Fondements de la Géométrie Algébrique Moderne*

JEAN DIEUDONNÉ
Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, France

I. Préliminaires 324
La notion de préschéma 324
Modules quasi-cohérents 327
Conditions de finitude 329
Propriétés ponctuelles 333
II. Le changement de base 333
Produits de S-préschémas 333
Le changement de base 335
Principaux exemples de changements de base 336
"Montée" et "descente" 337
A. Propriétés des morphismes (montée) 338
B. Propriétés des modules (montée) 341
C. Propriétés des préschémas (montée) 341
III. La notion de platitude 343
Modules et morphismes plats 343
Importance des morphismes plats 344
A. Propriétés élémentaires 345
B. Propriétés topologiques 345
Caractère "liant" de la platitude 353
A. Propriétés de $X \Rightarrow$ Propriétés de Y 354
B. Propriétés de Y + Propriétés des fibres $\Rightarrow$ Propriétés de X . . 354
C. Propriétés des $f_s \Rightarrow$ Propriétés de f 356
Morphismes lisses et morphismes étales 356
Propriétés élémentaires de descente fidèlement plate 357
A. Propriétés des Modules 357
B. Propriétés des morphismes 358
Platitude en cohomologie 359
IV. Limites projectives de préschémas 361
Limites inductives d'anneaux et limites projectives de préschémas . 361
Systèmes projectifs plus généraux 362
Digression sur les anneaux excellents 364
Propriétés des limites projectives 365
A. Passage à la limite pour les propriétés des Modules 365

* Cours d'été de l'OTAN: Notes du cours donné à la troisième session du Séminaire de mathématiques supérieures de l'Université de Montréal, tenue l'été 1964. Le Séminaire est placé sous les auspices conjointes de l'Organisation du Traité de l'Atlantique Nord et de la Société Mathématique du Canada.

B. Propriétés des Modules 367
C. Propriétés des morphismes 368
Elimination des hypothèses noethériennes 371
V. Foncteurs représentables en théorie des préschémas 376
Le foncteur **h** 376
Foncteurs représentables dans la théorie des préschémas 377
Exemples de foncteurs représentables 378
Le foncteur Grassmannienne 381
Schémas de Hilbert 384
Conoyaux dans la catégorie des préschémas 384
Relations d'équivalence dans les préschémas 387
Théorie de la descente 395
Préschémas en groupes 400
Exemples de préschémas en groupes 401
Autres exemples de S-groupes 403
VI. Topologies de Grothendieck 407
References 412

Préface

Les conférences réunies dans ce volume prolongent celles données en 1962 à l'Université de Maryland, et poursuivent le même but; familiariser le lecteur avec les notions fondamentales de la théorie des *préschémas*, et lui permettre ainsi d'aborder plus facilement la lecture des "Éléments de Géométrie algébrique" de A. Grothendieck, où cette théorie est exposée dans tous ses détails, mais dont l'étendue et la complexité risquent de noyer quelque peu les idées essentielles et de décourager le débutant. Les techniques projectives et cohomologiques, qui jouaient le rôle principal dans les conférences de Maryland, passent ici au second plan, et l'accent est mis sur d'autres (et non moins importantes) méthodes, qui gravitent autour du concept fondamental et protéiforme du *changement de base* et de l'usage intensif de la notion de *platitude*: construction de préschémas par la technique des *foncteurs représentables*, théories de la "*descente*" et du "*passage à la limite projective*".

Je tiens à remercier vivement M. Pierre-Yves Leduc, qui s'est chargé de la rédaction de ces notes, et a su avec bonheur condenser les exposés oraux et en mettre en évidence les points essentiels.

Jean Dieudonné

I. Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappellerons les définitions de quelques concepts fondamentaux, ainsi que leurs principales propriétés. Les ouvrages auxquels nous aurons le plus souvent à nous référer sont les suivants:

"Algèbre commutative" de N. Bourbaki (cité [B. Alg. Comm.])

"Théorie des faisceaux" de R. Godement (cité [G])

Sur quelques points d'algèbre homologique, un article de A. Grothendieck dans le *Tohoku Math. J.* (1957) (cité [T])

Algebraic Geometry, un article de J. Dieudonné, dans l'*Adv. Math.* (1969), (cité [D])

Eléments de Géométrie algébrique de A. Grothendieck et J. Dieudonné (cité [G.E.])

La notion de préschéma

Disons dès maintenant que tous les anneaux considérés seront supposés être commutatifs et posséder un élément unité.

Le *spectre* (premier) *d'un anneau* A est *l'ensemble* des idéaux premiers de A, muni d'une certaine *topologie* souvent appelée topologie de Zariski, cet espace topologique étant base d'un certain *faisceau d'anneaux* appelé faisceau structural de A, au sujet desquels nous allons maintenant donner quelques précisions.

(a) En ce qui concerne *l'ensemble* des idéaux premiers de A: on dit qu'un idéal $\mathfrak{p}$ de A est premier si $A/\mathfrak{p}$ est intègre; donc un idéal premier doit toujours être différent de A, et 0 est premier si A est intègre. Le spectre de A est vide si A est nul, et contient exactement un élément si A est un corps.

(b) En ce qui concerne la *topologie* sur $\mathrm{Spec}(A)$: elle est définie comme suit: soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque de A et posons

$V(\mathfrak{a})$ = l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent $\mathfrak{a}$.

Alors on prend comme ensembles fermés de $\mathrm{Spec}(A)$, les ensembles de la forme $V(\mathfrak{a})$. Il est facile de vérifier que ces ensembles définissent bien une topologie sur $\mathrm{Spec}(A)$, et que si pour chaque $f \in A$, on pose

$$D(f) = \mathrm{Spec}(A) - V(f),$$

alors les ensembles de la forme $D(f)$ constituent une base d'ouverts

pour la topologie de Spec(A) ([G.E.] I, 1.1.10). Remarquons que $D(f)$ est lui-même un spectre, à savoir celui de l'anneau A_f (voir [G.E.] Chap. 0 pour les définitions des anneaux et des modules de fractions A_f, $A_\mathfrak{p}$, M_f, etc...).

Mentionnons enfin quelques propriétés importantes de cette topologie.

Elle est quasi-compacte ([G.E.] I, 1.1.10).

$X = \mathrm{Spec}(A)$ est un espace de Kolmogoroff ([G.E.] I, 1.1.8), mais en général pas un espace de Fréchet et encore moins de Hausdorff.

Donc les points de X ne sont en général pas fermés, sauf ceux qui "correspondent" à des idéaux maximaux $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

L'adhérence $\overline{\{x\}}$ d'un point $x \in X$ est un ensemble fermé et irréductible ([G.E.] 0_I, 2.1.1 et 2.1.2) dont x est appelé le point générique. Disons, en passant, que si $y \in \overline{\{x\}}$, alors x est appelé une générisation de y, et y une spécialisation de x. Dans le cas où un point x correspond à un idéal premier minimal de A, $\overline{\{x\}}$ est une composante irréductible de Spec(A) ([G.E.] I, 1.1.14); on dit souvent que x est un point maximal de Spec(A). Si A est intègre, (0) est générique pour tout l'espace Spec(A).

Soit $x = \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$; alors l'ensemble des idéaux premiers de A qui sont contenus dans $\mathfrak{p}$ est le spectre premier de $A_\mathfrak{p}$ qu'on dénote souvent par Spec($\mathcal{O}_x$); remarquons en passant que l'inclusion $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x) \subset \mathrm{Spec}(A)$ est une injection topologique.

Il est important de remarquer que Spec($\mathcal{O}_x$) est contenu dans, et en général beaucoup plus petit que tout voisinage ouvert de x; car Spec($\mathcal{O}_x$) n'est autre que l'intersection de tous les voisinages de x, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x) = \{y \mid x \in \overline{\{y\}}\}.$$

Illustrons cette différence par deux exemples.

Considérons d'abord l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels, les éléments de Spec($\mathbf{Z}$) sont alors en correspondance biunivoque avec $\{0\} \cup \{$l'ensemble des nombres premiers$\}$; évidemment, $\overline{\{0\}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Maintenant, si on prend $x = (p)$, (p nombre premier), x est fermé dans Spec($\mathbf{Z}$), donc $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x) = \{x, 0\}$, tandis qu'un voisinage de x contient nécessairement tous les points de Spec($\mathbf{Z}$) à l'exception d'un nombre fini de nombres premiers.

Considérons maintenant le plan affine: $P = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[X, Y])$ où $\mathbf{C}$ est le corps des nombres complexes. Les points de Spec($\mathbf{C}[X, Y]$) sont (0) (point générique de P), les points $z = (\alpha, \beta)$ qui correspondent aux idéaux maximaux $(X - \alpha) + (Y - \beta)$ et les points génériques des courbes irréductibles, correspondant aux autres idéaux premiers de

$\mathbf{C}[X, Y]$. Dans ce cas, l'ensemble des générisations de $z = (\alpha, \beta)$, c'est-à-dire $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_z)$ consiste en

$\{z, (0)$, et les points génériques des courbes irréductibles qui passent par $z\}$,

tandis qu'un voisinage ouvert de z sera obtenu en prenant tous les éléments de $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[X, Y])$ sauf un nombre fini de points de $\mathbf{C}^2$ et de courbes irréductibles.

Ces deux exemples montrent que si une certaine propriété est vraie aux points de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ pour un certain x, alors elle est loin d'être nécessairement vraie d'un voisinage de x, c'est-à-dire que pour vérifier une propriété locale, il ne suffit pas de la vérifier dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ pour chaque x. Rappelons qu'une propriété $\boldsymbol{P}$ est dite locale si "$\boldsymbol{P}$ vraie de X entraîne $\boldsymbol{P}$ vraie de tout ouvert de X" et "$\boldsymbol{P}$ vraie pour tous les ouverts d'un recouvrement de X entraîne $\boldsymbol{P}$ vraie de X."

(c) En ce qui concerne le *faisceau* structural de A: Soit M un A-module; on peut lui associer un faisceau de groupes abéliens noté $\tilde{M}$ sur $\mathrm{Spec}(A)$; pour cela, il suffit ([G.E.] 0_{I}, 3.2) de définir $\Gamma(U, \tilde{M})$ où U parcourt les ouverts d'une base de la topologie de $\mathrm{Spec}(A)$. On pose $\Gamma(D(f), \tilde{M}) = M_f$, et on vérifie que cela définit bien un faisceau ([G.E.] I, 1.3).

Le faisceau structural de A est alors obtenu en prenant $M = A$. On pose souvent $\tilde{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$.

La fibre de $\tilde{M}$ en x, c'est-à-dire la limite inductive des $\Gamma(U, \tilde{M})$ suivant l'ensemble filtrant (pour $\supset$) des voisinages ouverts U de x, s'identifie à $M_x = M_{\mathfrak{p}}$ (où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier "correspondant" à x) ([G.E.] I, 1.3).

Soient $(X, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ et $(Y, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ deux espaces annelés ([G.E.] 0_{I}, 4.1.1) alors un *morphisme* $f : (X, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to (Y, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ est un couple $f = (\psi, \theta)$ où ψ est une application continue $X \to Y$ et où θ est un homomorphisme de faisceaux $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \to \psi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$; ici $\psi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ désigne l'image directe par ψ du faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$: c'est le faisceau de base Y défini de la manière naturelle par $\Gamma(U, \psi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})) = \Gamma(\psi^{-1}(U), \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, où U est un ouvert de Y.

On dit que $(X, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ est un espace annelé en anneaux locaux si pour chaque $x \in X$, la fibre $\mathscr{O}_x$ est un anneau local; on dénote par $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximal et par $\kappa(x) = \mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x$ le corps résiduel. Si $(X, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ et $(Y, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ sont deux espaces annelés en anneaux locaux, alors par définition, $f = (\psi, \theta) : (X, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to (Y, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ est un *morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux* si pour chaque $x \in X$, l'homomorphisme $\theta_x : \mathscr{O}_{\psi(x)} \to \mathscr{O}_x$ induit par θ est un homomorphisme local ([G.E.] I, 1.7.3).

Remarquons qu'un spectre $\mathrm{Spec}(A)$ est nécessairement un espace annelé en anneaux locaux puisque tous les $A_{\mathfrak{p}}$ sont locaux.

Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et posons $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$. On peut alors associer d'une manière canonique à φ un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux

$$\tilde{\varphi} = (\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

comme suit:

(a) $\psi : X \to Y$ est définie par $\psi(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in X$.

(b) $\theta : \tilde{A} \to \psi_*(\tilde{B})$ est le morphisme de faisceaux induit par l'homomorphisme $\varphi : A \to B_{[A]}$ de A-module (où $B_{[A]}$ désigne B considéré comme A module au moyen de φ) car on montre aisément que $\psi_*(\tilde{B})$ s'identifie canoniquement à $\tilde{B}_{[A]}$ ([G.E.] I, 1.6.3).

Si $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux, où $(X, \mathcal{O}_X)$ est le spectre de $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est le spectre de $A = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, alors il est possible de retrouver l'homomorphisme $\varphi : A \to B$ dont f provient par

$$\varphi = \theta_Y : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(Y, \psi_*(\mathcal{O}_Y)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

On a donc ainsi défini la catégorie des schémas affines et des morphismes de schémas affines, dont les objets sont les spectres premiers d'anneaux et les morphismes sont les morphismes d'espaces annelés en anneaux locaux de ces spectres.

D'ailleurs, les foncteurs $A \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(A)$ et $(X, \mathcal{O}_X) \rightsquigarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ définissent une *équivalence* de la catégorie des anneaux commutatifs et de la catégorie duale de la catégorie des schémas affines.

Un *préschéma* est un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ dont tout point x possède un voisinage ouvert affine, c'est-à-dire un voisinage ouvert U tel que l'espace annelé induit par $\mathcal{O}_X$ sur U est un schéma affine. Il s'agit donc d'un espace annelé en anneaux locaux. Comme morphismes, on prend ceux de la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux.

L'exemple classique d'un préschéma qui n'est pas un schéma affine est la droite projective ([G.E.] I, 2.3.2).

Modules quasi-cohérents

Soit X un préschéma. Nous allons définir des propriétés qu'on doit généralement imposer à un $\mathcal{O}_X$-Module pour obtenir des résultats intéressants.

On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ est *quasi-cohérent* si pour chaque $x \in X$,

il existe un voisinage ouvert affine U de x tel que $\mathscr{F} \mid U$ soit isomorphe à $\tilde{M}$ pour un certain $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$-module M ([G.E.] I, 1.4.1). $\mathscr{F}$ est *quasi-cohérent et de type fini* si en outre, pour tout ouvert affine U, le module M est de type fini, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte

$$A(U)^n \to M \to 0$$

pour un certain entier n (ici $A(U)$ est une abréviation pour $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$). $\mathscr{F}$ est *quasi-cohérent et de présentation finie* s'il existe une suite exacte

$$A(U)^m \to A(U)^n \to M \to 0$$

c'est-à-dire que M est un $A(U)$-module de présentation finie.

Il est clair que "quasi-cohérent et de présentation finie" $\Rightarrow$ "quasi-cohérent et de type fini," et que si X est localement noethérien, alors les deux conditions sont équivalentes.

Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de A; alors la projection canonique $A \to A/\mathfrak{a}$ induit un morphisme de schémas affines $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(A)$; on remarque d'ailleurs que $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ s'identifie topologiquement au sous-espace fermé $V(\mathfrak{a})$ de $\mathrm{Spec}(\mathfrak{a})$. Le faisceau structural $\mathscr{O}_Y$ de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ peut être considéré comme $(A/\mathfrak{a})^\sim \mid V(\mathfrak{a})$ car il est clair que les fibres de $(A/\mathfrak{a})^\sim$ pour les points hors de $V(\mathfrak{a})$ sont toutes nulles. Nous venons de définir ainsi un cas particulier de ce qu'on appelle un *sous-préschéma (fermé)* d'un préschéma. Le préschéma $(Y, \mathscr{O}_Y)$ est un *sous-préschéma* de $(X, \mathscr{O}_X)$ si

(1) Y est localement fermé dans X;

(2) pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert affine U de y dans X tel que

  (i) $U \cap Y$ est fermé dans U;

  (ii) $\mathscr{O}_Y \mid (U \cap Y)$ est un sous-préschéma fermé de $\mathscr{O}_X \mid U$.

La dernière condition veut dire qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de $A(U)$ tel que $\mathscr{O}_Y \mid (U \cap Y)$ soit isomorphe à $\mathrm{Spec}(A(U)/\mathfrak{a})$.

On peut démontrer ([G.E.] I, 4.1.5) que le préschéma induit par $\mathscr{O}_X$ sur un ouvert de X est un sous-préschéma de $(X, \mathscr{O}_X)$; de plus ([G.E.] I, 4.1.3) Y, sous-préschéma de X, est fermé dans X si et seulement s'il existe un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$ tel que $\mathscr{O}_Y$ s'identifie à $(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}) \mid Y$ et il y a correspondance biunivoque entre Idéaux quasi-cohérents de $\mathscr{O}_X$ et sous-préschémas fermés.

Rappelons qu'un préschéma $\mathscr{O}_X$ est dit réduit si tous les anneaux locaux $\mathscr{O}_x$ sont réduits. Supposons maintenant que A soit un anneau

non réduit; alors on sait que si $\mathfrak{N}$ est son nilradical, $A/\mathfrak{N}$ est réduit. On remarque d'ailleurs que si $\mathfrak{a}$ est un idéal contenu dans $\mathfrak{N}$, alors en général la projection naturelle $A \to A/\mathfrak{a}$ définira un sous-préschéma de $\mathrm{Spec}(A)$ distinct de $\mathrm{Spec}(A)$, bien que, considérés seulement comme espaces topologiques, $Y = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ et $X = \mathrm{Spec}(A)$ coïncident.

On prouve qu'étant donné un sous-espace localement fermé Y de l'espace sous-jacent X d'un préschéma $(X, \mathcal{O}_X)$, il existe un et un seul sous-préschéma réduit de $(X, \mathcal{O}_X)$ ayant Y comme espace sous-jacent, mais en général il peut exister plusieurs sous-préschémas de $(X, \mathcal{O}_X)$ ayant Y comme espace sous-jacent ([G.E.] I, 5.2.1). En particulier, pour tout préschéma $(X, \mathcal{O}_X)$ le préschéma réduit X_{red} associé à X a pour faisceau structural $\mathcal{O}_X$ divisé par son nilradical $\mathcal{N}_X$; $\mathcal{N}_X$ est ici un Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$ tel qu'en chaque point x de X, sa fibre $\mathcal{N}_x$ soit le nilradical de $\mathcal{O}_x$.

On a donc un morphisme d'injection canonique $X_{\mathrm{red}} \to X$ (voir [G.E.] I, 4.1.7 pour la définition générale de morphisme d'injection canonique).

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas; alors le fait que f induise pour chaque $x \in X$ un homomorphisme local

$$\mathcal{O}_{f(x)}/\mathcal{N}_{f(x)} \to \mathcal{O}_x/\mathcal{N}_x$$

indique qu'il existe un morphisme bien défini $f_{\mathrm{red}} : X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ rendant commutatif le diagramme ([G.E.] I, 5.1.5)

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_{\mathrm{red}} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathrm{red}}} \\ Y & \longleftarrow & Y_{\mathrm{red}} \end{array}$$

Remarque: Un préschéma réduit peut posséder des sous-préschémas qui ne sont pas réduits. Par exemple $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}^2)$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non trivial d'un anneau intègre noethérien A, est non réduit alors que $\mathrm{Spec}(A)$ l'est.

Conditions de finitude

Nous allons maintenant examiner quelques *conditions de finitude* qui sont essentielles si l'on veut obtenir des résultats significatifs.

(A) Les conditions de finitude sur les Modules ont été vues: quasi-cohérence, type fini, présentation finie. Les Modules cohérents

ne nous intéresseront que dans le cas noethérien, et alors cette condition de cohérence coincide avec "quasi-cohérent et type fini."

(B) Conditions de finitude sur les préschémas. Disons d'abord qu'un schéma affine Spec(A) est dit *noethérien* si A est noethérien; il est alors clair que sur l'espace topologique sous-jacent à Spec(A), toute suite décroissante de fermés est stationnaire.

Un préschéma est dit *localement noethérien* si chacun de ses points admet un voisinage ouvert affine noethérien. Il est dit *noethérien* si de plus il est quasi-compact, donc réunion finie d'ouverts affines noethériens. Voici trois propriétés qui découlent immédiatement de cette définition:

(1) Les anneaux locaux d'un préschéma localement noethérien sont noethériens et de dimension finie ([D] p. 10 pour la notion de dimension, et p. 354 ci-dessous).

(2) Les composantes irréductibles de X forment un ensemble localement fini.

(3) Récurrence noethérienne dans un préschéma noethérien: il s'agit d'un procédé de démonstration qui permet d'affirmer qu'une propriété est vraie de X aussitôt qu'on sait qu'elle est vraie de toute partie fermée de X distincte de X.

Les hypothèses noethériennes semblent indispensables pour toutes les questions concernant la dimension, la profondeur et la cohomologie.

(C) Conditions de finitude sur les morphismes. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas.

(1) f est *localement de type fini* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert affine U de x, et un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ tels que

$$f(U) \subset V \qquad \text{et}$$

$$B = A(U) \text{ est une } A = A(V)\text{-algèbre de type fini}$$

c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte d'homomorphismes d'algèbres

$$A[T_1, \ldots, T_n] \to B \to 0$$

(2) f est *localement de présentation finie* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert affine U de x, et un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ tels que

$$f(U) \subset V \qquad \text{et}$$

$$B = A(U) \text{ est une } A = A(V)\text{-algèbre de présentation finie}$$

c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte d'homomorphismes

$$0 \to \mathfrak{J} \to A[T_1, \ldots, T_n] \to B \to 0$$

où $\mathfrak{J}$ est un idéal de *type fini*.

Remarquons encore que dans le cas localement noethérien, ces deux dernières conditions sont équivalentes. Nous verrons plus tard que les conditions de présentation finie sont destinées à remplacer les hypothèses noethériennes (p. 371).

(3) f est *quasi-compact* si pour tout ouvert quasi-compact V dans Y, l'image inverse $f^{-1}(V)$ est quasi-compacte dans X. Cette condition de nature purement topologique limite en quelque sorte la grandeur des images inverses, donc en particulier de X.

(4) f est de *type fini* si f est quasi-compact et localement de type fini, ce qui veut dire que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert affine V de y tel que $f^{-1}(V)$ est réunion finie d'ouverts affines $U_1, \ldots, U_n$ tels que chaque $A(U_i)$ est une $A(V)$-algèbre de type fini.

(5) f est *fini*. Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$, cela veut dire que l'homomorphisme correspondant $\varphi : A \to B$ d'anneaux, fait de B une A-algèbre finie (i.e., un *A-module de type fini*). Dans le cas général, nous dirons que $f : X \to Y$ est fini si pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert affine U de y tel que $f^{-1}(U)$ est un *ouvert affine* de X et que $f \mid f^{-1}(U) : f^{-1}(U) \to U$ est fini.

On peut alors démontrer que pour chaque $y \in Y$, la fibre $f^{-1}(y)$ est *finie et discrète*. ([G.E.] II, 6.1.7). A titre d'exemples de morphismes finis, nous avons les immersions de sous-préschémas fermés; d'ailleurs, dans ce cas chaque fibre ne compte qu'un seul point.

Il est clair que "fini" implique "de type fini." Mais il est bon de faire quelques mises en garde au sujet de ces conditions.

D'abord, "fini" n'implique pas "localement de présentation finie": par exemple, si l'on considère une immersion fermée du type $f : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(A)$: elle est évidemment finie, mais sûrement pas localement de présentation finie si $\mathfrak{a}$ n'est pas un idéal de type fini.

Deuxième mise en garde. Nous avons vu que si $f : X \to Y$ est fini, alors pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un espace fini discret. Or la condition que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ soit un espace fini discret n'implique pas que f soit fini, ni même que f soit de type fini: par exemple, si l'on considère un anneau intègre A, son corps des quotients K et le morphisme $f : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(A)$ correspondant à $A \to K$, f satisfait bien la con-

dition sur les fibres puisque Spec(K) n'a qu'un seul point, mais f n'est sûrement pas de type fini puisqu'en général, K n'est pas une A-algèbre de type fini. Un exemple un peu plus général est obtenu en prenant un préschéma X et Spec($\mathcal{O}_x$) pour un $x \in X$; l'immersion Spec($\mathcal{O}_x$) $\to X$ satisfait bien à la condition sur les fibres mais il ne s'agit pas d'un morphisme de type fini puisqu'en général un anneau $A_{\mathfrak{p}}$ n'est pas une A-algèbre de type fini sur A.

(6) On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est *quasi-fini* s'il est de type fini et que chaque fibre $f^{-1}(y)$ (en tant que $\kappa(y)$-préschéma, cf. p. 336) est finie et discrète.

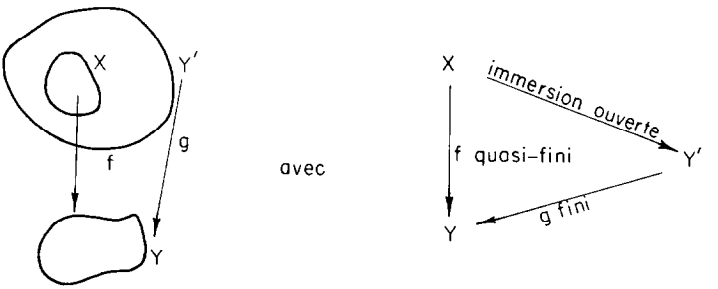
Il est clair que "fini" implique "quasi-fini," mais nous allons montrer que "quasi-fini" n'implique pas "fini." Pour cela, soit $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$ et considérons l'immersion ouverte $f : X \to Y$; f est de type fini puisque A_f est engendré par un seul élément $1/f$, donc une A-algèbre de type fini, et de plus chaque fibre est soit vide, soit composée d'un seul élément, donc f est bien quasi-fini. Mais comme $A[1/f]$ n'est pas de type fini en tant que A-module, f n'est pas fini.

