Foncteurs analytiques et espèces de structures

par

André Joyal
Université du Québec à Montréal

Introduction

Le but de ce travail est d'exposer la théorie des espèces de structures en relation avec la théorie des foncteurs analytiques. Ceci permet de donner à la théorie des opérations sur les espèces de structures une base conceptuelle satisfaisante. Nous développerons ensuite la théorie des espèces tensorielles en gardant en vue des applications aux algèbres de Lie libres.

Chapitre 1. Foncteurs analytiques

1.0. La construction du monoïde librement engendré par un ensemble A est succinctement résumée par la série géométrique

$$L(A) = \sum_{n\geq 0} A^n$$

De même, la série exponentielle

$$\exp(A) = \sum_{n\geq 0} A^n / \mathfrak{S}_n$$

nous donne la construction du monoïde commutatif libre sur A (le quotient $A^n/\mathfrak{S}_n$ est pris relativement à l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur A^n).

Une troisième construction est celle de l'ensemble C(A) des mots circulaires sur un alphabet A:

$$C(A) = \sum_{n\geq 0} A^n / C_n$$

où C_n est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par la permutation $i \mapsto i + 1 \pmod n$.

Avec l'appui financier du programme FCAR, Québec, EQ 1608, et du CRSNG, Canada.

Ces trois constructions sont en fait des foncteurs de la catégorie des ensembles vers elle-même,

$$L\,,\ \exp\,,\ C\ :\ \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

Plus généralement, soit

$$\mathfrak{S}_n \times F[n] \longrightarrow F[n] \qquad (n \geq 0)$$

une suite de représentations ensemblistes des groupes symétriques.

Définition 1. Un foncteur F: Ens $\longrightarrow$ Ens est *analytique* s'il possède un développement en série de Taylor

$$F(A) = \sum_{n\geq 0} A^n \underset{\mathfrak{S}_n}{\times} F[n]$$

le n-ième terme de cette série étant le quotient du produit cartésien $A^n \times F[n]$ par la relation d'équivalence identifiant $(f, \sigma t)$ avec $(f\sigma, t)$ pour tout $f \in A^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $t \in F[n]$.

Remarque. Nous avons fait agir $\mathfrak{S}_n$ à droite sur A^n en posant $f\sigma = (f_1, ...,f_n)\sigma = (f_{\sigma(1)}, ...,f_{\sigma(n)})$. On peut aussi faire agir $\mathfrak{S}_n$ à gauche en posant $\sigma.f = f\,\sigma^{-1}$. On a alors une bijection.

$$A^n \underset{\mathfrak{S}_n}{\times} F[n] \cong F[n] \times A^n / \mathfrak{S}_n$$

Nous dirons que $(F[n] \mid n \geq 0)$ est la suite de *coefficients* de Taylor du foncteur F. Cette terminologie présume de l'unicité du développement en série de Taylor d'un foncteur analytique. Nous allons énoncer un résultat à cet effet. Remarquons d'abord qu'une suite $\theta = (\theta_n \mid n \geq 0)$ d'applications $\mathfrak{S}_n$–équivariantes

$$\theta_n: F[n] \longrightarrow G[n] \qquad (n \geq 0)$$

induit une transformation naturelle

$$\underline{\theta}: F \longrightarrow G$$

entre les foncteurs analytiques correspondants. Nous dirons que la suite θ est un *morphisme* de la suite $(F[n] \mid n \geq 0)$ vers la suite $(G[n] \mid n \geq 0)$.

Théorème 1. L'application $\theta \rightarrow \underline{\theta}$ est une bijection entre l'ensemble des isomorphismes de $(F[n] \mid n \geq 0)$ vers $(G[n] \mid n \geq 0)$ et l'ensemble des isomorphismes naturels de F vers G.

Autrement dit, la série de Taylor d'un foncteur analytique est unique à isomorphisme canonique près. Ce résultat se généralise comme suit. Un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ C & \xrightarrow[u]{} & D \end{array}$$

est *régulier* si pour tout $(b, c) \in B \times C$ tel que $v(b) = u(c)$ il existe $a \in A$ tel que $(f(a), g(a)) = (b, c)$.

Définition 2. Soient F, G des foncteurs Ens ⟶ Ens. Une transformation naturelle α: F ⟶ G est *régulière* si pour tout f: A ⟶ B le carré

$$\begin{array}{ccc} & \overset{F(f)}{} & \\ F(A) & \longrightarrow & F(B) \\ {\scriptstyle \alpha_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_B} \\ G(A) & \underset{G(f)}{\longrightarrow} & G(B) \end{array}$$

est régulier.

Proposition 1. L'application $\theta \mapsto \underline{\theta}$ est une bijection entre l'ensemble des morphismes de (F[n] | n≥0) vers (G[n] | n≥0) et l'ensemble des transformations naturelles régulières de F vers G.

La démonstration est contenue dans l'appendice. Le théorème 1 est une conséquence de cette proposition puisque tout isomorphisme naturel F ⟶ G est régulier.

Il est possible de caractériser les foncteurs analytiques par des conditions simples: bicontinuité et régularité (appendice).

La proposition entraîne que pour tout foncteur analytique F il existe une et une seule transformation naturelle régulière (le *support*):

$$\text{supp: } F \longrightarrow \exp$$

En effet, comme exp[n] = 1 pour tout $n \geq 0$, il y a un et un seul morphisme de suites

$$\theta\text{: } (F[n] \mid n \geq 0) \longrightarrow (\exp[n] \mid n \geq 0)$$

et par suite une et une seule transformation naturelle régulière $\underline{\theta}$ = supp.

1.1. Les foncteurs analytiques de plusieurs variables sont définis au moyen des séries de Taylor en plusieurs variables. Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour tout $n = (n_1, .., n_d) \in \mathbb{N}^d$ et pour tout $A = (A_1, .., A_d) \in \text{Ens}^d$, posons

$$A^n = A_1^{n_1} \times \ldots \times A_d^{n_d} \qquad \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{n_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{n_d}$$

Soit $(F[n] \mid n \in \mathbb{N}^d)$ une famille de $\mathfrak{S}_n$–ensembles

$$\mathfrak{S}_n \times F[n] \longrightarrow F[n] \qquad (n \in \mathbb{N}^d)$$

Un foncteur F: Ens^d ⟶ Ens est *analytique* s'il possède un développement en série de Taylor

$$F(A_1, \ldots, A_d) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} F[n] \times A^n / \mathfrak{S}_n$$

On démontre que la suite de coefficients $(F[n] \mid n \in \mathbb{N}^d)$ est uniquement déterminée (à isomorphisme canonique près) par le foncteur F.

Notation. Nous utiliserons, pour désigner les foncteurs, les conventions usuelles de l'Analyse pour les fonctions d'une ou de plusieurs variables. Nous écrirons souvent F(X) plutôt que F pour désigner un foncteur d'une variable X. Nous écrirons de même F(X, Y) pour désigner un foncteur de deux variables. Avec ces notations, X pourra dénoter aussi bien le foncteur identité Id: Ens $\longrightarrow$ Ens que le foncteur projection p_1: $Ens^2 \longrightarrow$ Ens.

1.2. Soit Γ un groupe fini agisssant sur un ensemble fini I. Pour tout ensemble A, le groupe Γ agit naturellement sur $A^I = \{f: I \longrightarrow A\}$:

$$(\sigma.f)(i) = f(\sigma^{-1}i) \qquad (i \in I, \sigma \in \Gamma)$$

La *puissance symétrique* de A par le Γ-ensemble I est le quotient $A^I/_\Gamma$. Vérifions que l'opération de puissance symétrique est un foncteur analytique. En effet, soit n = Card I et soit $\Delta(I, n)$ l'ensemble des bijections de I vers $\{1, 2, ..., n\}$. La composition $(v,f) \to f \circ v$ définit une application

$$\Delta(I, n) \times A^n \longrightarrow A^I$$

Les groupes Γ et $\mathfrak{S}_n$ opèrent sur $\Delta(I, n)$ et ces actions commutent entre elles. On obtient, par passage au quotient, une application

$$\Delta(I, n)/_\Gamma \times A^n \longrightarrow A^I/_\Gamma$$

et, finalement, une bijection

$$\Delta(I, n)/_\Gamma \times A^n/_{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{\sim} A^I/_\Gamma$$

Les puissances symétriques se généralisent au cas de plusieurs variables: soit Γ un groupe fini agissant sur des ensembles finis $I_1, ..., I_d$. La puissance symétrique d'un multi-ensemble $(A_1, ..., A_d)$ par $(I_1, ..., I_d)$ est le quotient

$$A_1^{I_1} \times ... \times A_d^{I_d}/_\Gamma$$

On vérifie qu'il y a un isomorphisme

$$A_1^{I_1} \times ... \times A_d^{I_d}/_\Gamma \longrightarrow \Delta(I, n)/_\Gamma \times A^n/_{\mathfrak{S}_n}$$

où $n = (n_1, ..., n_d) = (\text{card } I_1, ..., \text{card } I_d)$ et $\Delta(I, n) = \Delta(I_1, n_1) \times ... \times \Delta(I_d, n_d)$.

1.3. Nous allons maintenant décrire des opérations sur les foncteurs. Nous démontrerons plus tard que ces opérations préservent l'analycité.

(i) la *somme*

$$(F + G)(A) = F(A) + G(A)$$

et, plus généralement, la combinaison linéaire

$$(\sum_{i \in I} C_i \times F_i)(A) = \sum_{i \in I} C_i \times F_i(A)$$

où $(C_i \mid i \in I)$ est une famille d'ensembles et $(F_i \mid i \in I)$ est une famille de foncteurs;

(ii) le *produit* (fini)

$$(F\cdot G)(A) = F(A) \times G(A)$$

et, plus généralement,

$$(\prod_{i\in I} F_i)(A) = \prod_{i\in I} F_i(A)$$

et aussi la puissance

$$F^I(A) = F(A)^I$$

(iii) la *composition* (ou la *substitution*)

$$(F\circ G)(A) = F(G(A))$$

et, plus généralement,

$$F(G_1, .. ,G_r)(A) = F(G_1(A), .. ,G_r(A))$$

où $F: Ens^r \longrightarrow Ens$ et $G_i: Ens^d \longrightarrow Ens$ $(1\leq i\leq r)$;

(iv) le *quotient* par l'action d'un groupe

$$(F/_\Gamma)(A) = F(A)/_\Gamma$$

où Γ agit sur F par transformation naturelle.

