, Lautman, en inscrivant les relations dialectiques dans des idées platoniciennes, est exposé au rasoir d'Occam. On propose une solution qui consiste dans une réinterprétation langagière des schemes idéaux de Lautman (§3).

BY: $ = creative commons

La position de Cavaillès dans le problème des fondements en mathématiques, et sa différence avec celle de Lautman

RÉSUMÉ. — Un examen rétrospectif de la dispute philosophique sur les fondements des mathématiques aux alentours de 1939 montre un déficit de l'intuition du côté d'un formalisme strict et une sous-estimation du langage du côté d'un intuitionnisme mental (§ 1).

Cavaillès cherche à unifier ces deux aspects négligés par un formalisme dialectique qui, partant d'une position pragmatiste où règne une dépendance mutuelle entre les objets et leurs descriptions, dépasse les mathématiques constructives sous la condition que les différents plans du processus d'engendrement d'objets formels soient accompagnés d'une transformation corrélative de l'intuition initiale, c'est-à-dire des schèmes d'action constituant les objets primitifs. Une présentation des moyens techniques que Cavaillès compte faire intervenir pour réaliser l'organisation dialectique des mathématiques conclut le § 2.

Si, en réfutant le platonisme, Cavaillès a des difficultés à justifier les abstractions, Lautman, en inscrivant les relations dialectiques dans des idées platoniciennes, est exposé au rasoir d'Occam. On propose une solution qui consiste dans une réinterprétation langagière des schèmes idéaux de Lautman (§ 3).

SUMMARY. — When one examines the philosophical dispute over the foundations of mathematics around 1939, in retrospect one notes on the one hand a lack of recognition of intuition on the part of strict formalism, and on the other an underestimation of language on the part of mental intuitionism (section 1).

Cavaillès attempts at unifying these two neglected aspects in a dialectical formalism. Starting from a pragmatic standpoint — where there is a mutual dependance of object-constitution and description — one can go beyond the constructive mathematics provided that different levels of generation of formel objects are accompanied by correlative transformation of the initial intuition, i.e. the schemes of action constituting the primitive objects. A presentation of the technical means which Cavaillès proposed in order to realize the dialectical organisation of mathematics concludes section 2.

Whereas by rejecting Platonism, Cavaillès faces difficulties in justifying abstractions, Lautman's rooting of the dialectical relations in Platonistic ideas is susceptible to Occam's razer. The proposed solution is to reinterpret the ideal schemes of Lautman in termes of language schemes (section 3).

Persée creative commons

1 / Depuis Platon les mathématiques sont considérées comme paradigme d'une science dont le contenu est véhiculé par des signes. Ainsi, selon le passage célèbre de la *Politeia*, « les mathématiciens se servent des formes visibles et s'y réfèrent dans leurs paroles, bien qu'ils ne raisonnent pas sur eux, mais sur leurs ressemblances » (1). Si ceci est correct, une recherche épistémologique sur la nature des objets mathématiques doit être de nature sémiotique. Même si on réfute le platonisme, la détermination du rapport particulier entre théorie de la connaissance et théorie de la signification appliqué aux objets mathématiques constitue la question philosophique du fondement des mathématiques. Ceux qui voulaient éliminer le caractère médiateur des signes en mathématiques, c'est-à-dire ceux qui confondaient les signes avec les objets d'un système syntactique, ont subi un échec. La tentative de transformer le problème philosophique du fondement en problème technique a perdu sa plausibilité en raison du 2^{e} théorème d'incomplétude de Gödel ; et les actions de sauvetage n'y changent rien, car les libéralisations des démarches « finitistes » dans la métamathématique (à la Gentzen) appartiennent déjà, comme le souligne Cavaillès (2), aux mathématiques, et les libéralisations au niveau du système syntactique (à la Lorenzen) (3) ôtent au système son caractère purement formel. Pour parler comme Cavaillès : le donné extérieur du système qui est préalablement introduit et auquel l'axiomatisation emprunte ses concepts, ne peut être éliminé par une démonstration de non-contradiction (4).

En résumé, une solution philosophique du problème des fondements exige non seulement la mise en œuvre de cette partie de la sémiotique qui s'occupe de la syntaxe des signes, mais encore de celle qui traite de leur signification, *i.e.* la sémantique.

Et pourtant, rien n'est gagné si on représente, dans la suite de Tarski, les expressions sémantiques, comme par exemple « vrai », « satisfaisable » ou « complet » (saturé), de leur côté dans un langage formel ; car ceci exige d'utiliser des moyens ensemblistes dans le langage descriptif. Mais quelles sont leurs significations ? Il est d'usage de les présupposer d'une manière naïve, c'est-à-dire non critique.

(1) 510 *d* 5-7.
(2) Cf. *Cavaillès 1981*, 165. [Cf. Bibliographie, 46-47.]
(3) Cf. *Lorenzen 1951*.
(4) Cf. *Cavaillès 1981*, 88-89.