Mentionnons à ce propos un théorème profond qui situe bien la propriété d'être quasi-fini par rapport aux autres conditions de finitude:

Main Theorem de Zariski (forme actuelle). *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas, où Y est affine. Supposons en outre que f est quasi-fini, et séparé.*

Alors on peut plonger X comme sous-préschéma ouvert dans un préschéma Y' d'une manière telle qu'il existe un morphisme fini *$g : Y' \to Y$ qui induise f sur X.*

Nous avons donc la situation suivante:



Rappelons que la condition pour $f : X \to Y$ d'être séparé veut dire

que la "diagonale" $X \to X \times_Y X$ est une immersion fermée ([G.E.] I, 5.5.8).

Quant à la démonstration de ce théorème, elle est difficile et on peut la trouver dans le Chap. III des Eléments de Grothendieck pour le cas où Y est noethérien ([G.E.] III, 4.4.3); on y fait un fort usage de cohomologie. Une autre démonstration est donnée au Chap. IV, faisant intervenir les théorèmes de Nagata en algèbre commutative ([G.E.] IV, 8.12.6 et 18.12.13).

Dernière mise en garde: bien qu'une immersion ouverte soit toujours localement de présentation finie, elle n'est pas nécessairement quasi-compacte car en général, l'intersection d'un quasi-compact avec un ouvert n'est pas quasi-compacte.

Propriétés ponctuelles

Nous allons, pour terminer ce chapitre de préliminaires, définir quelques propriétés *ponctuelles* des préschémas, nous restreignant à celles qui concernent les anneaux locaux $\mathcal{O}_x$ aux points x de X.

Nous dirons que $(X, \mathcal{O}_X)$ est réduit en x si $\mathcal{O}_x$ est réduit, que $(X, \mathcal{O}_X)$ est intègre en x si $\mathcal{O}_x$ est intègre, que $(X, \mathcal{O}_X)$ est normal en x si $\mathcal{O}_x$ est intégralement clos, que $(X, \mathcal{O}_X)$ est régulier en x si $\mathcal{O}_x$ est régulier.

Nous dirons aussi que le préschéma $(X, \mathcal{O}_X)$ est réduit (respectivement normal, régulier) s'il est réduit (respectivement normal, régulier) en chacun de ses points. Remarquons que si n'importe quelle de ces propriétés est vraie en un point x, alors elle est vraie en tous les points de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$, mais ce fait—facilement vérifié dans le cas des trois premières propriétés—n'est particulièrement pas évident dans le cas de la régularité ([G.E.] 0_{IV}, 17.3.2).

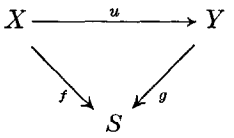
II. Le changement de base

Produits de S-préschémas

Nous dénoterons la catégorie des préschémas par ***Sch***.

Soit maintenant S un préschéma fixe que nous appellerons préschéma de base. Alors nous dénoterons par ***Sch***$/S$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, f), où $X \in$ ***Sch*** et f est un morphisme (dit structural) $X \xrightarrow{f} S$, et dont les morphismes sont ceux de ***Sch*** qui sont compatibles

avec les morphismes structuraux, c'est-à-dire que $u : X \to Y$ est un morphisme de $\boldsymbol{Sch}/S$ si le diagramme suivant est commutatif:



Les objets de $\boldsymbol{Sch}/S$ sont appelés *S-préschémas* et les morphismes *S-morphismes*.

Il est clair que $\boldsymbol{Sch} = \boldsymbol{Sch}/\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$; de plus, dans le cas de schémas affines, si $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $S = \mathrm{Spec}(B)$, dire que X est un S-préschéma (au moyen du morphisme structural $\tilde{\varphi}$) revient à dire que A est une B-algèbre (au moyen de φ).

Nous ne dirons presque rien du coproduit (ou somme) de deux S-préschémas X et Y, noté $X \coprod Y$; il est essentiellement obtenu en prenant l'espace topologique somme des espaces sous-jacents ([G.E.] I, 3.1).

Pour définir les *produits de S-préschémas*, nous commencerons par le cas des S-schémas affines. Or nous savons que cette catégorie est équivalente à la catégorie opposée à celle des A-algèbres; comme $C \otimes_A B$ est le coproduit de C et B dans la catégorie des A-algèbres, on en déduit immédiatement l'existence du produit $X \times_S Y$ de deux S-préschémas dans la catégorie $\boldsymbol{Sch}/S$, où $X = \mathrm{Spec}(C)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et $S = \mathrm{Spec}(A)$ ([G.E.] I, 3.2.2). Pour passer au cas général de S-préschémas X et Y, on recouvre convenablement X, Y et S par des ouverts affines (X_{ij}), (Y_{ij}) et (S_i) respectivement, où pour chaque i, $X_{ij} \subset \varphi^{-1}(S_i)$ et $Y_{ij} \subset \psi^{-1}(S_i)$, φ et ψ étant les morphismes structuraux de X et Y, puis on construit tous les $X_{ij} \times_{S_i} Y_{ij}$ et enfin, on recolle tous ces produits partiels. Le procédé est décrit en détail dans ([G.E.] I, 3.2.6).

Alors on obtient bien un produit au sens catégorique, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Hom}_S(T, X \times_S Y) = \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y)$$

pour tout S-préschéma T.

Remarquons en passant que si l'on se bornait à la catégorie des spectres de corps, il n'y aurait pas de produit dans cette catégorie puisqu'en général $K \otimes_k K'$ n'est pas un corps.

Remarquons ensuite que l'ensemble sous-jacent au S-préschéma $X \times_S Y$ n'est pas, en général, le produit cartésien des ensembles sous-jacents à X et à Y. Plus précisément, étant donné $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $\varphi(x) = \psi(y) = s \in S$, on peut dire qu'il existe au moins un $z \in X \times_S Y$ qui se projette sur x et y, et que l'ensemble E de tous les z qui se projettent sur x et y est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des points du spectre $\mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))$. Effectivement, la bijection peut être définie comme suit: prenons un $z \in E$; alors par hypothèse, il existe deux $\kappa(s)$-morphismes $\kappa(x) \to \kappa(z)$ et $\kappa(y) \to \kappa(z)$, donc un $\kappa(s)$-morphisme du produit tensoriel $\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y) \to \kappa(z)$ et par suite un morphisme

$$\beta : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \underset{\kappa(s)}{\otimes} \kappa(y)):$$

on fait correspondre à $z \in E$ l'image

$$\beta(\mathrm{Spec}(\kappa(z))) \in \mathrm{Spec}(\kappa(x) \underset{\kappa(s)}{\otimes} \kappa(y)),$$

et on montre qu'il s'agit bien là d'une correspondance biunivoque ([G.E.] I, 3.4.9).

Le changement de base

Nous en arrivons maintenant à la question du *changement de base*.

Soient S et S' deux préschémas et $g : S' \to S$ un morphisme, fixés. Alors il s'agit d'associer un S'-préschéma à tout S-préschéma $X \xrightarrow{f} S$; on fait correspondre à X le S'-préschéma

$$X' = (X \times_S S' \xrightarrow{f_{(S')}} S')$$

où $f_{(S')}$ est la projection canonique. On note souvent $X_{(S')}$ ce S'-préschéma.

Il est clair alors que $X \rightsquigarrow X_{(S')}$ est un foncteur: $\boldsymbol{Sch}/S \to \boldsymbol{Sch}/S'$.

En second lieu, il s'agit d'associer un $\mathcal{O}_{X'}$-Module à tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$. Si $p : X \times_S S' \to X$ est la projection canonique, on fait correspondre à $\mathcal{F}$ le $\mathcal{O}_{X'}$-Module $\mathcal{F}_{(S')} = p^*(\mathcal{F})$, c'est-à-dire l'image réciproque ([G.E.] 0_I, 4.3) du Module $\mathcal{F}$ par p, que l'on note aussi $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$.

Il y a encore une traduction du "cas affine" à l'algèbre commutative. En effet, si $X = \mathrm{Spec}(B)$, $S' = \mathrm{Spec}(A')$ et $S = \mathrm{Spec}(A)$, alors

$X_{(S')} = \mathrm{Spec}(B_{(A')}) = \mathrm{Spec}(B \otimes_A A')$. De plus, si $\mathscr{F} = \tilde{M}$, alors $\mathscr{F}_{(S')} = (M_{(A')})^{\sim} = (M \otimes_A A')^{\sim}$.

Principaux exemples de changements de base

(1) *Image réciproque d'un sous-préschéma*

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas (autrement dit, soit X un Y-préschéma). Soient Y' un sous-préschéma de Y et $j : Y' \to Y$ le morphisme d'injection; alors la projection canonique $X \times_Y Y' \to Y'$ définit le Y'-préschéma $X_{(Y')}$ correspondant à X et on démontre ([G.E.] I, 4.4.1) que l'espace topologique sous-jacent à $X \times_Y Y'$ est homéomorphe au sous-espace $f^{-1}(Y')$ de X. On dit que $X_{(Y')}$ est le préschéma *image réciproque* par f du sous-préschéma Y' de Y et on le note encore $f^{-1}(Y')$.

(2) *Localisation au spectre local*

Soit $f : X \to S$ un S-préschéma, soit $s \in S$ et posons $S' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_s)$; alors on a un morphisme d'injection canonique $j : \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_s) \to S$, ce qui donne lieu à un S'-préschéma $X \times_S \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_s)$ qui s'identifie topologiquement au sous-espace $f^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_s))$ de X. Si en outre on a un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, on démontre que $\mathscr{F}_{(S')} = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_s$ est tel qu'en chaque point $x \in X$, $(\mathscr{F}_{(S')})_x = \mathscr{F}_x . \mathscr{F}_{(S')}$ est donc induit par $\mathscr{F}$ sur $f^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_s))$.

(3) *Fibres*

Soit $f : X \to S$ un S-préschéma, soit $s \in S$; alors la projection $p : X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to X$ est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent au préschéma $X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ sur la fibre $f^{-1}(s)$ munie de la topologie induite par celle de l'espace sous-jacent à X ([G.E.] I, 3.6.1). Ceci permet donc de considérer de manière canonique la fibre $f^{-1}(s)$ comme $\kappa(s)$-préschéma; on le note aussi $X \otimes_{\mathscr{O}_S} \kappa(s)$ ou X_s. L'anneau local en un point x de la fibre est

$$(\mathscr{O}_{f^{-1}(s)})_x = \mathscr{O}_{X,x} \underset{\mathscr{O}_{S,s}}{\otimes} \kappa(s) \simeq \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s \mathscr{O}_{X,x} .$$

Le procédé qui consiste à étudier les fibres nous rapproche de la géométrie algébrique classique, car d'une part ces fibres sont des préschémas sur des corps, et d'autre part, ce procédé rappelle celui qui consistait à étudier une surface X d'après les courbes de X qui sont images inverses de points par une projection de X sur une droite.

Soit $\varphi : S' \to S$ un changement de base, et soit $s' \in S'$ et $s = \varphi(s')$, alors le $\kappa(s')$-préschéma $f^{-1}_{(S')}(s')$ est isomorphe à

$$f^{-1}(s) \times_{\mathrm{Spec}(\kappa(s))} \mathrm{Spec}(\kappa(s')),$$

qu'on note aussi $f^{-1}(s) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$ par abus d'écriture ([G.E.] I, 3.6.4). Il s'agit donc d'une propriété de *transitivité des fibres*.

(4) *Extension du corps de base*

Il s'agit ici d'un exemple très classique. Soit k' un corps extension d'un corps k; soit X un préschéma sur $\mathrm{Spec}(k)$; alors on en déduit le $\mathrm{Spec}(k')$-préschéma $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k')$, souvent noté $X' = X \otimes_k k'$ par abus d'écriture.

(5) *Passage d'un anneau à son complété*

Soit A un anneau noethérien local, alors la topologie de A définie par les puissances de son idéal maximal $\mathfrak{m}$ est séparée; si l'on pose $\hat{A} = \varprojlim_{n>0} A/\mathfrak{m}^n$, alors $\hat{A}$ est complet, séparé et l'homomorphisme $\varphi : A \to \hat{A}$, limite projective des $\varphi_n : A \to A/\mathfrak{m}^n$ est un isomorphisme topologique de A sur un sous-anneau partout dense dans $\hat{A}$ ([G.E.] 0_I, 7.2).

Si X est un préschéma sur $\mathrm{Spec}(A)$, on en déduit le préschéma $X \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(\hat{A})$, aussi noté $X' = X \otimes_A \hat{A}$; on verra plus tard des utilisations de ce genre de changement de base (p. 374).

(6) *Passage d'un anneau noethérien à un anneau de valuation*

Soit $f : X \to S$ un S-préschéma, où S est le spectre d'un anneau noethérien; supposons donnés en outre un point $t = f(x) \in S$ et une générisation s ($\neq t$) de t. Il existe alors un schéma affine S', spectre d'un anneau V de valuation discrète, un morphisme $\varphi : S' \to S$ tels que φ applique le point fermé b de S' sur t et le point générique a de S' sur s, et un S-morphisme $g : S' \to X$ qui applique b sur x ([G.E.] II, 7.1.9). Le changement de base de S à S' correspond au procédé classique qui consiste à étudier le voisinage d'un point d'une variété en faisant passer par ce point des "courbes variables."

"Montée" et "descente"

En théorie du changement de base, se posent deux questions: connaissant des propriétés de X, que peut-on en déduire au sujet de X' (c'est la théorie de la "montée") et inversement, connaissant des pro-

priétés de X', que peut-on déduire sur X (c'est la théorie de la "descente") ?

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

Dans ce chapitre, nous nous bornerons aux questions de "montée" qui sont les plus faciles.

A. *Propriétés des morphismes (montée)*

D'abord les *propriétés qui sont conservées*:

(1) surjectif ([G.E.] I, 3.5.2)

(2) immersion (fermée, ouverte) ([G.E.] I, 4.3.2)

(3) conditions de finitude:
quasi-compact ([G.E.] I, 6.6.4)
localement de type fini ([G.E.] I, 6.6.6)
localement de présentation finie ([G.E.] IV, 1.4.3)
fini ([G.E.] II, 6.1.15)
quasi-fini ([G.E.] II, 6.2.4)

(4) séparé ([G.E.] I, 5.5.1)

(5) affine ([G.E.] II, 1.6.2)
propre ([G.E.] II, 5.4.2)
projectif ([G.E.] II, 5.5.5)
quasi-projectif ([G.E.] II, 5.3.4)

Les *propriétés qui ne sont pas conservées*:

(1) injectif

(2) dominant

(3) propriétés topologiques: ouvert
fermé
homéomorphisme
bicontinu sur son image

Contre exemple pour la propriété d'être injectif: soient K et k' deux corps extensions d'un corps k; alors $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ est injectif mais

$\mathrm{Spec}(K \otimes_k k') \to \mathrm{Spec}(k')$ ne l'est pas en général. Contre exemple pour la propriété d'être fermé: considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[S]) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[S, T]) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ \mathrm{Spec}(\mathbf{C}) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[T]) \end{array}$$

f correspondant à l'injection canonique $\mathbf{C} \to \mathbf{C}[S]$; f est un morphisme fermé. Mais f' applique l'ensemble fermé $V((ST - 1))$ sur un ensemble ouvert; en effet, $V(ST - 1)$ est formé des idéaux $(ST - 1)$ et $(S - \alpha) + (T - \beta)$ avec $\alpha\beta = 1$, d'où $f'(V((ST - 1)))$ est formé des idéaux (0) et $(T - \beta)$ avec $\beta \neq 0$; donc $f'(V((ST - 1))) = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[T]) - \{(T)\}$.

Nous allons maintenant montrer par un contre exemple que la propriété d'être ouvert n'est pas conservée.

Soit

$$A = \mathbf{R}[[U, V]]/(U^2 + V^2):$$

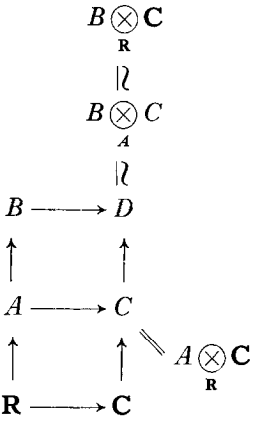
il s'agit d'un anneau intègre puisque $(U^2 + V^2)$ est premier. Cependant, A n'est pas intégralement clos car si u est la classe de U et v la classe de V, alors $t = u/v$ n'est pas dans A, mais $u^2 + v^2 = 0$ entraîne que $t^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire que t est un entier algébrique sur A. On peut voir facilement que la clôture intégrale de A est l'anneau $B = A[t]$; d'ailleurs, grâce aux relations $u = vt$ et $t^2 + 1 = 0$, on a un isomorphisme $B \simeq \mathbf{C}[[U]]$. Comme B est un anneau local de dimension 1, $X = \mathrm{Spec}(B)$ compte deux éléments: le point générique (0) et le point fermé correspondant à l'idéal maximal (U). De même, $S = \mathrm{Spec}(A)$ compte deux éléments qui sont encore le point générique et un point fermé. D'ailleurs le morphisme $X \to S$ correspondant à l'injection naturelle $A \to B$ applique le point générique sur le point générique et le point fermé sur le point fermé, de sorte qu'il s'agit bien d'un morphisme ouvert (et même d'un homéomorphisme).

Soit $C = A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ qui est isomorphe à

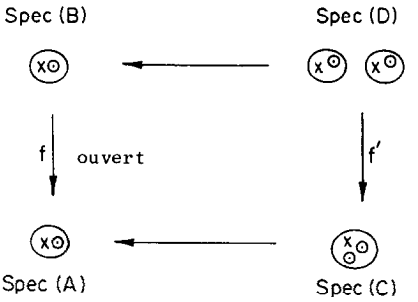
$$\mathbf{C}[[U, V]]/(U^2 + V^2) = \mathbf{C}[[U, V]]/(U + iV)(U - iV).$$

On voit aisément que C admet deux idéaux premiers minimaux, à savoir $\mathfrak{p}' = (u + iv)$ et $\mathfrak{p}'' = (u - iv)$, et un idéal maximal $\mathfrak{m}_C = C((u) + (v)) = \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''$, et que ce sont les seuls idéaux premiers

de C. Donc $\mathrm{Spec}(C) = \{\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \mathfrak{m}_C\}$ où $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}''$ sont maximaux et $\mathfrak{m}_C$ est fermé.



Soit $D = B \otimes_A C$ qui est isomorphe à $B \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}[[U]] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$; alors D est composé direct de deux algèbres isomorphes à $\mathbf{C}[[U]]$, engendrées par $e' = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + t \otimes i)$ et $e'' = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 - t \otimes i)$; donc $D \simeq (C/\mathfrak{p}') \oplus (C/\mathfrak{p}'')$.



Mais f' n'est pas un morphisme ouvert, et nous avons notre contre exemple.

Propriétés universelles

Une propriété $\boldsymbol{P}$ qui n'est pas conservée par montée peut être renforcée comme suit: on dit que f est *universellement* $\boldsymbol{P}$ si f est $\boldsymbol{P}$ et conserve la propriété $\boldsymbol{P}$ par tout changement de base.

Remarquons que la propriété d'être universellement dominant est équivalente à celle d'être surjectif.

On dit que f est *radiciel* si f est universellement injectif. On a d'ailleurs la caractérisation suivante: pour qu'un morphisme $f = (\psi, \theta)$ soit radiciel, il faut et il suffit que ψ soit injectif et que le morphisme $\theta^x : \kappa(\psi(x)) \to \kappa(x)$ fasse de $\kappa(x)$ une extension *radicielle* de $\kappa(\psi(x))$ pour tout x ([G.E.] I, 3.5.8).

On dit que f est *propre* si f est universellement fermé, de type fini et séparé.

Mentionnons enfin le théorème suivant, dont la démonstration utilise essentiellement le Main Theorem de Zariski:

Pour un morphisme localement de présentation finie f, il est équivalent de dire que f est un homéomorphisme universel ou que f est surjectif, fini et radiciel.

B. *Propriétés des Modules*

On démontre aisément que les propriétés d'être quasi-cohérent, cohérent, de type fini, de présentation finie, localement libre, sont toutes conservées par extension du préschéma de base.

C. *Propriétés des préschémas*

L'expérience montre que très peu de propriétés des préschémas sont conservées par extension du préschéma de base, même si on se restreint à des préschémas sur des corps, ce que nous allons faire dans ce qui suit. Par exemple, la propriété d'être noethérien n'est pas conservée. Pour le voir, considérons un corps k de caractéristique p non parfait; alors $k^{p^{-\infty}}$ est noethérien tandis que $k^{p^{-\infty}} \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ ne l'est pas ([B.Alg.] VIII, 7, Exer. 21). Cependant, si $f : S' \to S$ est de type fini, on démontre aisément que si le S-préschéma X est localement noethérien, alors il en est de même de X' ([G.E.] I, 6.3.8).

La propriété d'être intègre n'est pas conservée: soit $X = \mathrm{Spec}(K)$ où K est une extension finie séparable d'un corps k et où $n = [K : k] > 1$; prenons pour k' une extension galoisienne de k contenant K. Alors $K \otimes_k k'$ est un composé direct de n copies de k', donc n'est pas intègre, alors que K' l'était ([B.Alg.] VIII, 7.3).

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(K) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(K \underset{k}{\otimes} k') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(k') \end{array}$$

La propriété d'être réduit n'est pas conservée: soit $X = \mathrm{Spec}(K)$ où

K est une extension radicielle de k et où $[K : k] > 1$; prenons $k' = K$; alors $K \otimes_k K$ a des éléments nilpotents ([B.Alg.] VIII, 7.3) donc n'est pas réduit. Cet exemple montre aussi que les propriétés d'être régulier ou normal ne sont pas conservées.

Voici un exemple moins trivial que le précédent pour démontrer que la propriété d'être régulier ou normal n'est pas conservée.

Soit k un corps non parfait de caractéristique $p > 2$, $a \in k$, $a \notin k^p$, et considérons $P \equiv T^2 - S^p + a$. Comme $S^p - a$ est irréductible dans $k[S]$ par hypothèse, l'anneau $k[S, T]/(P)$ est intégralement clos, ou encore la courbe $X = \mathrm{Spec}(k[S, T]/(P))$ est normale. Prenons maintenant $k' = k(a^{1/p})$; alors sur k', P s'écrit $T^2 - (S - a^{1/p})^p$, ce qui montre que la courbe $X' = \mathrm{Spec}(k'[S, T]/(P))$ a un point de rebroussement; donc X' n'est plus normale.

Propriétés "géométriques"

On renforce une propriété $\boldsymbol{P}$ d'un préschéma (sur un corps k) en la remplacant par la propriété d'être "géométriquement $\boldsymbol{P}$." Soit X un préschéma sur le corps k; alors on dit que X est *géométriquement* $\boldsymbol{P}$ si X conserve la propriété $\boldsymbol{P}$ par toute extension du corps k.

A ce sujet, on a pour les propriétés $\boldsymbol{P}$ suivantes: être réduit, normal, régulier, l'importante proposition: ([G.E.] IV, 4.6.1 et 6.7.8) X est géométriquement $\boldsymbol{P}$ si et seulement si X a la propriété $\boldsymbol{P}$ et pour toute extension *algébriquement close* Ω de k, $X \otimes_k \Omega$ a la propriété $\boldsymbol{P}$.

De plus ([G.E.] IV, 4.6.1 et 6.7.8), si X est de type fini sur k, X est géométriquement $\boldsymbol{P}$ si et seulement si pour toute extension *algébrique finie* k' de k, $X \otimes_k k'$ a la propriété $\boldsymbol{P}$.

En outre, nous avons les critères suivants:

Soit X un préschéma sur un corps k, soit (X_i) la famille des composantes irréductibles de X et pour chaque i soit x_i point générique de X_i ; alors X est géométriquement réduit si et seulement si X est réduit et tous les corps résiduels $\kappa(x_i)$ sont séparables sur k. ([G.E.] IV, 4.6.1).

Aussi X est géométriquement irréductible si et seulement s'il est irréductible et si k coincide avec sa fermeture séparable dans $\kappa(x)$, où x est le point générique de X ([G.E.] IV, 5.9).

Si k est algébriquement clos, alors les conditions précédentes sont immédiatement vérifiées et les propriétés en question sont géométriques.

Ceci est une des raisons pour lesquelles il est commode de travailler sur des corps algébriquement clos. Une autre raison est la suivante: si X est localement de type fini sur un corps algébriquement clos k, et si un

ouvert U de X contient tous les points rationnels (i.e., les points x tels que $\kappa(x) = k$, i.e., les points x qui sont fermés ([G.E.] I, 6.4.2)) alors $U = X$. Car dans le cas contraire, $X - U$ serait un fermé non vide, ce qui entraînerait, d'après nos hypothèses, que $X - U$ contiendrait un point fermé, contradiction. On tire de ce fait un procédé de démonstration. Si on veut démontrer qu'une propriété est vraie de X, on démontre que l'ensemble des points où elle est vraie est *ouvert*, puis qu'elle est vraie de tous les points *rationnels* de X, et la conclusion s'ensuit.

III. La notion de platitude

Modules et morphismes plats

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module, où X est un Y-préschéma de morphisme structural f. Soit $x \in X$; alors on dit que $\mathscr{F}$ est *f-plat en x* si $\mathscr{G} \rightsquigarrow (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{F})_x$, (notation de [G.E.] I, 9.1) est un foncteur *exact* de la catégorie des $\mathscr{O}_Y$-Modules dans celle des $\mathscr{O}_x$-modules. Notons que quel que soit $\mathscr{F}$, ce foncteur est exact à droite.