Théorème 2. Les foncteurs analytiques sont clos sous les opérations suivantes:

i) les combinaisons linéaires finies ou infinies
ii) les produits finis
iii) la composition
iv) le quotient par l'action d'un groupe.

Pour démontrer ce théorème, on peut utiliser les propriétés caractérisant l'analycité (appendice) ou encore procéder par calcul direct des coefficients des séries de Taylor. Cependant, il appert que ces coefficients ont une forme compliquée quand on choisit de les décrire, ainsi que l'avons fait jusqu'à présent, comme des représentations ensemblistes des groupes symétriques. Nous obtenons des calculs plus transparents en prenant un autre modèle: les espèces de structures. La démonstration du théorème est par suite reportée en 2.1.

Chapitre 2. Espèces de structures

2.0. La théorie des espèces de structures est essentiellement une théorie des coefficients des foncteurs analytiques. Elle entretient une relation étroite avec la théorie des séries formelles et avec la combinatoire. Grâce à elle, il devient possible de développer une vision combinatoire des opérations définies sur les foncteurs analytiques.

Définition 1. Une *espèce de structures* F est un foncteur

$$F[\ ]: \mathbf{B} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

où **B** est la catégorie des ensembles finis et bijections. Un élément $\alpha \in F[S]$ est une *structure d'espèce* F sur S; nous dirons aussi que c'est une F-*structure* sur S. Si $\beta = F[u](\alpha)$ où $u: S \xrightarrow{\sim} T$, nous dirons que β est obtenue en *transportant* α le long de la bijection u et que u est un *isomorphisme* de α vers β.

Les F-structures forment une catégorie (un groupoïde): la catégorie *el* F des *éléments* de F; un objet de *el* F est un couple (α, S) où $\alpha \in F[S]$; un morphisme $u: (\alpha, S) \longrightarrow (\beta, T)$ est un isomorphisme de α vers β. Les composantes connexes de ce groupoïde sont les *types* de structures: deux structures ont le même type si et seulement si elles sont isomorphes. Nous désignerons l'ensemble des types de l'espèce F par

$$\tilde{\sum_{S}} F[S]$$

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on définit, par transport de structures, une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $F[n] = F[\{1,2, \ldots,n\}]$.

Proposition 1. On a une bijection canonique

$$\tilde{\sum_{S}} F[S] = \sum_{n \geq 0} F[n]/\mathfrak{S}_n$$

Preuve. Toute structure $\alpha \in F[S]$ est isomorphe à une structure $\alpha' \in F[n]$ où $n = \mathrm{Card}\ S$. De plus, α' et α'' sont isomorphes à α si et seulement si elles sont isomorphes entre-elles, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma.\alpha' = \alpha''$. C.Q.F.D.

Une espèce de structure de plusieurs variables est un foncteur

$$F[\ ]: \mathbf{B}^d \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

où $d \in \mathbb{N}$ est le nombre de variables. On définit sans difficulté les concepts d'*isomorphisme* et de *type* de F-structures. Nous dénoterons

$$\tilde{\sum_{S_1, \ldots, S_d}} F[S_1, \ldots, S_d]$$

l'ensemble des types de l'espèce F. Il est aussi possible de définir des sommations partielles; ainsi

$$\tilde{\sum_{T}} F[S, T]$$

désignera, pour chaque $S \in \mathbf{B}$, l'ensemble des types de l'espèce $T \mapsto F[S, T]$.

Un exemple d'espèce de deux variables est l'espèce Δ. Pour tout $(S, T) \in \mathbf{B}^2$ on a

$$\Delta[S, T] = \{f: S \longrightarrow T \mid f \text{ est bijective}\}$$

Nous allons maintenant dresser une liste d'identités gouvernant l'utilisation de $\tilde{\sum}$ et de Δ. Ces identités seront utiles dans les calculs à venir.

a) associativité

$$\tilde{\sum_S}\,\tilde{\sum_T} F[S, T] = \tilde{\sum_{S,T}} F[S, T]$$

b) commutativité

$$\tilde{\sum_{S,T}} F[S, T] = \tilde{\sum_{T,S}} F[S, T]$$

c) distributivité

$$\tilde{\sum_T} G[S] \times F[S, T] = G[S] \times \tilde{\sum_T} F[S, T]$$

d) remplacement

$$F[S] \times \Delta[S, T] = F[T] \times \Delta[S, T]$$

e)

$$\tilde{\sum_T} \Delta[S, T] = 1$$

Le symbole d'égalité dans ces identités signifie qu'il y a un isomorphisme naturel entre les deux membres. Les espèces figurant dans ces formules peuvent comporter d'autres variables que celles décrites explicitement. Cependant, pour la distributivité, il est nécessaire de supposer que G[S] est indépendante de la variable T. Ajoutons à cette liste quelques relations:

f)

$$\tilde{\sum_{S,T}} F[S, T] = \tilde{\sum_R} \sum_{S+T=R} F[S, T]$$

où la sommation ordinaire est indexée par les couples (S, T) tels que $S \cap T = \emptyset$ et $S \cup T = R$.

g)

$$\tilde{\sum_S} \sum_{i \in I} A_i \times \Delta[T_i, S] = \sum_{i \in I} A_i$$

h)

$$\Delta[U+V, R] = \sum_{S+T=R} \Delta[U, S] \times \Delta[V, T]$$

Voyons qu'une espèces de structures F est entièrement déterminée (à isomorphisme canonique près) par la suite $(F[n] \mid n \geq 0)$.

Proposition 2. On a un développement en série

$$F[S] = \sum_{n \geq 0} F[n] \times \Delta[S, n] / \mathfrak{S}_n$$

Preuve. On a successivement

$$\begin{aligned} F[S] &= F[S] \times \tilde{\sum_T} \Delta[S, T] \\ &= \tilde{\sum_T} F[S] \times \Delta[S, T] \\ &= \tilde{\sum_T} F[T] \times \Delta[S, T] \\ &= \sum_{n \geq 0} F[n] \times \Delta[S, n] / \mathfrak{S}_n \end{aligned}$$

où nous avons utilisé e), c), d) et la proposition 1. On peut aussi faire une démonstration directe que nous laissons au lecteur.

Le développement en série de la proposition 2 nous permet de voir que toute suite $(F[n] \mid n \geq 0)$ de représentations des groupes symétriques définit une espèce

$$S \mapsto \sum_{n \geq 0} F[n] \times \Delta[S, n] / \mathfrak{S}_n$$

Nous dirons que c'est l'*extension* de la suite $(F[n] \mid n \geq 0)$.

Pour tout entier $n \geq 0$, soit $\mathrm{Ens}^{\mathfrak{S}_n}$ la catégorie des $\mathfrak{S}_n$-ensembles. Posons

$$\mathrm{Ens}^{\mathfrak{S}_*} = \prod_{n \geq 0} \mathrm{Ens}^{\mathfrak{S}_n}$$

D'autre part, soit $\mathrm{Ens}^{\mathbf{B}}$ la catégorie des espèces (les morphismes étant les transformations naturelles). on a le foncteur *restriction* $r : F \mapsto (F[n] \mid n \geq 0)$

$$r : \mathrm{Ens}^{\mathbf{B}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathfrak{S}_*}$$

et le foncteur *extension*

$$e : \mathrm{Ens}^{\mathfrak{S}_*} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathbf{B}}$$

Proposition 3. Les foncteurs r et e sont des équivalences de catégories (quasi-)inverses l'une de l'autre.

Nous pouvons maintenant donner une description combinatoire du foncteur analytique associé à une espèce F. Pour tout ensemble A, considérons l'espèce

$$S \mapsto F[S] \times A^S$$

Nous dirons qu'un élément $(\alpha, p) \in F[S] \times A^S$ est une F-*structure étiquetée* par A; la fonction $p: S \longrightarrow A$ est un *étiquetage* de α par A; un élément de A est une *étiquette* . Posons

$$F(A) = \tilde{\sum_S} F[S] \times A^S$$

Un élément de F(A) est un *type* de F-structures étiquetées par A. Pour toute fonction $f: A \longrightarrow B$, nous noterons $F(f): F(A) \longrightarrow F(B)$ l'application obtenue en composant les étiquetages par f. Nous avons un foncteur

$$F(\,) : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

Proposition 4. Le foncteur F( ) est analytique et l'on a

$$F(A) = \sum_{n \geq 0} F[n] \times A^n / \mathfrak{S}_n$$

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 1.

Les résultats démontrés jusqu'ici nous permettent maintenant d'affirmer qu'il y a équivalence entre les trois concepts suivants:

A) Une suite de représentation ensemblistes des groupes symétriques

$$\mathfrak{S}_n \times F[n] \longrightarrow F[n] \qquad (n \geq 0)$$

B) Un foncteur analytique

$$F(\,): \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

C) Une espèce de structures

$$F[\,]: \mathbf{B} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

Notation. Nous utiliserons indifféremment F ou F(X) pour désigner l'un ou l'autre de ces concepts. L'usage de parenthèses nous permettra de résoudre, au besoin, l'ambiguité. Autrement dit,

$$F[S],\ F[n],\ F(X)[S],\ F(X)[n]$$

sont des *coefficients* de F alors que F(A) est le résultat de l'*évaluation* du foncteur analytique F(X) en $A \in \mathrm{Ens}$.

2.1. Dans ce paragraphe, nous allons donner une liste de formules pour le calcul de la somme, du produit et de la substitution d'espèces de structures. Chacune des formules est une recette combinatoire permettant de construire les structures de l'espèce désirée.