Mais le déficit d'explication du formalisme ne s'arrête pas là. C'est Poincaré qui remarque le premier (5) que les difficultés philosophiques surgissent déjà avec la tentative de regagner les théorèmes et les conclusions des mathématiques intuitives dont la formalisation était à l'origine du formalisme. Sa crainte était justifiée : l'existence des propositions formellement indécidables et des modèles non standards de la théorie formalisée des nombres montre que le formalisme en question est trop large à l'égard de l'intuition guidant la formalisation. La possibilité d'indiquer d'une part une suite de précisions pour la théorie formalisée (6) et de signaler d'autre part des degrés d'indécidabilité (7) intéresse plus le mathématicien que le philosophe.

La faiblesse de la méthode axiomatique ne se montre donc pas seulement dans son emploi « formalisant », mais même dans son emploi « structurant ». Au donné extérieur de tout à l'heure correspond maintenant un donné intérieur, c'est-à-dire une unité à caractériser qui, faute de complétude, n'est pas toujours reproductible dans le système axiomatique (8).

Bien avant la découverte de ces insuffisances philosophiques du formalisme, Brouwer fondait les mathématiques pures sur l'intuition primitive de la dyade (9). Cette détermination des mathématiques est vague et est exposée au psychologisme. Cavaillès critique à juste titre le fait que les créations mathématiques demeurent alors liées aux instants subjectifs de l'histoire (10).

Mais il est non moins évident que la traduction de l'intuition primitive dans un formalisme poserait des problèmes analogues aux apories mentionnées ci-dessus. — C'est pour cette raison que Brouwer n'a jamais reconnu le formalisme de Heyting comme représentant intégral de ses intuitions. — De plus, si pour Brouwer les résultats extérieurs des mathématiques classiques restent accidentels, il n'arrive pourtant pas à expliquer, constate Cavaillès, « la permanence de ces rencontres accidentelles » (11). Le caractère informel des mathématiques intuitives permet, certes, au formaliste

(5) Cf. *Poincaré 1905,* 821 et 834.
(6) Cf. *e.g. Müller 1961.*
(7) Cf. *e.g. Kleene 1980,* 315.
(8) Cf. *Cavaillès 1981,* 88-89.
(9) Cf. *Brouwer 1975,* 418-419.
(10) Cf. *Cavaillès 1937,* 137 ; cf. également *Cavaillès 1981,* 43.
(11) Cf. *Cavaillès 1937,* 137.

de voir l'intérêt principal de la dispute entre intuitionnisme et formalisme dans la controverse sur l'emploi des méthodes informelles (intuitionnistes ou (trans)finies) dans la métamathématique : en d'autres termes, on substitue la *general proof theory* à la *reductive proof theory* (12). Mais alors le débat sur les conditions d'existence des objets mathématiques est ainsi détourné.

Reste le logicisme. Ici « les démonstrations de non-contradiction ne sont que confirmation, non fondement ». Car tout signe logique devait être la représentation d'une notion intuitivement claire et tout signe mathématique devait avoir un sens purement logique (13). Mais la réduction de l'arithmétique générale (ses procédés de démonstration inclus) à la logique au sens strict n'a pas réussi et la réduction des systèmes mathématiques à la théorie des ensembles est un fondement mathématique et non philosophique.

Les trois approches, formalisme, intuitionnisme et logicisme ont au moins un point commun : elles partagent une attitude *descriptive* qui se rapporte soit à un langage trop riche pour remplir le programme hilbertien, soit à une activité trop complexe pour lui attribuer des étiquettes langagières, soit à une évidence analytique trop étroite pour accueillir le corpus mathématique.

Ceci suggère de reprendre le débat avec des données modifiées : d'une part, Brouwer semble sous-estimer le rôle des symboles dans la connaissance mathématique, d'autre part, une conception sclérosée de l'intuition — soit au niveau d'objets, soit au métaniveau — ne semble plus adéquate aux exigences des opérations symboliques. Il serait donc souhaitable d'unifier dans une nouvelle approche les deux aspects.

2 / C'est cette situation systématique que Cavaillès a pressentie et il était d'ailleurs soutenu par une situation historique bien précise en France : en effet, dans les années trente, de jeunes mathématiciens français, fondateurs du cercle Bourbaki, entreprennent une révolution interne contre l'esprit de l'école dominatrice des intuitionnistes ou, plus exactement, des semi-intuitionnistes (comme Borel, Baire, Lebesgue) : c'est-à-dire, ils échangent l'esprit de Descartes défiguré contre celui de Leibniz, amputé de sa conséquence ; à savoir l'esprit intuitionniste qui souligne l'intuition par

(12) Cf. *Prawitz 1974*, 65 sq.
(13) Cf. *Cavaillès 1981*, 165.

