DIAGRAMMES

L. COPPEY
C. LAIR

Leçons de théorie des esquisses

Diagrammes, tome 12 (1984), exp. n° 4, p. I-38
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1984__12__A4_0>

© Université Paris 7, UER math., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Volume 12, 1984.

A.M.S. Sub. Class.
18 - 02, 18 C 10,
18 A 10, 00 A 25.

Leçons
de
Théorie des Esquisses

L.Coppey et C.Lair

Partie I :

- Introduction.
- Leçon 1 : Sur la description géométrique de certaines théories.
- Leçon 2 : Graphes orientés, graphes multiplicatifs, catégories.
- Leçon 3 : Esquisses.

Il y a l'art et la manière...

...mais tout est dans le ton!

Introduction.

En Sciences (comme en Lettres), il est fréquent que des auteurs s'ignorent, ou feignent de s'ignorer, tout en produisant des travaux voisins, à des époques voisines. Lieu commun sur lequel nous ne nous étendrons pas. Disons que c'est dans la nature des choses...

En Sciences (comme en Lettres), il est encore fréquent que des auteurs feignent de s'ignorer, tout en produisant des travaux quasiment identiques, à des époques voisines. Disons que c'est de bonne guerre, compte tenu de l'atmosphère de compétition qui entoure généralement l'activité de production. Il est de bonne guerre aussi, en pareils cas, de réparer d'éventuelles offenses, ou de rétablir, si nécessaire, quelques éléments de vérité, par exemple sur l'origine des idées, sur l'influence des travaux de X ou de Y, sur les ressemblances ou les différences avec les travaux de Z...Tout ceci est affaire de jugement, et dépend en grande partie du niveau de scrupulosité, voire de simple politesse, atteint par les individus concernés. Les moyens de réparer sont variés: la remarque allusive, le renvoi en bas de page, l'annexe, l'appendice, la citation (explicite ou bibliographique), dans la publication définitive d'un travail qui n'était jusque là qu'en chantier, ou dans un travail postérieur... La réparation n'est pas une fin en soi, et elle peut être plus ou moins bien réussie...

En Sciences (peut-être plus qu'en Lettres), il arrive que des auteurs produisent des travaux quasiment identiques à des intervalles de temps importants. Disons que c'est amusant. Doublement amusant, s'il s'agit d'une coïncidence, difficile alors à identifier comme telle.
Simplement amusant s'il s'agit d'un vol caractérisé, comme c'est plus généralement le cas. L'auteur volé ne s'amuse peut-être pas toujours autant qu'il serait souhaitable. Cela peut dépendre de la notoriété relative du voleur et du volé !
Dans les deux cas, tout cela n'est pas bien grave au regard de la Science et de ceux qui la font : les spécialistes d'une question s'y retrouvent très vite dans ce genre d'affaires, et s'il doit y avoir règlement, amiable ou judiciaire, les choses sont claires, en général...

II

Laissant de côté quelques variantes des cas précédents, on en arrive,immanquablement, au cas le plus douteux, qui sévit surtout en Sciences, comme on le comprendra bien.
En gros, il s'agit maintenant de ceux qui produisent, longtemps après d'autres, des travaux semblables, non quasiment identiques, bien qu'un peu identiques sur le fond, tout en présentant une forme assez différente, mais pas vraiment différente, en tout cas originaux dans leur tournure, tendant d'ailleurs à valoriser les travaux plus anciens, en en dévoilant la pertinence toute actuelle, respectant la profondeur des idées premières sur le sujet, resituant ces idées dans leur contexte historique, entendu en un sens le plus large possible bien sûr, évoquant donc l'excellente atmosphère générale des années X..., où se bousculaient, alors et comme toujours, bons et moins bons auteurs, autour de thèmes voisins, dans un foisonnement d'idées en tous genres.
La bonne ambiance, n'est-ce pas ?
Longtemps après, on comprend qu'il soit simple, avec un tel style, de reconnaître une paternité des idées assez diffuse, voire arrangeante..., en admettant, ce qui n'est pas toujours le cas, beaucoup s'en faut, que ces idées soient restituées sans être trop mal traitées.

Nous voici donc aux prises avec les rois de la nuance tous azimuts, les rois de la pédagogie universelle, bref les gangsters du marketing pur et dur. Faut-il donner quelques exemples, citer quelques noms ? Ah ! Quel cruel dilemme !... On aurait peur, ce faisant, d'en blesser quelques-uns... Mais attention, ne nous méprenons pas : au risque de surprendre, nous ne blesserions pas tant ceux que nous aurions pu citer, que ceux, fort nombreux, que nous aurions du, pour une fois, laisser dans l'ombre...

Or donc, on assiste à un phénomène surprenant: l'ébullition à retardement ! Après cinq, dix, vingt, trente ans, mais parfois aussi des siècles de sage attente dans le congélateur, voilà que des idées, brusquement, sans qu'on sache trop pourquoi, entrent en pleine ébullition, dans l'enthousiasme général. La nuée ardente balaie tout sur son passage: les noms, les références, les dates et autres détails sans importance, et on vient nous expliquer en effet:

"Pourquoi donc vous attachez-vous au soi-disant sens profond de certains travaux, sens profond qui vous est tout à fait personnel ? Quelle importance ? Tout est relatif ! Ce qui est profond pour vous peut ne pas l'être pour d'autres, et vice versa ! Personne n'est vraiment détenteur de la pensée d'autrui, ou alors tout le monde !..."

III

"Pourquoi donc vous acharnez-vous à respecter les dates, les références, les noms, et autres repères insignifiants ? Vous menez toujours un combat d'arrière garde ! Allons, ce qui compte, ce sont les idées à l'état pur, n'est-ce pas là l'essentiel ? D'ailleurs, elles font partie du patrimoine commun, elles sont dans le domaine public..."

"Pourquoi donc restez-vous accroché comme cela au passé ? Pourquoi réveillez-vous sans cesse les mêmes querelles, qui n'ont du reste jamais vraiment existé ? Soyez réalistes, rejoignez le grand cortège des maquignons que nous sommes : c'est cela la vraie communauté scientifique internationale ! Enfin, comprenons-nous bien, cela en fait partie: il faut de tout pour faire un monde, et chacun doit y avoir sa place..."

Eh bien non, non et non ! Trois fois non ! Les maquignons, dehors !...
Dehors, avec vos discours honteux : vous avez fait dix fois le tour du monde, en venant parfois nous expliquer, avec condescendance, que nous perdions notre temps à faire ceci ou cela, qu'en tout cas ce n'était certainement pas comme ceci ou comme cela qu'il fallait faire ceci ou cela, qu'il était de la plus haute importance, par contre, de s'intéresser à ceci et à cela, parceque vous y aviez mis le nez, et vous voilà maintenant en train de "réhabiliter" ce que vous avez soigneusement tenu à l'écart, en train de nous dire le contraire de ce que vous professiez naguère, en train de défigurer l'histoire (des hommes et des idées), de la tordre à votre convenance, de l'aseptiser aussi, au nom de la Science et de sa Sacro-sainte objectivité.
Vous faites mieux encore : ce que vous avez si souvent et publiquement méprisé, vous vous l'appropriez, non sans quelques précautions grossières, qui feraient rire si elles n'étaient pas aussi affligeantes : vous avez, par exemple, des égards émouvants, presque de la vénération, pour ceux qui ont tout de même une grande et juste renommée, difficile à passer sous silence, et vous allez expliquant que leur grandeur était quelque peu cachée par la présence d'un entourage médiocre qui la masquait ! Quel délice !
Et c'est à cet entourage "médiocre", entre autres, à quelques-uns comme nous, donc, que vous venez maintenant proposer vos bons offices, à propos du B-A BA du B-A BA de ce qui fut pour nous, voilà bien des années, le point de départ, merveilleux et enthousiasmant, d'une course bien remplie. Car, figurez-vous que nous n'avons pas chômé depuis ce bon vieux temps, et que ce qui fait la richesse, la beauté, la grandeur d'une idée, d'une définition, d'une théorie, c'est avant tout les travaux qui en sont issus.

Dans le domaine des catégories de structures et des esquisses, car il s'agit de lui, ici, ceux qui ont adopté au départ le point de vue (forme et fond) de C.Ehresmann ne sont pas déçus de ce qu'ils ont pu en tirer, n'ayez crainte : au fil des ans, il est vrai que leur nombre a diminué, c'est un fait, et nous l'imputons surtout aux inadmissibles pressions des maquignons, mais en même temps que leur nombre diminuait, la qualité et la quantité des travaux publiés par ceux qui tenaient bon augmentaient.
Certes, la publication dans les "revues internationales de haute tenue" devenait problématique, tant elles sont noyautées , dans notre domaine, soit par les ennemis irréductibles des catégories que la simple vue d'une flèche rend malades, soit par les maquignons. Dans un cas comme dans l'autre, ce noyautage ne fait que desservir la qualité de ces revues internationales. Avis aux éditeurs !
Alors, la publication s'est faite, assez récemment, dans l'excellente revue "Diagrammes" (1979) que nous vous convions à lire avec grand soin, car çà en vaut vraiment la peine. Sa renommée internationale n'est pas à faire : les éditeurs et auteurs de cette revue préfèrent se savoir lus par une poignée de scientifiques sérieux, plutôt que par une foule de parvenus désoeuvrés, qui prétendent tout savoir, et plus encore, et qui s'en vont dire, après un coup d'oeil aussi rapide que misérable sur notre belle revue : "Mieux vaut ne rien en dire !"
Nous, nous préférons en dire quelque chose : du bien, pour être précis, parce que c'est juste de le dire. C'est juste de le dire, parce que c'est vrai. Voilà !
Mais la rumeur nous parvient déjà aux oreilles:

"Scandale ! C'est de l'auto-édition ! Vous ne vous pliez pas à la règle ! Inadmissible ! Intolérable ! Vous devez vous soumettre, ou disparaître. Allez, au pas ! Comme tout le monde. Il faut des référés, des comités de lecture, des instances d'évaluation, des expertises, des contre-expertises, des avis circonstanciés, des rapports, et encore des rapports, toujours des rapports... que çà vous plaise ou non ! "

Eh bien ! Vous tous qui parlez de la sorte, allez-y, ne vous gênez surtout pas : critiquez, critiquez, mais faites-le avec pertinence; nous acceptons même l'impertinence, pour ne rien vous cacher, à la condition toutefois qu'elle soit pertinente (nous rappelons que le bon usage de la langue française veut que la non-pertinence ne se confond pas avec l'impertinence, ce qui fait que celle-ci peut parfaitement être pertinente. Cette

introduction n'illustre-t-elle pas à merveille ce dernier point ?)
Mais revenons un peu sur les fameuses garanties de bonne tenue, de haute qualité des revues. Nous ne sommes pas naïfs au point de croire que toutes les revues se valent, ou que tous les articles se valent, et en disant ceci, nous sommes bien conscients du caractère profondément subjectif de nos jugements de valeur. C'est du reste parce que les jugements de valeur sont, par essence, subjectifs que toute entreprise d' "évaluation objective" est nécessairement mensongère. Et ceux qui adorent la standardisation, la normalisation, l'ordre pour l'ordre, et en définitive la soumission (des autres si possible !), ceux-là ont tout intérêt, on le comprend bien, à entretenir la confusion entre les notions de valeur, de vérité, d'objectivité... Il est vrai de reconnaître qu'à notre époque la standardisation gagne chaque jour du terrain, comme il est vrai de reconnaître que les entreprises d' "évaluation objective" prolifèrent et réussissent au-delà de toute espérance dans les domaines de l'arbitraire et de la magouille, qui leur sont propres. Il est réconfortant de se prendre à espérer qu'un jour elles feront tout de même faillite, dans tous les domaines...
En attendant, pour ce qui nous concerne, notre publication reste grande ouverte aux articles comme à la critique. C'est ce que nous indiquions dès l'origine dans l' "avertissement des éditeurs" . Nous tenons bon sur ce point. C'est notre manière, sans doute originale, d'offrir ces fameuses garanties de qualité concernant notre revue en général, et les articles qui la composent en particulier. En ce qui concerne les autres, nous n'avons pas de loi à édicter, simplement peut-être un voeu à formuler: que ceux qui ne tolèrent pas l'auto-édition veillent bien à ne pas s'auto-éditer, et offrent, par surcroît, à tous ceux qui le désirent la possibilité matérielle de s'exprimer un peu !
Nous préférons livrer notre production (entre autres) en pâture publique, avec tous les soi-disant risques que cela comporte, plutôt que d'oeuvrer dans l'ombre, de manigancer, d'arpenter frileusement les couloirs qui mènent aux sanctuaires des grands prêtres de la science, dans l'espoir d'en frôler quelques-uns, ou de rencontrer quelque éminence grise détentrice du label de qualité !
Et, après tout, ne sommes-nous pas plus proches que bien d' autres du sens même de la publication, qui n'est rien d'autre que l'action de rendre public ?
Enfin, à vous qui ne supportez pas l'auto-édition, nous n' hésitons pas à dire que vos appréciations normatives nous cassent les oreilles. Pire! Elles sont le signe que vous ne

supportez pas la liberté d'expression. Il est piquant d'observer, par ailleurs, que beaucoup d'entre vous sont de fervents adeptes des radios libres, de la télévision par câble, du libre exercice des professions,mais surtout pas de l'édition scientifique. Y aurait-il deux formes de liberté ?