(i) la *somme*

$$(F+G)[S] = F[S] + G[S]$$

et la combinaison linéaire

$$(\sum_{i \in I} C_i \times F_i)[S] = \sum_{i \in I} C_i \times F_i[S]$$

(ii) le *produit fini*

$$(F \cdot G)[S] = \sum_{U+V=S} F[U] \times G[V]$$

$$(\prod_{i \in I} F_i)[S] = \sum_{f \in I^S} \prod_{i \in I} F_i[f^{-1}(i)]$$

$$F^I[S] = \sum_{f \in I^S} \prod_{i \in I} F[f^{-1}(i)]$$

(iii) la *composition* $F \circ G$ (si $G[\varnothing] = \varnothing$)

$$(F \circ G)[S] = \sum_{R \in \mathrm{Eq}[S]} F[S/R] \times \prod_{C \in S/R} G[C]$$

où Eq[S] est l'ensemble des relations d'équivalence sur S.

(iv) la *composition* $F \circ G$ (cas général). Considérons l'espèce en deux variables

$$W[S, T] = \sum_{f:S \to T} F[T] \times \prod_{i \in T} G[f^{-1}(i)]$$

On a

$$(F \circ G)[S] = \tilde{\sum_{T}} W[S, T]$$

(v) la *composition* $F(G_1, \ldots, G_r)$ (si $G_i[\varnothing] = \varnothing$, $1 \leq i \leq r$)

$$F(G_1, \ldots, G_r)[S] = \sum_{(R, t) \in Eq^r[S]} F[S/R] \times \prod_{C \in |S|/R} G_{t(C)}[\underline{C}]$$

où $S = (S_1, \ldots, S_d)$, $|S| = S_1 + \ldots + S_d$ et où

$$Eq^r[S] = \{(R, t) \mid R \in Eq[|S|],\ t: |S|/R \longrightarrow \{1, 2, \ldots, r\}\}$$

Nous avons posé

$$S/R = (t^{-1}(1), \ldots, t^{-1}(r)) \in \mathbf{B}^r \quad \text{et} \quad \underline{C} = (C \cap S_1, \ldots, C \cap S_d) \in \mathbf{B}^d$$

(vi) l'**évaluation** (partielle). Si $F = F(X, Y)$ et $A \in Ens$, alors

$$F(A, Y)[T] = \tilde{\sum_{S}} F[S, T] \times A^S$$

$$= \sum_{n \geq 0} F[n, T] \times A^n / \mathfrak{S}_n$$

(vii) le **quotient** par un groupe

$$(F/\Gamma)[S] = F[S]/\Gamma$$

Preuve. Les formules i), vi) et vii) sont évidentes.

ii)
$$F(A) \times G(A) = (\tilde{\sum_{S}} F[S] \times A^S) \times (\tilde{\sum_{T}} G[T] \times A^T)$$

$$= \tilde{\sum_{S,T}} F[S] \times G[T] \times A^{S+T}$$

$$= \tilde{\sum_{R}} \sum_{S+T=R} F[S] \times G[T] \times A^{S+T}$$

$$= \tilde{\sum_{R}} \Big(\sum_{S+T=R} F[S] \times G[T] \Big) A^R$$

iv)
$$F(G(A)) = \tilde{\sum_{T}} F[T] \times G(A)^T$$

$$= \tilde{\sum_{T}} F[T] \times G^T(A)$$

$$= \tilde{\sum_{T}} F[T] \times \tilde{\sum_{S}} G^T[S] \times A^S$$

$$= \tilde{\sum_{T}} \tilde{\sum_{S}} F[T] \times G^T[S] \times A^S$$

$$= \tilde{\sum_S} \tilde{\sum_T} F[T] \times G^T[S] \times A^S$$

$$= \tilde{\sum_S} (\tilde{\sum_T} F[T] \times G^T[S]) \times A^S$$

$$= \tilde{\sum_S} (\tilde{\sum_T} W[S, T]) \times A^S$$

puisque l'on a $W[S, T] = F[T] \times G^T[S]$.

(iii) L'hypothèse que $G[\varnothing] = \varnothing$ entraîne que

$$\prod_{i \in T} G[f^{-1}(i)] = \varnothing$$

pour toute fonction $f: S \longrightarrow T$ non surjective. On a donc

$$W[S, T] = \sum_{f:S \twoheadrightarrow T} F[T] \times \prod_{i \in T} G[f^{-1}(i)]$$

Comme tout élément $(\alpha, \beta, f) \in W[S, T]$ est isomorphe à un et un seul élément $(\alpha', \beta', p) \in W[S, S/R]$ où $p: S \to S/R$ est la projection canonique, on a

$$\tilde{\sum_T} W[S, T] = \sum_{R \in Eq[S]} F[S/R] \times \prod_{C \in S/R} G[C]$$

(v) est laissé au lecteur diligent.

Remarque. Toute substitution se ramène à une substitution sans terme constant suivie d'une évaluation partielle. Par exemple pour calculer $F(G_1, \ldots, G_r)$, calculons d'abord l'espèce

$$H = H(X, Y) = F(Y_1 G_1(X), \ldots, Y_r G_r(X))$$

où $X = (X_1, \ldots, X_d)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_r)$. Soient $S = (S_1, \ldots, S_d) \in \mathbf{B}^d$ et $T = (T_1, \ldots, T_r) \in \mathbf{B}^r$. Un élément de $H[S, T]$ est un triplet (f, α, β) où

i) $f: S_1 + \ldots + S_d \longrightarrow T_1 + \ldots + T_r$

ii) α est une fonction qui associe à chaque élément $x \in T_i$ une structure d'espèce G_i sur la fibre $f^{-1}(x)$

iii) $\beta \in F[T_1, \ldots, T_r]$

Nous dirons que (f, α, β) est une *fibration* $(G_1, \ldots, G_r)$-*enrichie* sur les fibres et F-*enrichie* sur la base. Pour obtenir $F(G_1, \ldots, G_r)$, il suffit de substituer $Y_1 = 1, \ldots, Y_r = 1$ dans $H(X, Y)$. Autrement dit,

$$F(G_1, \ldots, G_r)[S] = \tilde{\sum_T} H[S, T]$$

2.2. Dans cette partie, nous allons examiner les opérations de produit *cartésien* et de produit *scalaire* d'espèces et aussi les opérations de base du calcul *différentiel*.

Le produit *cartésien* $F \Diamond G$ de deux espèces F, G: $\mathbf{B}^{\mathrm{d}} \longrightarrow$ Ens:

$$(F \Diamond G)[S] = F[S] \times G[S] \qquad (S \in \mathbf{B}^{\mathrm{d}})$$

Le produit *scalaire* $\langle F, G \rangle$:

$$\langle F, G \rangle = \tilde{\sum_{S}} F[S] \times G[S]$$

Si la sommation est restreinte à certaines variables, on obtient le produit scalaire *partiel* :

$$\langle F(X, Y), G(X, Y) \rangle_X = \tilde{\sum_{S}} F[S, T] \times G[S, T]$$

Remarque.

$$\langle F(X, Y), G(X, Y) \rangle_X = (F \Diamond G)(1, Y)$$

$$\langle F(X, Y), G(X, Y) \rangle_Y = (F \Diamond G)(X, 1)$$

$$\langle F(X, Y), G(X, Y) \rangle = (F \Diamond G)(1, 1)$$

Proposition 5 Soit F(X) une espèce de structure. On a

$$F(XY) = F(X) \Diamond \exp(XY)$$

$$= F(Y) \Diamond \exp(XY)$$

Preuve. En effet, un calcul simple nous montre que

$$\exp(XY)[S, T] = \Delta[S, T]$$

et

$$F(XY)[S, T] = F[S] \times \Delta[S, T]$$

$$= F[T] \times \Delta[S, T]$$

Proposition 6. [Y.N. Yeh] Soit F(X) une espèce de structures et soit A un ensemble. On a

$$F(AX) = F(X) \Diamond \exp(AX)$$

Preuve. Il suffit de constater que

$$F(AX)[S] = F[S] \times A^S$$

et

$$\exp(AX)[S] = A^S$$

C.Q.F.D.

Pour le calcul différentiel, on pose

$$(d/dx)^T F(X)[S] = F^{(T)}(X)[S] = F[S+T]$$

On vérifie les identités suivantes:

a) la formule de Leibniz

$$(FG)^{(T)} = \sum_{A+B=T} F^{(A)}G^{(B)}$$

b) la formule de Taylor

$$F(X+Y) = \sum_{n\geq 0} F^{(n)}(X) \times Y^n / \mathfrak{S}_n$$

c) la "règle de dérivation en chaîne"

$$F(G(X))' = F'(G(X))G'(X)$$

Pour toute espèce H(X), on peut définir un opérateur différentiel H(d/dx).

$$H(d/dx)F(X)[S] = \tilde{\sum_{T}} H[T] \times F[T+S]$$

L'opérateur H(d/dx) est adjoint à l'opérateur de multiplication par H(X):

$$\langle H(d/dx)F, G\rangle = \langle F, HG\rangle$$

en effet,

$$\begin{aligned}
\langle H(d/dx)F, G\rangle &= \tilde{\sum_{T}} \tilde{\sum_{S}} H[T] \times F[T+S] \times G[S] \\
&= \tilde{\sum_{R}} \sum_{S+T=R} H[T] \times G[S] \times F[T+S] \\
&= \tilde{\sum_{R}} \Big(\sum_{S+T=R} H[T] \times G[S] \Big) \times F[R] \\
&= \tilde{\sum_{R}} (HG)[R] \times F[R] \\
&= \langle HG, F\rangle
\end{aligned}$$

Chapitre 3 Espèces virtuelles

3.0. Le but de ce chapitre est d'introduire le concept d'espèce *virtuelle* pour pallier à l'absence de l'opération de soustraction en théorie des espèces. La définition des opérations de somme et de produit d'espèces virtuelles ne pose pas de difficultés car il suffit d'imiter les règles de l'algèbre. Par contre, le prolongement de l'opération de substitution est plus délicat et nous introduisons pour cela une Règle des signes qui permet de résoudre le problème de façon satisfaisante.