rapport au discours (14) (d'où, chez Descartes, le refus du passage à la limite (15) et, chez les semi-intuitionnistes, la limitation du concept de l'infini), contre l'esprit analytique qui ne raisonne qu'à travers des expressions symboliques. L'héritage de Leibniz trouve son couronnement dans les *Principia Mathematica*, dont la méthode de formalisation conditionne le programme de Hilbert. Or, au moins C. Chevalley, J. Herbrand, J. Dieudonné et A. Weyl le connaissent bien. Ils optent, vu les insuffisances du traité intuitionniste de Goursat : *Le calcul différentiel*, pour la méthode axiomatique (16), sans pour autant adopter le programme fondateur de la théorie de la démonstration. Cette attitude sceptique qu'exprime Bourbaki à l'égard des démonstrations de non-contradiction (17) remonte déjà (comme le mentionne Bourbaki) à Hadamard qui écrit en 1904 à Borel : « Je ne comprends même pas bien comment M. Zermelo peut avoir *démontré* que *nous n'apercevons* pas de contradiction, etc. Cela ne *se démontre* pas, cela se *constate* : on en a aperçu ou l'on n'en a pas aperçu » (18). Ainsi les bourbakistes abandonnent toute revendication justificative qui ne se déduit pas du résultat : car une théorie formelle ne représente pas une relation justificative ; elle en est seulement sa forme possible dans la mesure où on peut construire un modèle (19). En ce point précis, leur système hypothético-déductif rejoint la solution conditionnelle de Russell.

Venons-en à parler maintenant de la contre-révolution de Cavaillès, de son formalisme modifié — comme il l'appelle — ou de son intuitionnisme modifié — comme on dirait, si on voulait restituer la tradition avec Poincaré et ses successeurs.

D'abord, Cavaillès réfute l'alternative de la conception hypothético-déductive de ses amis ; il l'accuse d'un caractère inintelligible (20) ; la négligence philosophique de la conception hypothético-déductive est d'omettre d'expliquer le caractère déductif du système. La position non critique vis-à-vis de l'évidence logique rapproche Bourbaki de Frege et le sépare de Hilbert qui, dès 1904,

(14) Cf. *Cavaillès 1981*, 7, 22.
(15) Cf. *Vuillemin 1962*, 31.
(16) Cf. *Guedj 1985*, 19.
(17) Cf. *Bourbaki 1960*, 57 sq.
(18) *Hadamard 1928*, 157.
(19) Cf. *Thiel 1973*, 101.
(20) Cf. *Cavaillès/Lautman 1939*, 6 sq. et *Cavaillès 1976*, 25.

et peut-être sous l'influence de Poincaré, procède à une construction simultanée de l'arithmétique et de la logique. La non-contradiction de l'arithmétique concerne, dans la démonstration de Gentzen, justement le raisonnement déductif à partir des formules atomiques déjà présupposées comme vraies (21). La non-contradiction est la base de la déduction. Tel est l'avis de Cavaillès :

« Pour caractériser en tant que systèmes déductifs ces systèmes [hypothético-déductifs] formels, il faut déjà employer les mathématiques... caractériser un système comme système déductif..., c'est démontrer sa non-contradiction » (22). « Le problème du fondement des mathémathiques est justement que l'on puisse déduire quelque chose... C'est la notion de démonstration, masquée par l'image vague de déduction logique, qui doit être approfondie... Tant que les axiomes ne sont pas parfaitement analysés logiquement, il est vain de parler de déduction » (23).

Le système hypothético-déductif est soit mixte, c'est-à-dire hilbertien jusqu'à un certain stade, soit exclusivement hypothétique.

Quelle solution nous propose Cavaillès ? En accord avec le brouwerisme (et contre le logicisme), Cavaillès veut maintenir une activité intuitive et originale (24) et concilier cette activité avec deux thèmes du formalisme : d'une part, avec la méthode axiomatique et les processus d'engendrement, d'autre part, avec la théorie du signe (25) ; il lie implicitement ou explicitement ces propositions avec trois points majeurs : premièrement, il espère éviter une démonstration de non-contradiction que nécessite un formalisme radical ; deuxièmement, il est conduit à admettre un élément précurseur de Lakatos, à savoir l'accroissement dialectique de la connaissance par rupture dans le tissu mathématique (26), et troisièmement, en abandonnant tout *a priori* (27), il compte dépasser les restrictions imposées par l'intuitionnisme à la logique.

(21) Cf. *Gentzen 1936*, 498.
(22) *Cavaillès/Lautman 1939*, 7.
(23) *Cavaillès 1981*, 89.
(24) Cf. *Cavaillès 1937*, 137-138.
(25) Cf. *Cavaillès 1981*, 171.
(26) *Ibid.*, 172 et *Lakatos 1976*. Il importe de souligner que les théories quasi empiriques de *Lakatos 1976* sont des théories empiristes et non empiriques ; cf. *Thiel 1981*, 205.
(27) *Cavaillès 1981*, 181 sq.

Avec ce programme, soutenu en 1937 au Congrès Descartes à Paris, Cavaillès n'est pas seul dans le paysage de la philosophie francophone. En Suisse, Ferdinand Gonseth poursuit un but semblable. Car renoncer à la partie défaillante d'une axiomatisation formalisante, c'est-à-dire à une démonstration de non-contradiction, revient à déterminer une structure non plus à travers la définition, en principe arbitraire, d'un système formel, mais à travers un processus dialectique d'abstraction et de schématisation (28) qui porte sur des objets et des relations eux-mêmes constitués.