$\mathscr{F}$ est *f-plat* si $\mathscr{F}$ est f-plat en tout point x de X, c'est-à-dire si le foncteur $\mathscr{G} \rightsquigarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{G}$ prenant ses valeurs dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules est exact.

On dit que le *morphisme* $f : X \to Y$ est *plat* si $\mathscr{O}_X$ est f-plat, et qu'il est *plat en x* si $\mathscr{O}_X$ est f-plat en x. En particulier, si f est un morphisme plat, le foncteur f^* est exact dans la catégorie des $\mathscr{O}_Y$-Modules. On dit enfin que f est *fidèlement plat* si f est plat et surjectif. Dans le cas de schémas affines, on obtient la traduction suivante ([G.E.] IV, 2.1.2). Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, et M un B-module; alors M est un A-module plat si le foncteur $N \rightsquigarrow M \otimes_A N$, de la catégorie des A-modules dans celle des B-modules, est exact. Enfin, M est fidèlement plat si la condition suivante est satisfaite: une suite de A-modules $N' \to N \to N''$ est exacte *si et seulement si* $M \otimes N' \to M \otimes N \to M \otimes N''$ est exacte.

La notion de platitude n'étant pas très intuitive, il sera commode d'avoir un grand nombre de critères de platitude à notre disposition. Mentionnons d'abord le fait que la platitude d'un Module est une propriété ponctuelle:

$\mathscr{F}$ est f-plat si et seulement si $\mathscr{F}_x$ est un $\mathscr{O}_{f(x)}$-module plat, pour tout $x \in X$. C'est pourquoi nos critères seront souvent énoncés au niveau de

l'algèbre commutative ([B. Alg. Comm.] I, III, 3 et III, 5; et [G.E.] 0_{I}, 6 et 0_{III}, 10); en voici quelques uns:

Soit $M \neq 0$ un A-module; alors

$$M \text{ libre} \Rightarrow M \text{ projectif} \Rightarrow M \text{ plat.}$$

Soit S une partie multiplicative de A; alors $S^{-1}A$ est un A-module plat ([G.E.] 0_{I}, 6.3.1) et en particulier tous les $A_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}$ idéal premier de A) sont plats.

Soit A un anneau noethérien local; alors $\hat{A}$ est un A-module fidèlement plat ([G.E.] 0_{I}, 7.3.5).

Quel que soit l'anneau intègre A, si M est un A-module plat, M est sans torsion; inversement si A est un *anneau de Dedekind*, alors ([B. Alg. Comm.] I, 2.4):

$$M \text{ est un } A\text{-module plat} \Leftrightarrow M \text{ est sans torsion.}$$

Soit M un A-module: alors ([B. Alg. Comm.] II, 5.2)

$$M \text{ est plat et de présentation finie} \Leftrightarrow M \text{ est projectif de type fini.}$$

Soit A un anneau *local*: alors ([B. Alg. Comm.] II, 3.2)

$$M \text{ est plat et de présentation finie} \Leftrightarrow M \text{ est libre et de type fini.}$$

Dans l'exemple qui suit, on voit que la propriété de platitude peut être difficile à déceler: soit A un anneau local noethérien non réduit, dont le radical est $\mathfrak{n}$; alors comme $A/\mathfrak{n}$ n'est pas libre, d'après notre dernier critère, il n'est pas plat; donc $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{n})$ n'est pas plat sur X, bien que $f : X_{\mathrm{red}} \to X$ soit un *homéomorphisme universel.* Voici maintenant un théorème permettant de voir dans certains cas qu'un morphisme n'est pas plat, et qui a un caractère "géométrique."

Théorème. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas, où Y est localement noethérien et où f est de type fini. Si f est plat, alors, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert U de la fibre $f^{-1}(y)$ tel que* $\dim(f^{-1}(z) \cap U)$ *est constante pour tous les z d'un voisinage de y.* ([G.E.] IV, 14.2.6).

Importance des morphismes plats

Disons d'abord que des conditions de platitude et de finitude agissent, comme nous le verrons plus tard, comme "liants" lorsqu'on étudie un

morphisme à l'aide de la *famille des fibres* qu'il détermine. En d'autres termes, on peut, sous certaines conditions ramener les propriétés d'un morphisme à celle de ses fibres (bien qu'en passant à la fibre en un point y, on perde énormément de structure si $\mathcal{O}_y$ n'est pas un corps).

Ajoutons que si $g : S' \to S$ est un morphisme plat et satisfait certaines conditions de finitude faibles (i.e., de nature topologique comme d'être quasi-compact), alors de nombreuses propriétés sont conservées par *descente*, tandis que sans hypothèse de platitude, c'est rarement le cas.

Il s'agit maintenant de préciser ces remarques.

A. *Propriétés élémentaires*

(i) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

Si f et g sont plats, alors gf est plat; si f et g sont fidèlement plats, alors gf est fidèlement plat.

(ii) Pour tout "carré cartésien" (i.e., $X' = X \times_Y Y'$)

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

si f est plat, alors f' est plat.

(iii) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

Si f est fidèlement plat et si gf est plat, alors g est plat.

Pour les preuves, voir [B. Alg. Comm.] I, 2.7.

B. *Propriétés topologiques*

Nous allons d'abord démontrer une proposition clé, dont toutes les suivantes seront plus ou moins des corollaires.

Proposition 1. ("*Relèvement des générisations.*") *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat; soient $x \in X$ et $y = f(x) \in Y$. Si y' est une générisation de y, alors y' se relève en une générisation x' de x.*

Preuve. La conclusion peut s'écrire: $f(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$, mais cela découle immédiatement du fait ([G.E.] 0_I, 6.6.2) que si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme local d'anneaux locaux, alors "B plat sur A" implique "B fidèlement plat sur A."

Proposition 2. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat, et soit Y' une partie fermée irréductible de Y; alors toute composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ domine Y'.*

Preuve. Soit y' le point générique de Y'; alors il suffit ([G.E.] 0_I, 2.1.8) de montrer que toute composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ rencontre la fibre de y'. Soit $x \in f^{-1}(Y')$ le point générique d'une telle composante et posons $z' = f(x)$; alors y' est une générisation de z', donc d'après la proposition 1, il existe une générisation x' de x appartenant à la fibre de y', donc x' est nécessairement égal à x.

Proposition 3. ("*Prolongement des composantes irréductibles.*") *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat. Soient $Z \subset Z'$ deux fermés irréductibles de Y, et T une composante irréductible de $f^{-1}(Z)$. Alors il existe une composante irréductible T' de $f^{-1}(Z')$ qui contient T.*

Preuve. Soient z et z' les points génériques de Z et Z' respectivement. Soit t le point générique de T; alors ([G.E.] 0_I, 2.1.5) $f(t) = z$. Comme z' est une générisation de z, z' se relève en générisation t' de t, d'après la proposition 1. Mais alors une composante irréductible T' de $f^{-1}(Z')$ contenant t' répond à la question.

Proposition 4. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat. Si T est une composante irréductible de X, alors $\overline{f(T)}$ est une composante irréductible de Y.*

Preuve. D'abord, $\overline{f(T)}$ est une partie fermée irréductible ([G.E.] 0_I, 2.1.5) de Y. Si elle n'était pas maximale, on aurait un fermé irréductible Z' contenant $\overline{f(T)}$ proprement. Mais alors, d'après la proposition 3, T serait proprement contenue dans une composante irréductible T' de X dominant Z', d'où une contradiction.

Nous avons maintenant, comme nous l'avions annoncé, une proposition du type: propriété sur le préschéma de base + propriété sur les fibres $\Rightarrow$ propriété sur l'espace:

Proposition 5. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat avec Y irréductible. Soit y le point générique de Y et supposons que sa fibre $f^{-1}(y)$ est irréductible. Alors X est irréductible.*

Preuve. D'après la Proposition 2, toutes les composantes irréductibles de X dominent Y. S'il y en avait plusieurs, chacune aurait un point générique appartenant à $f^{-1}(y)$ ([G.E.] 0_I, 2.1.8). Mais comme par

hypothèse $f^{-1}(y)$ est irréductible, tous ces points génériques doivent coincider, ce qui termine la preuve.

Nous avions fait déjà la remarque qu'en général la propriété d'être dominant pour un morphisme n'était pas conservée par montée. Mais maintenant, nous avons la

Proposition 6. *Dans le carré cartésien suivant,*

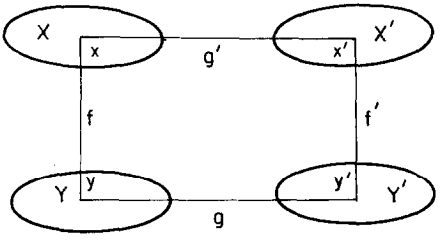
$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y' \end{array}$$

si g est plat et si f est quasi-compact et dominant, alors f' est dominant.

Preuve. Faisons d'abord la remarque suivante ([G.E.] I, 6.6.5): Un morphisme quasi-compact $h : X \to Y$ est dominant si et seulement si pour tout point maximal y de Y, la fibre $f^{-1}(y)$ n'est pas vide. Si y' est un point maximal de Y', il s'agit de démontrer que $f'^{-1}(y') \neq \varnothing$. Or $y = g(y')$ est un point maximal de Y, d'après la proposition 4 et [G.E.] 0_I, 2.1.5. Par hypothèse sur f, il s'ensuit donc que $f^{-1}(y) \neq \varnothing$; mais d'après la transitivité des fibres, $f'^{-1}(y') = f^{-1}(y) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y') \neq \varnothing$.

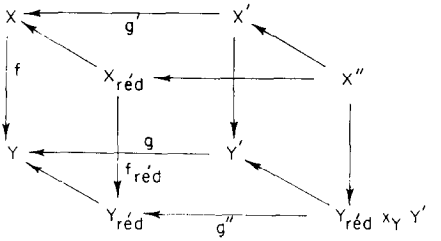
Proposition 7. *Dans le carré cartésien de la proposition précédente, si g est plat et si toute composante irréductible de X domine une composante irréductible de Y, alors cette propriété de f est transmise à f',* i.e., *toute composante irréductible de X' domine une composante irréductible de Y'.*

Preuve. Encore d'après [G.E.] 0_I, 2.1.5, il suffit de montrer que tout point maximal x' de X' est appliqué sur un point maximal y' de Y'.



Puisque g est plat, g' est plat (d'après (ii)), donc $x = g'(x')$ est maximal (d'après la proposition 4). Donc, d'après l'hypothèse sur f, $y = f(x)$ est

maximal dans Y. On est donc ramené à une "situation locale," c'est-à-dire qu'on peut supposer X, Y et Y' locaux. Or nous voulons démontrer une propriété purement topologique; on peut donc supposer X et Y réduits, et reconsidérer le carré cartésien initial comme cela est indiqué dans le diagramme suivant: car $X'' \to X'$ est alors un homéomorphisme, ainsi que $Y_{\text{red}} \times_Y Y' \to Y'$.



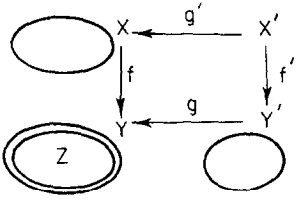
D'ailleurs, ici g'' est encore plat. Donc dans cette nouvelle situation, X et Y sont locaux et réduits, et y est point générique de Y. $\mathcal{O}_y$ est donc un corps. Donc trivialement, f est plat; donc f' est plat aussi, donc comme x' est maximal, il en est de même de y' (Proposition 4), et la proposition est démontrée.

On sait que si $f : X \to Y$ est une fonction continue, pour toute partie Z de Y, on a $f^{-1}(\overline{Z}) \supseteq \overline{f^{-1}(Z)}$. Mais nous avons:

Proposition 8. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat et soit Z une partie de Y de la forme $g(Y')$ où $g : Y' \to Y$ est un morphisme quasi-compact. Alors $f^{-1}(\overline{Z}) = \overline{f^{-1}(Z)}$.*

Preuve. On peut se ramener au cas où g est en outre *séparé*. En effet, la question étant locale sur Y, on peut d'abord supposer Y *affine*. Comme g est quasi-compact, Y' est réunion *finie* d'ouverts affines Y'_i. Soit Y'' le schéma *somme* des Y'_i, qui est affine et soit $g' : Y'' \to Y'$ le morphisme qui, dans chaque Y'_i, coincide avec l'injection canonique. Alors $g \circ g' : Y'' \to Y$ est quasi-compact *séparé* (puisque Y'' et Y sont affines), et $g(g'(Y'')) = g(Y') = Z$. Supposons donc désormais g séparé. Il existe une image fermée Y_1 de g, qui est un sous-préschéma ayant $\overline{Z}$ pour espace sous-jacent et tel que g se factorise en $Y' \xrightarrow{g'} Y_1 \longrightarrow Y$ ([G.E.] I, 9.5.3). Ceci dit, considérons le sous-préschéma $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ de X, qui a $f^{-1}(\overline{Z})$ comme espace sous-jacent. Alors la restriction

$f_1 : X_1 \to Y_1$ est encore un morphisme plat, d'où on peut supposer que $\bar{Z} = Y$. Formons le carré cartésien ci-dessous.



Alors $g'(X') = f^{-1}(g(Y'))$, ce qui est toujours vrai dans un carré cartésien et exprime le fait que si $x \in X$ et $y' \in Y'$ sont au-dessus d'un même point de Y, il existe un $x' \in X'$ qui se projette sur x et y' ([G.E.] I, 3.4.8). Mais alors, il suffit de montrer que g' est dominant. Or ceci découle du fait que g est dominant et que f est plat, d'après la Proposition 6.

Proposition 9. *Si $f : X \to Y$ est fidèlement plat et quasi-compact, alors la topologie de Y est la topologie quotient de celle de X pour la relation d'équivalence définie par f.*

Preuve. Il s'agit de démontrer que l'image par f d'un fermé saturé de X dans Y est fermée. Soit donc F un fermé saturé de X; alors $F = f^{-1}(f(F))$. On sait qu'il y a un sous-préschéma X' de X ayant F pour espace sous-jacent; soit $j : X' \to X$ le morphisme d'injection; alors $g = f \circ j : X' \to X$ est quasi-compact puisque f et j le sont. On a donc, posant $Z = f(F)$, $f^{-1}(\bar{Z}) = \overline{f^{-1}(Z)}$. Puisque f est surjectif par hypothèse, $\bar{Z} = f(\overline{f^{-1}(Z)}) = f(\overline{f^{-1}(Z)}) = f(F) = Z$.

Remarque. L'hypothèse que f soit quasi-compact est ici essentielle; en effet, soit Y un préschéma et posons

$$X = \coprod_{y \in Y} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y).$$

Alors il est clair que le morphisme induit $f : X \to Y$ est fidèlement plat, mais que la topologie de Y n'est pas la topologie quotient, en général.

Avant d'énoncer le prochain théorème, remarquons qu'un morphisme fidèlement plat n'est pas nécessairement ouvert. Par exemple, soit $Y = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine intègre et soit y le point générique de Y;

posons $X = Y \coprod \mathrm{Spec}(\kappa(y))$; alors le morphisme induit $f : X \to Y$ est fidèlement plat, mais pas ouvert en général.

Théorème 1. *Soit Y un préschéma localement noethérien. Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat et localement de type fini. Alors f est universellement ouvert* ([G.E.] IV, 4.6).

Preuve. Nous n'en donnerons que les grandes lignes.

(1) On montre qu'il suffit de prouver que f est ouvert.

(2) La question étant locale, on est ramené au cas affine: $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, A, B noethériens et f de type fini.

(3) Dans un espace noethérien, on appelle *ensemble constructible* toute réunion finie d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$, où U et V sont des ouverts dans X ([G.E.] 0_{III}, 9.1.3). Or on a le *Théorème de Chevalley* ([G.E.] IV, 1.8.5): *Soient Y un schéma affine noethérien et $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Si C est constructible dans X, alors $f(C)$ est constructible dans Y.*

On a en outre le

Lemme. *Si Y est un espace noethérien et si C est constructible, alors, C est ouvert si et seulement si pour tout $y \in C$ et toute générisation y' de y, on a $y' \in C$* ([G.E.] 0_{III}, 9.2.5).

(4) Soit U un ouvert de X; alors il est constructible; donc d'après le théorème de Chevalley, $f(U)$ est constructible; mais d'après le théorème de relèvement des générisations, $f(U)$ satisfait à la condition du lemme. Donc $f(U)$ est ouvert.

Théorème 2. (*"Théorème de platitude générique."*) *Soient Y un préschéma intègre noethérien et η le point générique de Y. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent. Alors il existe un voisinage ouvert U de η tel que $\mathscr{F} \mid f^{-1}(U)$ soit plat sur U* ([G.E.] IV, 6.9.1).

Preuve. Nous n'en donnerons encore que les grandes lignes.

(1) On se ramène d'abord au cas où Y est affine: $Y = \mathrm{Spec}(A)$, avec A noethérien et intègre.

(2) Comme f est de type fini, $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ où les X_i sont des ouverts affines. Mais si on suppose démontré le théorème dans le cas où X et Y sont tous deux affines, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, on aura un voisinage ouvert U_i de η avec les conditions voulues. Alors le voisinage $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ répondra à la question dans le cas général.

(3) On est donc ramené au cas suivant: $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathscr{F} = \tilde{M}$ où A est intègre noethérien, B est une A-algèbre de type fini et M est un B-module de type fini. Dans ces conditions, on va démontrer qu'il existe dans A un élément $t \neq 0$ tel que M_t soit un A_t-module *libre*. (Alors le voisinage cherché sera $D(t) = \mathrm{Spec}(A_t)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$). Nous allons maintenant donner les grandes lignes de la preuve de ce fait.

(4) Soit K le corps des fractions de A. Nous allons examiner l'anneau $B \otimes_A K$ (ce qui correspond géométriquement à la fibre générique, où $K = \kappa(\eta)$), et le $(B \otimes_A K)$-module de type fini $M \otimes_A K$. On élimine d'abord le cas où $M \otimes_A K = 0$: car alors M est un A-module de torsion et un B-module de type fini, donc il existe un $t \in A$ tel que $tM = 0$; on en déduit aisément que M_t est nul donc libre.

Donc nous supposons $\mathrm{Supp}(M \otimes_A K)$ non vide (rappelons que le support de $M \otimes_A K$ est l'ensemble des $x \in \mathrm{Spec}(B \otimes_A K)$ tels que $(M \otimes_A K)_x \neq 0$), et le raisonnement se fait par récurrence sur $n = \dim(\mathrm{Supp}(M \otimes_A K))$.

Or nous avons la proposition suivante ([B. Alg. Comm.] IV, 1.4): *Si C est un anneau noethérien et si N est un C-module de type fini, alors il existe une suite $(\mathfrak{p}_i)$ d'idéaux premiers de C et une suite de composition $N = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_r = \{0\}$ telle que pour $i = 0, \ldots, r-1$, $N_i/N_{i+1} \simeq C/\mathfrak{p}_i$.*

Si nous appliquons ce théorème, nous aurons une suite d'idéaux $(\mathfrak{p}_i)$ de B, et une suite de composition $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = \{0\}$ dont les quotients sont respectivement isomorphes aux $B/\mathfrak{p}_i$.

(5) Supposons que le théorème soit vrai pour les quotients M_i/M_{i+1}; alors, pour chaque i, il existe un $t_i \in A$ tel que $(M_i/M_{i+1})_{t_i}$ est libre sur A_{t_i}. Par récurrence descendante, le théorème est vrai pour M; en effet, si $(M_{i+1})_t$ est libre sur A_t, alors comme

$$0 \to (M_{i+1})_{tt_i} \to (M_i)_{tt_i} \to (M_i/M_{i+1})_{tt_i} \to 0$$

est exacte et que $(M_{i+1})_{tt_i}$ et $(M_i/M_{i+1})_{tt_i}$ sont libres sur A_{tt_i}, cette suite est scindée, donc $(M_i)_{tt_i}$ est libre sur A_{tt_i}.

(6) On est donc ramené à démontrer le théorème dans le cas où $M = B/\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A. D'ailleurs, si on remplace B par $B/\mathfrak{p}$ dans les hypothèses (début de (3)), rien n'est changé sauf qu'on ajoute l'hypothèse que $B/\mathfrak{p}$ est intègre. On peut donc se ramener au cas où $M = B$ et B est intègre.

Or nous avons le lemme de normalisation de E. Noether

([B. Alg.Comm.] V, 3): *Soit un anneau A intègre et B une A-algèbre intègre de type fini; alors il existe un élément $g \neq 0$ dans A, et des éléments algébriquement indépendants sur $A[T_1, ..., T_n]$ tels que B_g soit fini sur son sous-anneau $C = A_g[T_1, ..., T_n]$.*

(7) Comme A_g définit un voisinage affine $D(g)$ de η et qu'on est toujours dans une situation locale, on est ramené au cas où B est finie sur $C = A[T_1, ..., T_n]$.

Il est clair que dans ce cas B est un C-module sans torsion de type fini; on a en outre $\dim(\mathrm{Supp}(C \otimes_A K)) = \dim(\mathrm{Supp}(B \otimes_A K)) = n$. Si L désigne le corps des fractions de C, alors $B \otimes_C L$ est un espace vectoriel de rang fini h sur L; on sait même qu'il existe une base de $B \otimes_C L$ sur L formée de h éléments de B; cela implique donc qu'il existe une suite exacte

$$0 \to C^h \to B \to M' \to 0 \qquad (*)$$

où M' est un C-module de torsion. Mais, de cette suite exacte, on tire, quel que soit $t \neq 0$ dans A, une suite exacte

$$0 \to (C^h)_t \to B_t \to M'_t \to 0$$

Or le théorème est trivialement vrai pour $(C^h)_t$; donc par un argument semblable à celui du (5), il suffit de prouver le théorème pour M'; mais M' est de torsion, comme B-module. Par suite ([G.E.] I, 7.4.6), $\mathrm{Supp}(M')$ ne contient pas le point générique de C, et on en conclut que $\mathrm{Supp}(M' \otimes_A K)$ ne contient pas le point générique de $\mathrm{Supp}(C \otimes_A K)$; c'est donc une partie fermée ([G.E.] 0_I, 5.2.2) de $\mathrm{Supp}(C \otimes_A K)$ qui ne contient pas le point générique, d'où $\dim(\mathrm{Supp}(M' \otimes_A K)) < n$ et le théorème est démontré par récurrence.

Théorème 3. *Soit Y un préschéma localement noethérien, soient $f : X \to Y$ un morphisme de type fini et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent. Alors l'ensemble U des $x \in X$ tels que $\mathscr{F}_x$ est plat est ouvert. En outre, $f(U \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$ est ouvert dans Y.* ([G.E.] IV, 11.1.1).

Preuve. Nous n'en donnerons que les grandes lignes.

D'abord la dernière conclusion est une conséquence immédiate de la première conclusion et d'une variante du Théorème 1. Pour la

première assertion, comme les hypothèses et la conclusion sont de nature locale, on est ramené au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$, A noethérien, $X = \mathrm{Spec}(B)$, B une A-algèbre de type fini et $\mathscr{F} = \tilde{M}$, M un B-module de type fini; il s'agit de démontrer que si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, $\mathfrak{p}$ son image réciproque dans A, si $M_{\mathfrak{q}}$ est un A-module plat, alors il existe un $g \notin \mathfrak{q}$ (i.e., un g tel que $\mathfrak{q} \in D(g)$) tel que si $g \notin \mathfrak{q}'$ (i.e., si $\mathfrak{q}' \in D(g)$) alors $M_{\mathfrak{q}'}$ est un A-module plat. On peut en outre se borner au cas où $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$, en raison du critère ([G.E.] 0_{III}, 9.2.6) qui dit que U est ouvert si et seulement si, pour toute partie fermée irréductible Y de X rencontrant U, $Y \cap U$ est dense dans Y.

Pour cela, on utilise un critère de platitude ([G.E.] 0_{III}, 10.2.1) (compte tenu de ce que $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'} \subset \mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}'}$): la démonstration revient alors à ceci: sachant que $M_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}}$ est un $(A/\mathfrak{p})$-module plat, et que $\mathrm{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}}, A/\mathfrak{p}) = 0$, prouver qu'il existe un $g \notin \mathfrak{q}$ tel que quand $g \notin \mathfrak{q}'$, alors $M_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}'}$ est un $(A/\mathfrak{p})$-module plat et $\mathrm{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}'}, A/\mathfrak{p}) = 0$. Or on vérifie aisément que $\mathrm{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}}, A/\mathfrak{p})$ et $\mathrm{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}'}, A/\mathfrak{p})$ s'identifient respectivement à $(\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}}$ et $(\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}'}$.

Il est donc suffisant de prouver qu'il existe un $g \notin \mathfrak{q}$ tel que

(1) $(M/\mathfrak{p}M)_g$ est un $A/\mathfrak{p}$-module plat et

(2) $(\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_g = 0$.

Mais, d'après le théorème de platitude générique (qu'on peut maintenant appliquer puisque $A/\mathfrak{p}$ est intègre), il existe un voisinage ouvert $D(g_1)$ de $\mathfrak{q}$ tel que $(M/\mathfrak{p}M)_{g_1}$ est un $A/\mathfrak{p}$-module plat; en second lieu, on vérifie aisément que $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})$ est un B-module de type fini, donc, comme par hypothèse $(\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}}$ est nul, il existe un voisinage $D(t)$ de $\mathfrak{q}$ tel que $(\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_t = 0$.

Il suffit de prendre alors $g = g_1 t$ et le théorème est démontré.