Définition 1. Une espèce de structures $F: \mathbf{B}^d \longrightarrow$ Ens est *finitaire* si

$$\text{Card } F[n] < \infty, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^d$$

Si de plus

$$\text{Card } F[n] = 0$$

sauf pour un nombre fini de $n \in \mathbb{N}^d$, nous dirons que F est *polynômiale*.

Définition 2. Une espèce *virtuelle* V est une différence formelle V = F-G entre des espèces finitaires. La relation d'égalité F-G = M-N entre espèces virtuelles signifie que F+N = M+G.

La transitivité de la relation d'égalité entre espèces virtuelles est conséquence de la propriété de simplification des espèces finitaires:

$$F+M = G+M \Rightarrow F = G$$

Pour démontrer cette propriété, nous utiliserons le principe suivant (équivalent au principe d'involution de Garsia-Milne [G.1]). Soient A, B, C des ensembles finis et soit

$$\varphi: A+C \xrightarrow{\sim} B+C$$

une bijection. Alors on peut construire une bijection *résiduelle*

$$\psi: A \xrightarrow{\sim} B$$

ne dépendant que de φ. En effet, pour tout $x \in A$ la suite $x, \varphi(x), \varphi^2(x), \ldots$ doit se terminer en un élément $y = \psi(x) \in B$. De même, pour tout $y \in B$, la suite $y, \varphi^{-1}(y), \varphi^{-2}(y), \ldots$ doit se terminer en un élément $x = \psi^{-1}(y) \in A$.

Supposons maintenant qu'un groupe Γ agisse sur A, B, C et que φ soit Γ-équivariante. On voit immédiatement que ψ est Γ-équivariante. De même, si on suppose que φ est une transformation naturelle de foncteurs (à valeurs dans les ensembles finis), on voit que ψ est aussi une transformation naturelle.

La somme et le produit d'espèces virtuelles sont définis comme suit:

$$(F - G) + (M - N) = (F + M) - (G + N)$$

$$(F - G) \cdot (M - N) = (FM + GN) - (GM + FN)$$

Ces opérations donnent à l'ensemble des espèces virtuelles en les variables $X_1, \ldots, X_d$ une structure d'anneau commutatif que nous désignerons par $\mathbf{B}[[X_1, \ldots, X_d]]$. Les espèces virtuelles polynômiales constituent un sous-anneau que nous désignerons par $\mathbf{B}[X_1, \ldots, X_d]$.

Pour tout groupe fini Γ, soit $B(\Gamma)$ l'*anneau de Burnside* du groupe Γ. Rappelons sa construction. Les éléments de $B(\Gamma)$ sont des différences formelles entre Γ-ensembles finis avec la même relation d'égalité que dans la définition 2. Nous dirons que les éléments de $B(\Gamma)$ sont des *représentations ensembliste virtuelles* du groupe Γ. La somme et le produit sont définis comme ci-haut, sauf qu'il faut plutôt utiliser le produit cartésien de Γ-ensembles.

La proposition 3 du chapitre 2 entraîne que l'on a un isomorphisme de groupes additifs

$$\mathbf{B}[X_1, \ldots, X_d] \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^d} B(\mathfrak{S}_n)$$

En outre, puisque

$$B(\mathfrak{S}_n) \cdot B(\mathfrak{S}_m) \subseteq B(\mathfrak{S}_{n+m})$$

pour le produit des espèces, on voit que $\mathbf{B}[X_1, \ldots, X_d]$ est un anneau gradué. Le complété de

$\mathbf{B}[X_1, \ldots, X_d]$ s'identifie avec $\mathbf{B}[[X_1, \ldots, X_d]]$:

$$\mathbf{B}[[X_1, \ldots, X_d]] \simeq \prod_{n \in \mathbb{N}^d} B(\mathfrak{S}_n)$$

Tout élément $F \in \mathbf{B}[[X_1, .., X_d]]$ s'écrit sous la forme d'une série formelle

$$F = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} F_n$$

où F_n est la partie homogène de degré $n \in \mathbb{N}^d$. La partie homogène de degré 0 est le terme constant $F_0 = F(0) = F(0, \ldots, 0)$.

Lemme (Classique). Si $F(0) = 1$, alors F est inversible dans l'anneau $\mathbf{B}[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Preuve. Posons $F = 1+T$. La série géométrique

$$(1+T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^n$$

converge puisque T est sans terme constant.

En vertu de ce lemme, l'espèce exponentielle $\exp(X) \in \mathbf{B}[[X]]$ est inversible puisque $\exp(0) = 1$. Nous allons calculer l'espèce virtuelle $\exp(X)^{-1}$. Posons, pour tout $S \in \mathbf{B}$,

$$\varepsilon_0[S] = \{f: S \twoheadrightarrow (2k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$\varepsilon_1[S] = \{f: S \twoheadrightarrow (2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

où $(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1. On a

$$\exp(X)^{-1} = \varepsilon_0(X) - \varepsilon_1(X)$$

Preuve. Posons $\exp(X) = 1 + T(X)$. On trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n[S] = \{f: S \twoheadrightarrow (n)\}$$

ce qui donne le résultat.

Il faut souligner ici que l'égalité

$$\exp(X)^{-1} = \sum (-1)^n X^n / \mathfrak{S}_n$$

est fausse. Nous sommes maintenant en mesure de définir $\exp(-X)$:

Définition 3.

$$\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$$

Cette définition suggère la notation suivante:

$$\varepsilon^S = \varepsilon_0[S] - \varepsilon_1[S] \qquad (S \in \mathbf{B})$$

Il est peut-être bon de souligner ici que ε^S n'est pas la différence entre deux ensembles mais la différence entre deux foncteurs. Ainsi, ε^n est la représentation ensembliste virtuelle obtenue en effectuant la différence entre $\varepsilon_0[n]$ et $\varepsilon_1[n]$. Nous allons maintenant énoncer la règle des signes. Soit F(X) une espèce virtuelle.

Règle des signes [J.1]

$$F(-X)[n] = \varepsilon^n F[n]$$

Dans cette formule $\varepsilon^n F[n]$ désigne le produit de ε^n et de F[n] dans l'anneau de Burnside $B(\mathfrak{S}_n)$. Dans le cas de plusieurs variables, nous aurons

$$F(-X, Y)[n,m] = \varepsilon^n F[n,m]$$

où ε^n désigne l'élément de $B(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m)$ obtenu en composant la représentation ε^n de $\mathfrak{S}_n$ avec la projection $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \longrightarrow \mathfrak{S}_n$. Nous aurons de même

$$F(X, -Y)[n, m] = \varepsilon^m F[n, m]$$

$$F(-X, -Y)[n, m] = \varepsilon^n \varepsilon^m F[n, m]$$

$$= \varepsilon^{n+m} F[n, m]$$

où ε^{n+m} est l'élément de $B(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m)$ obtenue par restriction de l'élément ε^{n+m} de $B(\mathfrak{S}_{n+m})$ au sous-groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_{n+m}$.

La Règle des signes permet de résoudre le problème de la substitution. Par exemple, supposons que l'on veuille substituer M–N dans F(X). On calcule d'abord l'espèce virtuelle F(X–Y):

$$F(X–Y)[n, m] = \varepsilon^m F[n+m]$$

ce qui donne

$$F(X–Y) = F_0(X, Y) – F_1(X, Y)$$

et on pose ensuite

$$F(M–N) = F_0(M, N) – F_1(M, N)$$

On montre que cette opération est bien définie, c'est à dire que

$$F_0(M, N) – F_1(M, N) = F_0(P, Q) – F_1(P, Q)$$

si M–N = P–Q.

Pour éliminer les problèmes de convergence, nous allons limiter la substitution F(G) aux deux cas suivants:

a) F est polynômiale b) le terme constant de G est nul

Théorème 1 [J.2, Y.1] La substitution des espèces virtuelles, telle que décrite avec la Règle des signes,

est une opération bien définie. De plus, elle donne lieu à une loi de composition associative.

Remarque. Il est intéressant de reformuler la Règle des signes en utilisant le produit cartésien des espèces virtuelles. On pose

$$(F - G) \Diamond (M - N) = (F\Diamond M + G\Diamond M) - (F\Diamond N + G\Diamond M)$$

La règle des signes devient

$$F(-X) = F(X) \Diamond \exp(-X)$$

$$F(-X, Y) = F(X, Y) \Diamond \exp(-X)$$

3.1. Soit $B(\Gamma)$ l'anneau de Burnside d'un groupe fini Γ. Nous allons voir que chaque élément $F \in \mathbf{B}[X_1, \ldots, X_d]$ définit une opération

$$F: B(\Gamma)^d \longrightarrow B(\Gamma)$$

Remarquons d'abord que si F est une espèce polynômiale ordinaire (nous dirons aussi que F est *positive*) et $A_1, \ldots, A_d$ sont des Γ-ensembles finis alors $F(A_1, \ldots, A_d)$ est un Γ-ensemble fini. Cette opération s'étend aux espèces virtuelles:

$$(F - G)(A_1, \ldots, A_d) = F(A_1, \ldots, A_d) - G(A_1, \ldots, A_d)$$

Nous allons prolonger ces opérations aux Γ-ensembles virtuels. Soit $(A_1 - B_1, \ldots, A_d - B_d) \in B(\Gamma)^d$. La Règle des signes nous permet de calculer l'espèce virtuelle

$$F(X_1, \ldots, X_d ; Y_1, \ldots, Y_d) = F(X_1 - Y_1, \ldots, X_d - Y_d)$$

On pose ensuite

$$F(A_1 - B_1, \ldots, A_d - B_d) = F(A_1, \ldots, A_d ; B_1, \ldots, B_d)$$

Pour s'assurer que cette opération est bien définie, il faut s'assurer que

$$F(A_1, \ldots, A_d ; B_1, \ldots, B_d) = F(U_1, \ldots, U_d ; V_1, \ldots, V_d)$$

dès que $A_i - B_i = U_i - V_i \qquad (1 \le i \le d)$

Théorème 2 [J.2]. Les éléments $F \in \mathbf{B}[X_1, \ldots, X_d]$ donnent lieu à des opérations bien définies

$$F: B(\Gamma)^d \longrightarrow B(\Gamma)$$

De plus, on a l'associativité

$$F(G_1, \ldots, G_d)(b) = F(G_1(b), \ldots, G_d(b))$$

où $G_i \in \mathbf{B}[X_1, \ldots, X_r] \qquad (1 \le i \le d) \qquad$ et $\qquad b = (b_1, \ldots, b_r) \in B(\Gamma)^r$

3.2. Le théorème des fonctions implicites se transpose aisément en théorie des espèces. Soient $X = (X_1, \ldots, X_d)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_r)$ et $F(X, Y) = (F_1(X, Y), \ldots, F_r(X, Y))$ des espèces virtuelles. Nous dirons que les espèces virtuelles $N(X) = (N_1, \ldots, N_r)$ sont *solutions* du système d'équations

$$F(X, Y) = 0$$

si l'on a $N(0) = 0$ et

$$F(X, N(X)) = 0$$

Théorème 3. Si la matrice jacobienne $(\partial F/\partial Y)(0, 0)$ est inversible, alors le système d'équations

$$F(X, Y) = 0$$

possède une et une seule solution $Y = N(X)$.