La parenté intellectuelle de Gonseth et Cavaillès se maintient au-delà de toute divergence à l'égard de la méthode d'abstraction effectivement choisie. Les remarques approbatives de Gonseth dans son rapport du Congrès Descartes en sont un témoignage (29).

Comment Cavaillès précise-t-il le cadre indiqué ? Quelle est l'activité originale en mathématiques, quel est le contenu positif de la dialectique mathématique ? Puisque la philosophie de Cavaillès, la voie husserlienne une fois déconstruite, n'est qu'une amorce à la recherche d'une solution cohérente, la question posée demande aussitôt une modification : quels moyens d'interprétation permettent d'élucider (ou d'établir) non seulement les insécurités terminologiques, mais également les argumentations inachevées au moins concernant la thèse centrale ? Je propose l'outil pragmatiste qui a l'avantage de partager avec Cavaillès son point de départ : il refuse d'accorder une indépendance respective au niveau des objets (intuitionnisme) et au niveau de la description (formalisme), comme soutenait encore l'empirisme mental de Brouwer et un formalisme radical. Selon Cavaillès, « l'existence des objets est corrélative de l'actualisation d'une méthode » (30) ou corrélative « de gestes effectivement accomplis par le mathématicien dans une situation donnée » (31).

« De sorte que nous ne pouvons jamais ni les poser en soi, ni dire exactement : ici est le monde — un monde que nous décririons. Chaque fois nous sommes obligés de dire : ce sont là des corrélats d'une activité » (32). C'est un « préjugé — d'ontologie non critique — que l'objet doit être défini antérieurement à l'opération, alors qu'il en est inséparable » (33).

(28) Cf. *Heinzmann 1982,* 43 sq.
(29) Cf. *Gonseth 1938,* 188-189.
(30) *Cavaillès/Lautman 1939,* 3.
(31) *Ibid.,* 10.
(32) *Ibid.,* 12.
(33) *Cavaillès 1981,* 178.

Les objets initiaux du monde mathématique ne sont pas des entités comme « les nombres entiers ou les éléments d'intuition spéciale » (34). L'hypostase des « objets mathématiques existant en soi n'est nullement nécessaire pour garantir le raisonnement mathématique » (35). En un mot, le platonisme est à soumettre au rasoir d'Occam.

Toutes ces vues concordent avec une approche pragmatiste. Elle est même soutenue dans son aspect sémiotique : la tradition selon laquelle un signe est dès le début un nom propre d'un objet abstrait, existant indépendamment du signe, est remplacée en faveur d'un point de vue sympathisant avec l'expression wittgensteinienne :

> « Le sens du signe, c'est son mode d'emploi » (36). Le signe « renvoie aux actes qui l'utilisent » (37). « Le symbole est intérieur à l'acte » (38). Ou encore : « Un symbole n'est tel que par l'intention qui dirige vers des opérations intuitives. La langue mathématique n'est qu'indication vers des actes effectifs dans l'esprit du mathématicien » (39).

Mais Cavaillès se rapproche complètement de la thèse pragmatiste dans la conclusion de son livre *Méthode axiomatique et formalisme* — à condition qu'on le relie au contexte des citations données : selon Cavaillès le discours est l'accompagnement symbolique de la conscience, il est « jalonnement par la conscience des étapes de son action sur les choses » (40). J'interprète : le rôle du langage dans la construction d'objets est au début l'aspect symbolique d'une action dite intuitive. Une action est appelée intuitive, si on la considère sous son aspect « exécutif » *(ausführend)* et si on néglige son aspect schématique *(anführend)*.

Maintenant, un dictum de Cavaillès sur la question de non-contradiction, jusqu'à présent peu clair, devient, appliqué à la phase initiale opérationnaliste, compréhensible. Citons Cavaillès : « Le caractère non contradictoire — qui ne concerne que l'expression verbale — ... n'est que le déguisement d'une effectuation reconnue comme toujours possible de certaines opérations intui-

(34) *Cavaillès 1937*, 137.
(35) *Cavaillès/Lautman 1939*, 11.
(36) *Ibid.*, 33.
(37) *Cavaillès 1976*, 38.
(38) *Ibid.*, 39.
(39) *Cavaillès 1937*, 136.
(40) *Cavaillès 1981*, 179.