Une juste et saine colère nous anime donc en ces temps troubles, où beaucoup d'intellectuels se prennent à douter d'eux-mêmes, soit, pour les uns, parce qu'ils n'en ont jamais été vraiment de bons, et on comprend leur doute, soit, pour d'autres, parce qu'ils ne comprennent pas bien ce qui leur arrive, lorsqu'ayant été tenus à l'écart, voire méprisés, par les premiers, ils s'aperçoivent que ceux-ci, en mal de nourriture, viennent leur prendre le pain de la bouche.
Ah, mais ! dira-t-on, voilà des propos bien excessifs, des accusations vagues, des plaintes peu ou pas fondées, bref un discours quelque peu délirant ! Certes,nous voici de nouveau aux prises avec le cruel dilemme de tout à l'heure : des noms, des dates, des références,... Eh oui ! On ne peut tout de même pas se laisser prendre à son propre piège : n'avons-nous pas déploré, il y a peu, les dégats de la nuée ardente ?
Alors ? Alors ? Qu'ils prennent garde ceux qui insisteraient trop dans cette voie, car des noms, des dates, des références, et des plus authentiques, nous en avons, nous en avons même beaucoup !
Mais nous, voyez-vous, nous respectons les personnes, toutes les personnes, pour ce qu'elles sont : nous respectons tous les scientifiques, car nous pensons que ce sont, a priori, de bons scientifiques, et nous respectons de même tous les maquignons, car nous pensons que ce sont, a priori, de bons maquignons, mais nous ne mélangeons pas les genres. C'est là toute la différence !

Fallait-il interrompre l'expression de notre courroux, pour nous expliquer plus calmement, plus "gentiment" sur tel ou tel point ? La logique l'eut commandé, mais la passion jusqu'ici l'a emporté, et c'est bien ainsi...
Plusieurs fois, nous avons parlé de travaux "quasiment identiques" . Marquons donc une pause dans notre diatribe, et précisons un peu ce que nous entendons par là.
Eh bien, on peut dire que des travaux quasiment identiques sont des travaux qui ne sont pas franchement différents !
Or, la différence peut se manifester sur bien des plans. Expliquons-nous donc sur ce que sont, par nature, les travaux scientifiques dignes d'attention.

. Il peut s'agir d'un résultat nouveau.

. Il peut s'agir d'une méthode nouvelle pour obtenir un résultat déjà acquis, ce qui constitue, au sens propre, un résultat nouveau, mais peut-être d'un autre ordre; on connaît des cas où la nouveauté de la méthode l'emporte en intérêt sur les questions qui l'ont suscitée (par exemple : le fameux "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux" de E.Galois).

. Il peut s'agir encore d'une définition nouvelle dont l'intérêt n'apparaît à la communauté scientifique qu'à l'usage pertinent qu'elle en fait (c'est notamment le sens de la plupart des travaux de C.Ehresmann; mentionnons-en ici les repères essentiels : les espaces fibrés , les connexions infinitésimales , les jets , les feuilletages et leurs groupoïdes d'holonomie , les structures locales , puis les espèces de structures (structurées) , les esquisses ; au passage, pour qui sait lire les mathématiques , il n'y a pas l'Ehresmann Géomètre et l'Ehresmann Catégoricien , contrairement à ce que certains ont pu dire ou écrire , avec quelque légèreté , nous semble-t-il , mais passons...)

. Il peut s'agir aussi d'un point de vue nouveau, générateur d'idées (par exemple, le "Programme d'Erlangen" de F.Klein, ou encore, les "Grundlagen der Geometrie" de D.Hilbert; nous citerions bien volontiers aussi les "Eléments" d'Euclide, mais peut-on parler de point de vue nouveau dans ce cas : nous devrions plutôt dire "point de vue qui n'a pas perdu de son actualité" , n'en déplaise aux détracteurs plus ou moins célèbres d'Euclide !)

. Ce peut être encore une forme nouvelle donnée à des travaux plus anciens, et comme on touche ici à une question assez délicate, il convient d'être particulièrement attentifs et nuancés, non pas prudents comme c'est généralement de mise ! A cet égard, nous offrons déjà quelques garanties... La forme et le fond ! Quel programme ! Allons-y. L'histoire abonde en matière de déformations malheureuses. P.Scheurer , dans une conférence faite le 23 mars 1977 au Séminaire de Philosophie des Mathématiques, à Paris, intitulée "Relations d'incertitude de Heisenberg et déterminisme géométrique" , s'exprime, sur le sujet, en des termes que nous reproduisons ici avec plaisir, tant ils nous paraîssent justes:

"...la popularisation de l'information a entraîné avec elle son cortège de déformations, de distorsions, et de dénaturation du concept presque jusqu'au contresens. Cette dégradation affecte d'abord la dénomination..."

et P.Scheurer déplore alors que les "relations de Heisenberg" soient devenues "relations d'incertitude" , "principe d'incertitude" , "principe d'indétermination" etc... c'est-à-dire en

fait qu'elles aient été entourées dès l'origine d'une idéologie douteuse, tenant lieu de véritable explication...
A l'opposé de la déformation, il y a l'information, qui se nourrit avant tout de reproduction pure et simple : édition et diffusion de publications, photocopie, etc... Un petit détail mérite d'être souligné au passage : un travail photocopié, surtout s'il doit être diffusé, doit faire apparaître clairement le nom de l'auteur original, et pas un autre ! Bien évidemment, un témoignage de qualité, une explication, des exemples significatifs, ne peuvent pas nuire a priori à l'information.
La forme d'un travail, quel qu'il soit, n'est-elle pas l'unique expression matérielle originelle du fond ? Il est donc bien léger de prétendre qu'elle a peu ou pas d'importance ; ou alors, il faut être logique, si l'on dit cela d'un travail, c'est qu'au fond il a peu ou pas d'importance.
Toute modification de la forme est, de ce fait, une modification du fond. Une modification peut alors enrichir le fond, c'est-à-dire proposer des développements conséquents et significatifs, un élargissement du domaine d'application : c'est l'amorce d'une mise en valeur qui pourra prendre forme à son tour. A l'inverse, une modification peut appauvrir le fond , et le transformer en gadget insignifiant, offrant aux pseudo-scientifiques désoeuvrés un rétrécissement partisan ou aveugle des idées. Malheureusement, ce cas est très fréquent!
On nous dira sans doute que ce sont là des généralités plutôt oiseuses, sur lesquelles tout le monde est à peu près d'accord! En paroles, oui ! Dans les faits, non !
Concernant la théorie des esquisses, peut-on attendre , doit-on attendre quelque lumière, quelque éclairage intéressant , quelque nouveauté, de la part de ceux qui lui ont systématiquement tourné le dos pendant des années ? Nous répondons franchement non ! Nous appréhendons plutôt les "clair-obscurs" en ce genre d'affaires. Que certains commencent à lorgner en direction des esquisses , parce qu'après tout ce n'est pas si mal, çà reflète bien, y compris dans les menus détails, un certain nombre de problèmes, de questions attenant aux structures, çà offre des méthodes originales et naturelles d'étude des structures, tant mieux, nous sommes les premiers à nous en réjouir et nous encourageons vivement les intéressés à persévérer dans cette belle voie, qu'il n'est jamais trop tard pour emprunter . On ne peut tout de même pas nous reprocher de nous y être promenés trop tôt! Cà serait un comble.

Va t-on laisser faire, sans réagir, ceux qui excellent dans la cuisine indigeste, alliant avec délectation et frénésie tout ce qui leur tombe sous la main pour constituer une infecte bouillasse ? Ils vous arrangent des plats d'un exotisme douteux: ce sont des salades hyperthéoriques syntaxico-sémantiques, à base de topos, de sites, de faisceaux, de modèles, de théories du 1^{er} ordre, de λ-calcul, d'esquisses, d'algèbre homologique, de nombres décimaux intuitionistes, de dualité fondamentale, d'informatique appliquée, d'ordinateur formel, de gestion théorique de fichiers en temps imaginaire, de combinatoire combinée, de combines encore plus complexes, de complexité combinatoire à hiérarchies internes, pour ne citer que les ingrédients de base, insistons-y! Attention aux foies fragiles ! Ils vous servent le tout à la sauce de leurs fantasmes personnels, dans un fatras de commentaires plus ou moins fumeux, pour vous expliquer plus sûrement les fondements mathématiques des théories que vous connaissez bien mieux qu'eux, et depuis longtemps...
Alors, (chers) lecteurs, place à ceux qui, en ce domaine, n'ont de leçon à recevoir de personne, surtout pas de ceux qui donnaient jadis des "reverse-leçons" sur le même sujet.

Et l'on entend encore des voix qui soupirent:

"Quel orgueil ! Comme vous êtes méprisants ! Vous vous retranchez dans une tour d'ivoire. Ce que vous faites, c'est pas mal au fond, mais vous devriez vous faire mieux connaître. Vous considérez que les autres n'ont qu'à comprendre... Et s'ils ne comprennent pas, c'est parce que vous vous expliquez mal. Non vraiment, vous êtes méprisants..."

Mais voyons, lorsque ce qu'on dit ne cache rien de ce que l'on veut dire, doit-on, après l'avoir répété, avoir donné quelques exemples, rajouter de l'inutile pour se faire comprendre ? Non ! Comprendre nécessite (au sens d'une condition nécessaire en math.) un effort de la part de celui qui veut comprendre. Si cette nécessité peut être gommée, c'est soit qu'il n'y a rien à comprendre, soit que celui qui a des velléités de comprendre s'y refuse dans les faits.
L'effort à faire (pour celui qui veut vraiment comprendre) est, surtout en ce qui concerne les idées de base d'une théorie, toujours un effort de longue haleine. L'effort peut être plus ou moins long, plus ou moins intense, il dépend en grande partie, bien sûr, de la psychologie de l'individu, de sa culture antérieure, du niveau de son intérêt, de ses motivations...

Le vrai mépris consiste à faire semblant d'avoir tout expliqué, et à dire qu'il n'y a pas grand chose à comprendre

tout en taisant systématiquement les seules choses qu'il conviendrait justement de dire, et en y mettant à la place des choses qui n'ont rien à voir avec ce qu'on prétend faire comprendre...
Le vrai respect résiste à cela : il consiste à ne rien cacher de ce qu'on veut dire, au moment où on le dit, quitte à inviter celui qui écoute à de longues heures de réflexion, c'est-à-dire à ne pas lui cacher qu'un effort soutenu peut lui être demandé.
Le vrai mépris prêche la facilité, là où il y a la subtilité, prêche le faux, là où il y a le vrai, prêche l'à peu près du camouflage.
Le vrai respect prêche la précision, là où y a la subtilité, prêche le vrai là où il est, prêche parfois un à peu près, mais chargé de sens cette fois, laissant à celui qui veut comprendre, le plaisir de découvrir seul un bout du vrai chemin à parcourir.

Voici les trois premières leçons d'un cours de 3ème cycle donné en 1983-1984, à l'Université Paris 7, par les auteurs de ces lignes, intitulé "Graphes, Diagrammes, Structures" .

Leçon 1.

Sur la description géométrique de certaines théories.

Quiconque a fait un peu d'algèbre et s'exprime correctement énonce ainsi la définition de monoïde:

- un monoïde est constitué d'un ensemble E, d'un élément distingué e et d'une loi de composition (binaire et partout définie) interne, associative, et pour laquelle l'élément distingué e est neutre.

Pour préciser ceci, on peut expliciter cette définition comme suit.

Il y a d'une part les données, à savoir:

- une loi binaire interne, i.e. une application

$$E \times E \xrightarrow[k]{} E ,$$

- un élément distingué $e \in E$.

Il y a d'autre part les axiomes propres à la structure de monoïde:

- la loi k est associative, c'est-à-dire que:

$$\forall\, a,b,c \in E \quad k(a,k(b,c)) = k(k(a,b),c) ,$$

- l'élément e est élément neutre pour k , c'est-à-dire que: $\forall\, a \in E \quad k(a,e) = k(e,a) = a.$

Nous allons représenter ces données et ces axiomes plus géométriquement, sans prétendre, pour le moment, exprimer autre chose que ce qui vient d'être dit. Simplement, nous en donnons une description "unifiée".