La démonstration est laissée en exercice. Le théorème montre en particulier que si $F(X)$ est une espèce telle que $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$ alors $F(X)$ possède un inverse $G(X)$ pour l'opération de substitution:

$$F(G(X)) = G(F(X)) = X$$

On peut donner une description combinatoire des coefficients de $G(X)$ et, plus généralement, des coefficients de $H(G(X))$ où H est une espèce quelconque. Soit S un ensemble fini. L'ensemble $Eq[S]$ des relations d'équivalence sur S est ordonné. Notons $\hat{o}$ l'élément minimum de $Eq[S]$ et $\hat{1}$ l'élément maximum. Soit $R = (\hat{o} = R_0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_n)$ une chaîne strictement croissante d'éléments de $Eq[S]$. On a une suite de projections canoniques

$$S = S/_{R_0} \xrightarrow{p} S/_{R_1} \xrightarrow{p} \ldots \xrightarrow{p} S/_{R_n}$$

Posons

$$f(R) = \{p^{-1}(x) \mid x \in S/_{R_k},\ 1 \leq k \leq n\}$$

Nous dirons que $f(R)$ est l'ensemble des *fibres* de R. Posons

$$S/_R = S/_{R_n}$$

Nous dirons que $S/_R$ est la *base* de R. Soit

$$Q_n[S] = \{R = (\hat{o} = R_0 < R_1 < \ldots < R_n) \mid R_i \in Eq[S],\ 1 \leq i \leq n\}$$

$$W_n[S] = \sum_{R \in Q_n[S]} H[S/_R] \times \prod_{C \in f[R]} F[C]$$

Proposition 2. On a

$$H(G(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n(X)$$

Preuve. Nous allons appliquer aux espèces de structures une méthode d'inversion des séries formelles due à G. Labelle [L.1]. Considérons l'opérateur additif

$$\delta\colon \mathbf{B}[[X]] \longrightarrow \mathbf{B}[[X]]$$

qui transforme H(X) dans H(F(X)) – H(X). On a par définition

$$\delta(H)[S] = \sum_{\substack{R \in Eq[S] \\ R \neq \hat{0}}} H[S_{/R}] \times \prod_{A \in S_{/R}} F[A]$$

$$= W_1[S]$$

Un raisonnement par récurrence nous donne

$$\delta^n(H)[S] = W_n[S]$$

Ce qui entraîne que $\delta^n(H)[S] = \varnothing$ dès que n est assez grand et, par suite, que la série

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \delta^n(H) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n W_n(X)$$

converge vers un élément $W(X) \in \mathbf{B}[[X]]$. On a

$$W(F) = (1+\delta)(W)$$

$$= (1+\delta) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \delta^n(H)$$

$$= H$$

C.Q.F.D.

Considérons maintenant le cas où H(X) = X. Pour tout ensemble fini S et pour tout $n \geq 0$ posons

$$P_n[S] = \{(\hat{0} = R_0 < R_1 < .. < R_n = \hat{1}) \mid R_i \in Eq[S],\ 1 \leq i \leq n\}$$

$$V_n[S] = \sum_{R \in P_n[S]} \prod_{C \in f(R)} F[C]$$

On a alors

$$G(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n V_n(X)$$

Dans le cas où F(X) = exp(X) – 1, la proposition 2 nous donne

Corollaire.

$$\log(1+X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n(X)$$

Chapitre 4. Espèces tensorielles

4.0. Dans cette partie, nous développerons certains aspects de la théorie des foncteurs analytiques définis sur la catégorie des espaces vectoriels. Cette théorie est en quelque sorte le prolongement de la théorie des foncteurs polynômiaux formalisée par I.G. Macdonald [M.1]. Du point de vue algébrique, c'est la théorie des λ-anneaux, des fonctions symétriques et des fonctions de Schur [K.1]. Les espèces tensorielles sont l'analogue linéaire des espèces de structures: ce sont les coefficients des foncteurs analytiques à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels. Certaines espèces tensorielles sont équipées d'une structure d'algèbre, en particulier d'algèbre de Lie: ce sont les algèbres de Lie *tordues* de M.G. Barratt [B.1]. Nous utiliserons la théorie des espèces tensorielles pour démontrer que la construction des algèbres de Lie libres s'obtient en évaluant un foncteur analytique Lie (X). Les coefficients de Lie (X) sont des représentations du groupe symétrique isomorphes aux représentations de Reutenauer [R.1]. Nous exprimerons ces coefficients au moyen de l'homologie du treillis des partitions. Ces calculs permettent de jeter une lumière nouvelle sur certains travaux de R. Stanley [S.1] et de P. Hanlon [H.1].

4.1. Soit k un corps de caractéristique 0. Nous désignerons par Vect ou Vect_k la catégorie des k-espaces vectoriels.

Définition 1. Une *espèce tensorielle* F est un foncteur

$$F[\ ]: \mathbf{B} \longrightarrow \mathrm{Vect}$$

A toute espèce tensorielle F est associée une suite $(F[n] \mid n\geq 0)$ de représentations linéaires des groupes symétriques

$$\mathfrak{S}_n \times F[n] \longrightarrow F[n] \qquad (n\geq 0)$$

Définition 2. Un foncteur F: Vect $\longrightarrow$ Vect est *analytique* s'il possède un développement en série de Taylor

$$F(V) = \bigoplus_{n\geq 0} F[n] \otimes V^{\otimes n} / \mathfrak{S}_n$$

On démontre que la suite des coefficients $(F[n] \mid n\geq 0)$ est déterminée (à isomorphisme canonique près) par le foncteur F et que de plus elle détermine (à isomorphisme canonique près) l'espèce tensorielle F. Autrement dit, les concepts suivants sont équivalents:

i) une espèce tensorielle $F = F[\ ]$

ii) une suite $(F[n] \mid n\geq 0)$ de représentations linéaires des groupes symétriques

iii) un foncteur analytique $F = F(\ )$: Vect $\longrightarrow$ Vect

Nous adopterons pour les espèces tensorielles, les mêmes conventions d'écriture que celles que nous avons adoptées au Chapitre 2 pour les espèces de structures.

Remarque. Nous dirons qu'un élément $t \in F(V)$ est un *tenseur d'espèce* F sur V. Cette terminologie est conforme à l'usage du mot tenseur en physique, en géométrie et en algèbre.

Exemples.

$$L(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n} = \text{algèbre tensorielle } T(V)$$

$$\exp(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n} / \mathfrak{S}_n = \text{algèbre symétrique } S(V)$$

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda[n] \otimes V^{\otimes n} / \mathfrak{S}_n = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^n(V) = \text{algèbre extérieure}$$

Dans ce dernier exemple, le coefficient $\Lambda[n]$ est la représentation *alternée* de $\mathfrak{S}_n$:

$$\Lambda[n] = k\, e_n \qquad \sigma.\, e_n = (\operatorname{sgn} \sigma)\, e_n$$

La catégorie $\mathrm{Vect}^{\mathbf{B}}$ des espèces tensorielles est une catégorie abélienne semi-simple. Elle est munie de *sommes directes quelconques*

$$(\bigoplus_{i\in I} F_i)[S] = \bigoplus_{i\in I} F_i[S]$$

et d'un *produit tensoriel*

$$(F\otimes G)[S] = \bigoplus_{A+B=S} F[A] \otimes G[B]$$

associatif, symétrique et unitaire [M.1].

Les foncteurs analytiques sont clos sous la composition, ce qui se traduit par l'existence d'une loi de composition sur les espèces tensorielles. Dans le cas où $G[\varnothing] = 0$, les coefficients du composé $F\circ G$ sont donnés par la formule

$$(F\circ G)[S] = \bigoplus_{R\in \mathrm{Eq}[S]} F[S/_R] \otimes \bigotimes_{C\in S/_R} G[C]$$

Pour tout ensemble A, nous noterons k(A) ou kA l'espace vectoriel librement engendré par A. De même, pour toute espèce de structure F nous noterons k(F) ou kF l'espèce tensorielle obtenue en composant les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B} & \xrightarrow{\ F\ } & \mathrm{Ens} \\ & {\scriptstyle kF}\searrow & \downarrow {\scriptstyle k(\,)} \\ & & \mathrm{Vect} \end{array}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous désignerons par F l'espèce tensorielle kF. On vérifie que le foncteur

$$k(\,): \mathrm{Ens}^{\mathbf{B}} \longrightarrow \mathrm{Vect}^{\mathbf{B}}$$

préserve les opérations de somme, de produit et de composition.