tives » (41). En d'autres termes, le langage est la description schématique de l'effectuation. Mais Cavaillès veut se libérer des contraintes opérationnalistes. Dans ce but il introduit le concept d'expérience mathématique. Il appelle l'activité des mathématiciens une activité expérimentale et entend par expérience — en changeant consciemment la signification habituelle de ce terme — « un système de gestes, régi par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes » (42). Cette expérience mathématique doit être autonome par rapport à l'expérience physique. « Sans quoi, on arriverait au paradoxe qu'une théorie mathématique est plus vraie quand elle reçoit une utilisation physique » (43). Reconnaissant ainsi le vague de sa définition, Cavaillès précise qu'il veut dire par expérience que « les opérations et règles n'ont de sens que relativement à un système mathématique antérieur » dont elles dépendent seulement partiellement (44). La possibilité d'une telle indépendance partielle signifie l'abandon d'une intuition initiale qui, après avoir guidé les schèmes d'action d'un pragmatisme opérationnaliste, devient conscience fragmentaire (45). L'idéalisation de nos facultés effectives est maîtrisée au niveau des signes (46). Mais à ce niveau le signe n'est plus une partie symptomatique de l'objet. Maintenant le langage est considéré dans un rôle purement descriptif par rapport à une actualisation extérieure : « Qu'est-ce en effet qu'idéaliser, sinon raboter l'extrinsèque, ce qui est lié pour la pensée du savant au factice (c'est-à-dire sortant du fait) de son actualisation présente et n'aurait de sens que relativement à lui » (47). Ainsi on se libère de « l'exigence d'arithmétisation possible » (48) et on garantit le passage des mathématiques constructives aux mathématiques non prédicatives (l'identification de « constructif » à « prédicatif » est un malentendu de Cavaillès suggéré par les travaux de Gödel sur les ensembles constructibles) (49). Le prix en est l'introduction d'un élément quasi

(41) *Cavaillès 1937*, 138.
(42) *Cavaillès/Lautman 1939*, 9.
(43) *Cavaillès 1939*, 41.
(44) *Cavaillès/Lautman 1939*, 2 et 9.
(45) Cf. *Cavaillès 1981*, 177.
(46) *Ibid.*, 173.
(47) Cf. *Cavaillès 1976*, 68.
(48) Cf. *Cavaillès 1937*, 138.
(49) Cf. *Cavaillès 1962*, 267.

empirique qui consiste à soumettre la théorie à la sanction possible d'un échec dans ses résultats (50) entraînant pour sa part un renversement dialectique (51). Puisque nous sommes en mathématiques, les résultats ne décrivent pas un événement : ils ne sont qu'accomplissement et l'expérience de leur échec « (impossibilité d'accomplissement d'un geste prévu par la conscience inadéquate) » (52) ne signifie que contradiction. Mais que dire des actes mathématiques en l'absence d'une contradiction manifeste, comment maintenir une revendication justificative ? Quelles sont les règles dirigeant les « expériences faites sur les formules » (53) ?

Refusant en même temps un ciel platoniste, une approche hypothético-déductive, un constructivisme strict et une conception formaliste d'un jeu de symboles devenu « illégitime » après Gödel, l'idée de Cavaillès est de faire accompagner les processus d'engendrement d'objets au niveau conceptuel de la description d'une transformation corrélative de l'intuition, c'est-à-dire des procédés au niveau de la construction. La relation uniforme entre « langage et travail » (54) et sa conception sous-jacente d'une intuition rigide et d'un progrès linéaire doivent être abandonnées ou transformées en une dialectique du concept :

> « Ce n'est pas une philosophie de la conscience, mais une philosophie du concept qui peut donner une doctrine de la science. La nécessité génératrice n'est pas celle d'une activité, mais d'une dialectique » (55).
>
> « Le lien entre superposition intuitive et la dialectique du concept reste le problème fondamental de la philosophie mathématique » (56). Il faut que « l'intuition dans sa quiddité progresse parallèlement à l'enchaînement dialectique du concept » (57).

La dialectique en question dépasse une simple corrélation par son élément rétroactif : l'indépendance de l'expérience en face d'un procédé donné (58) ne conduit pas seulement à la découverte

(50) Cf. *Cavaillès/Lautman 1939*, 2.

(51) Cf. *Cavaillès 1962*, 273 : « La description est bien connue de ces renversements historiques où le résultat fait éclater la méthode et le système tout entier dont il est issu. »

(52) *Cavaillès 1981*, 180.

(53) Cf. *ibid.*, 175.

(54) Cf. *Cavaillès 1981*, 182 et *Cavaillès 1937*, 136.

(55) *Cavaillès 1976*, 78.

(56) *Cavaillès 1962*, 273.

(57) *Ibid.*

(58) Cf. *Cavaillès 1981*, 181.

d'une nouvelle « traduction dans une intuition immuable » (59), mais à une transformation même de la « zone intuitive » (60). Et intuitif est ici « synonyme de conscience effective (ou effectuante)... relativement à un système conceptuel donné » (61). Le système conceptuel est considéré comme objet. Cavaillès emploie le mot « dialectique » pour constituer le lien entre signes et gestes, entre concept et intuition ou, en invariance du niveau considéré, entre théorie et pratique (62) dont chaque terme opposé n'est qu'un autre aspect d'un tout. Le fait que la constitution des objets nécessite un aspect théorique et un aspect pratique a été formulé dans des termes semblables par Gonseth — bien que sa notion d'expérience soit pourtant différente (63) — et se trouve déjà chez Kant : selon lui les concepts sans intuition sont vides et les intuitions sans concepts sont aveugles (64). Avec, toutefois, la différence que chez Kant les termes de la liaison furent préalablement donnés (65).

Reste le problème crucial de la réalisation technique de cette dialectique ; « comment peut-on réaliser ces expériences ? » (66) se demande Cavaillès en espérant pouvoir préciser plus tard. Il se contente en effet d'indiquer quelques « processus d'engendrement » tels que la « formalisation », la « thématisation proprement dite » ou « l'idéalisation » (67).