Pour les données, il convient seulement de présenter e comme image de 0 par une application $\bar{e} : 1 \longrightarrow E$, où $1 = \{0\}$. De la sorte, les données sont de même nature, ce sont des applications, représentées ci-dessous:

$$1 \xrightarrow[\bar{e}]{} E \xleftarrow[k]{} E \times E \quad .$$

Il s'agit, maintenant, de décrire graphiquement (géométriquement) les axiomes.

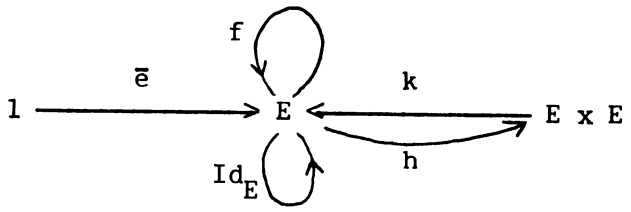
Commençons par l'unitarité à droite:

(Ud) $\forall\ a \in E \quad k(a,e) = a$.

Si on écrit $k(a,e) = f(a)$ et $a = g(a)$, l'expression quantifiée ci-dessus devient l'égalité entre applications $f = g$, la valeur particulière $g = Id_E$ étant sans importance ici. Le problème est alors de définir f à partir de k et de $\bar{e}$. Posons donc:

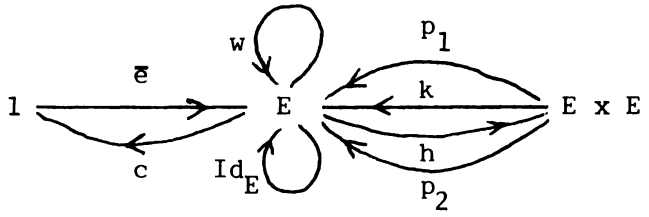
$-\forall\ a \in E \quad h(a) = (a,e)$,

alors, nous avons $f = k.h$ de sorte qu'il suffit maintenant de préciser h en fonction de k et de $\bar{e}$. Le dessin ci-dessous seul ne fournit pas cette précision:



Remarquons, au passage, qu'au lieu d'écrire $f = h.k$ et $f = Id_E$, on peut convenir d'écrire seulement $k.h = Id_E$, ce qui permet de ne point faire figurer f dans le dessin, mais ne dispense pas d'écrire une égalité entre applications! L'application h est, par contre, entièrement déterminée dès lors que l'on connait ses composées $p_1.h = Id_E$ et $p_2.h = w$

avec les deux projections canoniques p_1, p_2 : E x E ⟶ E , où $w(a) = e$ pour tout élément a de E, soit encore $w = \bar{e}.c$ si c désigne l'unique application possible de E vers 1. Nous ferons donc figurer aussi dans notre dessin les applications p_1, p_2 et c. Par conséquent, les informations acquises jusqu'à présent se résument ainsi:



$$\begin{cases} w = \bar{e}.c \\ p_1.h = Id_E \qquad\qquad k.h = Id_E \\ p_2.h = w \end{cases}$$

Comme plus haut, on peut convenir, si l'on veut, de ne pas faire figurer w et d'écrire simplement $p_2.h = \bar{e}.c$.
Pour énoncer l'axiome d'unitarité à droite en termes d'égalité entre applications, il suffit bien d'écrire $k.h = Id_E$ et d'utiliser les applications auxiliaires p_1, p_2, c, h, w ainsi que certaines égalités entre elles, que l'on peut aussi qualifier d'auxiliaires, en ce sens qu'il ne s'agit nullement de "données nouvelles". On procède de la même manière pour l'unitarité à gauche. On introduit l'application h': E ⟶ E x E définie par: $p_1.h' = w$ et $p_2.h' = Id_E$, et on écrit alors $k.h' = Id_E$.

Venons-en à l'associativité. Elle s'écrit encore sous la forme d'une égalité entre applications:

(As) $k.k_1 = k.k_2$,

où l'on a posé:

$$\forall\ a,b,c \in E \quad k_1(a,b,c) = (k(a,b),c)$$
$$k_2(a,b,c) = (a,k(b,c)).$$

Il nous suffit donc de spécifier clairement comment k_1 et k_2 se déduisent de k. Comme pour les applications h et h' ci-dessus, elles sont entièrement définies par leurs composées avec les deux projections p_1 et p_2:

$p_1.k_1 = k.s$ où $s(a,b,c) = (a,b)$
$p_2.k_1 = q_3$ où $q_3(a,b,c) = c$
$p_1.k_2 = q_1$ où $q_1(a,b,c) = a$
$p_2.k_2 = k.t$ où $t(a,b,c) = (b,c)$.

Remarquons de plus, qu'une fois introduites les trois projections canoniques $q_1, q_2, q_3 : E \times E \times E \longrightarrow E$, les applications auxiliaires s et t sont bien définies par les égalités suivantes:

$p_1.s = q_1$ $\quad p_1.t = q_2$
$p_2.s = q_2$ $\quad p_2.t = q_3$.

Là encore, on a donc introduit des applications et égalités auxiliaires qui ne constituent pas des données nouvelles, mais ont pour but de permettre l'écriture de l'axiome d'associativité sous forme d'égalité entre applications.

Ce travail nous conduit à représenter le monoïde de départ sous la forme d'un diagramme d'applications:

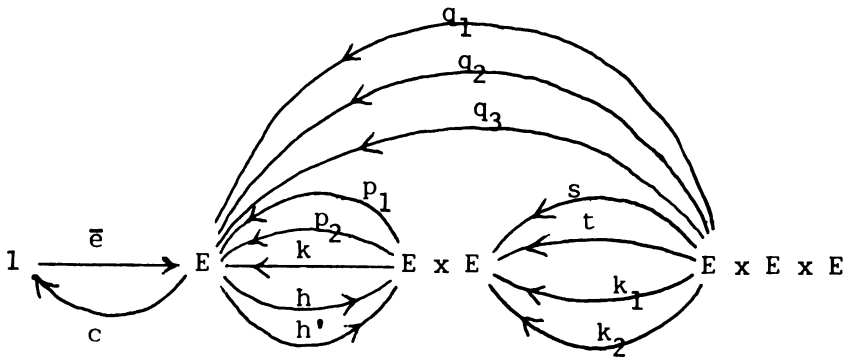


diagramme dans lequel sont repérées des égalités entre composées (représentées ou non) d'applications:

$$p_1.h = Id_E \qquad p_1.h' = \bar{e}.c \qquad k.h = Id_E$$
$$p_2.h = \bar{e}.c \qquad p_2.h' = Id_E \qquad k.h' = Id_E$$

$$p_1.s = q_1 \qquad p_1.k_1 = k.s$$
$$p_2.s = q_2 \qquad p_2.k_1 = q_3 \qquad k.k_1 = k.k_2$$
$$p_1.t = q_2 \qquad p_1.k_2 = q_1$$
$$p_2.t = q_3 \qquad p_2.k_2 = k.t \ ,$$

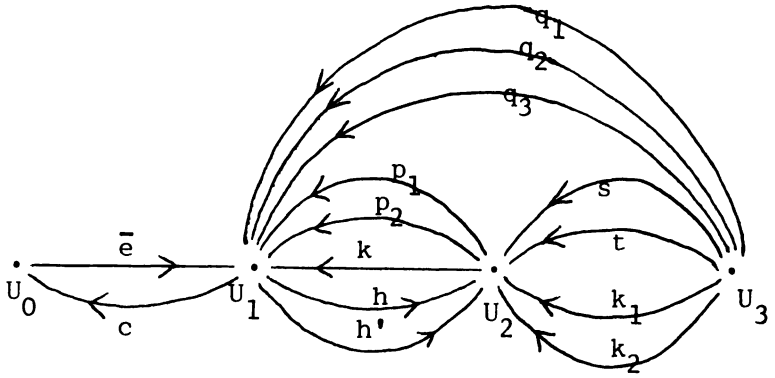
étant bien entendu que:
- les applications identiques ne sont pas représentées,
- les applications p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 sont les projections canoniques,
- 1 est l'ensemble à un élément (noté 0),
- c, s, t s'en déduisent (automatiquement),
- $\bar{e}$ et k sont données,
- h, h', k_1, k_2 s'en déduisent (automatiquement).

Nous venons d'associer à tout monoïde un diagramme d'applications et une liste d'équations: en quelque sorte, il s'agit d'une description (ou définition) générale de tous les monoïdes particuliers. On peut souhaiter en déduire une "définition particulière" du "monoïde général": il suffit de reconnaître les traits communs à tous ces monoïdes, de sorte que nous puissions, par un procédé à préciser, les reconstituer tous à partir de ce "monoïde général".

Ces traits communs apparaissent facilement: à deux monoïdes (E,k,e) et (E',k',e') sont associés deux diagrammes d'applications et deux listes d'égalités qui sont homologues et de même forme. On peut exprimer cela de manière plus imagée et, en même temps, plus formelle:

- nous constituons le dessin suivant, représentant la forme commune reconnue à tous les monoïdes particuliers:

M



(dans ce dessin, les points ne représentent plus, a priori, des ensembles, et les flèches ne représentent plus, a priori, des applications),

- nous accompagnons ce dessin d'une table de composition (partielle) que voici:

(T)

$$p_1.h = Id_{U_1} \qquad p_1.h' = \bar{e}.c$$
$$p_2.h = \bar{e}.c \qquad p_2.h' = Id_{U_1}$$
$$k.h = Id_{U_1} \qquad k.h' = Id_{U_1}$$
$$p_1.s = q_1 \qquad p_1.t = q_2$$
$$p_2.s = q_2 \qquad p_2.t = q_3$$
$$p_1.k_1 = k.s \qquad p_1.k_2 = q_1$$
$$p_2.k_1 = q_3 \qquad p_2.k_2 = k.t$$
$$k.k_1 = k.k_2$$

(la composition des flèches ne représentant plus, a priori, une composition d'applications).

Le graphe M ainsi constitué, muni de sa table de composition (T), décrit effectivement des traits communs à tous les

monoïdes particuliers. On pose $\underline{M} = (M,(T))$ et l'on dit qu'il s'agit d'un graphe multiplicatif (i.e. d'un graphe muni d'une multiplication, partielle, des flèches; remarquons qu'il reste ici une légère imprécision concernant cette structure, ne serait-ce que par l'absence, dans le dessin ci-dessus, de certaines flèches figurant implicitement dans (T); nous aurons l'occasion de revenir en détail sur ce point).

Nous devons maintenant essayer de reconstituer tous les monoïdes à partir de $\underline{M}$: en quelque sorte, $\underline{M}$ sert de calque destiné à être reporté ("décalquer") dans les ensembles et les applications. Plus précisément:

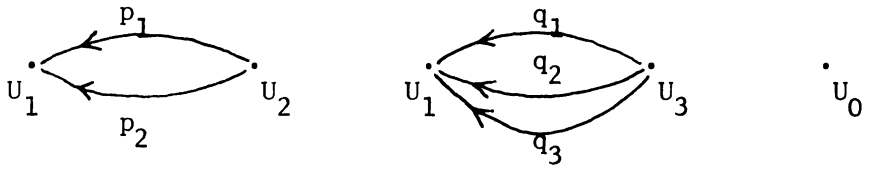
- nous considérons le graphe dans lequel les points sont tous les ensembles et les flèches sont toutes les applications entre eux; nous notons Ens ce graphe;

- dans une table ad hoc (T_{Ens}), nous spécifions la valeur des composés de deux applications quelconques; alors, le graphe multiplicatif obtenu est noté Ens;

- décalquer $\underline{M}$ dans Ens consiste alors à envoyer chaque point de M sur un ensemble, chaque flèche de M sur une application (en respectant sources, buts et identités, i.e. les structures de graphes (orientés) de M et de Ens), et ceci de sorte que la table de $\underline{M}$ s'interprète bien en celle de Ens, ce qui revient à envoyer le symbole de composition formelle des flèches de M sur le symbole de composition des applications (i.e. à respecter les structures de graphes multiplicatifs de $\underline{M}$ et de Ens).