Soit V un espace vectoriel. L'évaluation en V définit un foncteur $F \mapsto F(V)$

$$e(V): \mathrm{Vect}^{\mathbf{B}} \longrightarrow \mathrm{Vect}$$

Nous allons voir qu'il possède un adjoint à droite [K.1]

$$\{V, \ \}: \mathrm{Vect} \longrightarrow \mathrm{Vect}^{\mathbf{B}}$$

Pour tout $W \in \mathrm{Vect}$ et pour tout $S \in \mathbf{B}$, posons

$$\{V, W\}[S] = \mathrm{Hom}(V^{\otimes S}, W)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(F(V), W) &= \prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}(F[n] \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} V^{\otimes n}, W) \\ &= \prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(F[n], \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, W)) \\ &= \mathrm{Hom}(F, \{V, W\}) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $e(V)$ et $\{V, \ \}$ sont adjoints l'un de l'autre. De plus, $e(V)$ préserve le produit tensoriel:

$$(F \otimes G)(V) = F(V) \otimes G(V)$$

$$k1\,(V) = k$$

et par suite on a des transformations naturelles

$$\{V, W_1\} \otimes \{V, W_2\} \longrightarrow \{V, W_1 \otimes W_2\}$$

$$k \longrightarrow \{V, k\}$$

4.2. Dans cette partie, nous allons étudier les espèces tensorielles munies d'une structure algébrique.

Définition 3. [B.1] Une algèbre *tordue* est une espèce tensorielle F munie d'une structure d'algèbre:

$$F \otimes F \longrightarrow F$$

Il y a plusieurs variétés d'algèbres tordues: associative, commutative, algèbre de Lie, etc.

Exemples. Pour toute espèce G, l'espèce

$$T(G) = \bigoplus_{n\geq 0} G^{\otimes n}$$

est une algèbre tordue associative. De même,

$$\exp(G) = S(G) = \bigoplus_{n\geq 0} G^{\otimes n} / \mathfrak{S}_n$$

est une algèbre tordue associative et commutative. Voici une description plus détaillée du concept d'algèbre de Lie tordue: le crochet

$$F\otimes F \xrightarrow{[\,,\,]} F$$

doit satisfaire aux identités

i) $[\,,\,]+[\,,\,]\tau = 0$

ii) $[\,,[\,,\,]]+[\,,[\,,\,]]\sigma+[\,,[\,,\,]]\sigma^2 = 0$

où τ: $F\otimes F \xrightarrow{\sim} F\otimes F$ est la symétrie du produit tensoriel et où σ: $F\otimes F\otimes F \longrightarrow F\otimes F\otimes F$ est la permutation cyclique des facteurs. Les parenthèses $[\,,[\,,\,]]$ désignent le morphisme composé

$$F\otimes F\otimes F \xrightarrow{F\otimes[\,,\,]} F\otimes F \xrightarrow{[\,,\,]} F\,.$$

Pour tout espace vectoriel V, soit Lie(V) l'algèbre de Lie libre sur V.

Théorème 1. Le foncteur Lie: Vect $\longrightarrow$ Vect est analytique:

$$\mathrm{Lie}(V) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Lie}[n]\otimes V^{\otimes n} / \mathfrak{S}_n$$

Remarque. Ce résultat et sa démonstration sont valables pour une variété quelconque d'algèbres et pas seulement pour les algèbres de Lie.

Preuve. Nous avons vu, à la fin du paragraphe précédent, que pour tout V∈ Vect, le foncteur évaluation e(V) possède un adjoint à droite $\{V,\ \}$. Remarquons d'abord que si W est une algèbre de Lie, alors $\{V, W\}$ est une algèbre de Lie tordue: en effet, le composé

$$\begin{array}{ccc} \{V,W\}\otimes\{V,W\} & \longrightarrow & \{V, W\otimes W\} \\ & \searrow & \downarrow \{V,[\,,\,]\} \\ & & \{V,W\} \end{array}$$

est une structure d'algèbre de Lie sur $\{V, W\}$. D'autre part, soit F = F(X) l'algèbre de Lie tordue libre sur l'espèce tensorielle X = kX. Le foncteur évaluation en V∈ Vect préservant le produit tensoriel, on constate que F(V) est munie d'une structure d'algèbre de Lie. Pour toute algèbre de Lie W on a alors des bijections naturelles entre les morphismes suivants

$$F(V) \longrightarrow W \qquad (1)$$

$$F \longrightarrow \{V, W\} \qquad (2)$$

$$X \longrightarrow \{V, W\} \qquad (3)$$

$$V = X(V) \longrightarrow W \qquad (4)$$

$$\mathrm{Lie}(V) \longrightarrow W \qquad (5)$$

où les morphismes (1), (2) et (5) sont des morphismes d'algèbres. Ceci montre que l'on a

$$\mathrm{Lie}(V) = F(V)$$

C.Q.F.D.

Remarque. La suite (Lie[n] | $n \geq 0$) de représentations des groupes symétriques est isomorphe à celle obtenue par C. Reutenauer [R.1].

Théorème 2. (Poincaré-Birkhoff-Witt). Soit U(F) l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie tordue F. Le morphisme canonique $F \longrightarrow U(F)$ est injectif et l'on a de plus un isomorphisme canonique

$$U(F) \simeq \exp(F)$$

Preuve. On vérifie d'abord, par un argument de foncteur adjoint, que pour tout $V \in$ Vect on a

$$U(F)(V) = U(F(V))$$

Remarquons [B.2] ensuite que pour toute algèbre de Lie L on a un isomorphisme

$$\eta: U(L) \simeq S(L)$$

naturel entre les foncteurs U et S. Ceci entraîne que l'on a des isomorphismes naturels

$$U(F(V)) \simeq S(F(V))$$

et finalement que

$$U(F) \simeq \exp(F)$$

C.Q.F.D.

Proposition 1.

$$\exp(\text{Lie}\ (X)) = 1 / 1-X$$

Preuve. Appliquant le théorème précédent, on a successivement

$$\exp(\text{Lie}\ (X)) = U(\text{Lie}\ (X))$$
$$= T(X)$$
$$= 1 / 1-X$$

4.3. Dans cette partie, nous allons discuter de la théorie des espèces tensorielles *virtuelles*. Celles-ci sont obtenues en prenant des différences formelles entre espèces tensorielles finitaires. La transitivité de la relation d'égalité

$$F-G = M-N \Leftrightarrow F \oplus N \simeq M \oplus G$$

est conséquence du fait que $\text{Vect}^{\mathbf{B}}$ est une catégorie semi-simple. Les espèces tensorielles virtuelles en d-variables $X_1, \ldots, X_d$ forment un anneau que nous désignerons par

$$R[[X_1, \ldots, X_d]]$$

Les espèces polynômiales forment un sous-anneau

$$R[X_1, \ldots, X_d] \subset R[[X_1, \ldots, X_d]]$$

On a un isomorphisme de groupes additifs

$$R[X_1, \ldots, X_d] \simeq \bigoplus_{n \in \mathbf{N}^d} R(\mathfrak{S}_n)$$

où $R(\mathfrak{S}_n)$ est le groupe des représentations virtuelles de $\mathfrak{S}_n$. Ceci donne à $R[X_1, ...,X_d]$ une structure d'anneau gradué puisque

$$R(\mathfrak{S}_n) \cdot R(\mathfrak{S}_m) \subseteq R(\mathfrak{S}_{n+m})$$

pour la multiplication des espèces. L'anneau $R[[X_1, ... ,X_n]]$ s'identifie au complété de l'anneau gradué $R[X_1, ... ,X_n]$:

$$R[[X_1, ... ,X_d]] = \prod_{n\in \mathbb{N}^d} R(\mathfrak{S}_n)$$

L'opération de linéarisation se prolonge aux espèces virtuelles et on obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux

$$k(): B[[X_1, ... ,X_n]] \longrightarrow R[[X_1, ... ,X_n]]$$

S'il n'y a pas d'ambiguité, nous désignerons parfois l'espèce tensorielle kF par F.

La Règle des signes prend une forme simplifiée en théorie des espèces tensorielles. Posons

$$\Lambda(X) = \sum_{n\geq 0} \Lambda[n] \otimes X^n/_{\mathfrak{S}_n} = \sum_{n\geq 0} \Lambda^n(X)$$

Proposition 2.

$$\exp(X)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \Lambda^n(X)$$

Preuve. Pour tout $S\in \mathbf{B}$ et pour tout $n\geq 0$, posons

$$L_n[S] = \{f: S \twoheadrightarrow (n)\}$$

La proposition 1 du chapitre 3 nous donne

$$\exp(X)^{-1}[S] = \sum_{n\geq 0} (-1)^n L_n[S]$$

Nous allons décrire un complexe de chaînes

$$kL_0[S] \xleftarrow{0} kL_1[S] \xleftarrow{\partial} kL_2[S] \xleftarrow{\partial} ...$$

dont l'homologie est donnée par la suite

$$\Lambda^0[S] , \Lambda^1[S] , \Lambda^2[S] , ...$$

Une identité classique sur l'homologie des complexes nous donnera:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n L_n[S] = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \Lambda^n[S]$$

Si Card $S\leq 1$, alors $\partial=0$ et $\Lambda^n[S] = kL_n[S]$. Si Card $S>1$, posons, pour tout $n\geq 0$,

$$C_n[S] = \{(\varnothing<A_0< ... <A_n<S) \mid A_i\subset S, 1\leq i\leq n\}$$

Il y a une bijection naturelle évidente

$$C_n[S] \simeq L_{n+2}[S]$$

Soit $\Delta°S$ le complexe simplicial des parties propres non vides de S. Géométriquement, $\Delta°S$ est le bord du simplexe dont les sommets sont les éléments de S; la réalisation géométrique de $\Delta°S$ est une sphère de dimension égale à Card S−2. Par définition, $C_n[S]$ est l'ensemble des simplexes de dimension n de la première subdivision barycentrique de $\Delta°S$. L'homologie réduite de $\Delta°S$ peut donc se calculer au moyen du complexe de chaîne

$$k \leftarrow kC_0[S] \leftarrow kC_1[S] \leftarrow \dots$$

Comme on a (résultat classique de topologie):

$$\tilde{H}_n(\Delta°S) = \Lambda^{n+2}[S] \qquad (n\geq 0)$$

la démonstration est terminée.