Le processus de libération conduisant à la formalisation est double (le terme « formalisation » ne signifie dans ce contexte que le passage à un langage formel) : « longitudinal » et « vertical » (68) :

(59) Cf. *Cavaillès 1962*, 272.

(60) Cf. *Cavaillès 1981*, 179.

(61) Cf. *Cavaillès 1962*, 274.

(62) Les différents couples qui expriment chez Cavaillès les aspects de cette relation sont : « discours et expérience » (*Cavaillès 1981*, 179), « langue et travail » (cf. note 34), « symbole et opération intuitive » (*Cavaillès 1937*, 136), « usage du signe et expérience sur les symboles [mention du signe] » (*Cavaillès 1981*, 96/97), « penser et faire » (*Cavaillès/Lautman 1939*, 33), « nécessaire et contingent » (*ibid.*, 9 et *Cavaillès 1937*, 137) et « multiplicité et singulier/actualisation » (*Cavaillès 1962*, 271 et 273).

(63) Cf. *Gonseth 1939*, 43 sq.

(64) Cf. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, B 75.

(65) Cf. *Cavaillès 1981*, 178 : « C'est ici le sens plein de l'expérience, dialogue entre l'activité consciente en tant que pouvoir de tentatives soumises à des conditions et ces conditions mêmes. Distinguer l'une comme entendement, les autres comme sensibilité n'avancerait que si, d'un côté au moins, une structure était possible à préciser. »

(66) *Cavaillès/Lautman 1939*, 10.

(67) Cf. *Cavaillès 1981*, 177 et *Cavaillès/Lautman 1939*, 10.

(68) Cf. *Cavaillès 1976*, 27.

longitudinalement, on passe d'une « liaison acte » à une « liaison type » (69) ou à la forme, appelée « sens », c'est-à-dire on considère une relation, *e.g.* l'addition $a + b = c$, comme actualisation ou paradigme d'un schème de l'addition abstraite : $x + y = z$ (70). La dissociation entre « acte » et « sens » correspond à la différence entre une attribution d'un nom propre et la connaissance de ses règles de substitution qui permettent de passer à la lettre schématique (71) et à la variable. Dans les deux cas, le langage est du 1er degré. L'autre moment, vertical, thématise le résultat de la généralisation schématique sur un autre plan : il fixe ses propriétés — en se rappelant des modes qui l'ont engendré ; il fixe, exprimé dans le langage de notre exemple, les principes (universels) d'associativité et de commutativité pour l'addition abstraite (72). Ainsi on arrive à une définition descriptive d'une structure dont l'addition et la multiplication sur N sont des modèles. Malheureusement Cavaillès n'explique pas le mécanisme de « l'influence rétroactive » (73) de la structure sur ses modèles intuitifs. Dans quelle mesure l'*intuition* que nous en avons se transforme ?

Le terme « thématisation proprement dite » désigne la construction itérative de différents plans de langages dont « la topologie des transformations topologiques » constitue l'exemple d'application standard (74). Mais, comme au cas précédent, le principe d'abstraction qui devrait assurer « la transformation d'une opération en élément d'un champ opératoire supérieur » (75), c'est-à-dire le procédé qui justifierait de parler d'un objet abstrait en termes d'un objet concret, est à peine effleuré : « le domaine nouveau est un champ intuitif par coordination avec le domaine intuitif préalable » (76). « Ce n'est pas de quitter que d'agir sur lui (tout objet abstrait, obtenu, par exemple, par thématisation, est un geste sur un geste... sur un geste sur le sensible primitif) » (77). Mais comment déterminer la coordination ?

(69) Cf. *ibid.*, 28.
(70) Cf. *ibid.*, 31.
(71) Cf. *ibid.*, 29.
(72) Cf. *ibid.*, 31-32.
(73) Cf. *ibid.*, 32.
(74) Cf. *Cavaillès 1937*, 138.
(75) *Ibid.*
(76) *Ibid.* ; ce passage rappelle sans doute Piaget.
(77) *Cavaillès 1981*, 178.

L'idéalisation consiste à libérer les opérations des conditions extrinsèques à leur accomplissement, « et ceci par la position d'un système d'objets qui ne coïncide plus avec les objets de l'intuition ». Des exemples sont : libérer la restriction du *tertium non datur* aux ensembles finis ou l'adjonction des nombres réels aux rationnels par l'extraction de racines (78). Chaque fois l'acte de l'expérience assure une universalité agrandie à un procédé dont l'actualisation antérieure était limitée. Certes, mais comment contrôler cette libération, comment reconnaître que la condition est extrinsèque ? Comment distinguer un langage fictif d'un langage libéré des limitations « extrinsèques » ? A cet endroit, il est peut-être utile de rappeler la critique de Gödel concernant la méthode de l'adjonction des idéaux. Elle se trouve dans la « Discussion sur les fondements des mathématiques » reproduite dans l'*Erkenntnis II* (79). Soit un système opérationaliste S donné auquel on adjoint un système T transfini. La méthode présuppose que la démonstration d'un théorème *p* de S à l'aide de T garde son interprétation opérationaliste, si la réunion A des systèmes est non contradictoire. Mais ceci n'est pas nécessairement vrai. Car la non-contradiction dit seulement que « non *p* » n'est pas démontrable. Il n'est pas exclu que « non *p* » permette une interprétation opérationaliste formellement non exprimable dans A. Le faux théorème *p* serait donc démontrable. Selon Cavaillès, il faut octroyer quelques conditions supplémentaires au système transfini. C'est une solution raisonnable, puisque l'alternative introduisant une précision formelle dans les moyens se rapportant au contenu conduit directement à la difficulté de principe du formalisme, à savoir de « contrôler » les formalisations.