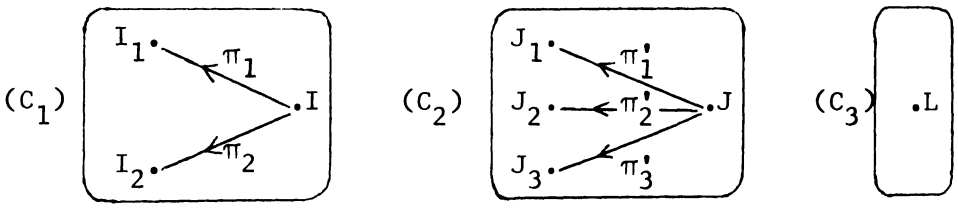
On reconstitue ainsi tous les monoïdes particuliers, mais, faute d'avoir été suffisamment précis, nous pouvons obtenir d'autres choses. En effet, si nous envoyons U_1 sur un ensemble E,

rien ne garantit encore que U_2 ira sur $E \times E$, U_3 sur $E \times E \times E$, U_0 sur 1, p_1 et p_2 sur les projections canoniques, et q_1, q_2, q_3 également. Il nous faut donc retenir encore d'autres traits communs à tous les monoïdes particuliers, à savoir que les dessins suivants, extraits de M, jouent un rôle spécial:



Pour spécifier ce rôle, nous adjoignons à M une légende. Elle est constituée comme suit:

- on utilise les calques auxiliaires suivants:



- on indique comment ces calques s'appliquent dans M:

$\overline{C}_1$ $\begin{cases} I \text{ s'applique sur } U_2 \\ I_1 \text{ et } I_2 \text{ s'appliquent sur } U_1 \\ \pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ s'appliquent respectivement sur } p_1 \text{ et } p_2 \end{cases}$

$\overline{C}_2$ $\begin{cases} J \text{ s'applique sur } U_3 \\ J_1, J_2, J_3 \text{ s'appliquent sur } U_1 \\ \pi'_1, \pi'_2 \text{ et } \pi'_3 \text{ s'appliquent respectivement sur } q_1, q_2, q_3 \end{cases}$

$\overline{C}_3$ $\{L \text{ s'applique sur } U_0$

Remarquons la ressemblance suivante entre ces trois calques auxiliaires: ce sont des cônes (orientés), en ce sens qu'ils ont chacun un sommet:

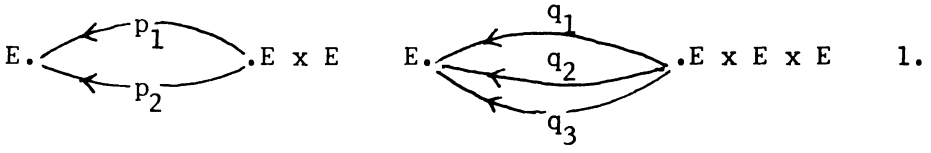
I pour C_1, J pour C_2, L pour C_3,

et ils ont chacun une base:

I_1, I_2 pour C_1, J_1, J_2, J_3 pour C_2, $\emptyset$ pour C_3,

et des arêtes reliant le sommet aux différents points de la base.

Ces calques permettent aussi de constituer une légende analogue pour Ens en y distinguant tous les dessins suivants:



où E est un ensemble quelconque, p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 sont les projections canoniques, et $1 = \{0\}$.

Munis de ces légendes, les graphes multiplicatifs M et Ens deviennent ce que l'on appelle des esquisses, que l'on note /M/ et /Ens/. Réaliser /M/ dans /Ens/ consiste alors à

- décalquer M dans Ens, comme nous l'avons indiqué déjà,
- respecter, dans Ens, la légende de /M/,

c'est-à-dire, respecter les structures d'esquisses /M/ et /Ens/ . De la sorte, nous retrouvons bien, cette fois, tous les monoïdes particuliers, et seulement eux. Nous disposons donc bien d'une description (diagrammatique) de tous les monoïdes particuliers, du moyen de les reconstituer tous à partir d'une description particulière du "monoïde général" qu'est /M/: nous dirons que nous avons esquissé les monoïdes en construisant /M/.

Plusieurs remarques s'imposent alors.

1) On aura observé que le langage géométrique utilisé a pour effet, par rapport à la définition "usuelle", d'effacer, dans un premier temps, les variables et les quantificateurs, puis, dans un second temps, les ensembles et les applications.

2) Ceci suggère aussitôt qu'on peut reporter le calque /M/ ailleurs que dans /Ens/, pour peu qu'on y retrouve les ingrédients nécessaires pour décalquer. Par exemple, nous constituons le dessin Top, analogue à Ens, comme suit:

- ses points sont les espaces topologiques,
- ses flèches sont les applications continues,
- la table de composition est celle des applications continues;

nous accompagnons Top d'une légende distinguant les seuls produits d'espaces topologiques utiles. Alors, réaliser /M/ dans /Top/ permet d'obtenir ni plus ni moins que tous les monoïdes topologiques.

3) Concevoir /M/ comme le monoïde général permet d'aller plus loin que la simple description de tous les monoïdes ensemblistes, puisqu'on obtient tout aussi facilement tous les monoïdes structurés.

4) Il est naturel de se demander pour quels autres types de structures (usuelles ou non) on a la possibilité d'exécuter de telles constructions graphiques, s'il y a plusieurs manières de procéder, ou, inversement, comment s'apercevoir que deux constructions graphiques de ce genre représentent la "même structure".

Il va falloir évidemment formaliser un peu plus ce que sont les "calques": points, flèches reliant ces points, flèches spéciales (identités), couples de flèches composables, composés prescrits, tables, calques auxiliaires, légendes!

Autrement dit, nous devons préciser ce qu'on entend par graphes orientés, graphes multiplicatifs, esquisses et réalisations. C'est l'objectif visé dans les leçons suivantes.

Leçon 2.

Graphes orientés, graphes multiplicatifs, catégories.

Pour décrire géométriquement certaines structures, nous avons vu, en traitant l'exemple des monoïdes, qu'il convient de préciser ce que sont les graphes orientés, les graphes multiplicatifs et les esquisses, ainsi que leurs homomorphismes. Ce sont là des structures particulières que nous définirons donc, mais que nous ... esquisserons (ce qui pourra servir d'entraînement et d'exemple)!

1. Graphes orientés.

On dit que $G = (Ob\ G, Fl\ G, d, c, i)$ est un graphe orienté si, et seulement si:

- $Ob\ G$ est un ensemble, dit ensemble des objets de G,
- $Fl\ G$ est un ensemble, dit ensemble des flèches de G,
- $d : Fl\ G \longrightarrow Ob\ G$ est une application, dite de sélection des domaines (ou sources) des flèches,
- $c : Fl\ G \longrightarrow Ob\ G$ est une application, dite de sélection des codomaines (ou buts) des flèches,
- $i : Ob\ G \longrightarrow Fl\ G$ est une application, dite de sélection des identités,

ces données étant soumises au seul axiome (de position) suivant:

$$\forall\ A \in Ob\ G \quad d.i(A) = A \quad \text{et} \quad c.i(A) = A\ .$$

En règle générale, les notations que nous emploierons obéiront aux "principes" suivants:

- les objets d'un graphe orienté seront désignés par des lettres majuscules droites (A,B,...),

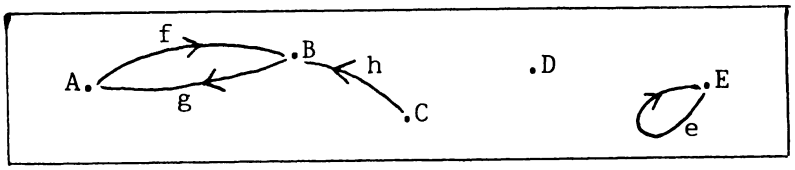
- les flèches d'un graphe orienté seront désignées par des lettres minuscules, par exemple, si f est une flèche de domaine A et de codomaine B, on notera ceci sous la forme suivante: $f : A \longrightarrow B$,

- on convient, souvent, de représenter l'identité i(A) en un objet A sous l'une des formes suivantes:

$1_A : A \longrightarrow A$, $Id_A : A \longrightarrow A$, $A \xrightarrow[=]{} A$,

- on écrira souvent G au lieu de Fl G, privilégiant ainsi les flèches d'un graphe orienté.

Un dessin correct (i.e. non ambigu) d'un graphe orienté particulier peut avantageusement se substituer à une définition ensembliste explicite: les objets seront représentés par des points et les flèches seront représentées par des ... flèches reliant leurs domaines à leurs codomaines. Par exemple, il est plus simple, et pas moins correct, de parler du "graphe orienté G suivant":



plutôt que de définir ensemblistement G comme suit:

- Ob G = {A, B, C, D, E} ,

- Fl G = $\{Id_A, Id_B, Id_C, Id_D, Id_E$, f, g, h, e},

- les applications d, c, i sont définies par leurs valeurs (précisées... par le dessin ci-dessus !!)

On remarquera qu'il n'est pas nécessaire de faire figurer les flèches identités, que l'on peut donc associer ou identifier à des points. On ne déduira pas trop hâtivement de cette remarque que les flèches identités ne "servent à rien" ! Elles ont, au contraire, un rôle théorique bien net

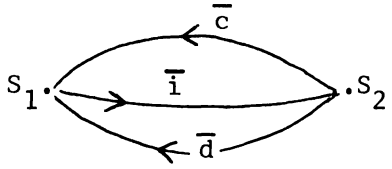
et qui apparaîtra bientôt.

D'un autre côté, il peut être utile de représenter plusieurs fois un même objet ou une même flèche, par exemple une identité. Dans ce cas, on utilisera, outre les représentations évoquées précédemment, la suivante: A $=\!=$ A.

L'esquisse de graphe orienté est "manifestement" définie alors comme suit:

- son graphe orienté sous-jacent est le graphe Γ ci-dessous:

(Γ)



où S_1 est appelé l'objet des objets et S_2 l'objet des flèches, etc...

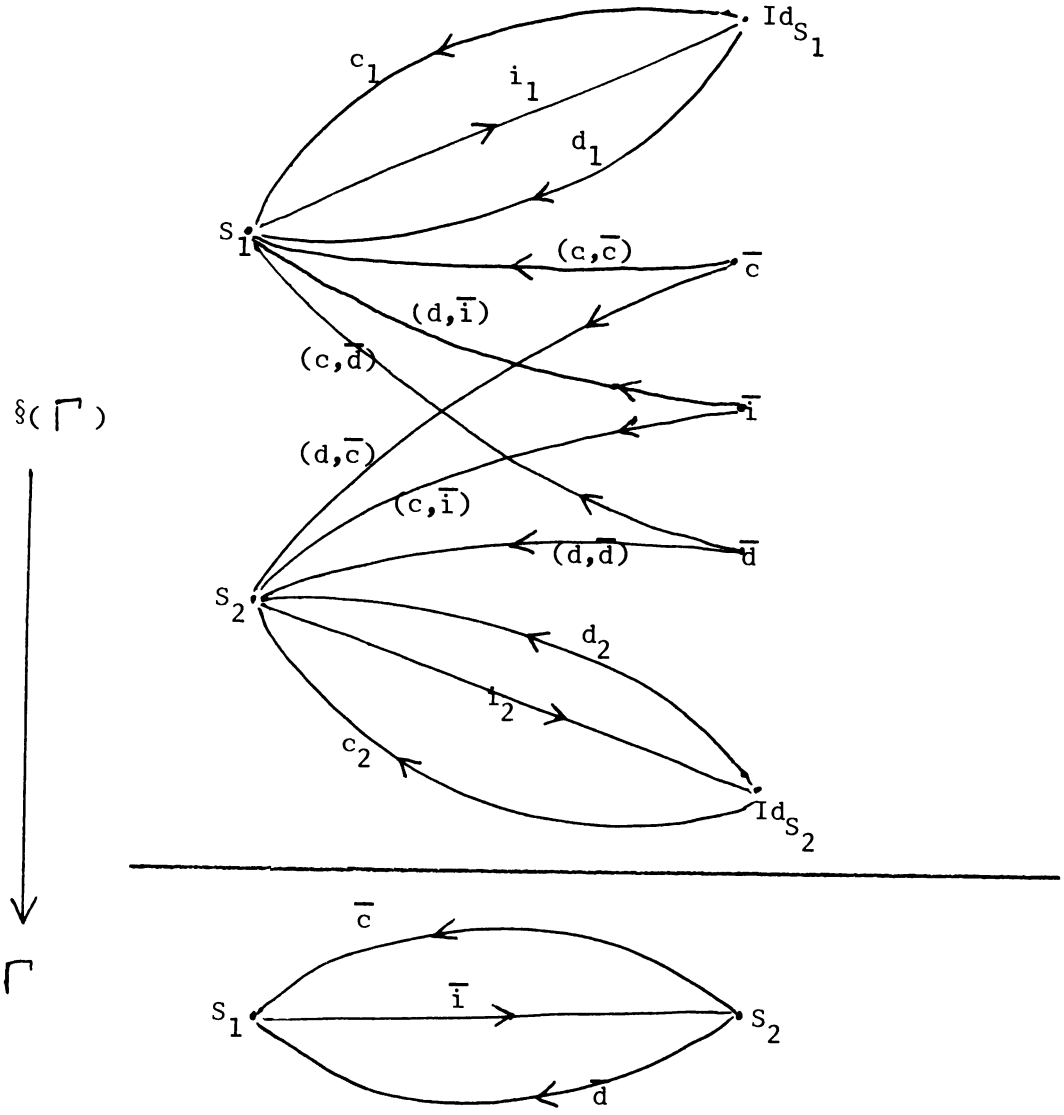
- sa table de composition est constituée des égalités:

$$\bar{c}.\bar{i} = \bar{d}.\bar{i} = Id_{S_1}$$

qui traduisent le seul axiome de position,

- sa légende de cônes distingués est vide.