Caractère "liant" de la platitude

Nous allons maintenant examiner quelques résultats sur les morphismes $f: X \to Y$ de préschémas, mettant en relation des propriétés du préschéma de base et des fibres, avec des propriétés de X. Auparavant, rappelons que si $f: X \to Y$ est un morphisme plat, alors pour chaque $x \in X$, $\mathscr{O}_x$ est fidèlement plat sur $\mathscr{O}_{f(x)}$, ce qui implique que $\mathscr{O}_{f(x)}$ peut être considéré comme un sous-anneau de $\mathscr{O}_x$ ([G.E.] 0_{I}, 6.7.8); et aussi, que si f est fidèlement plat, alors pour chaque $x \in X$, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{f(x)})$ est surjectif.

A. *Propriétés de X ⇒ propriétés de Y*

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat.*

(1) *Si X est localement noethérien, Y est localement noethérien.*

(2) *Si X est réduit, Y est réduit.*

(3) *Si X est intègre en tout point, Y est intègre en tout point.*

(4) *Si X est normal, Y est normal.*

(5) *Si X est régulier, Y est régulier.*

Preuves.

(1) La question étant locale, on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$. La conclusion suit alors du fait ([B.Alg.Comm.] I, 3.5) que si B est noethérien et fidèlement plat sur A, alors A est noethérien.

(2) Il s'agit de montrer que pour chaque $x \in X$, $\mathcal{O}_{f(x)}$ n'a pas d'éléments nilpotents, mais ceci est trivial puisque $\mathcal{O}_{f(x)} \subset \mathcal{O}_x$.

(3) Démonstration semblable à celle de (2).

(4) Par hypothèse, $A = \mathcal{O}_{f(x)} \subset B = \mathcal{O}_x$ et B est intégralement clos dans son corps de quotients L. Soit K le corps des quotients de A et soit $z \in K$ entier sur A; alors *a fortiori* z est entier sur B, donc on peut écrire que $z \in B \cap K$. Or le fait que B est fidèlement plat sur A entraîne que $B \cap K = A$ ([B.Alg.Comm.] I, 3) donc $z \in A$.

(5) La preuve de (5) est difficile et le lecteur la trouvera dans [G.E.] 0_{IV}, 17.3.3.

B. *Propriétés de Y + propriétés des fibres ⇒ propriétés de X*

Rappelons d'abord (p. 336) que si $y = f(x)$, alors

$$X_y = f^{-1}(y) \simeq X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}_{X_y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}.$$

Supposons maintenant que X et Y sont *localement noethériens*. Alors, on démontre que pour un morphisme $f : X \to Y$ quelconque,

$$\dim \mathcal{O}_x \leqslant \dim \mathcal{O}_y + \dim \mathcal{O}_{X_y,x} \qquad \text{(G.E.] } 0_{\mathrm{IV}}\text{, 16.3.9)}$$

Les démonstrations de ce fait et de la proposition suivante seront trouvées dans le chapitre IV des Eléments de Grothendieck.

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat. Alors*

(1) $\dim \mathcal{O}_x = \dim \mathcal{O}_y + \dim \mathcal{O}_{X_y,x}$ ([G.E.] IV, 6.1.2)

(2) *Si Y est réduit en y et si X_y est réduit en x, alors X est réduit en x* ([G.E.] IV, 3.3.5).

(3) *Si Y est normal en y et si X_y est normal en x, alors X est normal en x* ([G.E.] IV, 6.5.4).

(4) *Si Y est régulier en y et si X_y est régulier en x, alors X est régulier en x* ([G.E.] 0_{IV}, 17.3.3).

Nous remarquons que cette proposition ne dit rien pour la propriété d'être localement intègre; nous allons indiquer comment on peut construire un contre exemple dans ce cas.

Considérons une "cubique à point double" $Y = \text{Spec}(A)$ où,

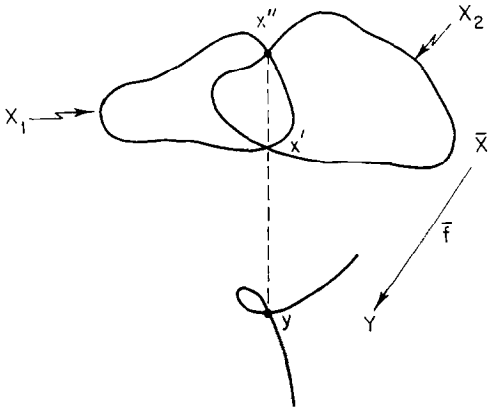
$$A = \mathbf{R}[S, T]/(S(S^2 + T^2) + (S^2 - T^2));$$

alors on sait que cette courbe a un point double y à l'origine. Soit A' la clôture intégrale de A dans son corps de quotients et posons $X = \text{Spec}(A')$. On en déduit naturellement un morphisme $f: X \to Y$ et en outre ([D.] p. 369–371) X est régulier et possède deux points au-dessus de y; désignons-les par x' et x''.

Soient $f_1 : X_1 \to Y$ et $f_2 : X_2 \to Y$ deux copies de $f: X \to Y$, et recollons X_1 et X_2 en identifiant x_1' avec x_2', et x_1'' avec x_2''. Pour effectuer ce recollement, on prend $\bar{X} = \text{Spec}(B)$, où

$$B = \{(a_1, a_2) \mid \epsilon_1'(a_1) = \epsilon_2'(a_2) \text{ et } \epsilon_1''(a_1) = \epsilon_2''(a_2)\}$$

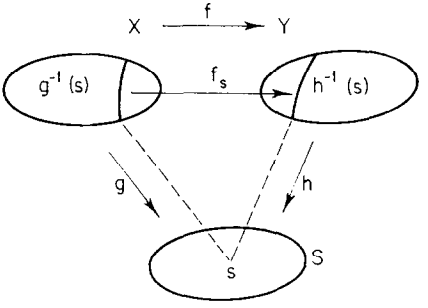
est un sous-anneau de $A_1' \times A_2'$, A_1', A_2' isomorphes à A', ϵ_i' et ϵ_i'' homomorphismes de A_i' sur son corps résiduel en l'idéal maximal correspondant à x_i'. Le morphisme $\bar{f}: \bar{X} \to Y$ obtenu est plat (et même étale), mais bien



que Y soit intègre en y et que $\overline{X}_y$ soit intègre en x' et en x'', $\overline{X}$ n'est pas intègre en x' ni en x''.

C. *Propriétés des f_s ⇒ propriétés de f*

Soient X et Y deux S-préschémas et $f : X \to Y$ un S-morphisme. Alors, pour chaque $s \in S$, f induit un morphisme $f_s : g^{-1}(s) \to h^{-1}(s)$.



Un des avantages à considérer les f_s est qu'il s'agit de morphismes de préschémas sur des *corps*. On remarque aussi que pour $y \in h^{-1}(s)$, $f^{-1}(y) = f_s^{-1}(y)$.

On a le théorème suivant (pour la preuve, voir [G.E.] IV, 11.3.8).

Théorème. *Si X et Y sont localement noethériens, si g et h sont plats et de type fini, et si tous les f_s sont plats, alors f est plat.*

Morphismes lisses et morphismes étales

Définition. *Un morphisme est réduit* (resp. *normal, régulier*) *s'il est plat et si ses fibres sont géométriquement réduites* (resp. *géométriquement normales, géométriquement régulières*). *Un morphisme est lisse s'il est régulier et localement de présentation finie. Un morphisme est étale s'il est lisse et localement quasi-fini.*

On déduit de ce qui précède que si X et Y sont localement noethériens, si g et h sont plats et de type fini et si tous les f_s ont une des propriétés précédentes, alors f a aussi cette propriété.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale et soit $y \in Y$; alors la fibre $f^{-1}(y)$ est localement quasi-finie donc formée de points *isolés*; de plus, si $y = f(x)$, $\mathcal{O}_{X_y,x}$ est un corps (égal à $\kappa(x)$) et ce corps est fini et séparable sur $\kappa(y)$.

Lorsque f est un morphisme étale fini, on dit que X est un *revêtement étale* de Y; on a alors les théorèmes suivants:

Théorème. *Soit X un revêtement étale de Y et pour chaque $y \in Y$, soit $n(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} [\kappa(x) : \kappa(y)]$ le nombre géométrique de points de la fibre. Si Y est connexe, alors $n(y)$ est constant* ([G.E.] IV, 18.2.8).

Théorème. ([G.E.] IV, 17.6.3). *Si X et Y sont localement noethériens, si f est localement de type fini et si pour un $y = f(x)$, $\kappa(x) = \kappa(y)$, alors f est étale en x si et seulement si $\hat{\mathcal{O}}_x \simeq \hat{\mathcal{O}}_y$.*

En outre, on a la relation suivante entre les propriétés d'être lisse et d'être étale: soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse et soit $y = f(x) \in Y$; alors il existe un voisinage V de x et un voisinage affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de y tels que $f(V) \subset U$ et que le morphisme induit $f_{U,V}$ par f sur ces voisinages peut se factoriser en $f_{U,V} : V \xrightarrow{h} \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_n]) \xrightarrow{g} U = \mathrm{Spec}(A)$ où h est un morphisme étale et g est le morphisme structural (lisse) ([G.E.] IV, 17.11.4).

Propriétés élémentaires de descente fidèlement plate

Dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[g]{} & S' \end{array}$$

nous allons examiner quelques propriétés de f', de X' ou d'un $\mathcal{O}_{X'}$-Module qui sont conservées par descente. Faisons une fois pour toutes l'hypothèse que g est *fidèlement plat et quasi-compact*; l'hypothèse que g est quasi-compact permet de ramener les raisonnements au cas où S' est affine ([G.E.] IV, 2.2.12).

A. *Propriétés des Modules*

Les propriétés suivantes sont conservées par descente:

Exactitude des suites
Type fini
Présentation finie
Localement libre ([G.E.] IV, 2.5.2)

Les démonstrations sont toutes très simples; par exemple, en ce qui concerne la première propriété, c'est la définition même de la fidèle

platitude. Comme autre exemple, regardons la propriété d'être de type fini; d'abord, comme g est quasi-compact, nous sommes ramenés au cas affine; nous avons un morphisme d'anneaux $A \to A'$ faisant de A' un A-module fidèlement plat, nous avons un A-module M et nous savons par hypothèse que $M' = M \otimes_A A'$ est de type fini; à prouver: M est de type fini. Soient $t'_1, \ldots, t'_n$ un système de générateurs de M'; comme pour chaque $i = 1, \ldots, n$, $t'_i \in M \otimes_A A'$, on peut écrire $t'_i = \sum_j t_{ij} \otimes a'_{ij}$, avec $t_{ij} \in M$, $a'_{ij} \in A'$; on obtient ainsi un certain nombre N d'éléments t_{ij} de M; nous allons montrer que la suite

$$A^N \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

est exacte, où h applique l'élément unité de chaque copie de A sur un des t_{ij}. Mais la suite tensorisée

$$A'^N = A^N \underset{A}{\otimes} A' \to M' = M \underset{A}{\otimes} A' \to 0$$

est évidemment exacte; donc par fidèle platitude, la suite $(*)$ est exacte.

On trouvera la démonstration pour la propriété d'être de présentation finie dans [B.Alg.Comm.] I, 3.6. Quant à la dernière propriété, elle est trivialement conservée, par fidèle platitude.

B. *Propriétés des morphismes*

La plupart des propriétés des morphismes sont conservées par descente; en effet, c'est le cas des suivantes:

Surjectif, Radiciel } [G.E.] IV, 2.6.1

Ouvert, Fermé } [G.E.] IV, 2.6.2

Universellement ouvert
Universellement fermé
Universellement bicontinu
Homéomorphisme universel
Quasi-compact
Quasi-compact dominant
} [G.E.] IV, 2.6.3

Séparé	
Localement de type fini	
Localement de présentation finie	
Type fini	
Propre	
Isomorphisme	
Immersion ouverte	
Immersion fermée	[G.E.] IV, 2.7.1
Affine	
Fini	
Quasi-fini	
Plat	
Lisse	
Etale	

Cependant, parmi les rares propriétés qui ne sont pas conservées, on trouve

Projectif
Quasi-projectif
Immersion locale

Encore une fois, les démonstrations sont toutes assez faciles; par exemple, démontrons que la propriété d'être ouvert est conservée.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[g]{} & S' \end{array}$$

Par hypothèse, f' est ouvert. Soit U un ouvert de X; alors $g'^{-1}(U)$ est ouvert, donc $f'(g'^{-1}(U))$ est ouvert. Mais ([G.E.] I, 3.4.8) $f'(g'^{-1}(U)) = g^{-1}(f(U))$, ce qui est donc un ouvert saturé. Donc, d'après la Proposition 9 (p. 349) appliquée à g, $f(U)$ est ouvert.

Platitude en cohomologie

Dans cette section, nous ne ferons que quelques remarques qui illustrent l'avantage des hypothèses de platitude dans la théorie de la cohomologie. Dans le contexte qui nous intéresse, par cohomologie, nous entendrons la cohomologie de Zariski des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents ([G.E.] 0_{III}, 12.1).

Comme première observation, disons qu'en général la cohomologie "ne se monte pas."

Un des problèmes centraux en cohomologie est la question des images directes: soient $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact et séparé de préschémas et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent; alors $f_* : \mathscr{F} \rightsquigarrow f_*(\mathscr{F})$ est un foncteur additif de la catégorie abélienne des $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents dans celle des $\mathscr{O}_Y$-Modules quasi-cohérents. On définit alors les foncteurs dérivés à droite $R^q f_*(\mathscr{F})$, $q \geqslant 0$ de f_* et on démontre ([G.E.] III, 1.4.10) qu'ils sont quasi-cohérents.

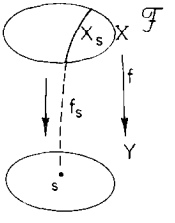
Comme nous l'avons dit plus haut, la cohomologie ne se "monte" pas par un changement de base quelconque, et les relations entre les $R^q f_*(\mathscr{F})$

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

et les $R^q f'_*(\mathscr{F}')$ ne s'expriment qu'en termes de suites spectrales ([G.E.] III, 6). Mais si l'on suppose que le morphisme g est *plat*, alors la situation est considérablement simplifiée et la cohomologie se transporte, c'est-à-dire que pour $q \geqslant 0$, on a les relations ([G.E.] III, 1.4.15).

$$R^q f'_*(\mathscr{F}') = R^q f_*(\mathscr{F}) \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \mathscr{O}_{Y'} .$$

Considérons le changement de base qui consiste à passer à une fibre. Chaque f_s donne lieu à un foncteur $(f_s)_*(\mathscr{F}_s)$ et à ses foncteurs dérivés $R^q(f_s)_*(\mathscr{F}_s)$.



Si l'on suppose que les $R^q f_*(\mathscr{F})$ sont des $\mathscr{O}_Y$-Modules plats ($q \geqslant 1$), alors on a la relation $(f_s)_*(\mathscr{F}_s) = (f_*(\mathscr{F}))_s$ ([G.E.] III, 6.9.9).

Nous terminons ce chapitre par un théorème sur les morphismes plats,

conséquence du théorème de platitude générique, et qui est un résultat technique très utile. Sa démonstration facile est laissée comme exercice.

Théorème. *Soient X et Y des préschémas noethériens et $f : X \to Y$ un morphisme.*

Alors il existe une partition finie de Y

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_m$$

où les Y_i sont localement fermés, telle que pour tout i, le morphisme

$$f_i : f^{-1}((Y_i)_{\text{réd}}) \to (Y_i)_{\text{réd}}$$

induit par f est un morphisme plat.

IV. Limites projectives de préschémas

Limites inductives d'anneaux et limites projectives de préschémas

Lorsque nous parlerons de limites projectives de préschémas, il s'agira toujours de limites projectives *filtrantes*, ce qui est d'ailleurs suffisant dans les applications.

Il est naturel de commencer par le cas affine, et c'est ce que nous ferons. Nous sommes donc ramenés au cas classique de limites *inductives* d'anneaux.

Soit $(A, \{\varphi_{\beta\alpha}\}_{\alpha \leqslant \beta})$ où $\varphi_{\beta\alpha} : A_\alpha \to A_\beta$, un système inductif d'anneaux; alors on sait qu'il existe un anneau

$$A = \varinjlim A_\alpha$$

et des homomorphismes canoniques $\varphi_\alpha : A_\alpha \to A$. Pour $\alpha \leqslant \beta$, dénotons par $u_{\alpha\beta} : X_\beta \to X_\alpha$ le morphisme de spectres correspondant à $\varphi_{\beta\alpha} : A_\alpha \to A_\beta$, et par $u_\alpha : X \to X_\alpha$ le morphisme canonique correspondant à φ_α, où on a posé $X = \mathrm{Spec}(A)$. Alors, $(X_\alpha, u_{\alpha\beta})$ forme bien un système projectif dont X est la limite projective, dans la catégorie des spectres. Mais X est-il la limite projective de $(X, u_{\alpha\beta})$ dans la catégorie des espaces annelés? D'abord, du point de vue topologique, si T désigne la limite projective des espaces topologiques sous-jacents aux X_α ([B.Top.Gén.] I, 4.4), alors T est homéomorphe à l'espace topologique

sous-jacent à X; en plus on démontre qu'il y a isomorphisme d'espaces annelés:

$$\mathcal{O}_X \simeq \varprojlim u_\alpha^*(\mathcal{O}_{X_\alpha})$$

Systèmes projectifs plus généraux

Pour notre usage, il suffira de considérer des systèmes projectifs du type suivant: d'abord, supposons que notre ensemble d'indices $\lambda, \mu, \ldots$ possède un plus petit élément α; soit maintenant $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})$ un système projectif de spectres d'anneaux A_λ et soit X_α un S_α-préschéma. Nos systèmes projectifs $(X_\lambda, v_{\lambda\mu})$ seront du type

$$\begin{array}{ccccc} X_\alpha & \longleftarrow & X_\lambda = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda & \xleftarrow[=v_{\lambda\mu}]{1\times u_{\lambda\mu}} & X_\mu = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\mu \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_\alpha & \longleftarrow & S_\lambda & \xleftarrow[u_{\lambda\mu}]{} & S_\mu \end{array} \qquad (\lambda \leqslant \mu)$$

Soit $S = \varprojlim S_\lambda$ et $u_\lambda : S \to S_\lambda$ les morphismes canoniques; posons $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$ et $v_\lambda = 1 \times u_\lambda : X \to X_\lambda$. Alors il y a une application naturelle $X \to \varprojlim X_\lambda$ et on démontre aisément que c'est un isomorphisme d'espaces annelés ([G.E.] IV, 8.2.14).

En outre, les morphismes $X_\mu \to X_\lambda$ et $X \to X_\lambda$ sont affines ([G.E.] II, 1.6.1).

Avant d'aborder la théorie proprement dite relative aux limites projectives de préschémas, illustrons par quelques exemples son utilité.

Le type de théorèmes auxquels nous serons principalement intéressés est le suivant:

Théorème type (T): *Propriété **P** du préschéma limite $X \Rightarrow$ **P** valide pour X_λ, pour un certain λ assez grand.*

Première application. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas, où Y est affine d'anneau A, et soit $y \in Y$; nous avons déjà fait la remarque que le spectre local en y est beaucoup plus petit que tout voisinage ouvert de y. Supposons maintenant qu'une propriété ***P*** est connue de $f^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)) = Z$. On sait que $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ peut être considéré comme la *limite projective* des voisinages de y; plus précisément, on peut écrire

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y) = \varprojlim U_\alpha$$

correspondant à

$$\mathcal{O}_y = \varinjlim A_t$$

où les anneaux A_t sont les anneaux de fractions $A[1/t]$, $t \in A$, $D(t)$ parcourant un système fondamental de voisinages de y. Posons $X_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$; alors il est clair que $Z = \varprojlim X_\alpha$, et que les X_α forment un système projectif du type décrit plus haut. A l'aide d'un théorème du type (**T**), nous pourrons déduire de la validité de la propriété $\boldsymbol{P}$ de Z, sa validité pour un voisinage convenable $f^{-1}(U_\alpha)$ de la fibre de y.

Par exemple, supposons que Y soit intègre et que y est son point générique. Alors $\mathcal{O}_y = R(Y)$ est le corps des fonctions rationnelles et, à partir de propriétés de la fibre en y, "fibre générique" qui est un préschéma sur un corps, on pourra déduire ces propriétés pour l'image réciproque d'un voisinage de y.

Plus particulièrement, supposons $Y = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$; alors $R(Y) = \mathbf{Q}$ (le corps des rationnels) et chaque ouvert U_α peut être considéré comme complémentaire d'un ensemble fini de nombres premiers; supposons établie une propriété de la fibre générique (donc d'un préschéma sur le corps **Q**); alors à l'aide d'un théorème du type (**T**), nous pourrons déduire de la validité de cette propriété de la fibre générique, la validité de cette propriété pour les fibres sur "presque tous" les nombres premiers p.

Deuxième application. Supposons que $Y = \mathrm{Spec}(k)$ où k est un corps extension d'un corps k_0. Soit (k_λ) une famille de corps intermédiaires $k \supset k_\lambda \supset k_0$ de type fini sur k_0 et de réunion k; on a donc $k = \varinjlim k_\lambda$. Alors, au moyen d'un théorème du type (**T**), on peut déduire d'une propriété d'un préschéma sur une extension quelconque de k_0, cette même propriété pour le préschéma correspondant sur une certaine extension intermédiaire de type fini k_λ de k.

Troisième application. Cette application permettra plus tard d'éliminer les hypothèses noethériennes. Soit $Y = \mathrm{Spec}(A)$; alors A est une **Z**-algèbre et on a

$$A = \varinjlim \mathbf{Z}[a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_k}]$$

où $\{a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_k}\}$ est un ensemble fini d'éléments de A; chaque terme $\mathbf{Z}[a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_k}]$ est donc une algèbre de type fini sur **Z**, "intermédiaire" entre **Z** et A. On peut donc comme dans l'exemple précédent, déduire de la connaissance de propriétés d'un préschéma sur A, certaines

propriétés du préschéma correspondant sur $\mathbf{Z}[a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_k}]$. Ceci permet souvent, comme le souhaitaient Kronecker et Weil, de ramener certaines questions à des propriétés des algèbres de type fini sur $\mathbf{Z}$.

Digression sur les anneaux excellents

(a) Soit A un anneau intègre *noethérien*; alors en général la clôture intégrale n'est pas finie sur A, ni noethérienne.

(b) Si maintenant A est local, alors en général l'opération qui consiste à prendre le complété $\hat{A}$ de A ne conserve pas la propriété d'être réduit, ni d'être intégralement clos.

(c) Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, alors en général l'ensemble des points réguliers de X n'est pas ouvert, non plus que l'ensemble des points normaux.

Or Zariski avait remarqué que si A est une algèbre de type fini sur un corps ou un localisé d'une telle algèbre, alors on peut répondre par l'affirmative aux questions (a), (b) et (c). Nagata a même démontré qu'il en est de même des algèbres de type fini sur les entiers et ou sur des anneaux locaux noethériens complets. Ces classes d'anneaux sont contenues dans une classe d'anneaux caractérisée par Grothendieck, qu'il a appelés anneaux *excellents* ([G.E.] IV, 7.8.2); ceux-ci ont la propriété de répondre par l'affirmative aux questions (a), (b) et (c). Il est clair que les anneaux de la géométrie algébrique classique sont excellents. Dans cette optique, revenons à l'exemple de la cubique à point double

$$Y = \mathrm{Spec}(K[S, T]/(S(S^2 + T^2) + (S^2 - T^2)));$$

nous avions "normalisé" cette courbe en prenant $X = \mathrm{Spec}(A')$ où A' était la clôture intégrale de

$$A = K[S, T]/(S(S^2 + T^2) + (S^2 - T^2));$$

or on remarque que A' est intègre mais qu'il possède *deux* idéaux maximaux. Ceci est un cas particulier du *théorème* suivant ([G.E.] IV, 7.6.2):

Si A est un anneau local intègre (donc un seul idéal minimal (0) *et un seul idéal maximal) excellent, alors A' possède un seul idéal minimal* (0) *et en général plusieurs idéaux maximaux $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$; quant à $\hat{A}$, il possède un seul idéal maximal et en général plusieurs idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$; en outre $n = m$.*

On remarque que la troisième application du passage à la limite projective permet souvent de ramener l'étude des préschémas sur un anneau quelconque au cas où l'anneau est excellent.

Propriétés des limites projectives

A. *Passage à la limite pour les propriétés des Modules*

Pour simplifier, nous supposerons tous les préschémas affines, la généralisation aux préschémas quelconques étant toujours une question de recollements faciles mais fastidieux. Nous sommes donc dans la situation suivante:

On a un système inductif (A_λ) d'anneaux, un A_α-module M_α (α étant le plus petit indice), et on pose $M_\lambda = M_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda$ pour $\lambda \geqslant \alpha$. De plus, si $A = \varinjlim A_\lambda$, alors $M = \varinjlim M_\lambda = M_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$, ce qui résulte de la permutabilité des opérations de produit tensoriel et de limite inductive.

1. *Descente des Hom*

Proposition 1. *Supposons que les A_α-modules M_α et N_α soient tous deux de présentation finie; alors l'ensemble des* $\mathrm{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda, N_\lambda)$ *forme un système inductif tel que l'homomorphisme canonique (dont la composante pour chaque λ est $u_\lambda \rightsquigarrow u_\lambda \otimes 1$)* $\varinjlim(\mathrm{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda, N_\lambda)) \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ *est un isomorphisme.*

Remarque. Il s'agit bien là d'un théorème du type **T** car il nous dit que tout A-homomorphisme $M \to N$ provient d'un A_λ-homomorphisme $M_\lambda \to N_\lambda$ unique, pour un λ assez grand.

Preuve. Par la propriété universelle du produit tensoriel, on est ramené à démontrer que

$$\varinjlim (\mathrm{Hom}_{A_\alpha}(M_\alpha, N_\lambda)) \to \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(M_\alpha, N)$$

(avec un des modules fixe) est un isomorphisme.