Dans sa description de l'approche hilbertienne, Cavaillès subordonne la « constatation d'une réussite » (80) de l'engendrement d'objet au critère d'une « double liaison avec le domaine primitif » (81) : *a)* A une condition qui « assure le libre passage de bas en haut », c'est-à-dire à « la possibilité d'y retraduire [dans le domaine primitif] opérations et objets nouveaux », de telle sorte qu'il soit toujours possible « de donner à une opération son sens concret de système plus ou moins compliqué d'opérations sur les

(78) Cf. *Cavaillès 1981*, 96 et 181.
(79) Cf. *Gödel 1931*, 147-148.
(80) Cf. *Cavaillès 1981*, 177.
(81) Cf. *ibid.*, 97.

entiers » (82) ; *b)* A une condition garantissant le passage de haut en bas, il doit être possible de restituer le système initial « par élimination des idéaux : [par exemple] la partie réelle d'un nombre complexe étant réelle, on retrouve les opérations sur les nombres réels » (83). Bien que Cavaillès ne soit pas très rassuré quant à la satisfaction de la première condition pour l'application universelle du tiers exclu (84) (la condition semble limiter l'application de l'idéalisation à des ensembles dénombrables munis de désignations de nombres naturels), il n'a plus eu le temps d'éclaircir la question. Son résumé : « comprendre est [...] attraper le geste et pouvoir continuer » (85) reste programmateur et la *quaestio iuris* se confond avec la *quaestio facti.*

3 / C'est à cet endroit que se manifeste une différence fondamentale entre Cavaillès et Lautman qui, lui, semble capable de répondre à la question du fondement au sens de la *quaestio iuris.* Je m'explique : l'ébauche de la réalisation technique complétant l'esquisse théorique de Cavaillès induit à l'interprétation, soutenue par Piaget (86), que les synthèses dialectiques s'établissent au niveau même des objets mathématiques (87). Sous peine de cercle, une telle position échoue devant la question fondatrice : pour justifier un processus par une synthèse, ce processus ne peut servir en tant que perspective unifiante, si on maintient en même temps une valeur justificative. Si, par contre, on entend par fondement la fondation axiomatico-déductive qui décèle obscurité et incohérence du raisonnement mathématique, Cavaillès — et avec lui les bourbakistes (88) — ont sans doute raison de souligner le devenir autonome des mathématiques à l'égard de la philosophie. Ce que cherche le philosophe, c'est le cadre conceptuel permettant de comprendre dans quelle mesure une analyse approfondie de la *pratique* mathématique (de la fondation) conduit à une extension de sa compréhension *théorique* (de son fondement) (89).

(82) *Ibid.*
(83) Cf. *Cavaillès 1981,* 97.
(84) Cf. *ibid.,* 98.
(85) *Ibid.,* 178.
(86) Cf. *Heinzmann 1982,* 39.
(87) Cf. *Cavaillès 1937,* 137, *Cavaillès 1939,* 43 et *Cavaillès 1981,* 178 : « Quant au moteur du processus dialectique de la généralisation, il semble échapper à toute investigation. » Il est significatif que Piaget cite ce passage à l'appui d'une convergence de la position de Cavaillès avec sa propre position « génétique » (cf. *Piaget 1950,* 327-328).
(88) Cf. *Cavaillès/Lautman 1939,* 8 et *Dieudonné 1951,* 52.
(89) Cf. *Kreisel/Krivine 1967,* 155.

Lautman répond au conflit d'instances par l'hypostase d'une « réalité idéale » dont les mathématiques sont bien la *ratio cognoscendi*, mais qui est conçue « comme indépendante de l'activité de l'esprit » (90). Inséparables (91) dans l'ordre chronologique, dominatrices, dans l'ordre transcendental, ces idées sont une sorte de schèmes idéaux où sont inscrites les relations dialectiques possibles, inhérentes aux mathématiques (92). Qui a raison ? Cavaillès qui réfute le platonisme (93) ou Lautman qui y a recours ? Ceci semble être une question de goût : préfère-t-on un devenir ouvert sans fondement ou un fondement basé sur une spéculation transcendentale concernant une « Dialectique supérieure » (94) où les mathématiques puisent leur sens ?