A tout graphe orienté G on peut associer le graphe orienté subdivision de G, c'est-à-dire le graphe des incidences de G, que l'on note §(G) : ses objets sont les objets de G et les flèches de G, ses flèches sont les triplets $(X',\bar{x},X) : X \longrightarrow X'$ tels que $\bar{x} \in Fl\,\Gamma$ et $x(X) = X'$. Clairement, on dispose d'une projection de §(G) vers Γ, à savoir celle qui associe à tout $(X',\bar{x},X)$ la flèche $\bar{x}$. A titre d'exemple, voici dessiné §(Γ) lui-même au-dessus de Γ :



2. Graphes multiplicatifs.

La donnée d'un graphe orienté muni d'une table de composition peut se préciser en la définition suivante:

On dit que $\underline{G} = (G, \underline{G} * \underline{G}, k)$ est un graphe multiplicatif, si et seulement si:

- $G = (\mathrm{Ob}\ G, \mathrm{Fl}\ G, d, c, i)$ est un graphe orienté,

- $\underline{G} \ast \underline{G}$ est un ensemble, dit des <u>couples composables</u>: c'est un sous-ensemble de l'ensemble $G \wedge G$ de tous les <u>couples de flèches consécutives</u>, soit:

$$G \ast G \subset G \wedge G = \{(g',g) \in \mathrm{Fl}\ G \times \mathrm{Fl}\ G \mid d(g') = c(g)\}$$

Insistons bien ici sur le fait que, pour être composables, deux flèches doivent être consécutives, mais deux flèches consécutives ne sont pas nécessairement composables.

- $k : \underline{G} \ast \underline{G} \longrightarrow \mathrm{Fl}\ G$ est une application de <u>composition partielle</u> (multiplication) des flèches. On pose, en général, $k(g',g) = g'.g$.

Ces données sont soumises aux axiomes suivants:

<u>Unitarité</u>:

$$\forall\, g \in \mathrm{Fl}\ G \quad (i.c(g),\ g) \text{ et } (g,\ i.d(g)) \in \underline{G} \ast \underline{G}\ ,$$
$$\text{et} \quad (i.c)(g).g = g = g.(i.d)(g),$$

<u>Position</u>:

$$\forall \quad (g',g) \in \underline{G} \ast \underline{G} \quad d(g'.g) = d(g) \text{ et } c(g'.g) = c(g').$$

La définition originale de graphe multiplicatif est due à Charles EHRESMANN (+) . Ainsi, pour lui, on dit que $G^{\bullet} = (G,k)$ est un graphe multiplicatif si et seulement si G est un ensemble (celui des flèches !) muni d'une loi de composition partielle k , génériquement notée par un point (d'où la notation $G^{\bullet}$); chaque élément f de G a un élément neutre (ou unité) à gauche $\alpha(f)$ et un élément neutre (ou unité) à droite $\beta(f)$, de sorte que α et β définissent des rétractions de source G et de but le sous-ensemble G_0 des unités de G ; l'axiome de position s'écrit alors:

$\forall\, g\ \forall f \in G$, si $g.f$ existe, alors on a:

$\alpha(g) = \beta(f)$, $\beta(g.f) = \beta(g)$, $\alpha(g.f) = \alpha(f)$.

(+) Charles EHRESMANN, Catégories et Structures, Dunod, Paris, 1965.

Nous commettrons parfois les abus de notation consistant à écrire $G \ast G$ au lieu de $\underline{G} \ast \underline{G}$, ou G au lieu de $Fl\ G$, ou encore G_0 au lieu de $Ob\ G$!

Voici quelques graphes multiplicatifs exemplaires.

1) Soit G un graphe orienté. On lui associe un graphe multiplicatif dans lequel les seuls composés, dits triviaux, sont ceux où figurent les identités:

$$f.Id_A = f \quad , \quad Id_B.f = f \quad , \text{ où } \quad f : A \longrightarrow B \in Fl\ G.$$

Tout graphe multiplicatif contient au moins, par définition, les composés triviaux.

2) Si $\underline{G} \ast \underline{G} = G \wedge G$, on dit que $\underline{G}$ est une catégorie non associative (ce qui veut dire "non forcément associative"). Si en outre $\underline{G}$ satisfait l'axiome d'associativité suivant:

> quel que soit le triplet de flèches consécutives :
>
> $$\cdot \xrightarrow[f]{} \cdot \xrightarrow[g]{} \cdot \xrightarrow[h]{} \cdot$$
>
> alors $h.(g.f) = (h.g).f$,

on dit que $\underline{G}$ est une catégorie.

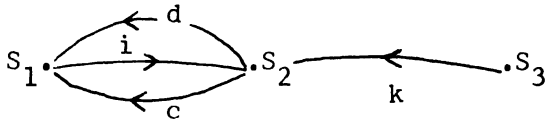
3) Le graphe multiplicatif $\underline{\Gamma}$ sous-jacent à l'esquisse de graphe orienté. Il a pour couples composables: les couples triviaux et les couples $(\bar{c},\bar{i})$ et $(\bar{d},\bar{i})$, dont les valeurs des composés ont déjà été précisées.

L'esquisse de graphe multiplicatif peut être définie à partir des données précédentes. Comme dans le cas des monoïdes , mais contrairement au cas des graphes orientés, nous ne pouvons pas d'emblée préciser un graphe orienté sous-jacent "assez complet" Γ_m à notre esquisse, et il

est très instructif, sur le plan théorique (donc sur le plan pratique aussi !), d'en analyser de près les raisons.

Le graphe orienté Γ_m, que nous voulons constituer, contiendra au moins un morceau isomorphe à Γ et une flèche supplémentaire $S_3 \xrightarrow{k} S_2$ spécifiant la loi de composition des couples.

Donc, Γ_m contient au moins:



Si l'objet S_2 se réalise en l'ensemble G, l'objet S_3 devra se réaliser en un certain sous-ensemble $G \divideontimes G$ de $G \wedge G$. Cela nous oblige à spécifier deux choses supplémentaires dans l'esquisse de graphe multiplicatif:

(i) un objet S_3' des "couples consécutifs",

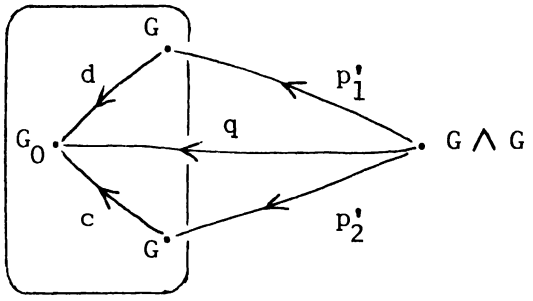
(ii) une flèche particulière dans Γ_m, $S_3 \xrightarrow{m} S_3'$, destinée à la sélection des "couples composables".

Reprenons plus en détail ces deux points.

(i) Pour un graphe orienté G, l'ensemble $G \wedge G$, muni de ses deux projections naturelles $G \wedge G \xrightarrow{p_1'} G$ et $G \wedge G \xrightarrow{p_2'} G$, a la propriété universelle suivante:

> pour tout couple d'applications $X \xrightarrow{f_1} G$ et $X \xrightarrow{f_2} G$ tel que $d.f_1 = c.f_2$, il existe une unique application $X \xrightarrow{f} G$ G telle que $p_1'.f = f_1$ et $p_2'.f = f_2$.

On dit que $G \wedge G$ est un <u>produit fibré de d et de c</u> ; on dit encore que le cône ci-dessous est un <u>cône limite projective</u> (d'un type particulier) dans Ens :



$$\begin{cases} q = d.p_1' \\ q = c.p_2' \end{cases}$$

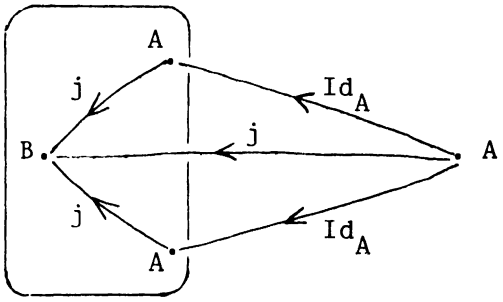
Les produits et les produits fibrés sont des exemples de cônes-limites projectives. Remarquons que la base d'un produit est discrète (i.e., n'a que des points), tandis que la base d'un produit fibré est connexe (i.e., les points y sont reliés). Cette distinction joue un rôle important dans la théorie, et on la retrouvera inévitablement à chaque instant. Tout autre commentaire s'adressant,ici,à un débutant serait soit superficiel soit gênant!

(ii) Une injection $A \xrightarrow{j} B$ dans Ens est caractérisée par la propriété suivante:

" chaque fois que $j.f = j.g$, alors $f = g$ " .

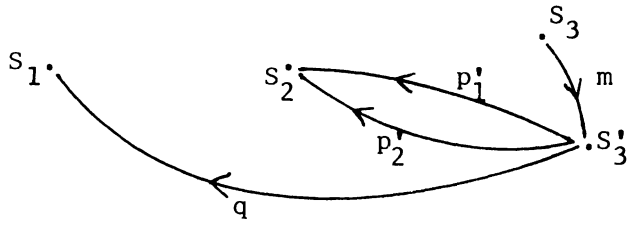
La définition usuelle ne fait d'ailleurs intervenir que les couples d'applications de 1 vers A (i.e. les éléments de A , s'il y en a !)

La propriété ci-dessus peut s'exprimer aussi en disant que le cône ci-dessous est encore un cône limite projective dans Ens:



Cet examen nous conduit donc à ajouter à l'esquisse de graphe orienté certains éléments. Plus précisément:

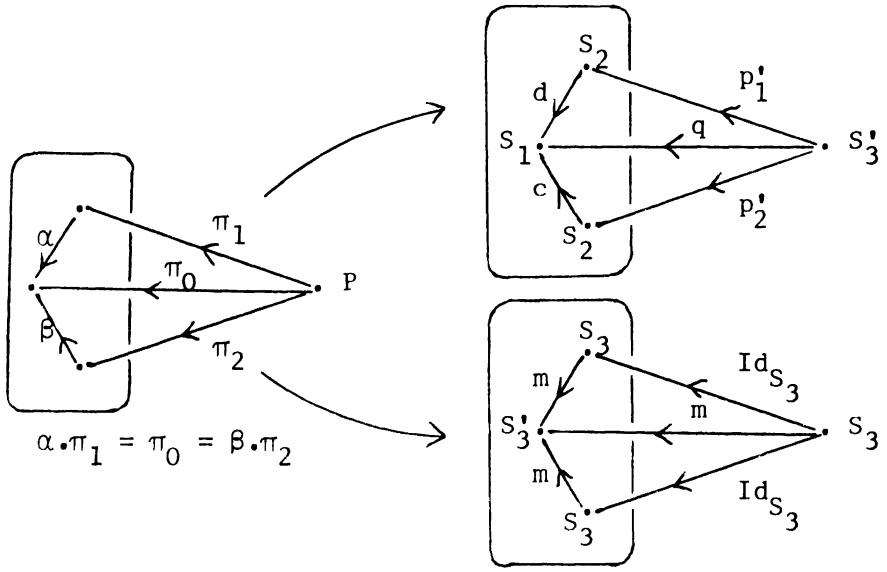
- au graphe orienté $\ulcorner$, nous adjoignons le morceau suivant:



- à la table de composition, nous adjoignons les égalités suivantes:

$$d.p'_1 = c.p'_2 = q \ ,$$

- à la légende, nous adjoignons deux cônes distingués (au demeurant, ils sont distingués par le même calque auxiliaire), à savoir:



Passons aux axiomes spécifiques de graphe multiplicatif.

- Unitarité à droite. Il faut déjà représenter formellement l'application de G dans G $\bigwedge$ G qui à f fait

correspondre (f, i.d(f)) ; ceci nous conduit à enrichir:

- $\sqcap_m$ d'une flèche $h'_d : S_2 \longrightarrow S'_3$,
- la table de composition de $\sqcap_m$ des égalités suivantes:

$$p'_1.h'_d = Id_{S_2} \quad \text{et} \quad p'_2.h'_d = i.d \ .$$

Ensuite, nous devons traduire l'axiome de composabilité:

$\forall\ f \in G \quad (f, i.d(f)) \in G \ast G$;

à cet effet, on enrichit de nouveau $\sqcap_m$:

- d'une flèche $h_d : S_2 \longrightarrow S_3$,
- d'une égalité : $m.h_d = h'_d$.