Par hypothèse, on a deux entiers m et n tels que la suite

$$A_\alpha^{\,m} \to A_\alpha^{\,n} \to M_\alpha \to 0$$

soit exacte. Alors on a le diagramme commutatif, pour chaque λ

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(M_\alpha, N_\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^n, N_\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^m, N_\lambda) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(M_\alpha, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^n, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^m, N) \end{array}$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(M_\alpha, N_\lambda) & \longrightarrow & \varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^n, N_\lambda) & \longrightarrow & \varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^m, N_\lambda) \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \chi \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(M_\alpha, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^n, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha^m, N) \end{array}$$

Or il est clair que ψ et χ sont des isomorphismes. φ est donc aussi un isomorphisme.

2. *Descente des suites exactes*

Proposition 2. *Soient M_α, N_α et P_α des A_α-modules de présentation finie. Considérons la suite (pas nécessairement exacte)*

$$M_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} N_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} P_\alpha \longrightarrow 0,$$

et supposons que par passage à la limite, la suite

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \longrightarrow 0$$

soit exacte. Alors il existe un λ tel que

$$M_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} N_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} P_\lambda \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Preuve. Posons $Q_\alpha = \mathrm{Coker}(M_\alpha \to N_\alpha)$ et $Q_\lambda = \mathrm{Coker}(M_\lambda \to N_\lambda)$. On a $Q_\lambda = Q_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda$ par exactitude à droite du produit tensoriel. Alors par hypothèse, $\varinjlim Q_\lambda \simeq P$. Donc, en vertu de la proposition précédente, il existe un λ tel que $Q_\lambda \simeq P_\lambda$, donc v_λ sera le conoyau de u_λ, ce qui termine la preuve.

Remarque. La proposition précédente ne serait plus exacte sans hypothèses supplémentaires, si on y remplaçait les suites $M_\lambda \to N_\lambda \to P_\lambda \to 0$ par des suites du type $0 \to M_\lambda \to N_\lambda \to P_\lambda$.

3. *Théorème d'existence*

Proposition 3. *Soit (A_λ) un système inductif d'anneaux, de limite inductive A. Supposons donné un A-module M de présentation finie. Alors il existe un λ et un A_λ-module M_λ de présentation finie tels que $M \simeq M_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$.*

Remarque. Cela revient à dire qu'on a à isomorphisme près

$$M = \varinjlim_{\mu \geqslant \lambda} M_\mu$$

où les M_μ sont obtenus comme avant, par tensorisation de M_λ avec les A_μ, $\mu \geqslant \lambda$.

Preuve de la Proposition. Comme M est de présentation finie, on a $M \simeq A^n/R$ pour un certain entier n et un A^n-module R de type fini. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_m \in A^n$ les générateurs de R; alors comme $A^n = \varinjlim A_\lambda^n$, chaque t_i provient d'un $t_{i\lambda} \in A_\lambda^n$ pour un λ assez grand et comme les t_i sont en nombre fini, on peut choisir un λ tel que $t_{i\lambda} \in A_\lambda^n$ pour tous les t_i. Posons $M_\lambda = A_\lambda^n/R_\lambda$ où R_λ est le A_λ^n-module engendré par les $t_{i\lambda}$; M_λ est donc de présentation finie. On a alors

$$M_\lambda \underset{A_\lambda}{\otimes} A \simeq A^n/\mathrm{Im}\left(R_\lambda \underset{A_\lambda}{\otimes} A\right) = A^n/R \simeq M,$$

ce qui termine la preuve.

B. *Propriétés des Modules*

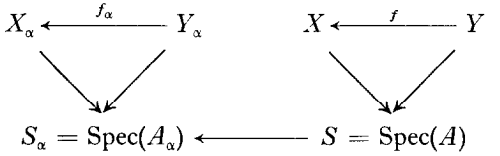
Les trois propositions précédentes sont aussi vraies dans le cas de faisceaux. En effet, dans la situation décrite par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \longleftarrow & X \\ \downarrow f & & \downarrow \\ S = \mathrm{Spec}(A_\alpha) & \longleftarrow & S = \mathrm{Spec}(A) \end{array} \qquad , A = \varinjlim A_\lambda$$

où X_α est un schéma quasi-compact, on démontrerait tout aussi bien les propositions précédentes en remplaçant M, N par des $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, et N_α, M_α par des $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Modules $\mathscr{F}_\alpha$, $\mathscr{G}_\alpha$ quasi-cohérents et de présentation finie.

C. *Propriétés des morphismes*

Proposition 4. *Considérons la situation décrite par le diagramme*

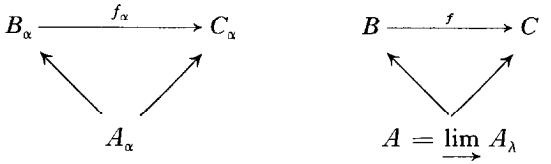


ou S, X, Y, f sont les limites projectives des S_λ, X_λ, Y_λ, f_λ, respectivement. Supposons en outre que X_α et Y_α sont quasi-compacts, séparés et localement de présentation finie sur S_α (ces propriétés sont transmises à X et Y par montée). Alors l'application naturelle

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \to \mathrm{Hom}_S(X, Y)$$

est bijective, (où $\mathrm{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda)$ désigne l'ensemble des S_λ-morphismes de X_λ dans Y_λ et de même pour $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$.)

Preuve. Nous ne démontrerons cette proposition que dans le cas affine, la démonstration du cas général n'ajoutant que de (faciles mais) pénibles travaux de recollements. Donc nous sommes dans la situation



où B_α, C_α sont des A_α-algèbres de présentation finie... etc. et où il s'agit de démontrer que l'application naturelle

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A_\lambda\text{-alg}}(B_\lambda, C_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, C)$$

est bijective; mais grâce à la propriété universelle du produit tensoriel, on est ramené à démontrer que l'application

$$\varphi : \varinjlim \mathrm{Hom}_{A_\alpha\text{-alg}}(B_\alpha , C_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{A_\alpha\text{-alg}}(B_\alpha , C)$$

est bijective, où une des variables est gardée fixe.

(a) φ est injectif: soient θ_λ et $\theta'_\lambda : B_\alpha \to C_\lambda$ tels que $\theta_\lambda \otimes 1 = \theta'_\lambda \otimes 1$ (i.e., tels que $\varphi(\theta_\lambda) = \varphi(\theta'_\lambda)$); alors il suffit de démontrer qu'il existe un $\mu \geqslant \lambda$ tel que $\theta_\mu = \theta'_\mu$; mais B_α est une A_α-algèbre de type fini, donc elle est engendrée, disons par $x_1 ,..., x_m$ et alors l'égalité $\theta_\lambda \otimes 1 = \theta'_\lambda \otimes 1$ entraîne que $\varphi_\lambda(\theta_\lambda(x_i)) = \varphi_\lambda(\theta'_\lambda(x_i))$ pour tous les $i = 1, 2,..., m$, où $\varphi_\lambda : C_\lambda \to C$ est l'homomorphisme canonique. Mais alors, d'après les propriétés élémentaires des limites inductives, cela implique qu'il existe un $\mu \geqslant \lambda$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}(\theta_\lambda(x_i)) = \varphi_{\mu\lambda}(\theta'_\lambda(x_i))$ pour tout i, ce qui entraîne que $\theta_\mu = \theta'_\mu$.

(b) φ est surjectif: comme B_α est une A_α-algèbre de présentation finie, $B_\alpha = A_\alpha[T_1 ,..., T_m]/\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est engendré par un nombre fini de polynômes $F_j(T_1 ,..., T_m)$; soient $t_1 ,..., t_m$ les images des T_i dans B_α.

Soit maintenant θ un élément arbitraire de $\mathrm{Hom}_{A_\alpha\text{-alg}}(B_\alpha , C)$; nous allons démontrer qu'il est dans l'image de φ.

Posons $c_i = \theta(t_i) \in C$; alors les éléments de C qui sont de la forme $F_j(c_1 , c_2 ,..., c_m)$ sont tous nuls car ils sont égaux à

$$F_j(\theta(t_1),..., \theta(t_m)) = \theta(F_j(t_1 ,..., t_m)) = \theta(0) = 0.$$

Or les c_i sont tous de la forme $c_i = \varphi_\lambda(x_i)$, $x_i \in C_\lambda$ pour un λ assez grand, et de plus,

$$\varphi_\lambda(F_j(x_1 ,..., x_m)) = F_j(\varphi_\lambda(x_1),..., \varphi_\lambda(x_m)) = F_j(c_1 ,..., c_m) = 0$$

comme nous l'avons démontré plus haut. D'après les propriétés élémentaires des limites inductives, il existe un $\mu \geqslant \lambda$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}[F_j(x_1 ,..., x_m)] = 0$, i.e., $F_j(\varphi_{\mu\lambda}(x_1),..., \varphi_{\mu\lambda}(x_m)) = 0$; mais alors les $\varphi_{\mu\lambda}(x_i) = y_i$ sont des éléments de C_μ. Si l'on définit l'homomorphisme de $A[T_1 ,..., T_m]$ dans C_μ par $T_i \rightsquigarrow y_i$ nous venons de démontrer que cet homomorphisme s'annule sur les $F_j(T_1 ,..., T_m)$; il induit donc un homomorphisme $\theta_\mu : B_\alpha \to C_\mu$, ce qui est bien l'homomorphisme cherché.

Proposition 5. *Soit (A_λ) un système inductif d'anneaux, de limite inductive A; posons $S_\lambda = \mathrm{Spec}(A_\lambda)$ et $S = \mathrm{Spec}(A)$. Supposons donné un*

morphisme $f : X \to S$ quasi-compact, séparé et localement de présentation finie. Alors il existe un λ et un morphisme $f_\lambda : X_\lambda \to S_\lambda$ quasi-compact, séparé et localement de présentation finie, tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \longleftarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S_\lambda & \longleftarrow & S \end{array}$$

soit cartésien.

Preuve. Nous nous bornerons encore au cas affine. Soit donc B une algèbre de présentation finie sur A; alors $B = A[T_1, \ldots, T_m]/\mathfrak{J}$ où $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini, engendré par les polynômes $F_j(T_1, \ldots, T_m)$, disons. Mais les coefficients des différents $F_j(T_1, \ldots, T_m)$ sont en nombre fini; il existe donc un λ tel que tous les $F_j(T_1, \ldots, T_m)$ proviennent de polynômes $F_{j\lambda}(T_1, \ldots, T_m) \in A_\lambda[T_1, \ldots, T_m]$. Alors, $A_\lambda[T_1, \ldots, T_m]/\mathfrak{J}_\lambda$, où $\mathfrak{J}_\lambda$ est l'idéal engendré par les $F_{j\lambda}$, est bien de présentation finie, et l'homomorphisme naturel de A_λ dans $A_\lambda[T_1, \ldots, T_m]/\mathfrak{J}_\lambda$ est l'homomorphisme cherché.

La Proposition 4 nous montre que tout morphisme $f : X \to Y$ provient d'un morphisme $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ et il est souhaitable d'avoir à sa disposition un certain nombre de théorèmes du type: $\boldsymbol{P}(f) \Rightarrow \boldsymbol{P}(f_\lambda)$ pour λ grand.

En fait, les propriétés suivantes vérifient une telle proposition:

Isomorphisme Immersion Immersion ouverte Immersion fermée Surjectif Séparé Radiciel Fini	[G.E.] IV, 8.10.5
Quasi-fini Affine Projectif Propre	[G.E.] IV, 8.10.5
Plat	[G.E.] IV, 11.2.6
Lisse Etale	[G.E.] IV, 17.8.5

Par contre, la propriété pour f d'être ouvert, ou fermé, ne se "descend" pas en général aux f_λ. Ajoutons la propriété suivante qui nous sera utile par la suite ([G.E.] IV, 11.2.6):

Proposition. *Si $\mathscr{F}_\alpha$ est un $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Module de présentation finie, alors pour que la limite projective $\mathscr{F}$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module f-plat (ou f est supposé localement de présentation finie) en $x \in X$, il faut et il suffit que $\mathscr{F}_\lambda$ soit un $\mathcal{O}_{X_\lambda}$-Module f_λ-plat en $x_\lambda = g_\lambda(x)$ pour un λ assez grand.*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_\lambda & & \mathscr{F} \\ X_\lambda & \xleftarrow[g_\lambda]{} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S_\lambda & \longleftarrow & S \end{array}$$

Elimination des hypothèses noethériennes

Nous sommes maintenant en mesure de voir comment on "élimine les hypothèses noethériennes."

Soit $f : X \to S = \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme *quasi-compact, séparé et localement de présentation finie.* Alors nous savons (voir p. 364) que quel que soit l'anneau A, $A = \varinjlim A_\lambda$ où les A_λ sont (excellents) *noethériens.* En outre, en vertu de la Proposition 2, *il existe* un λ et un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_\lambda & & \mathscr{F} \\ X_\lambda & \longleftarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S_\lambda & \longleftarrow & S \end{array}$$

où f_λ est séparé et de type fini. On est donc à gauche, dans une situation noethérienne, ce qui permet de travailler avec plus de facilité et néanmoins, de "remonter" les conclusions a des propriétés de $\mathscr{F}$, X, ou f, ce qui "fonctionne" assez bien comme nous savons.

Notons en passant qu'un avantage des hypothèses sur f telles que "quasi-compact, séparé et localement de présentation finie" est que ces hypothèses *sont stables par changement de base,* alors que les hypothèses noethériennes *ne le sont pas.*

Comme premier exemple d'application de cette méthode, démontrons la proposition suivante:

Proposition. *Soit M un A-module de présentation finie; alors tout endomorphisme surjectif de M est bijectif.*

Preuve. Dans le cas noethérien, ce résultat est connu ([B.Alg.] VIII, 2). Or $M = M_0 \otimes_{A_0} A$ où A_0 est noethérien et M_0 est un A_0-module de type fini. Soit $u : M \to M$ un endomorphisme surjectif de M; alors on sait que $u = u_0 \otimes 1$ où u_0 est un endomorphisme surjectif de M_0. La proposition est donc démontrée.

Démontrons maintenant le *théorème de platitude générique* dans le cas d'un morphisme $f : X \to S = \mathrm{Spec}(A)$, A intègre (mais non nécessairement noethérien) avec f quasi-compact, séparé et localement de présentation finie. Il s'agit toujours de démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U du point générique de S tel que $f \mid f^{-1}(U) : f^{-1}(U) \to U$ soit plat.

Or il existe un sous-anneau A_λ noethérien (et intègre) de A et un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \longleftarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S_\lambda & \longleftarrow & S \end{array}$$

et on a pour $f_\lambda : X_\lambda \to S_\lambda$ toutes les hypothèses qu'on avait dans la version originale du théorème de platitude générique. Il y a donc un voisinage U_λ du point générique η_λ de S_λ tel que $f_\lambda \mid f_\lambda^{-1}(U_\lambda) : f^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda$ soit plat, et il est clair que l'on peut "remonter" cette restriction de f_λ à une restriction de f répondant à la question.

Démonstration du Théorème 1 (p. 350) sans hypothèses noethériennes. Celui-ci s'énonce maintenant:

"*Soient X et Y deux préschémas quelconques et $f : X \to Y$ un morphisme plat et localement de présentation finie; alors f est universellement ouvert.*"

D'abord, comme les hypothèses et la conclusion sont locales par rapport à X *et à* Y, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(B)$ et que $Y = \mathrm{Spec}(A)$; or on sait (p. 363) que $A = \varinjlim A_\lambda$ où les anneaux A_λ sont noethériens, et qu'il existe un λ tel que $B = B_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$ (Proposition 3) qui est alors une A_λ-algèbre plate et de type fini. On peut même choisir λ de telle sorte

que f_λ soit plat (liste p. 370) et de type fini. Mais alors $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ satisfait aux conditions du théorème 2 dans sa version originale.

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \longleftarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_\lambda & \longleftarrow & Y \end{array}$$

Donc f_λ est universellement ouvert, et par montée, f est universellement ouvert.

Démonstration du Théorème 3 (p. 352) sans hypothèses noethériennes. Celui-ci s'énonce maintenant:

"*Soient X et Y deux préschémas quelconques, $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie et $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module de présentation finie; alors l'ensemble U des $x \in X$ tels que $\mathscr{F}_x$ est f-plat, est ouvert.*"

Tout comme dans la démonstration du théorème précédent, on se ramène à la situation suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_{\lambda_0} & & \mathscr{F} \\ X_{\lambda_0} & \xleftarrow[g_{\lambda_0}]{} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\lambda_0}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_{\lambda_0} & \longleftarrow & Y \end{array}$$

où, $\mathscr{F}_{\lambda_0}$ est cohérent et satisfait (proposition p. 367) aux conditions du Théorème 3 dans sa version originale. Donc

$$U_\lambda = \{x \in X_\lambda \mid \mathscr{F}_\lambda \text{ est } f_\lambda\text{-plat}\}$$

est ouvert pour $\lambda \geqslant \lambda_0$ et comme $U = \bigcup_{\lambda \geqslant \lambda_0} g_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, il suit que U est ouvert.

Nous terminerons ce chapitre en donnant à titre d'exemple, la démonstration d'un théorème initialement énoncé par Chevalley et faisant intervenir la plupart des techniques que nous avons apprises dans les cours précédents. Ce théorème peut aussi se déduire du "Main Theorem" de Zariski, que l'on peut démontrer par des méthodes analogues, mais un peu plus délicates.

Nous savons qu'en général (p. 332) un morphisme quasi-fini n'est pas nécessairement fini.

Théorème. *Soient X et Y deux préschémas quelconques, et $f : X \to Y$*

un morphisme localement de présentation finie et propre. Alors si f est quasi-fini, f est fini.

Preuve.

(1) D'abord les hypothèses et la conclusion sont locales, par rapport à Y, donc on peut supposer Y affine, disons $Y = \mathrm{Spec}(A)$.

(2) On peut se ramener au cas noethérien suivant la méthode décrite p. 371 car les trois hypothèses sur f sont conservées par descente du cas général au cas noethérien, et la conclusion est stable par montée. Donc on peut supposer A noethérien, f propre et quasi-fini.

(3) Soit $y \in Y$ et posons $Z = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y)$; alors on sait que $\mathscr{O}_y = \varinjlim A_{t_\lambda}$ pour $t_\lambda \notin j_y$; de plus, $f^{-1}(Z) = \varprojlim f^{-1}(D(t_\lambda))$ où $D(t_\lambda) = \mathrm{Spec}(A_{t_\lambda})$; posons $f_\lambda : f^{-1}(D(t_\lambda)) \to D(t_\lambda)$. Si l'on suppose démontré le théorème dans le cas où le préschéma de base est le spectre d'un anneau noethérien local, alors par descente,

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(D(t_\lambda)) & \longleftarrow & f^{-1}(Z) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\lambda} & & \downarrow \\ D(t_\lambda) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y) \end{array}$$

on en déduira qu'il existe un λ assez grand et un voisinage ouvert $D(t_\lambda)$ de y tel que f_λ est un morphisme fini (liste p. 370). Ceci montre qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où A est noethérien local et f est propre et quasi-fini.

(4) Soit $\hat{A}$ le complété de A et posons $Y' = \mathrm{Spec}(\hat{A})$; on a le carré cartésien suivant:

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ \mathrm{Spec}(A) & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

or $\hat{A}$ est aussi noethérien et local, et de plus $\hat{A}$ est fidèlement plat sur A; donc par descente fidèlement plate (p. 357) si f' est fini, il en est de même de f (p. 359). Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas où A est noethérien, local et complet et f est propre et quasi-fini.

(5) Soit y le point générique de $\mathrm{Spec}(A)$; alors, par quasi-finitude de f, on sait que la fibre de y est formée d'un nombre fini de points isolés. Démontrons le

Lemme. *Soit A un anneau local noethérien complet; soient $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $f : X \to Y$ séparé. Soit y le point fermé de Y et soit $x \in f^{-1}(y)$ un point isolé dans la fibre de y. Alors*

$$X = X' \coprod X''$$

ou $X' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$ est fini sur Y.

Preuve du lemme. Posons $B = \mathcal{O}_x$ et soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Comme $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{n}$ ($\mathfrak{n}$ idéal maximal de B) et que la topologie $\mathfrak{n}$-adique est séparée, B est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}B$-adique. Donc on peut écrire $B \subset \hat{B}$ et nous allons montrer que $\hat{B}$ est un A-module de type fini. Or

$$\hat{B} = \varprojlim_k B/\mathfrak{m}^k B;$$

mais par hypothèse, $B/\mathfrak{m}B$ est un $A/\mathfrak{m}$-module de type fini et $\mathfrak{m}B/\mathfrak{m}^2B = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes_{A/\mathfrak{m}} B/\mathfrak{m}B$ est aussi de type fini sur $A/\mathfrak{m}$, donc ([B.Alg.Comm.] III, 2.14) $\hat{B}$ est de type fini; donc B est aussi de type fini (puisque A est noethérien) et l'on constate que B était déjà complet ([G.E.] 0_{I}, 7.3.3). Reste à démontrer que $X' = \mathrm{Spec}(B)$ est ouvert et fermé dans X; or considérons la suite

$$X' \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$$

où g est l'injection naturelle. Comme fg est fini et que f est séparé, g est fini ([G.E.] II, 6.1.5); il s'ensuit que $g(X')$ est fermé dans X ([G.E.] II, 6.1.10). Mais comme g applique le point fermé de X' sur lui-même et induit un isomorphisme des anneaux locaux, g est un isomorphisme local ([G.E.] I, 6.5.5); $g(X')$ est donc aussi ouvert dans X, ce qui termine la preuve du lemme. Comme conséquence immédiate de ce lemme, nous avons le

Corollaire. *Supposons vérifiées les hypothèses du lemme, et que $f^{-1}(y)$ est formée d'un nombre fini de points isolés dans la fibre; alors $X = X' \coprod X''$ ou X' est fini sur Y et $X'' \cap f^{-1}(y) = \varnothing$.*

On procède par récurrence sur le nombre d'éléments de $f^{-1}(y)$.

Pour terminer la preuve du théorème, il suffit de montrer que $X'' = \varnothing$. Or X'' est ouvert et fermé; donc $f(X'')$ est fermé dans Y puisque f est propre; mais alors cet ensemble fermé ne rencontrerait pas le point fermé de Y, ce qui est contradictoire; ceci termine la preuve du théorème.

On démontrerait de manière analogue le théorème suivant.

Théorème. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme séparé, quasi-fini et localement de présentation finie. Alors f est quasi-affine.* ($f : X \to Y$ quasi-affine, veut dire qu'il existe un préschéma Z dans lequel X est ouvert, et un morphisme affine $g : Z \to Y$ qui induit f sur X).

Dans les deux théorèmes précédents, on peut en fait, à l'aide de techniques plus poussées (hensélisation stricte), remplacer l'hypothèse "localement de présentation finie" par "localement de type fini" ([G.E.] IV, 18.12).

V. Foncteurs représentables en théorie des préschémas

Le foncteur $\mathbf{h}$.

Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie quelconque, et à chaque objet X de $\boldsymbol{C}$, associons le foncteur $\mathbf{h}_X : \boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ens}$ défini par $\mathbf{h}_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$ et si $u : Y \to Y'$, $\mathbf{h}_X(u) : \mathrm{Hom}(Y', X) \to \mathrm{Hom}(Y, X)$ est l'application $v \mapsto v \circ u$. Alors $\mathbf{h}_X$ peut être considéré comme un objet de la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}}, \boldsymbol{Ens})$ des foncteurs de $\boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}}$ dans $\boldsymbol{Ens}$. En outre $\mathbf{h} : X \mapsto \mathbf{h}_X$ est un foncteur:

$$\mathbf{h} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}}, \boldsymbol{Ens}).$$

Ce foncteur est d'ailleurs *pleinement fidèle*, c'est-à-dire que pour tout couple (X, X') d'objets de $\boldsymbol{C}$, on a une bijection ([G.E.] 0_{III}, 8.1.7)

$$\mathrm{Hom}(X, X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_X, \mathbf{h}_{X'}).$$

Un des avantages des foncteurs pleinement fidèles tels que $\mathbf{h}$ est qu'ils permettent de ramener la plupart des questions sur les morphismes dans $\boldsymbol{C}$ à la question correspondante dans la catégorie des ensembles; par exemple, si l'on veut démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

dans $\boldsymbol{C}$, il suffit de démontrer que pour tout objet T de $\boldsymbol{C}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_X(T) & \longrightarrow & \mathbf{h}_Y(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{h}_{X'}(T) & \longrightarrow & \mathbf{h}_{Y'}(T) \end{array}$$

est commutatif, et cela est souvent beaucoup plus facile puisqu'il s'agit d'une question purement ensembliste.

Foncteurs représentables dans la théorie des préschémas

Soit S un préschéma fixe et considérons la catégorie $\boldsymbol{Sch}/S$. A tout objet $X \xrightarrow{\varphi} S$ de cette catégorie, associons le foncteur

$$\mathbf{h}_X : \boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ens}$$

défini comme précédemment par

$$\mathbf{h}_X(Y) = \mathrm{Hom}_S(Y, X) \qquad (*)$$

L'idée d'associer ainsi à X le foncteur $\mathbf{h}_X$ a des antécédents dans les "spécialisations" de Weil, pour le cas classique de préschémas sur un corps. Si $X \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spec}(k)$ est un tel préschéma, on peut lui associer l'ensemble $X_k = \{x \in X \mid \kappa(x) = k\}$ des points de X rationnels sur k (ceci correspond intuitivement, si l'on a une courbe $P(X, Y) = 0$, à l'ensemble des $(x, y) \in k^2$ tels que $P(x, y) = 0$). Mais alors, sur le corps des réels, l'ensemble des points rationnels de la courbe $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ serait vide, il est donc naturel de vouloir élargir le corps de base:

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X \underset{k}{\otimes} k' \\ \downarrow & \nwarrow & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(k') \end{array}$$

Or il suit de la définition d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ \downarrow & & {\scriptstyle s}\uparrow\downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

qu'il y a une correspondance biunivoque entre $\mathrm{Hom}_S(S', X)$ et l'ensemble $\Gamma(X'/S')$ des *sections* de X', morphismes $s : S' \to X'$ tels que $f' \circ s = 1_{S'}$.