A mon avis, les idées de Lautman peuvent contribuer à une possible restitution de la pensée de Cavaillès, à condition qu'on les soumette au rasoir d'Occam : elles seraient à réinterpréter en tant qu'aspects conceptuels ou langagiers de l'activité mathématique. Ainsi la genèse pragmatique des mathématiques doit être insérée dans un cadre langagier comme méthode d'investigation où les objets du premier niveau sont des abstractions de schèmes d'action concernant des figures et où l'on gagne les ensembles dans une construction itérative par abstraction sur des formes propositionnelles logiquement équivalentes dont le domaine est constitué par le niveau antérieur. En ce sens, l'autonomie des mathématiques serait limitée par une dialectique entre éléments descriptifs et leurs représentations constitutives (« intuitives »). Mais, même si cette interprétation « constructive » établit une extrapolation fructueuse du point de départ systématique de Cavaillès (95), elle exclut néanmoins les « ruptures dans le tissu mathématique » explicitement admises par lui (96).

Gerhard HEINZMANN.

Universität des Saarlandes
Saarbrücken

(90) *Cavaillès/Lautman 1939*, 39.
(91) Cf. *Lautman 1977*, 206.
(92) Cf. *ibid.*, 210.
(93) Cf. *Cavaillès/Lautman 1939*, 11.
(94) *Lautman 1977*, 203.
(95) Cf. *supra*, p. 4.
(96) Cf. *supra*, p. 4 et 7.

BIBLIOGRAPHIE

Bourbaki, N. :

1960. *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris.

Brouwer, L.E.J. :

1975. Mathematik, Wissenschaft und Sprache, dans *Collected Works*, ed. A. Heyting, New York, 417-428.

Cavaillès, J. :

1937. Réflexions sur le fondement des mathématiques (Congrès Descartes, t. VI), *ASI 535*, 136-139.

1939. Contribution à la discussion d'une conférence de F. Gonseth, dans *ASI 850* (Entretiens d'Amersfoort), 40-43.

1962. Transfini et continu, dans Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Paris, 255-274.

1976. *Sur la logique et la théorie de la science* (3e éd.), Paris.

1981. *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondemen des mathématiques* (2e éd.), Paris.

Cavaillès, J./Lautman, A. :

1939. La pensée mathématique, *Bull. soc. française phil.*, *40*, 1-39.

Dieudonné, J. :

1951. L'axiomatique dans les mathématiques modernes, dans *XVIe Congrès international de Philosophie des Sciences, Paris, 1949*, Paris.

Gentzen, G. :

1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Annalen*, *112*, 493-565.

Gödel, K :

1931. Diskussionsbeitrag zur Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis 2*, 147-148 et 149-151.

Gonseth, F. :

1938. Questions de Philosophie scientifique, *Revue thomiste*, *44*, 183-193.

1939. Discussion avec J. Cavaillès, dans *ASI 850* (Entretiens d'Amersfoort), 43-48.

Guedj, D. :

1985. Nicolas Bourbaki, Collective Mathematician. An Interview with Claude Chevalley, *The Mathematical Intelligencer*, *7*, 18-22.

Hadamard, J. :

1928. Cinq lettres sur la théorie des ensembles, de MM. Hadamard, Borel, Baire et Lebesgue, dans E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions* (3e éd.), Paris, 150-160 ; (1re éd. dans *Bull. soc. math. de France*, *33* (1905)).

Heinzmann, G. :

1982. *Schematisierte Strukturen. Eine Untersuchung über den Idoneismus F. Gonseths auf dem Hintergrund eines konstruktivistischen Ansatzes*, Bern.

Kleene, S. C. :

1980. *Introduction to metamathematics* (eight repr.), Groningen/Amsterdam/ New York.

Kreisel, G./Krivine, J.-L. :

1967. *Eléments de logique mathématique. Théorie des modèles*, Paris.

Lakatos, Imre :

1976. *Proofs and refutations - The logic of mathematical discovery*, London.

Lautman, A. :

1977. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Paris.

Lorenzen, P. :

1951. Algebraische und logizistische Untersuchungen über freie Verbände, *The Journal of symbolic logic, 16*, 81-106.

Müller, G. H. :

1961. Nicht-Standardmodelle der Zahlentheorie, *Math. Zeitschr., 77*, 414-438.

Piaget, J. :

1950. *Introduction à l'épistémologie génétique*, Paris.

Poincaré, H. :

1905. Les mathématiques et la logique, *Revue de Métaphysique et de Morale, 13*, 815-835 ; réimpr. dans G. Heinzmann, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, Paris, 1986, 11-34.

Prawitz, D. :

1974. On the idea of a general proof theory, *Synthese, 27*, 63-77.

Thiel, Christian :

1973. Das Begründungsproblem der Mathematik und die Philosophie, dans F. Kambartel, J. Mittelstrass, *Zum normativen Fundament der Wissenschaft*, Frankfurt, 91-114.

1981. Lakatos Dialektik der mathematischen Vernunft, dans H. Poser (éd.), *Wandel des Vernunftbegriffes*, Freiburg/München, 201-221.

Vuillemin, Jules :

1962. *La philosophie de l'algèbre*, t. 1, Paris.