Utilisant les notations du chapitre 3, cette proposition montre que

$$\varepsilon^n = (-1)^n\Lambda[n]$$

dans l'anneau $R(\mathfrak{S}_n)$.

Pour tout ensemble S, soit $\Pi[S]$ l'ensemble ordonné des relations d'équivalences *propres* sur S:

$$\Pi[S] = \{R\in Eq[S] \mid \hat{o}<R<\hat{i}\}$$

Dans ce qui suit, $\tilde{H}_*(\Pi[S])$ désignera l'homologie réduite du complexe simplicial des chaînes non vides de $\Pi[S]$.

Théorème 3.

$$\begin{aligned} \log(1+X)[n] &= k.1 && \text{si } n = 1\\ &= -k.1 && \text{si } n = 2\\ &= (-1)^{n+1}\tilde{H}_{n-3}(\Pi[n]) && \text{si } n > 2 \end{aligned}$$

Preuve. D'après le corollaire de la proposition 2 du chap. 3,

$$\log(1+X) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n P_n(X)$$

où

$$P_n[S] = \{(\hat{o}=R_0< \dots <R_n=\hat{i}) \mid R_i\in Eq[S],\ 1\leq i\leq n\}$$

Pour tout $n\geq 0$, soit $C_n(\Pi[S])$ l'ensemble des chaînes de longueur n de l'ensemble ordonné $\Pi[S]$. On a $C_n(\Pi[S]) = P_{n+2}[S]$. Considérons le complexe augmenté

$$kP_1[S] \leftarrow kC_0(\Pi[S]) \leftarrow kC_1(\Pi[S]) \leftarrow \dots$$

dont l'homologie est (si Card S>2)

$$0\ ,\ \tilde{H}_0(\Pi[S]),\ \tilde{H}_1(\Pi[S]), \dots$$

On a alors

$$-P_1[S] + \sum_{n\geq 0}(-1)^n C_n(\Pi[S]) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\tilde{H}_n(\Pi[S])$$

Autrement dit,

$$\log(1+X)[S] = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \tilde{H}_n(\prod[S])$$

dès que Card S > 2. Pour terminer la démonstration on utilise le fait que le treillis Eq[S] est un treillis géométrique [F.1, S.1] et par suite que

$$\tilde{H}_n(\prod[S]) = 0 \qquad \text{sauf si } n = (\text{Card } S) - 3.$$

Théorème 4.

et

$$\text{Lie}(X) = \log 1 / 1-X$$

$$\text{Lie}[1] = k.1$$

$$\text{Lie}[2] = \Lambda[2]$$

$$\text{Lie}[n] = \Lambda[n] \otimes \tilde{H}_{n-3}(\prod[n]) \qquad (n\geq 3)$$

Preuve. La première égalité résulte de la proposition 1 du chapitre 3. On en déduit que

$$\text{Lie}(X) = -\log(1-X)$$

Utilisant la Règle des signes et le théorème précédent, on obtient le résultat.

4.4. Pour terminer, nous allons calculer le caractère de l'espèce tensorielle Lie(X). Rappelons quelques résultats. A toute espèce tensorielle finitaire F(X) est associée une série *indicatrice*

$$Z_F = \sum_{n\geq 0} 1/n! \sum_{\sigma\in \mathfrak{S}_n} \text{Tr } F[\sigma]\, I[\sigma]$$

où Tr F[σ] est la trace de l'opérateur linéaire F[σ]: F[n] ⟶ F[n]

et I(σ) est le monôme $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ où d_i est le nombre de cycles de longueur i dans σ.

Z_F est une série formelle d'une infinité de variables: $Z_F = Z_F(x_1,x_2,x_3, \ldots)$

On a les identités

$$Z_{F+G} = Z_F + Z_G$$

$$Z_{FG} = Z_F Z_G$$

$$Z_{F(G)} = Z_F(Z_G)$$

où le membre de droite de la dernière égalité désigne le *pléthisme* : si $f = f(x_1,x_2, \ldots)$ et $g = g(x_1,x_2, \ldots)$ alors

$$f(g) = f(g_1,g_2, \ldots)$$

où

$$g_i = g(x_i, x_{2i}, \ldots)$$

Proposition 3.

$$Z_{\log(1+X)} = \sum_{n\geq 1} \mu(n)/n \log(1+x_n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} -1/n \sum_{d|n} \mu(d)(-1)^{n/d}\, x_d^{n/d}$$

Preuve. Inversant la relation Y = log(1+X), on obtient

$$1 + X = \exp(Y)$$

et par suite

$$1 + x_1 = \exp(\sum_{n\geq 1} y_n/n)$$

$$\log(1+x_1) = \sum_{n\geq 1} y_n/n$$

ce qui entraîne que pour tout k≥1

$$\log(1+x_k) = \sum_{n\geq 1} y_{nk}/n$$

Une inversion de Möbius nous donne finalement le résultat

$$y_1 = \sum_{k\geq 1} \mu(k)/k \ \log(1+x_k)$$

Remarque. Si on combine ce résultat avec celui de la proposition on obtient le résultat de P. Hanlon sur la fonction de Möbius du treillis des partitions invariantes par une permutation donnée [H.1]

Proposition 4.

$$Z_{Lie(X)} = \sum_{n\geq 1} \mu(n)/n \ \log 1/1-x_n$$

$$= \sum_{n\geq 1} 1/n \sum_{d|n} \mu(d)\ x_d{}^{n/d}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser le théorème 4:

$$Lie(X) = \log 1/1-X$$

Remarque. La proposition permet de généraliser la formule de Witt. Soit Γ un groupe fini agissant sur un espace vectoriel V. L'action du groupe Γ se prolonge à l'algèbre de Lie libre sur V:

$$\Gamma \times Lie(V) \longrightarrow Lie(V)$$

Lie(V) est une algèbre graduée

$$Lie(V) = \sum_{n\geq 0} Lie^n(V)$$

et le groupe Γ agit sur la partie homogène de degré n

$$\Gamma \times Lie^n(V) \longrightarrow Lie^n(V)$$

Désignons par χ le caractère de la représentation V et par χ_n le caractère de la représentation $Lie^n(V)$.

Proposition 5. On a pour tout $\sigma \in \Gamma$

$$\chi_n(\sigma) = 1/n \sum_{d|n} \chi(\sigma^d)^{n/d}$$

Appendice

Dans cet appendice, nous allons démontrer l'unicité de la série de Taylor d'un foncteur analytique et donner des conditions simples qui caractérisent les foncteurs analytiques.

Définition 1. Le *diagramme* DF d'un foncteur F: Ens $\longrightarrow$ Ens est la catégorie dont les objets sont les couples (x, A), où $x \in F(A)$, et dont les morphismes (x, A) $\longrightarrow$ (y, B) sont les fonctions f: A $\longrightarrow$ B telles que

$$F(f)(x) = y$$

Définition 2. Un élément $x \in F(A)$ est *générique* si pour tout

$$\begin{array}{ccc} & & (z, C) \\ & & \downarrow g \\ (x, A) & \xrightarrow{f} & (y, B) \end{array}$$

il existe h: (x, A) $\longrightarrow$ (z, C) tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & (z, C) \\ & h \nearrow & \downarrow g \\ (x, A) & \xrightarrow{f} & (y, B) \end{array}$$

soit commutatif.

Lemme 1. Soit u: (x, A) $\longrightarrow$ (y, B). Si y est générique, alors u est surjective. Si x et y sont génériques, alors u est bijective.

Preuve. Si y est générique, il existe h: (x,B) $\longrightarrow$ (y, A) tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & (x, A) \\ & h \nearrow & \downarrow u \\ (y, B) & \xrightarrow{1_B} & (y, B) \end{array}$$

soit commutatif. Ceci entraîne que u est surjective. Si de plus x est générique, alors h est surjective et, par suite, u est bijective.

Pour tout ensemble **fini** S posons

$$F^{\circ}[S] = \{x \in F(S) \mid x \text{ est générique}\}$$

Le foncteur $F^{\circ}[\ ]$ est défini sur la catégorie **B**; c'est donc une espèce de structures. Considérons le foncteur analytique $F^{\circ}(\ )$ dont les coefficients sont donnés par $F^{\circ}[\ ]$:

$$F^\circ(A) = \tilde{\sum_S} F^\circ[S] \times A^S$$

On a une transformation naturelle

$$i: F^\circ \longrightarrow F$$

qui envoie la classe de $(x, f) \in F^\circ[S] \times A^S$ dans l'élément $F(f)(x) \in F(A)$.

Lemme 2. La transformation $i: F^\circ \longrightarrow F$ est injective.

Preuve. Soit

$$(x, f) \in F^\circ[S] \times A^S \text{ et } (y, g) \in F^\circ[T] \times A^T$$

Supposons que $F(f)(x) = F(g)(y)$. Nous allons montrer que (x, f) et (y, g) sont *isomorphes* . On a

$$\begin{array}{ccc} & & (y, T) \\ & & \downarrow g \\ (x, S) & \xrightarrow{f} & (z, A) \end{array}$$

où $z = F(f)(x) = F(g)(y)$. Comme x est générique, il existe $h: (x, S) \longrightarrow (y, T)$ tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & (y, T) \\ & h \nearrow & \downarrow g \\ (x, S) & \xrightarrow{f} & (z, A) \end{array}$$

soit commutatif. La bijectivité de h est conséquence du lemme 1.

C.Q.F.D.

Proposition 1. Soit $F: Ens \longrightarrow Ens$ un foncteur analytique. On a un isomorphisme canonique

$$F^\circ[\ ] \simeq F[\ ]$$

Preuve. Cet isomorphisme envoie $x \in F[S]$ dans la classe de

$$(x, 1_S) \in F[S] \times S^S$$

Le lecteur pourra compléter la démonstration.