Or, on a, à isomorphisme près, l'égalité

$$X_k = \Gamma(X/k)$$

et par conséquent, $(X \otimes_k k')_{k'} = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k'), X)$; donc, dans notre cas, les "points de $X \otimes_k k'$ rationnels sur k'" correspondent biunivoquement aux k-morphismes: $\mathrm{Spec}(k') \to X$, qui ne sont autres que les "spécialisations" de X à valeurs dans k'. On dit aussi que ce sont les "points de X à valeurs dans k'".

Définition. *Un foncteur $F : \boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ens}$ est dit représentable, s'il est de la forme $\mathbf{h}_X$ pour un certain objet X de $\boldsymbol{C}$.*

Une question que nous poserons souvent est la suivante: Soit $F : \boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ens}$ un foncteur, est-il représentable? Si la réponse est affirmative, alors, par un théorème général, l'objet représentant F sera unique à isomorphisme près.

Exemples de foncteurs représentables

(1) Soit A un anneau, soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ et considérons le "foncteur" $S \rightsquigarrow$ l'ensemble A^n. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un foncteur, mais nous allons construire, à partir de cette idée intuitive, un foncteur représentable.

D'abord, on a $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, donc $A^n = (\Gamma(S, \mathcal{O}_S))^n = \Gamma(S, \mathcal{O}_S^n)$; si maintenant T est un préschéma sur S, la correspondance

$$T \rightsquigarrow \text{l'ensemble } \Gamma(T, \mathcal{O}_T^n)$$

définit bien un foncteur. Soit $\mathscr{E}$ un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre de rang n; alors nous montrerons plus généralement que le foncteur

$$T \rightsquigarrow \Gamma(T, \mathscr{E} \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{O}_T)$$

est représentable (le membre de droite étant considéré comme *ensemble*; $\mathscr{E}_{(T)} = \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ est d'ailleurs, comme $\mathcal{O}_T$-module, localement libre de rang n).

En tant que $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$-modules, on a

$$\Gamma(T, \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T) = \mathrm{Hom}_T(\mathcal{O}_T, \mathscr{E}_{(T)});$$

si $\check{\mathscr{E}} = \mathscr{H}om_S(\mathscr{E}, \mathcal{O}_S)$ désigne le dual de $\mathscr{E}$, alors comme $\mathscr{E}$ est localement libre, $(\mathscr{E}^\vee)^\vee = \mathscr{E}$ et $\mathrm{Hom}_T(\mathcal{O}_T, \mathscr{E}_{(T)}) = \mathrm{Hom}_T(\check{\mathscr{E}}_{(T)}, \mathcal{O}_T)$; si $\mathrm{S}_{\mathcal{O}_T}(\check{\mathscr{E}}_{(T)})$

désigne l'algèbre symétrique sur $\mathscr{E}_{(T)}$, alors par la propriété universelle des algèbres symétriques ([G.E.] II, 1.7.1),

$$\mathrm{Hom}_{T_{(\mathrm{Mod})}}(\mathscr{E}_{(T)}, \mathscr{O}_T) = \mathrm{Hom}_{T_{(\mathrm{Alg})}}(\mathrm{S}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)}), \mathscr{O}_T);$$

mais les éléments de cet ensemble sont en correspondance biunivoque avec ceux de $\Gamma(\mathbf{V}(\mathscr{E}_{(T)})/T)$ où $\mathbf{V}(\mathscr{E}_{(T)}) = \mathbf{V}(\mathscr{E}) \times_S T$ désigne le fibré vectoriel sur T défini par $\mathscr{E}_{(T)}$ ([G.E.] II, 1.7.8). On peut donc prendre comme objet représentant, $X = \mathbf{V}(\mathscr{E})$, car d'après le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X = \mathbf{V}(\mathscr{E}) & \longleftarrow & X_{(T)} = \mathbf{V}(\mathscr{E}_{(T)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & T \end{array}$$

on a la relation $\Gamma(\mathbf{V}(\mathscr{E}_{(T)})/T) = \mathrm{Hom}_S(T, X)$, c'est-à-dire que le foncteur donné est isomorphe à

$$T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_S(T, X)$$

ce qui montre qu'il est bien représentable.

(2) Nous allons maintenant quelque peu compliquer la situation; nous voudrions représenter un foncteur qui, "naïvement," assigne à un préschéma $S = \mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble $E \subset A^n$ des points qui annulent un certain idéal $\mathfrak{J}$ de l'anneau de polynômes $A[T_1, \ldots, T_n]$ ("ensemble algébrique").

Soit donc A un anneau fixe et $S = \mathrm{Spec}(A)$; alors chaque $u \in \Gamma(S, \mathscr{E})$, où $\mathscr{E} = \mathscr{O}_S^n$, définit par transposition, un homomorphisme de modules ${}^t u : \mathscr{E}^\vee \to \mathscr{O}_S$, lequel induit à son tour un homomorphisme d'algèbres $\mathrm{S}({}^t u) : \mathrm{S}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}^\vee) \to \mathscr{O}_S$, i.e., une section dans $\Gamma(\mathbf{V}(\mathscr{E}^\vee)/S)$. On a dans le cas envisagé, $A^n = \Gamma(S, \mathscr{E})$, et on constate sans peine qu'il est équivalent de dire que les composantes du "point" $u \in A^n$ annulent tous les polynômes de $\mathfrak{J}$, ou que l'homomorphisme d'algèbres $\mathrm{S}({}^t u)$ s'annule dans l'idéal quasi-cohérent $\mathscr{J} = \tilde{\mathfrak{J}}$ de $\mathrm{S}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}^\vee)$ (qui ici correspond à $A[T_1, T_2, \ldots, T_n]$).

On peut maintenant supposer S quelconque, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang n; si $\mathscr{J}$ est un Idéal quasi-cohérent de $\mathrm{S}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}^\vee)$, considérons l'ensemble

$$\mathrm{Al}(S, \mathscr{E}, \mathscr{J}) = \{u \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S^n) \mid \mathrm{S}({}^t u) \text{ s'annule sur } \mathscr{J}\};$$

dire que $\mathsf{S}({}^t u)$ s'annule sur $\mathscr{J}$ veut dire qu'il se factorise en $\mathsf{S}({}^t u) : \mathsf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{E}}) \to \mathsf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J} \to \mathscr{O}_S$, ce qui montre qu'il y a correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathrm{Al}(S, \mathscr{E}, \mathscr{J})$ et les morphismes d'algèbres $\mathsf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J} \to \mathscr{O}_S$.

En général, soit maintenant T un S-préschéma; alors il s'agit de représenter le foncteur $T \rightsquigarrow \mathrm{Al}(T, \mathscr{E}_{(T)}, \mathscr{J}_{(T)})$ mais il est clair d'après ce qui précède que l'objet représentant sera

$$X_{\mathscr{E},\mathscr{J}} = \mathrm{Spec}(\mathsf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})$$

et notre foncteur est

$$T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_S(T, X_{\mathscr{E},\mathscr{J}}).$$

(3) Soit S un préschéma; on peut lui faire correspondre l'ensemble de ses parties ouvertes-fermées. Cette correspondance ne définit pas encore un foncteur, mais on sait qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des parties ouvertes-fermées de S et l'ensemble des idempotents de l'algèbre $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ ([B.Alg. Comm.] II, 4). Alors on a bien un foncteur

$$T \rightsquigarrow \{\text{idempotents de } \Gamma(T, \mathscr{O}_T)\}$$

(pour T dans $\boldsymbol{Sch}/S$), et nous voudrions trouver un préschéma qui le représente; pour cela nous allons nous ramener à une situation semblable à celle de l'exemple précédent.

Plus généralement, soit X un préschéma sur S qui est *fini* et *localement libre*, i.e., $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ ([G.E.] II, 1.3.1.) où $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente localement libre de rang n.

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_{(T)} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & T \end{array}$$

Alors, sous les hypothèses f fini localement libre de rang n, le foncteur

$$T \rightsquigarrow \{\text{parties ouvertes-fermées de } X_{(T)}\}$$

i.e.,

$$T \rightsquigarrow \{\text{idempotents de } \Gamma(T, \mathscr{B}_{(T)})\}$$

est représentable, et c'est ce que nous allons maintenant démontrer.

D'abord, dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{B} = \tilde{B}$ où B est une A-algèbre libre de rang n. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de B et soient $c_{ijk} \in A$ les constantes de structures pour cette algèbre i.e., $e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} e_k$. Soit $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in B$; si $x^2 = x$, alors $(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i)^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, d'où on a le système

$$\xi_k - \sum_{i,j} c_{ijk} \xi_i \xi_j = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous sommes donc ramenés (pour S affine) à la situation de l'exemple précédent, avec $\mathfrak{J} = (P_1, \ldots, P_n)$ où $P_k = P_k(T_1, \ldots, T_n) = T_k - \sum_{i,j} c_{ijk} T_i T_j$; il est d'ailleurs clair que $\mathfrak{J}$ ne dépend pas de la base choisie, puisque l'équation $x^2 = x$ ne dépend aucunement de la base. Pour être tout à fait dans la situation de l'exemple précédent, on prend un préschéma S quelconque et on définit l'Idéal quasi cohérent $\mathscr{J}$ à partir des différents $\mathfrak{J}_U \subset A(U)[T_1, \ldots, T_n]$ où les $A(U)$ sont les anneaux attachés aux parties ouvertes affines U de S. On vérifie les conditions de recollement et on est ainsi ramené à un

$$\mathrm{A1}(S, \mathscr{E}, \mathscr{J})$$

avec $\mathscr{E} = \mathscr{O}_S^n$.

Le foncteur Grassmannienne

Soient F et G deux foncteurs: $(\boldsymbol{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ens}$, et $u : F \to G$ un morphisme fonctoriel. Si chaque $u(T)$, pour $T \in \boldsymbol{Sch}/S$, est une injection, alors on dit que F est un *sous-foncteur* de G; si G et F sont tous deux représentables, avec $G = \mathbf{h}_X$ et $F = \mathbf{h}_Y$, alors $u : \mathbf{h}_Y \to \mathbf{h}_X$ provient d'un morphisme $u' : Y \to X$.

Il est donc naturel, lorsque G est représentable et que F est un sous-foncteur de G, de se poser les questions

(1) F est-il représentable ?

(2) Si oui, u' est-il une immersion (resp. immersion ouverte, immersion fermée) ?

Il y a un cas où la réponse à ces questions est immédiate. Soient F, G, H trois foncteurs: $(\boldsymbol{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ens}$, soient $u : F \to G$ et $v, w : G \to H$ des morphismes fonctoriels tels que u est noyau de la paire (v, w), i.e., pour tout $T \in \boldsymbol{Sch}/S$, $u(T)$ est *noyau* de $(v(T), w(T))$

$$F(T) \xrightarrow{u(T)} G(T) \underset{w(T)}{\overset{v(T)}{\rightrightarrows}} H(T);$$

(rappelons que cela signifie que $u(T)$ est injectif et que son image est l'ensemble des $\xi \in G(T)$ dont les images par $v(T)$ et $w(T)$ coïncident). Si G et H sont respectivement représentés par X et Y, avec

$$X \underset{w'}{\overset{v'}{\rightrightarrows}} Y,$$

alors, comme la catégorie $\boldsymbol{Sch}/S$ "possède des noyaux," il est clair que F sera représente par le préschéma Z, *noyau* de (v', w'). D'ailleurs, $Z \xrightarrow{u'} X$ est toujours une immersion ([G E.] I, 5.3.10).

Cependant, on ne pourrait faire le même raisonnement dans le cas dual des conoyaux car la catégorie $\boldsymbol{Sch}/S$ ne possède pas toujours de conoyaux.

Avant de définir le foncteur Grassmannienne dans le cas général, faisons quelques rappels.

Soit k un corps et k^I un espace vectoriel sur k, avec $I = [1, N]$ et soit $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique.
Alors pour $n < N$, on définit

$$\mathrm{Grass}_n(k^I) \begin{cases} = \{\text{sous-espaces de dimension } N - n \text{ de } k^I\} \\ = \{\text{espaces quotients de dimension } n \text{ de } k^I\} \end{cases}$$

Maintenant, pour $H \subset I$, $H = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_n\}$, si $\varphi_H : k^n \to k^I$ est l'homomorphisme d'espaces vectoriels tel que $\varphi_H(e_h) = e_{i_h}$, on définit

$$\mathrm{Grass}_H(k^I) = \{\text{monomorphismes d'espaces vectoriels } u \text{ tels que le composé suivant est l'identité: } k^n \xrightarrow{\varphi_H} k^I \xrightarrow{u} k^n\}$$

De plus, on a les relations évidentes

$$\mathrm{Grass}_H(k^I) \subset \mathrm{Grass}_n(k^I)$$

et

$$(**) \qquad \mathrm{Grass}_n(k^I) = \bigcup_H \mathrm{Grass}_H(k^I).$$

Remplaçons maintenant notre espace vectoriel k^I par un $\mathcal{O}$-Module libre $\mathscr{E} = \mathcal{O}_S^n$; alors en calquant sur le cas particulier d'un espace vectoriel sur un corps k, on arrive, comme précédemment, à définir $\varphi_H : \mathcal{O}_S^n \to \mathscr{E}$ et

$$\mathrm{Grass}_H(\mathscr{E})(S) = \{\text{morphismes de } \mathcal{O}_S\text{-modules } u \text{ tels que le composé suivant est l'identité: } \mathcal{O}_S^n \xrightarrow{\varphi_H} \mathscr{E} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_S^n\}$$

$(*)$

A partir de cette application, nous allons définir le foncteur Grass_H comme suit:
Soit $T \to S$ un S-préschéma, alors on considère

$$T \rightsquigarrow \mathrm{Grass}_H(\mathscr{E}_{(T)})(T)$$

et il s'agit bien d'un foncteur: $(\boldsymbol{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ens}$; nous montrerons qu'il est représentable simplement en montrant qu'il est noyau d'une certaine paire de morphismes fonctoriels de foncteurs représentables. Considérons les foncteurs

$$T \overset{G}{\rightsquigarrow} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)}, \mathscr{O}_T^n) = (\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)}, \mathscr{O}_T))^n$$

et

$$T \overset{F}{\rightsquigarrow} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{O}_T^n, \mathscr{O}_T^n) = (\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{O}_T^n, \mathscr{O}_T))^n.$$

Nous les connaissons bien et on déduit de ce que nous avons vu à leur sujet, qu'ils sont respectivement représentés par

$$\mathbf{V}(\mathscr{E})^n = \mathbf{V}(\mathscr{E}) \times_S \mathbf{V}(\mathscr{E}) \times_S \cdots \times_S \mathbf{V}(\mathscr{E}) \qquad (n \text{ fois})$$

et

$$\mathbf{V}(\mathscr{O}_T^n)^n.$$

Soient

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)}, \mathscr{O}_T^n) \underset{\beta(T)}{\overset{\alpha(T)}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{O}_T^n, \mathscr{O}_T^n)$$

les deux morphismes fonctoriels définis par $\alpha(u) = u \circ \varphi_H$ et $\beta(u) = 1$; alors, grâce à la définition (*), il est clair que le foncteur $T \rightsquigarrow \mathrm{Grass}_H(\mathscr{E}_{(T)})(T)$ n'est autre que le *noyau* de la paire (α, β) et d'après ce que nous avons vu, cela implique qu'il est représentable par un certain préschéma X_H que l'on peut aisément expliciter à partir des représentants respectifs de G et de F; on a donc

$$\mathrm{Grass}_H(\mathscr{E}_{(T)})(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X_H).$$

En s'inspirant de la relation (**), p. 382, on définit le foncteur Grassmannienne par

$$\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})(T) = \coprod_H \mathrm{Grass}_H(\mathscr{E}_{(T)})(T)/R$$

où R est une certaine relation d'équivalence introduite lorsqu'on recolle les différents X_H, et on prouve aisément que ce foncteur est représentable.

Schémas de Hilbert (Sém. Bourbaki, 1960, Grothendieck, exposé 221)

Il s'agit ici d'un programme beaucoup plus ambitieux, à savoir (heuristiquement):

Construire un foncteur représentable assignant à un préschéma X l'ensemble de tous ses sous-préschémas fermés.

Ce problème ne semble pas avoir de solution dans toute sa généralité, mais il est résolu dans le cas suivant:

Au lieu de préschémas quelconques, on prend des S-préschémas $X \to S$ tels que

(1) X est *projectif* sur S;

(2) on veut représenter les sous-préschémas fermés *S-plats.*

Précisément, nous voudrions représenter le foncteur

$$T \rightsquigarrow \mathrm{Hilb}_{X/S}(T) = \{\text{sous-préschémas fermés } T\text{-plats de } X_{(T)} = X \times_S T\}$$

Nous ne donnerons ici que quelques étapes de cette construction. D'abord nous savons que les sous-préschémas fermés d'un préschéma sont en correspondance biunivoque avec ses faisceaux d'idéaux quasi-cohérents; le problème revient donc à représenter le foncteur

$$T \rightsquigarrow \mathrm{Quot}_{X/S}(T) = \{\text{quotient } T\text{-plats de } \mathscr{O}_{X_{(T)}}\}$$

On démontre que $\mathrm{Quot}_{X/S}(T) = \coprod_P \mathrm{Quot}^P_{X/S}(T)$ où P parcourt l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels, et $\mathrm{Quot}^P_{X/S}(T) = \{\text{quotients de } \mathscr{O}_{X_{(T)}} \text{ dont } P \text{ est le "polynôme de Hilbert"}\}$; il suffit de représenter chaque $\mathrm{Quot}^P_{X/S}$. Mais on démontre que $\mathrm{Quot}^P_{X/S}(T) = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} A_\mu(T)$ où les $A_\mu(T)$ forment une suite croissante d'ensembles de quotients de $\mathscr{O}_{X_{(T)}}$ satisfaisant certaines conditions. On démontre ensuite qu'il suffit de représenter les $A_\mu(T)$, et ceux-ci sont représentés comme sous-foncteurs du foncteur Grass.

Conoyaux dans la catégorie des préschémas

Avant d'attaquer cette question dans la catégorie des préschémas, nous règlerons le cas des conoyaux dans le cas (très simple!) de la catégorie des espaces annelés.

D'abord, pour qu'un morphisme d'espaces annelés

$$f = (\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

soit un épimorphisme, il *suffit* que

(1) $\psi : X \to Y$ soit surjective;

(2) $\theta : \mathcal{O}_Y \to \psi_*(\mathcal{O}_X)$ soit injectif.

En effet, considérons dans la catégorie des espaces annelés la suite

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightrightarrows}} (Z, \mathcal{O}_Z)$$

et supposons que $u_1 f = u_2 f$, où $u_i = (\rho_i , \lambda_i)$, $i = 1, 2$; alors $\rho_1\psi = \rho_2\psi$, ce qui par (1) entraîne que $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ disons. Reste à montrer que $\lambda_1 = \lambda_2$; or on a la suite

$$\mathcal{O}_Z \underset{\lambda_2}{\overset{\lambda_1}{\rightrightarrows}} \rho_*(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\rho_*(\theta)} \rho_*(\psi_*(\mathcal{O}_X))$$

et $\rho_*(\theta)\,\lambda_1 = \rho_*(\theta)\,\lambda_2$; il s'agit ici en particulier d'homomorphismes de faisceaux de groupes abéliens et considérés comme tels, on peut parler de $\lambda_1 - \lambda_2$, et de la suite

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\lambda_1 - \lambda_2} \rho_*(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\rho_*(\theta)} \rho_*(\psi_*(\mathcal{O}_X)),$$

mais ρ_* est exact à gauche; donc $\rho_*(\theta)$ est injectif et $\rho_*(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$; il s'ensuit donc que $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$.

Démontrons maintenant l'existence des conoyaux dans la catégorie des espaces annelés. Soit

$$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y, \qquad f_i = (\psi_i , \theta_i), \qquad i = 1, 2,$$

une paire de morphismes d'espaces annelés et considérons, sur l'espace topologique sous-jacent à Y, la relation

$$S(y', y'') \equiv (\exists x \in X)(y' = \psi_1(x) \text{ et } y'' = \psi_2(x)).$$

Il ne s'agit en général pas d'une relation d'équivalence, mais nous savons qu'il existe une plus petite relation d'équivalence R contenant S; de plus,

dans la catégorie des espaces topologiques, l'espace quotient $Z = Y/R$ est le conoyau de

$$X \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} Y.$$

Il reste à construire un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Z$ convenable sur cet espace Z; pour cela, assignons à chaque ouvert U de Z l'anneau

$$\{t \in \Gamma(U, \rho_*(\mathcal{O}_Y)) \mid \rho_*(\theta_1)(t) = \rho_*(\theta_2)(t)\};$$

on vérifie alors sans peine que cet anneau est bien un anneau de sections $\Gamma(U, \mathcal{O}_Z)$ d'un faisceau $\mathcal{O}_Z$, et que $(Z, \mathcal{O}_Z)$ est le conoyau de la paire donnée, en ce sens que correspondant à la suite obtenue

$$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \longrightarrow Z,$$

la suite d'ensembles

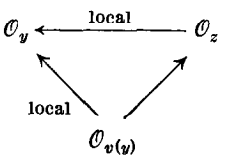
$$\mathrm{Hom}(Z, T) \to \mathrm{Hom}(Y, T) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(X, T)$$

est exacte pour tout espace annelé T.

Dans la catégorie ***Sch*** des préschémas, en général, une paire de morphismes ne possède pas de conoyau; considérons la suite

$$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{u} Z$$

où X, Y, f_1 et f_2 sont dans ***Sch*** et où (u, Z) est le conoyau de (f_1, f_2) dans la catégorie des espaces annelés; alors en général Z ***n'est pas un préschéma***; mais si Z est un préschéma et u un morphisme de préschémas, alors Z est le conoyau de (f_1, f_2) dans la catégorie des préschémas; en effet, d'abord, u étant un épimorphisme dans la catégorie des espaces annelés, u est *a fortiori* un épimorphisme dans la catégorie des préschémas. Si maintenant $v : Y \to T$ est un morphisme dans ***Sch***, tel que $vf_1 = vf_2$, alors il existe un morphisme d'espaces annelés $w : Z \to T$ tel que $v = wu$ et il reste à montrer que w est un morphisme d'espaces annelés en *anneaux locaux*, i.e., que pour chaque $z = u(y) \in Z$ l'homomorphisme $\mathcal{O}_{v(y)} \to \mathcal{O}_z$ déduit de w, est local; mais cela est immédiat:



Relations d'équivalence dans les préschémas

Etant donné un ensemble X, on sait qu'une relation d'équivalence dans X peut être considérée comme un certain sous-ensemble

$$R_f \subset X \times X$$

où f est une fonction de X dans un ensemble Y, avec

$$(x', x'') \in R_f \Leftrightarrow f(x') = f(x'').$$

En fait R_f est le *produit fibré* $X \times_Y X$. Donc d'un point de vue différent, mais aussi très commode pour nous, une relation d'équivalence sur X peut être considérée comme un ensemble R muni de deux applications

$$R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

avec des conditions sur p_1 et p_2 traduisant les propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité.

Ceci dit, soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie et X un objet de $\boldsymbol{C}$. Alors un objet R de $\boldsymbol{C}$, muni de deux morphismes

$$R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

est appelé *relation d'équivalence* sur X si l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, R)$ muni des deux applications induites par p_1 et p_2 :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, R) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, X)$$

définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, X)$, pour tout objet T de $\boldsymbol{C}$, de façon fonctorielle en T.

Si $\boldsymbol{C}$ possède des carrés cartésiens, alors à tout morphisme $f : X \to Y$ correspondent le produit fibré $X \times_Y X$ et deux projections

$$X \times_Y X \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

qui définissent une relation d'équivalence sur X, comme on le voit en se ramenant à la catégorie des ensembles (remarque du début du chapitre V, p. 376).

On peut maintenant se demander s'il existe un objet quotient X/R qui soit conoyau de (p_1, p_2):

$$X \times_Y X \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{p} X/R$$

Si la réponse est affirmative, alors le morphisme $f : X \to Y$ donné se factorisera en $f : X \xrightarrow{p} X/R \longrightarrow Y$. Lorsque $f = p$, on dit que f est un *épimorphisme effectif*. Il est clair que dans la catégorie des ensembles, tout épimorphisme est effectif.

Revenons maintenant à la catégorie des S-préschémas et au lieu de la lettre R, utilisons la lettre X_1 .