Enfin, nous exprimons que, pour toute flèche f de G , on doit avoir : $k(f, i.d(f)) = f$, ce qui est l'axiome d'unitarité proprement dit, en ajoutant l'égalité:

$$k.h_d = Id_{S_2} \ ;$$

- Unitarité à gauche. On procède de manière analogue. Ceci conduit donc à ajouter, pour constituer $\sqcap_m$ les éléments suivants:

- des flèches: $h'_c : S_2 \longrightarrow S'_3$, $h_c : S_2 \longrightarrow S_3$,
- des égalités (successives ...):

$$p'_1.h'_c = i.c$$
$$p'_2.h'_c = Id_{S_2}$$
$$m.h_c = h'_c$$
$$k.h_c = Id_{S_2} \ .$$

- Position des composés. On doit encore traduire le fait que la source d'un composé de deux flèches est la source de la première, et son but le but de la seconde. A cet effet , il convient d'enrichir la table de composition des égalités suivantes:

$$d.k = d.p'_2.m \qquad c.k = c.p'_1.m \ .$$

Nous n'avons pas encore constitué le graphe multiplicatif $\sqsubset_m$ désiré, car il nous manque certaines flèches destinées à représenter certains composés de la table de composition, voire à donner un sens précis à certains composés (cf. les composés de 3 flèches consécutives écrits ci-dessus).

Alors, nous ajoutons les flèches et égalités suivantes:

- $h''_d = p'_2.h'_d = i.d$

  $h''_c = p'_1.h'_c = i.c$, et les identités voulues,

- $g_d = d.k \quad g'_d = d.p'_2 \quad g'_d.m = g_d$

  $g_c = c.k \quad g'_c = c.p'_1 \quad g'_c.m = g_c$,

  et les composés triviaux.

En réalité, nous venons d'effectuer un choix de parenthésage. C'est le suivant: $(d.p'_2).m$ et $(c.p'_1).m$. On aurait pu effectuer d'autres choix de parenthésages, retenir aussi plusieurs d'entre eux, exprimer ou non l'associativité (sous forme d'égalités ...) etc... Variantes sans grande importance tant qu'on envisage seulement de réaliser $\sqsubset_m$ dans une catégorie (cf. plus loin).
Il convient de noter une fois de plus qu'il n'y a pas qu'une seule manière d'esquisser un type de structures (cette affirmation recouvrira plus tard un sens technique tout à fait précis).

Voici, pour conclure ce paragraphe, le dessin complet de $\sqsubset_m$ et la table de composition du graphe multiplicatif $\sqsubset_m$ particulier, qui nous sert donc à la description de l'esquisse $/\sqsubset_m/$ de graphe multiplicatif. Les seuls cônes distingués de $/\sqsubset_m/$ sont les deux cônes projectifs décrits plus haut.

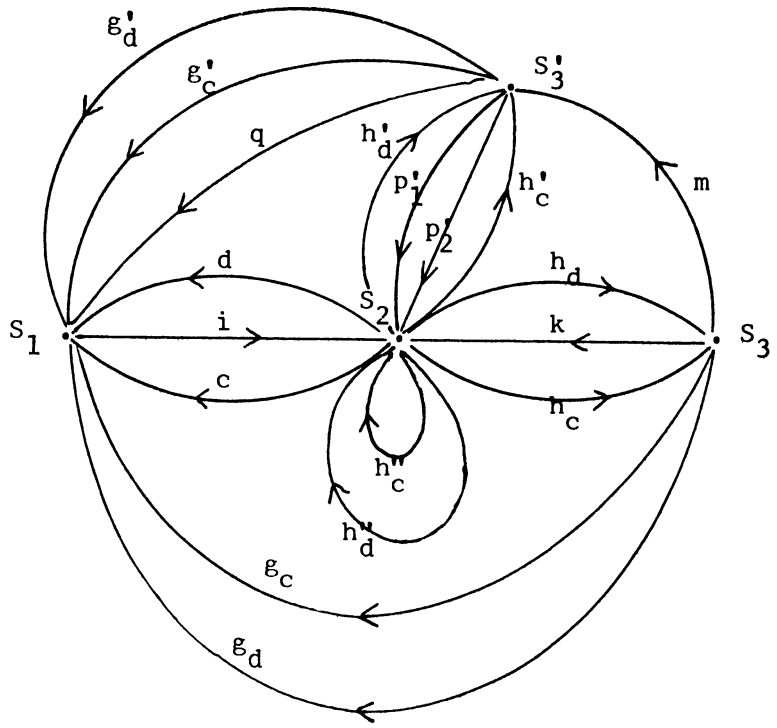


Table de composition.

$c.i = d.i = Id_{S_1}$

$d.p'_1 = c.p'_2 = q$

$p'_1.h'_d = Id_{S_2}$ $\qquad$ $p'_1.h'_c = h''_c = i.c$

$p'_2.h'_d = h''_d = i.d$ $\qquad$ $p'_2.h'_c = Id_{S_2}$

$m.h_d = h'_d$ $\qquad$ $m.h_c = h'_c$

$k.h_d = Id_{S_2}$ $\qquad$ $k.h_c = Id_{S_2}$

$g_d = d.k$ $\qquad$ $g_c = c.k$

$g'_d = d.p'_2$ $\qquad$ $g'_c = c.p'_1$

$g'_d.m = g_d$ $\qquad$ $g'_c.m = g_c$,

et tous les composés triviaux.

Remarquons, de plus, qu'il est inutile de faire figurer dans Γ_m des flèches telles que q, g_d, g_c, g'_d, g'_c, h''_d, h''_c, pour ce que nous voulons faire. Il semble même que de les faire figurer alourdisse plutôt la description envisagée de graphe multiplicatif!

C'est en fait le contraire qui se passe; certes, l'égalité $d.p'_1 = c.p'_2$, par exemple, se suffirait à elle-même, mais à condition:

- de modifier la définition de cône, en renonçant à y mettre toutes les arêtes, et en s'imposant par contre d'y faire figurer au moins celles qui sont "nécessaires",

- de substituer à la structure de graphe multiplicatif celle de graphe géométrique, i.e. de graphe orienté muni d'une "table d'égalités entre composés formels".

Le premier point conduit à une définition formelle de cône, objectivement plus compliquée.

Le second nous écarte un tant soit peu de notre objectif, en ce sens que la structure de graphe géométrique laisse la voie ouverte à d'autres interprétations possibles (réalisations) des "égalités formelles" que les égalités attendues. Les "égalités formelles" pourraient, par exemple, se réaliser en des inégalités !

Notons, toutefois, que la structure la plus générale qui s'impose, lorsqu'on veut décrire naturellement des types de structures "très riches", est celle de graphe à la fois multiplicatif et géométrique: c'est le point de vue également initié par Charles EHRESMANN (+).

3. Foncteurs et cônes.

La définition formelle précise d'esquisse nécessite quelques mises au point préalables que nous présentons ici.

(+) Charles EHRESMANN, Introduction to the theory of structured categories, Tech. Rep. 10, Univ. of Kansas, 1966.

a) Soient $\underline{G}$ et $\underline{G}'$ deux graphes multiplicatifs pour lesquels nous reprenons les notations standard introduites au paragraphe 2.

Par <u>foncteur</u> $H : \underline{G} \longrightarrow \underline{G}'$ de source $\underline{G}$ et de but $\underline{G}'$, nous entendons la donnée de deux applications:

$$H_0 : Ob\ G \longrightarrow Ob\ G'$$
$$H_1 : Fl\ G \longrightarrow Fl\ G' \text{ (souvent notée } H)$$

satisfaisant les conditions suivantes:

- $\forall\ f \in Fl\ G \quad H_0(d(f)) = d'(H(f))$
  $\qquad\qquad\qquad\quad H_0(c(f)) = c'(H(f))$
- $\forall\ A \in Ob\ G \quad H(i(A)) = i(H_0(A))$
- $\forall\ (g,f) \in G \ast G$ alors $(H(g),H(f)) \in G' \ast G'$,
  $\qquad$ et $H(g.f) = H(g).H(f)$.

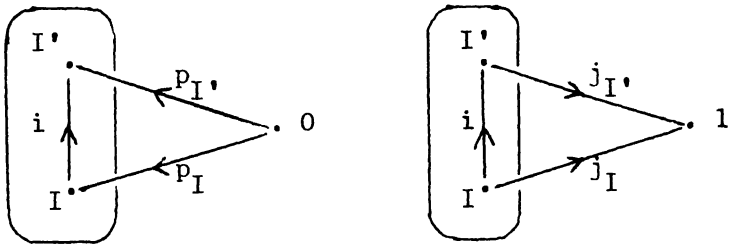
On identifie souvent H_0 à une restriction de H !

En d'autres termes, disons que H envoie G dans G' en respectant la structure de graphe orienté (compatibilité avec sources, buts, identités) et la structure multiplicative (les couples composables sont envoyés sur des couples composables et les valeurs des composés se correspondent).

A partir de cette définition, il est aisé d'esquisser un foncteur, en "reliant" convenablement deux copies de l'esquisse de graphe multiplicatif... Il est utile de considérer l'esquisse de foncteur, d'un point de vue théorique. Nous aurons l'occasion d'y revenir très bientôt. Pour l'instant, nous laissons cela en exercice !

b) Soit $\underline{I}$ un graphe multiplicatif; on lui associe usuellement deux graphes multiplicatifs $\underline{I}^-$ et $\underline{I}^+$ appelés respectivement <u>cône projectif type</u> et <u>cône inductif type</u>

de base $\underline{I}$. Voici la description graphique des graphes orientés sous-jacents à $\underline{I}^-$ et $\underline{I}^+$:



On n'a fait figurer qu'une flèche (générique !) de $\underline{I}$. Les composés non triviaux de $\underline{I}^-$ et de $\underline{I}^+$ sont les suivants:

- d'une part ceux de $\underline{I}$,
- d'autre part , $\forall$ $i : I \longrightarrow I' \in Fl\ I$,

$p_{I'} = i.p_I$, pour ce qui concerne $\underline{I}^-$, et

$j_I = j_{I'}.i$, pour ce qui concerne $\underline{I}^+$.

Le graphe $\underline{I}$ s'injecte canoniquement dans $\underline{I}^-$ et dans $\underline{I}^+$ comme l'indique le dessin ci-dessus, et, en toute rigueur, ce sont ces injections $\underline{I} \longrightarrow \underline{I}^-$ et $\underline{I} \longrightarrow \underline{I}^+$ qu'on devrait appeler "cône projectif type" et "cône inductif type" de base $\underline{I}$. Nous ne le faisons pas pour alléger.

c) Soit $\underline{S}$ un graphe multiplicatif et $B : \underline{I} \longrightarrow \underline{S}$ un foncteur. On dit que C est un <u>cône projectif de base B dans S</u> si et seulement si C est un foncteur de $\underline{I}^-$ dans $\underline{S}$ dont la restriction à $\underline{I}$ est égale à B .

On définit de manière analogue les cônes inductifs dans $\underline{S}$.

Nous sommes, maintenant, en mesure de donner les définitions formelles précises d'esquisses: c'est l'objet de la Leçon 3.

Leçon 3.

Esquisses.

Une esquisse projective $/\underline{S}/$ est la donnée d'un couple $(\underline{S}, \mathcal{C})$ formé d'un graphe multiplicatif $\underline{S}$, dit sous-jacent, et d'un ensemble $\mathcal{C}$ de cônes projectifs dans $\underline{S}$, dit ensemble des cônes distingués.

Une esquisse mixte $//\underline{S}//$ est la donnée d'un triplet $(\underline{S}, \mathcal{C}, \mathcal{C}')$ formé d'un graphe multiplicatif $\underline{S}$, dit sous-jacent, d'un ensemble $\mathcal{C}$ de cônes projectifs dans $\underline{S}$, et d'un ensemble $\mathcal{C}'$ de cônes inductifs dans $\underline{S}$, ces cônes étant dits distingués.

Faisons, tout de suite, quelques remarques.

1) Une esquisse projective s'identifie à une esquisse mixte dépourvue de cônes inductifs distingués.

2) A toute esquisse mixte $//\underline{S}//$ correspond une esquisse projective sous-jacente, notée $/\underline{S}/$, à savoir celle obtenue à partir de $//\underline{S}//$ en y oubliant les cônes inductifs distingués.

3) On pourrait croire que la définition d'esquisse mixte n'est donnée que par souci de "symétrie". Il n'en est rien, comme nous le découvrirons par la suite. Nous invitons le lecteur à rechercher dès maintenant des esquisses mixtes de structures qu'il n'est pas possible d'esquisser projectivement !