Proposition 2. Un foncteur $F: Ens \longrightarrow Ens$ est analytique si et seulement si il est engendré par ses éléments génériques finis, c'est-à-dire si pour tout $x \in F(A)$, il existe un élément générique (y, S), avec S fini, et un morphisme $(y, S) \longrightarrow (x, A)$.

Preuve. En effet, $x \in F(A)$ appartient à l'image de $i: F^\circ(A) \longrightarrow F(A)$ si et seulement si il existe un élément générique (y, S) avec S fini et un morphisme $(y, S) \longrightarrow (x, A)$. La proposition 1 montre que la condition est nécessaire. La suffisance résulte du fait que si i est surjective, alors elle est bijective

(Lemme 2), ce qui montre que F est isomorphe au foncteur analytique F°.

Lemme 3. Soit α: F $\longrightarrow$ G une transformation naturelle régulière entre les foncteurs F et G. Si $x \in F(A)$ est générique, alors $\alpha(x) \in G(A)$ est générique.

La démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 3. Soit α: F $\longrightarrow$ G une transformation naturelle régulière entre les foncteurs analytiques F et G. Alors il existe une et une seule transformation naturelle θ: F[ ] $\longrightarrow$ G[ ] telle que $\alpha = \underline{\theta}$ (voir le chapitre 1).

Preuve. D'après le lemme précédent, α induit une transformation

$$\alpha^\circ: F^\circ[\ ] \longrightarrow G^\circ[\ ]$$

et par suite (prop. 1) on a une transformation naturelle

$$\theta: F[\ ] \longrightarrow G[\ ]$$

Le reste de la démonstration est laissée au lecteur.

Il reste à caractériser les foncteurs analytiques.

Définition 3. Un foncteur F: Ens $\longrightarrow$ Ens est *continu* s'il préserve les limites inductives filtrantes. Si F préserve de plus les limites projectives filtrantes, nous dirons qu'il est *bicontinu.*

Définition 4. Un foncteur F: Ens $\longrightarrow$ Ens est *régulier* s'il transforme les carrés commutatifs réguliers en carrés réguliers.

Théorème 1. Un foncteur F: Ens $\longrightarrow$ Ens est analytique si et seulement si il est bicontinu et régulier.

Preuve. Pour démontrer la nécessité, remarquons que la classe C des foncteurs bicontinus et réguliers est close sous 1) les produits finis 2) les sommes quelconques 3) le quotient par l'action d'un groupe fini. Remarquons ensuite que le foncteur identité X: Ens $\longrightarrow$ Ens appartient à C et que tout foncteur analytique F possède un développement en série

$$F = \sum_{n \geq 0} F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n$$

Pour démontrer la suffisance, nous allons vérifier qu'un foncteur bicontinu et régulier est engendré par ses éléments génériques (prop. 2)

Définition 5. Soit F: Ens $\longrightarrow$ Ens un foncteur. Un élément $x \in F(A)$ est *minimal* si pour tout morphisme

$$(y, B) \xrightarrow{f} (x, A)$$

f est surjectif.

Lemme 4. Soit F: Ens $\longrightarrow$ Ens un foncteur continu. Alors F est engendré par ses éléments minimaux finis.

Preuve. Soit $x \in F(A)$. La continuité de F entraîne qu'il existe un sous-ensemble fini $S \subset A$ et un élément $y \in F(S)$ tel que $F(i)(y) = x$, où i dénote l'inclusion $S \subset A$. Choisissons un couple (y, S) de sorte que la cardinalité de S soit la plus petite possible. L'élément (y, S) est minimal. C.Q.F.D.

Lemme 5. Soit F: Ens $\longrightarrow$ Ens un foncteur continu régulier. Un élément $x \in F(A)$ est générique si et seulement si tout morphisme

$$(x, A) \longleftarrow (y, B)$$

où B est fini et y minimal, est un isomorphisme.

Preuve. Démontrons la suffisance, la nécessité étant laissée au lecteur. Soit

$$\begin{array}{ccc} & & (z, C) \\ & & \downarrow \\ (x, A) & \longrightarrow & (y, B) \end{array}$$

La régularité du foncteur F entraîne l'existence d'un carré commutatif (où $D = A \times C$):
B

$$\begin{array}{ccc} (w, D) & \longrightarrow & (z, C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, A) & \longrightarrow & (y, B) \end{array}$$

La continuité de F entraîne l'existence d'un morphisme (lemme 4)

$$(v, S) \longrightarrow (w, D)$$

où (v, S) est fini et minimal. Le composé

$$\sigma: (v, S) \longrightarrow (w, D) \longrightarrow (x, A)$$

est alors inversible si l'hypothèse est satisfaite. On a par suite un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & \overset{\sigma^{-1}}{\longrightarrow} & & & & \\ (x, A) & & (v, S) & \longrightarrow & (w, D) & \longrightarrow & (z, C) \\ & \searrow & & & & & \downarrow \\ & & & & & & (y, B) \end{array}$$

C.Q.F.D.

Définition 6. Soit F: Ens $\longrightarrow$ Ens. Nous dirons que $x \in F(A)$ est *irrégulier* si

$$x \notin \mathrm{Im}(F^{\circ}(A) \xrightarrow{i} F(A))$$

Lemme 6. Soit F un foncteur continu régulier et soit $x_0 \in F(S_0)$ où S_0 est fini. Si x_0 est irrégulier et minimal, il existe un morphisme

$$(x_0, S_0) \xleftarrow{p} (x_1, S_1)$$

tel que

1) S_1 est fini et x_1 est irrégulier et minimal
2) p est surjective sans être bijective

Preuve. Si x_0 est irrégulier, à plus forte raison il n'est pas générique, ce qui entraîne, en vertu du lemme précédent, l'existence d'un morphisme

$$(x_0, S_0) \longleftarrow (x_1, S_1)$$

tel que

1) (x_1, S_1) est minimal
2) u n'est pas bijectif

La minimalité de (x_0, S_0) entraîne que u est surjective. De plus, si on avait $x_1 \in F^\circ(S_1)$, on aurait a fortiori $x_0 = F(f)(x_1) \in F^\circ(S_0)$ ce qui est absurde puisque x_0 est irrégulier. Donc x_1 est irrégulier.

C.Q.F.D.

Lemme 7. Soit F un foncteur continu et régulier. Alors les deux conditions suivantes sont incompatibles entre elles:

1) F préserve les limites projectives filtrantes
2) Il existe un élément irrégulier $x \in F(A)$

Preuve. Supposons les deux conditions satisfaites. La continuité entraîne l'existence d'un morphisme (lemme 4):

$$(x, A) \longleftarrow (x_0, S_0)$$

où S_0 est fini et x_0 est minimal. L'irrégularité de x entraîne celle de x_0. Une utilisation itérative du lemme précédent implique l'existence d'une chaîne infinie

$$(x_0, S_0) \xleftarrow{q_1} (x_1, S_1) \xleftarrow{q_2} (x_2, S_2) \longleftarrow \ldots$$

telle que pour tout $n \geq 0$

1) (x_n, S_n) est fini et minimal
2) q_n est surjective sans être bijective

Posons

$$S_\infty = \varprojlim S_n$$

et soient p_n: $S_\infty \longrightarrow S_n$ $(n \geq 0)$ les projections. L'hypothèse que F préserve les limites projectives entraîne l'existence d'un élément $z \in F(S_\infty)$ tel que

$$F(p_n)(z) = x_n \qquad \text{pour tout } n \geq 0$$

Il existe par continuité un morphisme

$$(z, S_\infty) \xleftarrow{i} (w, S)$$

où S est fini. Comme

$$\lim_{n\to\infty} \text{Card } S_n = \infty$$

il existe un entier n tel que le composé

$$(x_n, S_n) \xleftarrow{p_n \circ i} (w, S)$$

n'est pas surjectif. Ceci contredit la minimalité de (x_n, S_n).

Bibliographie

[B.1] M.G. Barratt. *Twisted Lie Algebras*, Lecture Notes in Math., 658, Springer-Verlag, 1977.

[B.2] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 2. Actualités Scientifiques et Industrielles, Herman, Paris, 1972.

[F.1] J. Folkman. *The homology groups of a lattice*, J. Math. Mech. 15 (1966), 631-636.

[G.1] A.M. Garsia, S.C. Milne. *A Rogers-Ramanujan Bijection*, J. Comb. Th. (A) **31** (1981), 289-339.

[H.1] P. Hanlon. *The fixed-point partition lattices*, Pacific J. Math. 96 (1981), 319-341.

[J.1] A. Joyal. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, Vol. 42 (1981), 1-82.

[J.2] A. Joyal. *Règle des signes en algèbre combinatoire*. C. R. Math. Acad. Sci. Soc. Royale Canada, Vol. VII (1985), 285-290.

[K.1] G.M. Kelly. *On clubs and doctrines*, in "Category Seminar" (G.M. Kelly, Ed.) Lecture Notes in Mathematics No 420, Springer Verlag, 1974.

[K.2] D. Knutson. *λ-Rings and the Representation theory of the Symmetric Group*. Lecture Notes in Mathematics No 308, Springer Verlag, 1973.

[L.1] G. Labelle. *Sur l'inversion et l'itération continue des séries formelles*, Europ. J. Combin. Vol. 1 (1980), 113-138.

[M.1] I.G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[M.2] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York, 1971.

[N.1] O. Nava, G.C. Rota. *Plethysm, Categories, and Combinatorics*, Advances in Mathematics 58 (1985), 61-88 .

[R.1] C. Reutenauer. *Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt, logarithm, and symmetric group representations of degrees equal to Stirling numbers*. Ce volume.

[S.1] R. Stanley. *Some aspects of groups acting on finite posets*, Journal of combinatorial theory, Series A, 32 (1982), 132-161.

[Y.1] Y.N. Yeh. *On the Combinatorial Species of Joyal*, Thèse, State University of New York at Buffalo, 1985.