Considérons donc une relation d'équivalence

$$X_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

et la suite

$$X \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} X_1 \underset{q_2}{\overset{q_1}{\leftleftarrows}} X_2$$

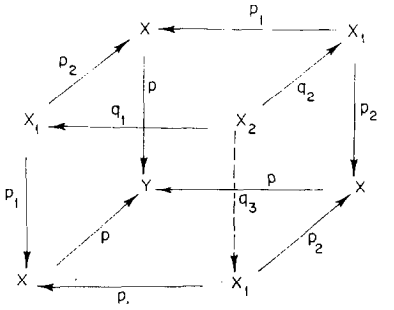
où X_2 , q_1 et q_2 sont définis par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xleftarrow{q_2} & X_2 = X_1 \times_X X_1 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ X & \xleftarrow{p_2} & X_1 \end{array}$$

Supposons qu'il existe un conoyau (p, Y) pour cette paire (p_1 , p_2); alors X_1 peut s'écrire $X \times_Y X$ et on a

$$\begin{aligned} X_2 &= (X \times_Y X) \times_X (X \times_Y X) \\ &\qquad (p_2) \qquad\quad (p_1) \\ &= X \times_Y X \times_Y X; \end{aligned}$$

en outre, grâce à la pleine fidélité de Hom (p. 376), il existe un morphisme $q_3 : X_2 \to X_1$,



rendant cartésiens les deux carrés

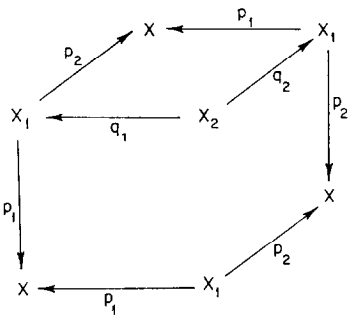
$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} X_1 & \xleftarrow{q_1} & X_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_3} \\ X & \xleftarrow[p_1]{} & X_1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} X_1 & \xleftarrow{q_2} & X_2 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_3} \\ X & \xleftarrow[p_2]{} & X_1 \end{array}$$

car dans la catégorie des ensembles, les éléments de X_2 sont de la forme $((x_1, x_2), (x_3, x_4))$, $x_i \in X$, avec $p(x_1) = p(x_2)$, $p(x_3) = p(x_4)$ et $x_2 = x_3$, c'est-à-dire de la forme (x_1, x_2, x_3), $x_i \subset X$, avec $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3)$, et alors q_3 n'est autre que l'application $(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_1, x_3)$.

En général, on ignore s'il existe un conoyau Y pour une relation d'équivalence quelconque

$$X_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X,$$

et sans cette hypothèse, du cube que nous venons de considérer, il ne reste a priori que



Mais comme

$$X_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

est une relation d'équivalence, elle doit satisfaire à une propriété correspondante à la *transitivité*; comme dans la catégorie des ensembles, tout épimorphisme est effectif, on en conclut que:

(1) Il existe un morphisme $q_3 : X_2 \to X_1$ rendant cartésiens les deux carrés (*).

En second lieu, comme une relation d'équivalence doit être *réflexive* et que dans le cas d'ensembles, cela s'exprime en disant que $p_1\Delta = 1_X = p_2\Delta$, où Δ est la diagonale $X \to X \times_Y X$, on peut affirmer que

(2) Il existe un morphisme $d : X \to X_1$ tel que $p_1 d = 1_X = p_2 d$. La *symétrie* s'exprime comme suit:

(3) Il existe un automorphisme $s : X \to X$ tel que $p_1 s = p_2$ et $p_2 s = p_1$.

Dans la catégorie ***Sch***$/S$, nous savons qu'il existe toujours une immersion naturelle $X \times_Y X \to X \times_S X$ ([G.E.] I, 5.3.5) donc on doit avoir la condition:

(4) Le morphisme $(p_1, p_2)_S : X_1 \to X \times_S X$ est une immersion. Ceci exprime le fait qu'il existe une "bijection" de X_1 sur le graphe d'une relation d'équivalence.

Réciproquement, si (1) ⋯ (4) sont vérifiés par

$$X_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

alors p_1 et p_2 définissent une relation d'équivalence comme on le voit en se ramenant à la catégorie des ensembles.

Théorème. *Etant donnée une relation d'équivalence*

$$X_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X,$$

si p_1 est fini et localement libre (ce qui entraîne la même propriété pour p_2 d'après (3)*) et si pour tout $x \in X$, $p_1(p_2^{-1}(x))$ est contenu dans un ouvert affine de X, il existe un conoyau Y de (p_1, p_2) qui est aussi le conoyau de (p_1, p_2) dans la catégorie des espaces annelés. En outre, le morphisme $X_1 \to X \times_Y X$ est un isomorphisme et $p : X \to Y$ est un morphisme fini et localement libre.*

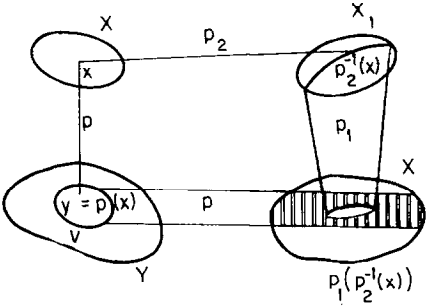
Avant de faire la preuve, donnons des explications sur la deuxième hypothèse: supposons le problème résolu, i.e., supposons qu'on ait trouvé

$$X_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{p} Y$$

avec un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p_2} & X_1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ Y & \xleftarrow{p} & X \end{array}$$

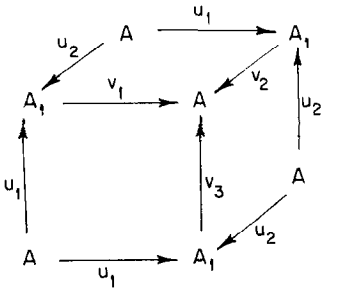
et que le p trouvé est *affine*; alors, comme p applique $p_1(p_2^{-1}(x))$ sur $\{y\}$, l'image inverse par p de tout voisinage ouvert affine V de y est un ouvert *affine* contenant $p_1(p_2^{-1}(x))$.



Preuve du théorème dans le "cas affine" (d'ailleurs dans ce cas, notre seconde hypothèse est trivialement vérifiée): $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ où A_1 est une A-algèbre finie et libre et (comme on peut supposer, en considérant les composantes connexes) de rang constant n. Alors $X_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$ où

$$A_2 = A_1 \underset{A}{\otimes} A_1 ,$$
$$(u_1) \quad (u_2)$$

($u_1 : A \to A_1$ et $u_2 : A \to A_1$ étant les homomorphismes correspondant à p_1 et p_2) et on a le diagramme suivant, dont les trois faces sont des "carrés cocartésiens," où il s'agit de construire un anneau B et un morphisme $j : B \to A$ permettant de compléter le cube.



On pose $B = \{a \in A \mid u_1(a) = u_2(a)\}$ et toute la preuve consiste à montrer que ce B est bien choisi.

(I) *A est entier sur B.* Pour démontrer ce fait, désignons par $A_{1_{[u_1]}}$ (resp. $A_{1_{[u_2]}}$), A_1 considérée comme A-algèbre au moyen de u_1 (resp. u_2) et pour chaque $a \in A$, désignons par

$$\chi_{[u_2]}(T, u_1(a)) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n \ (\sigma_i \in A)$$

le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $A_{1_{[u_2]}}$ représentant l'élément $u_1(a)$ de A_1 dans la représentation régulière de cette A-algèbre. Or

$$A_{2[v_2]} = (A_{1_{[u_2]}})_{(A_{1[u_1]})}$$

$$A_{2[v_3]} = (A_{1_{[u_2]}})_{(A_{1[u_2]})},$$

comme on voit aussitôt d'après les hypothèses faites sur le diagramme de la p. 391 et on en déduit aisément que

$$u_1(\chi_{[u_2]}(T, u_1(a))) = \chi_{[v_2]}(T, v_1(u_1(a)))$$

et

$$u_2(\chi_{[u_2]}(T, u_1(a))) = \chi_{[v_2]}(T, v_3(u_1(a)));$$

comme $v_3 u_1 = v_1 u_1$, il s'ensuit que les deux membres de gauche sont égaux, ce qui veut dire que les coefficients σ_i de $\chi_{[u_2]}(T, u_1(a))$ *appartiennent à B.* Mais d'après le théorème de Hamilton-Cayley

$$(u_1(a))^n - u_2(\sigma_1)(u_1(a))^{n-1} + \cdots + (-1)^n u_2(\sigma_n) = 0$$

donc

$$(u_1(a))^n - u_1(\sigma_1)(u_1(a))^{n-1} + \cdots + (-1)^n u_1(\sigma_n) = 0$$

et par suite

$$u_1(a^n - \sigma_1 a^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n) = 0;$$

mais d'après la propriété (2) des relations d'équivalence (p. 390), u_1 est injectif; donc $a^n - \sigma_1 a^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0$, ce qui montre bien que tout élément de A est entier sur B.

(II) *Si $x, y \in X = \mathrm{Spec}(A)$, alors*

$$\mathfrak{j}_x \cap B = \mathfrak{j}_y \cap B \Leftrightarrow (\exists t \in X_1)(x = p_1(t) \text{ et } y = p_2(t)).$$

L'idée ici est de montrer que le membre de droite définit une relation

d'équivalence, car il est clair que le membre de gauche en définit bien une. Seule la partie "$\Rightarrow$" présente des difficultés, la partie "$\Leftarrow$" étant triviale. Pour l'établir, nous procéderons par l'absurde. Supposons donc que $\mathfrak{j}_x \cap B = \mathfrak{j}_y \cap B$, et que pour tout $t \in X_1$ tel que $y = p_2(t)$, $x \neq p_1(t)$; si $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ sont les idéaux premiers de A_1 (en nombre fini) tels que $u_2^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{j}_y$, cela signifie que $\mathfrak{j}_x \neq u_1^{-1}(\mathfrak{q}_i)$ pour tous les $\mathfrak{q}_i$. Or $u_1^{-1}(\mathfrak{q}_i) \cap B = u_2^{-1}(\mathfrak{q}_i) \cap B = \mathfrak{j}_x \cap B$ par définition de B, et par hypothèse; du fait que pour tous les $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{j}_x \neq u_1^{-1}(\mathfrak{q}_i)$, il suit immédiatement du théorème de Cohen-Seidenberg, sachant que A est entier sur B, que pour tous les $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{j}_x \not\subset u_1^{-1}(\mathfrak{q}_i)$; mais alors, d'après ([B.Alg.Comm.] II, 1) il existe un élément $a \in \mathfrak{j}_x$ tel que $a \notin u_1^{-1}(\mathfrak{q}_i)$, i.e., $u_1(a) \notin \mathfrak{q}_i$, pour *tous* les $\mathfrak{q}_i$; on en déduit aisément que si $\sigma_n = N_{A_1[u_2]}(u_1(a))$ (i.e., le dernier coefficient de $\chi_{[u_2]}(T, u_1(a))$) alors $\sigma_n \notin \mathfrak{j}_y \cap B$. Mais comme $a \in \mathfrak{j}_x$, $\sigma_n \in \mathfrak{j}_x \cap B$, ce qui est contradictoire.

(III) Utilisant le fait que le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ est fermé et surjectif (par Cohen-Seidenberg), on démontre alors sans peine que $Y = \mathrm{Spec}(B)$ est le conoyau de (p_1, p_2) dans la catégorie des espaces annelés (voir pp. 385-386), donc aussi dans la catégorie des préschémas d'après une remarque de la page 386. On a ici que $p : X \to Y$ est le morphisme $\tilde{j}$ où j est l'injection: $B \to A$.

(IV) Montrons maintenant que le morphisme

$$(p_1, p_2)_Y : X_1 \to X \times_Y X$$

est un *isomorphisme*, et que $p : X \to Y$ est *fini et localement libre*.

(A) Comme par hypothèse

$$X_1 \xrightarrow{(p_1, p_2)_S} X \times_S X$$

est une immersion, le morphisme $(p_1, p_2)_Y$ est *injectif*, puisqu'on a la factorisation

$$(p_1, p_2)_S : X_1 \xrightarrow{(p_1, p_2)_Y} X \times_Y X \xrightarrow{j} X \times_S X$$

où $j = (p_1', p_2')_S$, p_1', p_2' étant les projections $X \times_Y X \to X$. Montrons d'abord que $(p_1, p_2)_Y$ est *surjectif*, et distinguons deux cas:

(A1) Soit $z \in X \times_Y X$ *rationnel* sur $\kappa(r(z))$ ($r : X \times_Y X \to Y$ morphisme structural, égal à pp_1' et pp_2'). Alors comme $\kappa(r(z)) \subset \kappa(p_i'(z)) \subset \kappa(z)$, $p_1'(z)$ et $p_2'(z)$ sont aussi rationnels sur $\kappa(r(z))$. On a $r(z) = p(p_1'(z)) = p(p_2'(z))$, donc par la partie (II) de la démonstration, *il existe un* $t \in X_1$

tel que $p_1(t) = p_1'(z)$, $p_2(t) = p_2'(z)$. Par suite le point $z' = (p_1, p_2)_Y(t)$ dans $X \times_Y X$ est au-dessus de $p_1'(z)$ et $p_2'(z)$. Mais comme ces derniers sont *rationnels* sur $\kappa(r(z))$, z est *l'unique* point de $X \times_Y X$ au-dessus d'eux ([G.E.] I, 3.4.9) et $(p_1, p_2)_Y(t) = z$.

(A2) Soit z *quelconque* dans $X \times_Y X$. Il existe un anneau local C, *plat* sur $\mathcal{O}_{r(z)}$, tel que $\kappa(C) = \kappa(r(z))$ ([G.E.] 0_{III}, 10.3.1). On fait le changement de base $Y' \to Y$, où $Y' = \operatorname{Spec}(C)$. Il y a alors au-dessus de z un point $z' \in X' \times_{Y'} X'$ *rationnel sur* $\kappa(r'(z'))$ (en vertu de l'existence de l'homomorphisme canonique $k' \otimes_k k' \to k'$ pour toute extension k' d'un corps k). On applique à z' et à la situation obtenue par ce changement de base le résultat de (A1), et on "descend" de façon triviale, car si $t' \in X_1'$ a pour image $z' \in X' \times_{Y'} X'$, alors la projection $t \in X_1$ de t' a pour image z.

(B) On sait maintenant que $(p_1, p_2)_Y$ est *bijectif*. Il s'agit de montrer que c'est un *isomorphisme*. Notons que A_1 est une $(A \otimes_B A)$-algèbre *finie*, puisque c'est déjà une A-algèbre finie. Donc

$$(p_1, p_2)_Y : \operatorname{Spec}(A_1) \to \operatorname{Spec}(A \otimes_B A)$$

est un morphisme *fini*, *bijectif*, donc une *immersion fermée* et l'homomorphisme correspondant $w : A \otimes_B A \to A_1$ est donc *surjectif*. Pour prouver qu'il est *injectif*, il suffit de prouver que pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(B)$, $w_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}} \to A_{1\mathfrak{p}}$ l'est ([B.Alg. Comm.] II, 3), on peut par suite supposer B *local*. Alors, comme A est entier sur B et qu'il n'y a qu'un nombre *fini* d'idéaux premiers (nécessairement maximaux) de A au-dessus de l'idéal maximal de B (ce sont les éléments d'une "classe d'équivalence" dans X), A est *semi-local*.

Notons maintenant le lemme suivant.

Lemme. *Soit B un anneau local de corps résiduel infini, $j : B \to A$ un homomorphisme de B dans un anneau semi-local A, tel que l'image de l'idéal maximal de B par j soit dans le radical de A. Soit M un A-module libre de rang n, N un B-sous-module de M engendrant M (comme A-module). Alors il existe dans N une base du A-module M.*

(Pour prouver ce lemme, on se ramène (à l'aide du lemme de Nakayama), après division par les radicaux, au cas où B est un corps et A un produit de corps).

Pour appliquer ce lemme, on se ramène d'abord au cas où le corps résiduel de B est infini, par une extension fidèlement plate de la base $\operatorname{Spec}(B)$ reposant comme dans (A2) sur ([G.E.] 0_{III}, 10.3.1).

On note ensuite que puisque $u_1 \otimes u_2 = w : A \otimes_B A \to A_1$ est sur-

jectif, $u_1(A)$ *engendre* le A-module $A_{1[u_2]}$. On applique le lemme avec $M = A_{1[u_2]}$, $N = u_1(A)$. On prend $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que les $u_1(a_i)$ forment une base de $A_{1[u_2]}$. Il suffit de voir que (a_i) est une *base* de A sur B, car alors w applique la base $(a_i \otimes 1)$ de $A \otimes_B A$ (considéré comme A-module par le 2e facteur) sur la base $(u_1(a_i))$ de $A_{1[u_2]}$, donc est *bijectif*.

Soit $g : \mathbf{Z}^n \to A$ l'homomorphisme de $\mathbf{Z}$-modules envoyant la base canonique sur (a_i). Il faut prouver que $j \otimes g : B \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^n \to A$ est bijectif. Or on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
A_2 & \underset{v_3}{\overset{v_1}{\rightleftarrows}} & A_1 & \xleftarrow{u_1} & A \\
\uparrow{\scriptstyle v_2 \otimes v_3 u_1 g} & (*) & \uparrow{\scriptstyle u_2 \otimes u_1 g} & & \uparrow{\scriptstyle j \otimes g} \\
A_1 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}^n & \underset{u_2 \otimes 1}{\overset{u_1 \otimes 1}{\rightleftarrows}} & A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}^n & \longleftarrow & B \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}^n \\
\uparrow{\scriptstyle i_1} & (**) & \uparrow{\scriptstyle i} & & \\
A_1 & \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightleftarrows}} & A & &
\end{array}$$

Les deux carrés $(*)$ de gauche sont co-cartésiens, car leurs composés avec $(**)$:

$$\begin{array}{ccc}
A_2 & \underset{v_3}{\overset{v_1}{\rightleftarrows}} & A_1 \\
\uparrow{\scriptstyle v_2} & & \uparrow{\scriptstyle u_2} \\
A_1 & \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightleftarrows}} & A
\end{array}$$

le sont par hypothèse et les deux carrés $(**)$ le sont aussi. Donc, comme par hypothèse $u_2 \otimes u_1 g$ est *bijectif*, $v_2 \otimes v_3 u_1 g$ l'est aussi. Mais les deux lignes sont *exactes*. Par le "lemme des cinq," $j \otimes g$ est bijectif. C.Q.F.D.

Théorie de la descente

La partie de cette théorie dont nous avons examiné quelques aspects à la fin du chapitre III est la plus facile. Elle consistait essentiellement, *étant donné* un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F} & & \mathscr{F}' \\
X & \longleftarrow & X' \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\
S & \longleftarrow & S'
\end{array}$$

à déduire de propriétés de X', f' ou $\mathscr{F}'$, des propriétés correspondantes de X, f ou $\mathscr{F}$.

Cependant, en théorie de la descente, on part en général d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathscr{F}' \\ & X' & \\ & \downarrow{\scriptstyle f'} & \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

où on ne sait rien de l'existence d'un X, d'un f ou d'un $\mathscr{F}$. Supposons pour le moment un tel problème résolu en ce qui concerne l'existence de X et de f rendant le carré cartésien. Alors, si on pose $S'' = S' \times_S S'$, ce qui définit une *relation d'équivalence* sur S'

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{g'} & X' & \underset{p'_2}{\overset{p'_1}{\leftleftarrows}} & X'' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ S & \xleftarrow{g} & S' & \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} & S'' \end{array}$$

on peut former par changement de base $f : X \to S$ les deux carrés cartésiens (superposés) de droite, avec $X'' = X' \times_X X' = S'' \times_S X$. Donc la donnée d'un X *entraîne* celle d'un couple d'équivalence $X' \underset{\leftarrow}{\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows}} X''$ tel que nous venons de le décrire. On appelle *donnée de descente sur* X', une *relation d'équivalence* $X' \underset{p'_2}{\overset{p'_1}{\leftleftarrows}} X''$:

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & \underset{p'_2}{\overset{p'_1}{\leftleftarrows}} & X'' \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ S & \xleftarrow{g} & S' & \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} & S'' \end{array}$$

rendant les deux carrés de droite cartésiens. D'ailleurs, on suppose généralement que g est un *épimorphisme effectif universel*, c'est-à-dire que

g est un *épimorphisme effectif* (p. 388) et le demeure par tout changement de base

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xleftarrow{g_1} & S_1' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

Donc, si une "solution" X existe, alors comme g' est encore un épimorphisme effectif, il est conoyau de la donnée

$$X' \underset{p_2'}{\overset{p_1'}{\rightleftarrows}} X''$$

donc la solution X est *unique.*

Théorème. *Tout morphisme fidèlement plat et quasi-compact est un épimorphisme effectif universel.*

Preuve. Seul le "effectif" présente des difficultés, et il s'agit pour cela de prouver sous l'hypothèse f.p.q.c. que ce morphisme est le conoyau de la relation d'équivalence qu'il définit:

$$S'' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} S' \xrightarrow{p} S$$

D'abord nous savons par la Proposition 9, p. 349, que la topologie de S est bien la topologie quotient de celle de S', pour la relation d'équivalence définie par p.

Il ne reste donc plus que la question des faisceaux; posons $h = pp_1 = pp_2$; alors il s'agit de montrer que la suite induite

$$\mathcal{O}_S \to p_*(\mathcal{O}_{S'}) \rightrightarrows h_*(\mathcal{O}_{S''})$$

définit un conoyau. En fait nous ferons plus que cela: nous montrerons que si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent, $\mathscr{F}' = p^*(\mathscr{F})$, $\mathscr{F}'' = h^*(\mathscr{F})$ alors la suite induite

$$\mathscr{F} \to p_*(\mathscr{F}') \rightrightarrows h_*(\mathscr{F}'')$$

est exacte. On peut se ramener au cas affine: $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = \mathrm{Spec}(A')$, $S'' = \mathrm{Spec}(A'')$ où A' est un A-module *fidèlement plat*, où $A'' = A' \otimes_A A'$ avec $u_1(a') = a' \otimes 1$ et $u_2(a') = 1 \otimes a$ pour tout $a' \in A'$.

Soit M un A-module; alors il s'agit de montrer que

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{r} & M \underset{A}{\otimes} A' & \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} & M \underset{A}{\otimes} A'' = M \underset{A}{\otimes} A' \underset{A}{\otimes} A' \\ & & \| & & \| \\ & & M' & & M'' \end{array}$$

avec

$$r : m \rightsquigarrow m \otimes 1$$

$$r_1 : m \otimes a' \rightsquigarrow m \otimes a' \otimes 1$$

$$r_2 : m \otimes a' \rightsquigarrow m \otimes 1 \otimes a'$$

est exacte.

(1) *Cas ou le morphisme* $u : A \to A'$ (faisant de A' un A-module fidèlement plat) admet un inverse à gauche $v : A' \to A$.

Alors l'homomorphisme $s : M' \to M$ appliquant $m \otimes a'$ sur $mv(a')$, est un inverse à gauche de r; de plus si l'on définit $s_1 : M'' \to M'$ et $s_2 : M'' \to M'$ par

$$s_1 : m \otimes a'_1 \otimes a'_2 \rightsquigarrow mv(a'_1) \otimes a'_2$$

et

$$s_2 : m \otimes a'_1 \otimes a'_2 \rightsquigarrow mv(a'_2) \otimes a'_1$$

alors on vérifie aussitôt que $s_1 r_1(M') \subset r(M)$, $s_2 r_2(M') \subset r(M)$, $s_1 r_2 = 1_{M'}$ et $s_2 r_1 = 1_{M'}$.

D'abord, que r soit injectif est trivial puisqu'il a un inverse à gauche. D'autre part, soit $w : N \to M'$ un A-homomorphisme tel que $r_1 w = r_2 w$; alors $s_1 r_1 w = s_1 r_2 w = w$; donc $w(N) \subset s_1 r_1(M') \subset r(M)$; donc $r(sw) = w$, et w se factorise par M, ce qui termine la preuve dans ce cas.

(2) *Cas général.* Supposons qu'il existe un morphisme *fidèlement plat* $A \to A_1$ tel que la suite tensorisée soit exacte:

$$M \underset{A}{\otimes} A_1 \to M' \underset{A}{\otimes} A_1 \rightrightarrows M'' \underset{A}{\otimes} A_1 \qquad (*)$$

alors par fidèle platitude la suite originale sera aussi exacte. Mais un tel morphisme plat existe bien, à savoir $A \xrightarrow{u} A'$: en effet $a'_1 \otimes a'_2 \rightsquigarrow a'_1 a'_2$ définit un inverse à gauche de $\mu_1 : A' \to A' \otimes_A A'$, on est ramené à la situation de (1) et la suite (*) est bien exacte, ce qui termine la preuve.

A titre d'exercice, le lecteur démontrera que l'épimorphisme (fini surjectif)

$$\mathrm{Spec}(k[T]) \to \mathrm{Spec}(k[T^3, T^5])$$

n'est pas effectif.

Nous en arrivons maintenant aux conditions sur f' et p permettant de "descendre" toute donnée de descente.

$$\begin{array}{ccc} X & \dashleftarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow[p]{} & S' \end{array}$$

Il n'y a pas de conditions nécessaires et suffisantes, mais le tableau suivant indique les conditions suffisantes actuellement connues:

p	f'
F.p.q.c. + radiciel	Aucune hypothèse
Localement libre + fini + surjectif	Quasi-projectif
F.p.q.c.	Quasi-affine
F.p.q.c.	Étale + séparé + type fini
Fini + surjectif + présentation finie	Étale + séparé + type fini
Type fini + surjectif + universellement ouvert + S localement noethérien	Étale + séparé + type fini
Propre + surjectif + présentation finie	Revêtement étale

Un contre-exemple dût à Hironaka montre qu'on pourrait difficilement améliorer les hypothèses précédentes; dans cet exemple, on part d'un morphisme

$$X_0 \xrightarrow{f_0} S = \mathrm{Spec}(k),$$

où k est un corps, tel que X_0 est de dimension 3, f_0 est propre et lisse et

tel que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ opère sans point fixe sur X_0, i.e., il existe un morphisme $u_0 : X_0 \to X_0$ tel que $u_0^2 = 1$; si k' est un surcorps de k avec $[k' : k] = 2$, on pose $S' = \mathrm{Spec}(k')$ et il existe un $\sigma : S' \to S'$ tel que $\sigma^2 = 1$ et $\sigma \neq 1$; enfin, Hironaka montre qu'on peut choisir X_0 et u_0 tels qu'il existe a, $b \in X_0$ rationnels sur k tels que $b = u_0(a)$ et a et b *ne sont pas dans un même ouvert affine.* Posons $X' = X_0 \otimes_k k'$ et $u = u_0 \times_S \sigma$; de plus soit

$$X' \underset{p_2'}{\overset{p_1'}{\leftarrow\!\!\leftarrow}} X''$$

la relation d'équivalence définie par u; on voit aisément que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & X' = X_0 \underset{k}{\otimes} k' & \underset{p_2'}{\overset{p_1'}{\leftarrow\!\!\leftarrow}} & X'' \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow \\ S = \mathrm{Spec}(k) & \xleftarrow{p} & S' = \mathrm{Spec}(k') & \leftleftarrows & S'' \end{array}$$

les deux carrés de droite sont cartésiens, donc on a bien une *donnée de descente.*

Il est clair que f' est encore propre, lisse, de dimension 3, et que p est localement libre fini et surjectif. Mais on prouve aisément qu'il y a deux points a', b' de X' tels que $u(a') = b'$ et qui ne sont pas dans un ouvert affine. Donc d'après la remarque de la page 391 *il n'existe pas* dequotient pour le couple d'équivalence (p_1', p_2').