4) Les notations génériques employées ne sont guère simplifiables, dans un texte voué aux esquisses. Il vaut mieux s'y habituer avec confiance. L'usage a montré, depuis déjà plusieurs années, qu'elles facilitaient en

fait la lecture, puisqu'elles permettent de faire, en un coup d'oeil, les importantes distinctions concernant les structures de base de la théorie des esquisses.

Nous nous souviendrons donc des principales notations introduites:

$//\underline{S}//$, esquisse mixte;

$/\underline{S}/$, esquisse projective; ce peut être l'esquisse projective sous-jacente à $//\underline{S}//$,

$\underline{S}$, graphe multiplicatif; ce peut être le graphe multiplicatif sous-jacent à $/\underline{S}/$ ou à $//\underline{S}//$,

S , graphe orienté; ce peut être le graphe orienté sous-jacent à $\underline{S}$ ou à $/\underline{S}/$, ou à $//\underline{S}//$!

Un usage courant veut aussi que S désigne l'objet générique d'un graphe multiplicatif $\underline{S}$! Le contexte permet presque toujours de décider si S désigne le graphe orienté sous-jacent à $\underline{S}$ ou bien l'objet générique de $\underline{S}$. Qu'on ne fasse donc pas de faux procès à cet égard: l'emploi multivoque (ce qui ne veut pas dire équivoque) des symboles est très fréquent, et pas seulement en mathématiques. L'emploi univoque des symboles deviendrait vite impraticable, car il rendrait les textes illisibles. On pourrait objecter aussitôt que les distinctions opérées entre ces S, $\underline{S}$, $/\underline{S}/$, $//\underline{S}//$ n'améliorent pas a priori la lecture d'un texte sur les esquisses ! L' a priori est recevable, mais, comme nous l'avons déjà dit plus haut, il s'est avéré que ces distinctions facilitaient en fait la lecture d'un texte sur les esquisses, parcequ'elles permettent d'éviter les plus grossières erreurs concernant le fond du sujet...Marquer les différences aux endroits essentiels, sur des points essentiels, est affaire de bon sens, tout simplement.

Pour pouvoir esquisser les esquisses, il convient de préciser encore les définitions ci-dessus. Il s'agit en fait d'éviter les paradoxes du genre "ensemble de tous les ensembles" !

Soit $\mathcal{J}$ un ensemble de graphes multiplicatifs. Nous préciserons que $/\underline{S}/$ est une esquisse $\mathcal{J}$-projective lorsque les cônes distingués dans $/\underline{S}/$ ont leurs bases indexées par des éléments $\underline{I}$ de $\mathcal{J}$.

De même, si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont deux ensembles de graphes multiplicatifs, nous préciserons que $//\underline{S}//$ est une esquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive, ou, en abrégé, une $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-esquisse, lorsque les cônes projectifs distingués dans $//\underline{S}//$ ont leurs bases indexées par des éléments $\underline{I}$ de $\mathcal{J}$, et les cônes inductifs distingués dans $//\underline{S}//$ ont leurs bases indexées par des éléments $\underline{I}'$ de $\mathcal{J}'$.

Nous sommes en mesure maintenant d'esquisser les esquisses. Commençons par l'esquisse d'esquisse $\{\underline{I}\}$-projective, où $\underline{I}$ est un graphe multiplicatif donné.

Nous allons voir qu'une telle esquisse est encore projective; aussi la désignerons-nous, avant même de l'avoir décrite, par le symbole $/\underline{E}_{\underline{I}}/$.

Le graphe multiplicatif $\underline{E}_{\underline{I}}$ contiendra, bien sûr, un morceau isomorphe à $\sqsubset_m$ (cf. Leçon 2), puisque toute esquisse admet un graphe multiplicatif sous-jacent.

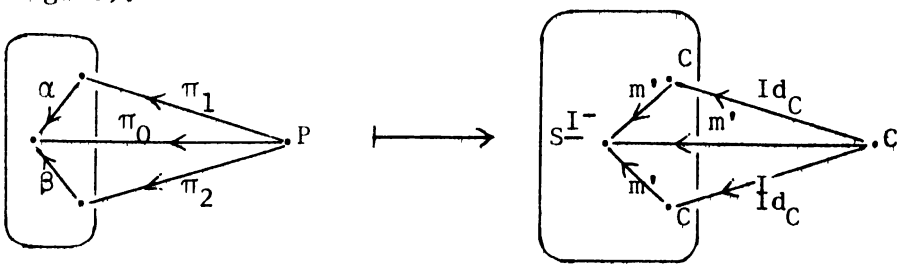
Le graphe orienté E_I sous-jacent contiendra en outre:

(i) un objet spécial, dit objet"des cônes projectifs de base $\underline{I}$", et noté, pour cette raison, $S^{\underline{I}^-}$,

(ii) une flèche spéciale, soit $C \xrightarrow{m'} S^{\underline{I}^-}$, dont la source C est dite objet"des $\underline{I}$-cônes projectifs distingués".

La situation est tout à fait analogue à celle que nous avons rencontrée lorsque nous avons esquissé les couples composables d'un graphe multiplicatif.

Nous devons donc prévoir un cône distingué dans $\underline{E}_{\underline{I}}$ stipulant que toute réalisation (cf. plus loin, pour une définition précise; cf. plus haut la notion de calquage) de m' dans Ens sera une injection (choix des cônes distingués):



Nous devons examiner aussi comment l'objet $S^{\underline{I}^-}$ doit être relié au graphe multiplicatif $\Gamma_{\underline{m}}$, afin que, pour toute réalisation $/\underline{S}/$ de $/\underline{E}_{\underline{I}}/$, on soit assuré que $S^{\underline{I}^-}$ se réalise bien en l'ensemble de tous les foncteurs de $\underline{I}^-$ vers le graphe multiplicatif $\underline{S}$.

Nous allons faire ce travail avec un graphe multiplicatif $\underline{I}$ quelconque (pouvant être de la forme particulière $\underline{I}^-$), d'une part pour alléger les notations, d'autre part pour l'usage que nous en ferons ultérieurement.

Soit donc $\underline{I}$ un graphe multiplicatif. Il s'agit d'esquisser l'objet "des foncteurs de $\underline{I}$ vers $\underline{S}$". A cet effet, soit $\underline{S}$ un graphe multiplicatif quelconque. L'ensemble $S^{\underline{I}}$ des foncteurs de $\underline{I}$ vers $\underline{S}$ est déterminé par la donnée de trois applications que nous décrirons en termes de familles indexées par leurs sources :

$$\mathrm{Ob}\ \underline{I} \longrightarrow \mathrm{Ob}\ \underline{S} \qquad (S_I)_{I \in \mathrm{Ob}\ \underline{I}}$$

$$\mathrm{Fl}\ \underline{I} \longrightarrow \mathrm{Fl}\ \underline{S} \qquad (s_i)_{i \in \mathrm{Fl}\ \underline{I}}$$

$$\underline{I} * \underline{I} \longrightarrow \underline{S} * \underline{S} \qquad (t_{i',i})_{(i',i) \in \underline{I} * \underline{I}}$$

Ces familles doivent définir un homomorphisme de graphes orientés, ce qui se traduit par les conditions de cohérence suivantes:

$$\forall\ i \in \mathrm{Fl}\ \underline{I} \qquad c(s_i) = S_{c(i)}$$

$$d(s_i) = S_{d(i)}$$

$$\forall\ (i',i) \in \underline{I} * \underline{I} \qquad t_{(i',i)} = (s_{i'}, s_i).$$

La compatibilité entre les structures multiplicatives de $\underline{I}$ et de $\underline{S}$ se traduit par les égalités suivantes:

$$\forall\ (i',i) \in \underline{I} * \underline{I} \qquad k(t_{i',i}) = s_{i'} \cdot s_i = s_{i',i}$$

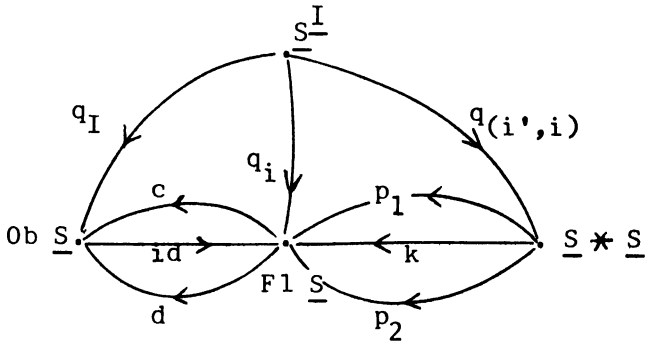
$$\forall\ I \in \mathrm{Ob}\ \underline{I} \qquad s_{\mathrm{Id}_I} = \mathrm{Id}_{S_I}\ .$$

Remarquons au passage que nous nous permettons d'utiliser les notations "génériques" au lieu des notations particulières (c,d,etc...) et inversement;tant qu'il n'y a pas de confusion possible, nous commettrons ostensiblement ces "abus" de notation, car ils ne sont pas si abusifs qu'il y paraît. Disons, pour le moment, que c'est une question d'habitude à prendre (ou à ... laisser).

Ainsi $\underline{S}^{\underline{I}}$ apparaît comme un certain sous-ensemble du produit suivant:

$$P = (\mathrm{Ob}\ \underline{S})^{\mathrm{Ob}\ \underline{I}} \times (\mathrm{Fl}\ \underline{S})^{\mathrm{Fl}\ \underline{I}} \times (\underline{S} * \underline{S})^{\underline{I} * \underline{I}} \ .$$

Pour préciser de quel ensemble il s'agit, introduisons les projections de $\underline{S}^{\underline{I}}$ vers les facteurs $\mathrm{Ob}\ \underline{S}$, $\mathrm{Fl}\ \underline{S}$, $\underline{S} * \underline{S}$, qui sont les restrictions des projections canoniques de P vers ses facteurs:



où $p_1 = p_1'.m$ et $p_2 = p_2'.m$.

Les conditions, écrites plus haut, caractérisant le sous-ensemble $\underline{S}^{\underline{I}}$ du produit P s'expriment aussi par les égalités entre applications suivantes:

$$\forall\ i \in \mathrm{Fl}\ \underline{I} \qquad c.q_i = q_{c(i)}$$

$$d.q_i = q_{d(i)}$$

$$\forall\ (i',i) \in \underline{I} * \underline{I} \qquad p_1.q_{(i',i)} = q_{i'}$$

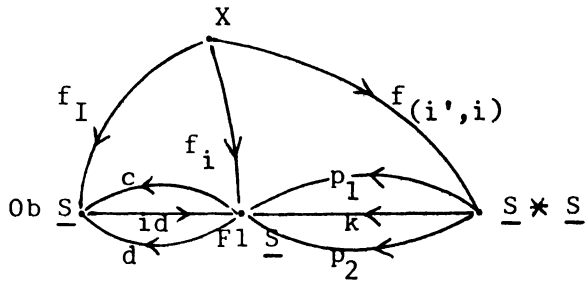
$$p_2.q_{(i',i)} = q_i$$

$$k.q_{(i',i)} = q_{i'.i}$$

$$\forall\ I \in \mathrm{Ob}\ \underline{I} \qquad id.q_I = q_{id(I)} \ .$$

On vérifie sans peine que les applications q_I, q_i et $q_{(i',i)}$ ont la propriété universelle suivante:

quelles que soient les applications f_I, f_i et $f_{(i',i)}$ indexées respectivement par $\mathrm{Ob}\ \underline{I}$, $\mathrm{Fl}\ \underline{I}$ et $\underline{I} * \underline{I}$, et ainsi disposées:



satisfaisant des égalités analogues à celles que satisfont les applications q_I, q_i et $q_{(i',i)}$, il existe une unique application $f : X \longrightarrow \underline{S}^{\underline{I}}$ telle que:

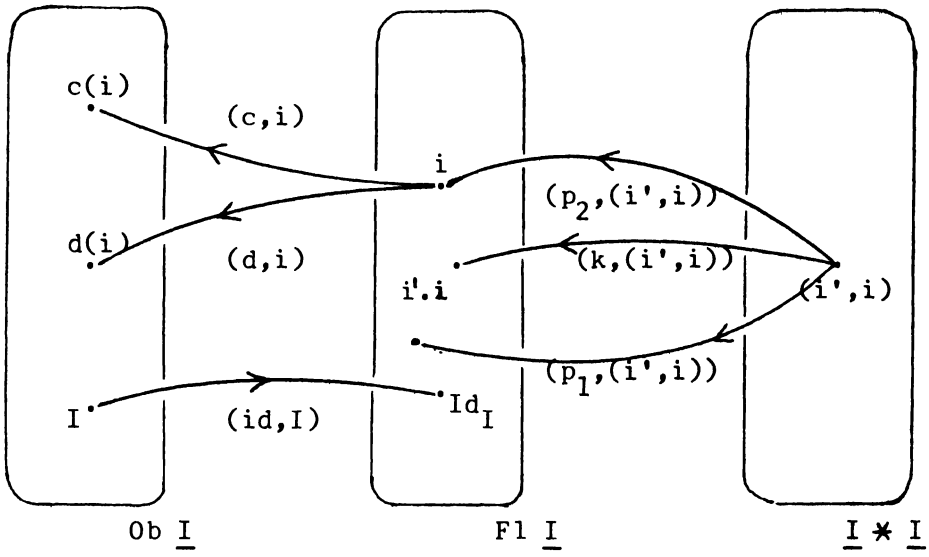
$$\forall\ I \in \mathrm{Ob}\ \underline{I} \qquad f_I = q_I.f$$

$$\forall\ i \in \mathrm{Fl}\ \underline{I} \qquad f_i = q_i.f$$

$$\forall\ (i',i) \in \underline{I} * \underline{I} \qquad f_{(i',i)} = q_{(i',i)}.f\ .$$

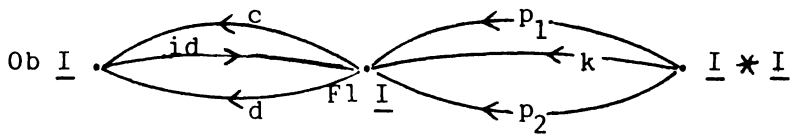
Autrement dit, $\underline{S}^{\underline{I}}$ apparaît comme sommet d'un cône limite projective dont les arêtes sont les applications q_I, q_i et $q_{(i',i)}$, et dont la base est indexée par le graphe multiplicatif $\S(\underline{I})$ décrit comme suit.

- Le graphe orienté sous-jacent, soit $\S(\underline{I})$, est décrit par le diagramme suivant, dans lequel les éléments (objets ou flèches) sont figurés génériquement:



Ob §(I) est donc la somme (disjointe) de Ob I, Fl(I) et de I * I .

Fl §(I) est l'ensemble des couples (z,x) où x ∈ Ob §(I) et où z est une des applications du diagramme suivant:

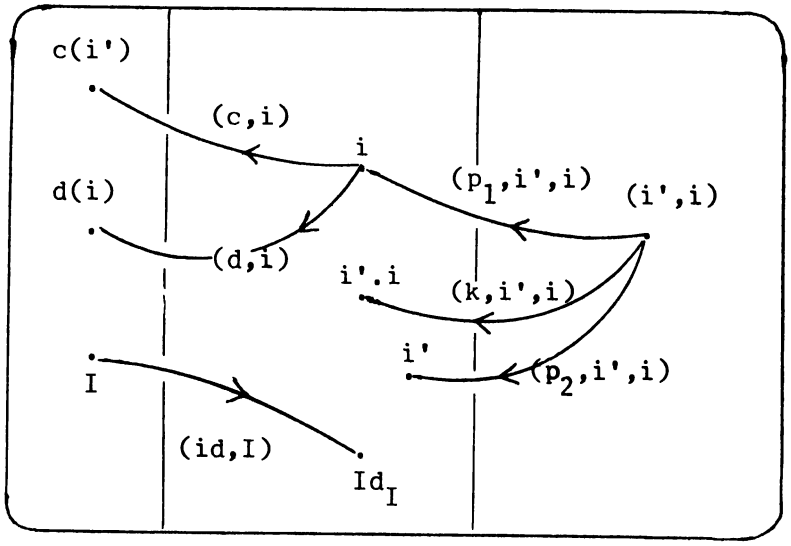


telle que z(x) soit défini; alors x est la source de (z,x) et z(x) en est le but.

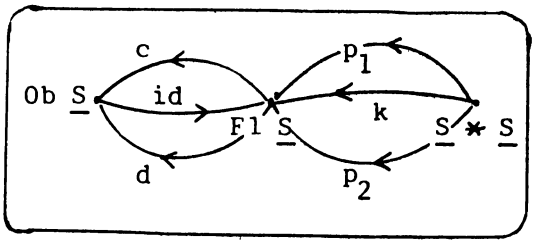
- L'ensemble §(I) *§(I) est constitué des couples ((z',x'),(z,x)) tels que z'.z soit défini dans I * I et z(x) = x' ; on pose alors (z',x').(z,x) = (z'.z,x).

Remarquons que cette construction de §(I) à partir de I étend celle du graphe subdivision d'un graphe orienté; en fait, elle est tout à fait générale, et nous aurons l'occasion d'y revenir.

Ainsi, dans Ens, la base du cône limite projective qui nous intéresse est la suivante:



B



où $\forall$ I $\in$ Ob $\underline{I}$,

B(I) = Ob $\underline{S}$,
B(id,I) = id,

$\forall$ i $\in$ Fl $\underline{I}$,

B(i) = Fl $\underline{S}$,
B(c,i) = c ,
B(d,i) = d ,

$\forall$ (i',i) $\in \underline{I} * \underline{I}$, $B(i',i) = \underline{S} * \underline{S}$,
$B(p_1,(i',i)) = p_1$,
$B(p_2,(i',i)) = p_2$,
$B(k,(i',i)) = k$.

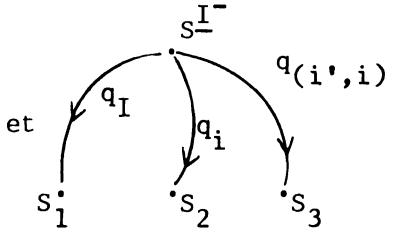
Ainsi, l'ensemble $\underline{S}^{\underline{I}}$ est le sommet d'un cône limite projective dont la base est indexée par $\mathfrak{S}(\underline{I})$ et dont les arêtes sont les applications q_I , q_i , $q_{(i',i)}$ (où i varie dans Fl $\underline{I}$ et (i',i) dans $\underline{I} * \underline{I}$). Nous devons

donc ajouter un cône distingué de ce genre pour constituer l'esquisse voulue $/\underline{E}_{\underline{I}}/$.

Plus précisément, et pour conclure ce paragraphe, on voit que l'esquisse $/\underline{E}_{\underline{I}}/$ d'esquisse $\{\underline{I}\}$-projective s'obtient à partir de celle de graphe multiplicatif $/\sqsubset_m/$ en ajoutant :

- les objets C et $S^{\underline{I}^-}$

et les flèches non triviales : $C \xrightarrow{m'} S^{\underline{I}^-}$



où $\begin{cases} I \in Ob\ \underline{I}^- \\ i \in Fl\ \underline{I}^- \\ (i',i) \in \underline{I}^- * \underline{I}^- \end{cases}$

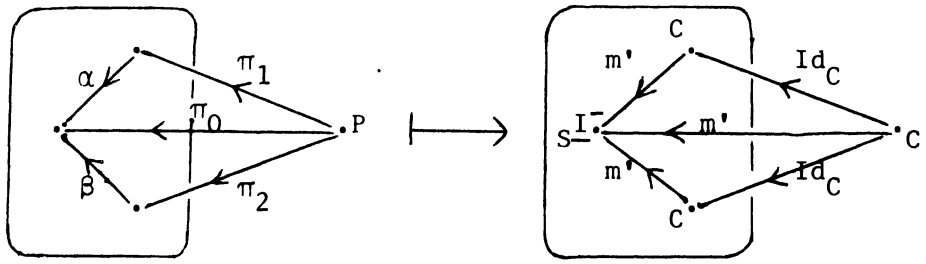
- les égalités suivantes (table de composition de $\underline{E}_{\underline{I}}$) :

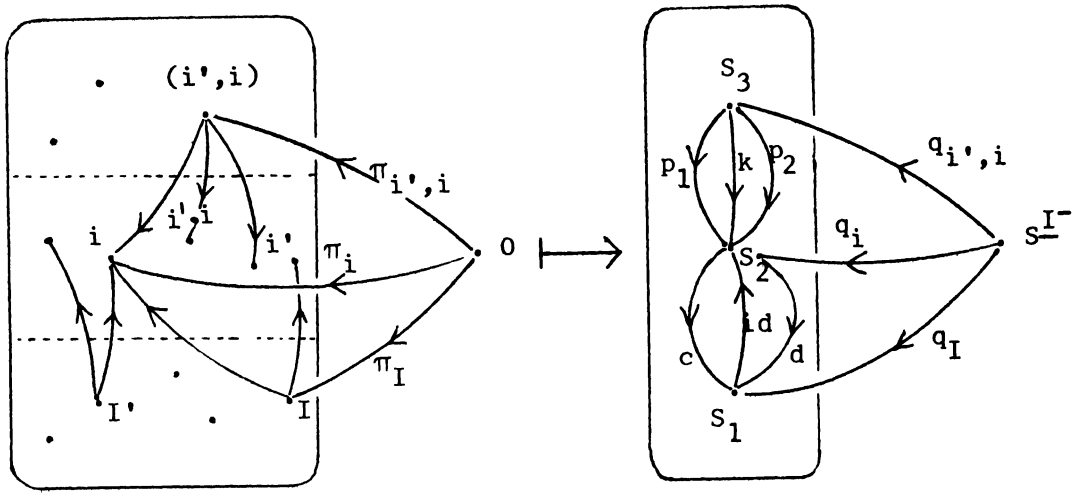
$\forall\ i \in Fl\ \underline{I}^-$ $\quad c.q_i = q_{c(i)}$,
$\quad d.q_i = q_{d(i)}$,

$\forall\ (i',i) \in \underline{I}^- * \underline{I}^-$ $\quad p_1.q_{(i',i)} = q_{i'}$,
$\quad p_2.q_{(i',i)} = q_i$,
$\quad k.q_{(i',i)} = q_{(i',i)}$

$\forall\ I \in Ob\ \underline{I}^-$ $\quad id.q_I = q_{id(I)}$.

- les deux cônes distingués suivants :





$\S(\underline{I}^-)^-$

Soit $\underline{V}$ le graphe multiplicatif indexant la base du premier de ces deux cônes. Nous venons d'établir que $/\underline{E}_{\underline{I}}/$ est une esquisse $\{\underline{V},\S(\underline{I}^-)\}$-projective.

On définit aisément maintenant une esquisse d'esquisse $\mathcal{J}$-projective, où $\mathcal{J}$ est un ensemble de graphes multiplicatifs $\underline{I}$ choisis.

On procède comme ci-dessus, en faisant varier $\underline{I}$ dans $\mathcal{J}$; on ajoute donc à l'esquisse $/\underline{\Gamma}_m/$ une famille de flèches $C_{\underline{I}} \xrightarrow{m'_{\underline{I}}} S^{\underline{I}^-}$ indexée par l'ensemble $\mathcal{J}$,etc...

L'esquisse $/\underline{E}_{\mathcal{J}}/$ d'esquisse $\mathcal{J}$-projective obtenue est une esquisse $\tilde{\mathcal{J}}$-projective, où $\tilde{\mathcal{J}}$ est l'ensemble des graphes multiplicatifs suivants:

- $\underline{V}$,
- $\S(\underline{I}^-)$, où $\underline{I}$ parcourt $\mathcal{J}$.

On définit tout aussi aisément maintenant une esquisse de $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisse , où $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont deux ensembles de graphes multiplicatifs choisis.

En effet, ce qui nous a occupé principalement dans ce paragraphe consacré à l'esquisse d'esquisse est en fait l'esquisse du choix de cônes projectifs distingués. On esquisse le choix de cônes inductifs distingués de façon similaire. Ceci conduit à ajouter des cônes projectifs distingués de base $\underline{\S}(\underline{I}'^{+})$, où $\underline{I}'$ parcourt $\mathcal{J}'$.

En oubliant les indexations, nous retiendrons que les esquisses (projectives ou mixtes) s'esquissent projectivement.

Concluons cette leçon par quelques remarques.

1) Supposons que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ contiennent $\underline{V}$ et soient stables respectivement pour les opérations suivantes:

$$\underline{I} \longmapsto \underline{\S}(\underline{I}^{-}) \quad \text{et} \quad \underline{I}' \longmapsto \underline{\S}(\underline{I}'^{+}).$$

Dans ces conditions, l'esquisse des esquisses $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-mixtes est une esquisse $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$-projective.

2) Nous voyons que le langage des esquisses s'auto-décrit, sans difficulté particulière. Il serait prématuré d'en tirer des conclusions philosophico-scientifiques. Contentons-nous d'un peu d'auto-satisfaction !

Les prochaines Leçons sont consacrées aux questions suivantes: réalisations d'esquisses (structures), homomorphismes entre structures de même type, structure des catégories de ces homomorphismes etc...