Ce contre-exemple nous donne en même temps un exemple de morphisme propre f', qui *n'est pas quasi-projectif*, sachant que p est ici localement libre, fini et surjectif (voir liste précédente).

Préschémas en groupes

Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie. Rappelons que $X \in \boldsymbol{C}$ est un *objet en groupes* dans $\boldsymbol{C}$ si $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, X)$ est un groupe (de façon fonctorielle pour tout $T \in \boldsymbol{C}$) i.e., s'il existe une loi de groupe fonctorielle en T:

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, X) \times \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, X) \xrightarrow{\mu(T)} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, X)$$

Dans la catégorie $\boldsymbol{Sch}/S$, si X est un S-préschéma en groupes au moyen du morphisme m

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{m} & X \times_S X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ S & & \end{array}$$

où f est le morphisme structural, il existe une "section unité" $e : S \to X$ de f.

On définit semblablement un S-préschéma en groupes G opérant sur un S-préschéma E au moyen d'une loi (fonctorielle en T)

$$\mathrm{Hom}_S(T, G) \times \mathrm{Hom}_S(T, E) \to \mathrm{Hom}(T, E)$$

satisfaisant aux axiomes évidents, ou encore directement, par un morphisme $G \times_S E \to E$.

De même le produit de préschémas en groupes G_1 et G_2 est un préschéma en groupes grâce à la relation

$$\mathrm{Hom}_S(T, G_1 \times_S G_2) = \mathrm{Hom}_S(T, G_1) \times \mathrm{Hom}_S(T, G_2).$$

Lorsqu'on effectue un changement de base $S \leftarrow S'$, on passe d'un "S-groupe" à un "S'-groupe"

$$\begin{array}{ccc} G & \longleftarrow & G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

Un *foncteur en groupes* (pour une catégorie quelconque $\boldsymbol{C}$) est un foncteur de la forme

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Gr}.$$

Un tel foncteur (pour $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Sch}/S$) n'est pas nécessairement *représentable.*

Exemples de schémas en groupes

Nous examinerons d'abord les *groupes constants.* Soit S un préschéma et E un ensemble; posons

$$E_S = \coprod_{\sigma \in E} S_\sigma$$

où les S_σ sont des copies de S, au moyen d'isomorphismes

$$i_\sigma : S \xrightarrow{\sim} S_\sigma , \qquad \sigma \in E.$$

Il est clair qu'il s'agit bien là d'un préschéma; pour un S fixe, $E \rightsquigarrow E_S$ est un foncteur $\boldsymbol{Ens} \to \boldsymbol{Sch}/S$; car soit $\varphi : E \to F$ une application d'ensembles; alors on définit le S-morphisme

$$\varphi_S : E_S \to F_S$$

de la manière naturelle par les composantes

$$i_{\varphi(\sigma)} i_\sigma^{-1} : S_\sigma \to S_{\varphi(\sigma)} .$$

Ce foncteur préserve les produits, c'est-à-dire que pour tout couple d'ensembles, on a

$$(E \times F)_S \simeq E_S \times_S F_S ;$$

car

$$E_S \times_S F_S = \coprod_{\substack{\sigma \in E \\ \tau \in F}} S_\sigma \times_S S_\tau$$

et l'isomorphisme est obtenu au moyen de ses composantes

$$(i_\sigma , i_\tau)_S \, i_{(\sigma,\tau)}^{-1} : S_{\sigma,\tau} \to S_\sigma \times_S S_\tau .$$

Le cas où $E = G$ est un groupe est le plus intéressant et il permet de définir canoniquement un schéma en groupes: on prend comme loi de composition

$$G_S \times_S G_S \to G_S ,$$

le morphisme $(G \times G)_S \to G_S$ induit par la loi de groupe $m : G \times G \to G$ donnée. Regardons ce que cela donne; on a

$$\coprod_{\sigma,\tau \in G} S_\sigma \times_S S_\tau \to \coprod_{\lambda \in G} S_\lambda$$

qui doit être induit par la loi de groupe m; il s'agit donc de

$$S_\sigma \times_S S_\tau \xrightarrow{(i_\sigma, i_\tau)_S^{-1}} S \xrightarrow{i_{\sigma\tau}} S_{\sigma\tau}$$

Enfin, la section neutre $e_S : S \to G_S$ n'est autre que $i_\epsilon : S \to S_\epsilon$ où ϵ

est l'élément neutre de G. Lorsque G est réduit à son élément neutre, i.e., $G = \{\epsilon\}$, on retrouve S mais cette fois, considéré comme préschéma en groupes. Enfin, on vérifie aisément que les sections $g \in \mathrm{Hom}_S(S, G_S) = \Gamma(G_S/S)$ sont les applications *localement constantes* $(g \mid U = i_\sigma \mid U)$ (car pour une telle section g et un point $s \in S$, il doit exister un voisinage V de s dans S tel que $g(V)$ soit contenu tout entier dans un même S_σ).

Jusqu'ici, S était un préschéma quelconque; nous allons maintenant supposer que S et X sont affines: $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$. On parle alors de "S-groupes affines." B est alors une A-algèbre et pour étudier les structures de groupes dans cette catégorie, il suffit d'étudier les cogroupes dans la catégorie des A-algèbres. Une structure de cogroupe sur une A-algèbre B est obtenue comme on sait par la donnée d'un A-homomorphisme d'algèbres

$$\Delta : B \xrightarrow{\text{(comultiplication)}} B \underset{A}{\otimes} B$$

avec certains axiomes dont l'existence d'une augmentation $\epsilon : B \to A$ et l'existence d'un diagramme commutatif exprimant l'associativité:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes B \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta\otimes 1} \\ B \otimes B & \xrightarrow{1\otimes\Delta} & B \otimes B \otimes B \end{array}$$

Un cogroupe (voir les notes du Professeur Hilton) dans la catégorie des A-algèbres est appelé une *hyperalgèbre* (ou *bigèbre*).

Dans notre exemple du groupe constant, supposons que G soit *fini* et posons $S = \mathrm{Spec}(A)$; alors comme $G_S = \mathrm{Spec}(A^G)$, l'hyperalgèbre correspondante est A^G avec comme comultiplication:

$$\Delta : A^G \to A^G \otimes A^G = A^{G\times G}$$

donnée par $\Delta(f)(\sigma, \tau) = f(\sigma\tau)$, où $f : G \to A$ est un élément arbitraire de A^G.

Autres exemples de S-groupes

(1) *Le "groupe additif"* $\mathbf{G}_a$

D'abord le cas "absolu" où $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$; posons $G_a(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ considéré comme groupe additif. Ce foncteur en groupes est représen-

table, avec $\mathbf{G}_a = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t])$ (t indéterminée) comme représentant; démontrons ce fait en prenant, pour simplifier, $S = \mathrm{Spec}(A)$ affine:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S, \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t])) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\text{-alg}}(\mathbf{Z}[t], A) \simeq A = G_a(S).$$

L'hyperalgèbre correspondante est $B = \mathbf{Z}[t]$ et on vérifie sans peine que

$$\Delta : B \to B \underset{A}{\otimes} B$$

est donnée par $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$. Enfin, l'augmentation $\epsilon : B \to \mathbf{Z}$ est donnée par $\epsilon(t) = 0$.

Pour passer au cas "relatif," on prendra

$$(\mathbf{G}_a)_S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t]) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})} S.$$

(2) *Le "groupe multiplicatif"* $\mathbf{G}_m$

D'abord le cas absolu: posons

$$G_m(S) = (\Gamma(S, \mathcal{O}_S))^*$$

i.e., le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On vérifie aisément que ce foncteur est représenté par $\mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$ où t est une indéterminée. On passe au cas relatif comme dans l'exemple précédent.

(3) *Généralisation: groupes diagonalisables*

Soit M un groupe commutatif (abstrait). On veut lui faire correspondre un S-préschéma en groupes. Pour ce faire, on prend

$$D(M)(S) = \mathrm{Hom}_{Gr}(M, \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*)$$

Alors ce foncteur est représentable et $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[M])$ est son objet représentant; pour vérifier ce fait, prenons pour simplifier le cas $S = \mathrm{Spec}(A)$; alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[M])) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\text{-alg}}(\mathbf{Z}[M], A)\\ &= \{\text{homomorphismes de l'algèbre de groupe } \mathbf{Z}[M] \text{ dans } A\};\end{aligned}$$

or la donnée d'un tel homomorphisme est équivalente, par les propriétés élémentaires des algèbres de groupes, à celle d'un homomorphisme de M dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A; donc $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[M])) \simeq \mathrm{Hom}(M, A^*)$ tel que prévu. Ici l'hyperalgèbre

correspondante est $B = \mathbf{Z}[M]$ et $\Delta : m \rightsquigarrow m \otimes m$, $m \in M$; enfin $\epsilon(m) = 1$.

Ceci dit, considérons une suite exacte de groupes commutatifs

$$M' \xrightarrow{u} M \to M'' \to 0$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \to D(M'')(S) \to D(M)(S) \to D(M')(S)$$

ou encore, si l'on passe aux schémas en groupes abéliens, la suite exacte

$$0 \to D_S(M'') \xrightarrow{\varphi} D_S(M) \xrightarrow{{}^t u} D_S(M')$$

c'est-à-dire que φ est le noyau, au sens de la théorie des schémas, de la paire $({}^t u$, section unité).

Prenons par exemple l'homomorphisme $u : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ qui consiste à multiplier par un entier fixe n, et la suite exacte

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{u} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0.$$

Correspondant à u, on a le morphisme

$${}^t u : G_m \to G_m \qquad (s \rightsquigarrow s^n),$$

ce qui donne, par passage aux schémas, la suite exacte

$$0 \to \mu_{n,S} \to \mathbf{G}_{m,S} \xrightarrow{{}^t u} \mathbf{G}_{m,S}$$

où $\mu_{n,S}$ est appelé, pour des raisons évidentes, le schéma en groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; il est isomorphe à

$$\mathrm{Spec}(A[\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}]) = \mathrm{Spec}(A[t]/(t^n - 1)) \qquad \text{où} \quad A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S).$$

Cas particulier où A est un corps algébriquement clos k:

(a) Cas où n n'est pas un multiple de la caractéristique p de k. Alors

$$t^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} (t - \omega^j), \qquad \omega \text{ racine } n^{\text{ième}} \text{ de } 1$$

et

$$k[t]/(t^n - 1) \simeq \bigoplus_i k_i, \qquad k_i \simeq k;$$

alors $\mu_{n,S}$ est un schéma composé de n points, où les anneaux locaux sont des *corps*.

(b) Cas où $n = p$:

Alors $t^n - 1 = (t-1)^p$ et $\mu_{n,S}$ est composé d'un seul point, mais l'anneau local en ce point est $k[t]/(t-1)^p$, qui est un anneau noethérien *ayant des éléments nilpotents.*

On trouve ainsi, même dans ce cas, un *noyau non trivial* de l'homomorphisme $s \rightsquigarrow s^p$, alors que du point de vue classique, c'est un homomorphisme de groupes *bijectif*, mais *non un isomorphisme* au sens des variétés algébriques; on voit en fait qu'il y a bien dans ce cas un noyau, mais il est de nature "infinitésimale."

Donnons maintenant des exemples de phénomènes qui n'ont pas d'analogues dans la théorie classique des groupes algébriques.

Partons du schéma en groupes "constant" $H = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_S$, où S est le spectre d'un *anneau de valuation discrète* A, de corps résiduel k et de corps des fractions K, de sorte que S a un point fermé et un point générique (ouvert), et on peut écrire $H = \mathrm{Spec}(A \oplus A)$.

$$\begin{array}{ll} H \begin{cases} \times \odot & (1) \\ \times \odot & (0) \end{cases} \\ S \{ \times \odot \end{array}$$

On définit deux *sous-groupes* G_1, G_2 de H de la facon suivante:

(1) G_1 est un *sous-groupe fermé* de H, formé du sous-préschéma fermé, réunion de la section neutre (0) et du point fermé de la section (1); de façon précise $G_1 = \mathrm{Spec}(A \oplus k)$, la loi de groupe m_1 étant donnée par les homomorphismes canoniques

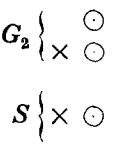
$$G_1 \begin{cases} \times & A \xrightarrow{\sim} A \underset{A}{\otimes} A \\ \times \odot & k \xrightarrow{\sim} A \underset{A}{\otimes} k \end{cases} \qquad A \to k \underset{A}{\otimes} k \simeq k.$$

$$S \{ \times \odot$$

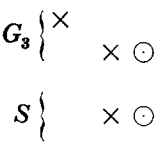
On vérifie aussitôt que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times_S G_1 & \xrightarrow{j_1 \times_S j_1} & H \times_S H \\ \downarrow{\scriptstyle m_1} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ G_1 & \xrightarrow{\quad j_1 \quad} & H \end{array}$$

est commutatif, donc définit bien un sous-groupe de H. Ce sous-groupe est *non-plat* sur S, bien que H soit évidemment *étale et fini* sur S.



(2) G_2 est le *sous-préschéma ouvert* de H, réunion de la section neutre (0) et du point générique de la section (1); de façon précise, $G_2 = \mathrm{Spec}(A \oplus K)$ et on vérifie ausitôt que c'est bien un sous-groupe de H. Ce sous-groupe est *ouvert, mais non fermé.*



(3) Considérons le groupe produit

$$G_3 = G_1 \times_S G_2 = \mathrm{Spec}(A \oplus k \oplus K).$$

Les immersions canoniques $j_1 : G_1 \to H$, $j_2 : G_2 \to H$ définissent (puisque H est un schéma en groupes commutatifs) *un homomorphisme* de schémas en groupes $j = (j_1, j_2)_S : G_1 \times_S G_2 \to H$ qui correspond à l'homomorphisme d'anneaux

$$A \oplus A \to A \oplus (k \oplus K)$$

qui est l'identité sur le premier facteur A, l'homomorphisme canonique envoyant a dans $(\bar{a}, a)$ $(\bar{a} \in k, a \in K)$ sur le second facteur A. C'est un *monomorphisme bijectif* de schémas qui *n'est pas une immersion* (ni *a fortiori* un isomorphisme).

Topologies de Grothendieck

En 1950, A. Weil a introduit en géométrie algébrique la notion *d'espace fibré* sur une variété algébrique V, la topologie étant celle de Zariski, et avec la condition usuelle de "trivialité locale." Mais vers 1957, Serre s'est aperçu qu'il est nécessaire de considérer aussi des "fibrés"

d'un type plus général qui ne sont pas "localement triviaux" pour la topologie de Zariski, mais ont la propriété plus générale suivante: pour tout point $x \in V$, il y a un voisinage U (de Zariski) de x et un *revêtement étale* U' de U tel que, par "pull-back" au moyen de $U' \to U$, le fibré devienne trivial *au-dessus de* U'.

Le passage à un revêtement étale d'un ouvert peut donc être considéré comme une "localisation" d'un nouveau type, et les familles de morphismes étales finis $U_\alpha \to U$ au-dessus d'un ouvert U d'un préschéma X comme une sorte de "recouvrement" de U, "plus fin" qu'un recouvrement ouvert au sens habituel.

Notons maintenant qu'en topologie, l'ensemble des recouvrements ouverts de parties ouvertes d'un espace X a les propriétés suivantes:

(a) l'identité $U \to U$ est un recouvrement de U;

(b) si $(U_\alpha \to U)_{\alpha \in I}$ est un recouvrement de U et si, pour tout α, $(V_{\alpha\beta} \to U_\alpha)_{\beta \in J_\alpha}$ est un recouvrement de U_α, alors $(V_{\alpha\beta} \to U_\alpha \to U)_{\alpha,\beta}$ est un recouvrement de U;

(c) si $(U_\alpha \to U)$ est un recouvrement de U et si $V \subset U$ est un ouvert quelconque, $(V \cap U_\alpha \to V)$ est un recouvrement de V.

On est ainsi conduit à la notion de *topologie* $\mathscr{T}$ *sur une catégorie*; c'est un couple (***Cat*** $\mathscr{T}$, Cov $\mathscr{T}$) formé des deux éléments suivants:

(1) ***Cat*** $\mathscr{T}$ est une catégorie où les produits fibrés existent

(2) Cov $\mathscr{T}$ est un ensemble de familles $\Phi(I, U) = (U_\alpha \to U)_{\alpha \in I}$ de morphismes de ***Cat*** $\mathscr{T}$ ("familles couvrantes") satisfaisant aux trois axiomes:

(a) si $f : U \to U$ est un isomorphisme de ***Cat*** $\mathscr{T}$, alors $\{f\} \in \mathrm{Cov}\,\mathscr{T}$;

(b) si $(U_\alpha \to U)$ et $(V_{\alpha\beta} \to U_\alpha)$ (pour tout α) appartiennent à Cov $\mathscr{T}$, alors $(V_{\alpha\beta} \to U_\alpha \to U)_{\alpha,\beta}$ appartient à Cov $\mathscr{T}$;

(c) si $V \to U$ est un morphisme de ***Cat*** $\mathscr{T}$ et $(U_\alpha \to U)$ appartient à Cov $\mathscr{T}$, alors $(V \times_U U_\alpha \to V)$ appartient à Cov $\mathscr{T}$.

On retrouve le cas des recouvrements ouverts en prenant pour ***Cat*** $\mathscr{T}$ la catégorie ***Top*** X dont les objets sont les ouverts d'un espace topologique X, et

$$\mathrm{Hom}(U, V) = \begin{cases} \varnothing \text{ si } U \not\subset V \\ \{i\},\ i : U \to V \text{ injection canonique si } U \subset V \end{cases}$$

Exemple de topologie. X étant un préschéma, on prend ***Cat*** $\mathscr{T}_X$: caté-

gorie des X-préschémas *étales* sur X, Cov $\mathscr{T}_X$: ensemble des familles finies $(U_i \to U)$ de morphismes étales sur un ouvert U (de Zariski) de X, la réunion des images (ouverts) des U_i étant U. C'est la *topologie étale* sur X, $\boldsymbol{Et}_X$.

Si $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ sont deux topologies de Grothendieck, un *morphisme de topologies* $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$ est un *foncteur* $F : \boldsymbol{Cat}\,\mathscr{T} \to \boldsymbol{Cat}\,\mathscr{T}'$ qui transforme produits fibrés en produits fibrés et les familles couvrantes de $\mathscr{T}$ en familles couvrantes de $\mathscr{T}'$.

Préfaisceaux et faisceaux abéliens. Si X est un espace topologique, un *préfaisceau* (en groupes abéliens) sur X, peut être défini comme un *foncteur*

$$P : (\boldsymbol{Top}_X)^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ab}$$

et pour exprimer que c'est un *faisceau* (i.e., qu'il satisfait aux deux axiomes de Godement), il revient au même de dire que pour tout ouvert $U \subset X$ et tout recouvrement ouvert $(U_\alpha \to U)$ de U, le diagramme de groupes abéliens

$$P(U) \to \prod_\alpha P(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} P(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est *exact* (les flèches étant les homomorphismes de "restriction" évidents). D'où les généralisations pour une topologie de Grothendieck $\mathscr{T}$: un *préfaisceau* P (abélien) est un *foncteur*

$$P : (\boldsymbol{Cat}\,\mathscr{T})^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ab}$$

et on dit que c'est un *faisceau* si pour tout $(U_\alpha \to U) \in \mathrm{Cov}\,\mathscr{T}$ le diagramme

$$P(U) \to \prod_\alpha P(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} P(U_\alpha \times_U U_\beta)$$

est exact (les flèches provenant des $U_\alpha \to U$ et des deux "projections" $U_\alpha \times_U U_\beta \to U_\alpha$ et $U_\alpha \times_U U_\beta \to U_\beta$).

Exemple. Tout *foncteur représentable* $F : (\boldsymbol{Sch}/X)^{\mathrm{opp}} \to \boldsymbol{Ab}$ est un *faisceau* pour la *topologie étale*. En effet, si $(U_i \to U)$ est une famille couvrante, le diagramme

$$U \xleftarrow{p} \coprod_i U_i \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} \coprod_{i,j} (U_i \times_U U_j)$$

fait de p le conoyau de (p_1, p_2), parce que

$$\coprod_{i,j}(U_i \times_U U_j) = \Big(\coprod_i U_i\Big) \times_U \Big(\coprod_i U_i\Big)$$

et que p est un *épimorphisme effectif* (p. 388). Donc, par *définition* d'un conoyau, puisque $F(U) = \mathrm{Hom}_X(U, Y)$ par hypothèse, on a un diagramme exact

$$F(U) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j),$$

Faisceau associé à un préfaisceau. Tout faisceau étant un préfaisceau on a un foncteur "oubliant" $\boldsymbol{Faisc_{\mathcal{T}}} \to \boldsymbol{Préfaisc_{\mathcal{T}}}$. Ce foncteur a un *adjoint à gauche* $P \to P^{\#}$, $P^{\#}$ est le "faisceau associé" au préfaisceau P.

Pour le définir, on procède dans une première étape par "passage à la limite inductive" un peu comme dans le cas classique (mais il n'y a pas ici de "fibre"!). Pour toute famille couvrante $(U_\alpha \to U)$, on pose

$$P_U(U_\alpha \to U) = \mathrm{Ker}\Big(\prod_\alpha P(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} P(U_\alpha \times_U U_\beta)\Big)$$

et pour un U fixé, on définit $P^+(U)$ comme $\varinjlim P_U(U_\alpha \to U)$ prise sur l'ensemble de *toutes* les familles couvrantes de "but" U (il s'agit ici de la notion de limite inductive dans une catégorie, voir les notes du Professeur Hilton). P^+ n'est pas encore un faisceau, mais on prouve que P^{++} est le faisceau associé cherché $P^{\#}$.

On montre alors que $\boldsymbol{Faisc_{\mathcal{T}}}$ est une *catégorie abélienne ayant assez d'injectifs*, d'où la possibilité de définir une notion de *cohomologie* d'un faisceau en appliquant les raisonnements généraux de Grothendieck [T]. On a aussi une notion de *cohomologie de Čech*: pour une famille couvrante $(U_\alpha \to U)$ on a une "résolution" infinie

$$U \xleftarrow{0} \{U_\alpha\} \underset{1}{\overset{0}{\leftarrow}} \{U_\alpha \times_U U_\beta\} \underset{2}{\overset{0}{\underset{1}{\leftarrow}}} \{U_\alpha \times_U U_\beta \times_U U_\gamma\} \underset{3}{\overset{0}{\underset{1}{\overset{2}{\leftarrow}}}} \{U_\alpha \times_U U_\beta \times_U U_\gamma \times_U U_\delta\} \underset{4}{\overset{0}{\underset{1}{\overset{2}{\underset{3}{\leftarrow}}}}} \cdots$$

et si P est un *préfaisceau abélien*, on en déduit un *complexe de cochaînes* de groupes abéliens

$$P(U) \xrightarrow{i_0} \prod_{\alpha} P(U_\alpha) \underset{i_1}{\overset{i_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta} P(U_\alpha \times_U U_\beta) \underset{i_2}{\overset{i_0}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}}} \prod_{\alpha,\beta,\gamma} P(U_\alpha \times_U U_\beta \times_U U_\gamma) \underset{i_3}{\overset{i_0}{\overset{i_1}{\overset{i_2}{\rightrightarrows}}}} \cdots$$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & \| & & \| \\ C_0 & & C_1 & & C_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \| \\ C_3 \end{array}$$

avec l'opérateur différentiel

$$d_n(P)\colon C_n \to C_{n+1}$$

tel que, pour $c \in C_n$, $d_n(c)$ est l'élément de C_{n+1} dont la composante $(d_n c)(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1})$ dans $P(U_{\alpha_0} \times \cdots \times U_{\alpha_{n+1}})$ est

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k i_k(c(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_k, \ldots, \alpha_{n+1}))$$

La cohomologie de ce complexe est par définition $H^*((U_\alpha \to U), P)$ et on peut aussi "passer à la limite." Les *faisceaux flasques* sont définis comme ceux dont la cohomologie de Čech est 0 en dimension $\geqslant 1$, et on peut calculer la "vraie" cohomologie à l'aide de "résolutions flasques" d'un faisceau.

On obtient enfin diverses suites spectrales reliant ces cohomologies, ou analogues à la suite spectrale de Leray, etc.

La "cohomologie de Weil."

Soit V une variété algébrique sur un corps *fini* k à q éléments. Pour toute extension k_m de k à q^m éléments, on considère le nombre de points N_m de V *rationnels sur* k_m ; avec ces nombres pour coefficients, on forme une série entière dite *fonction zêta* de V. Weil a démontré pour le cas où $\dim V = 1$ ("courbes" sur k) que cette fonction est *rationnelle* et que ses zéros vérifient l'"hypothèse de Riemann." Sur la base de calculs explicites dans certains cas particuliers, il a formulé, pour V de dimension *n quelconque*, des conjectures généralisant ces résultats, et, lorsque V est déduite par "réduction modulo p" d'une variété V_0 définie *sur* $\mathbf{Q}$ (et *a fortiori* sur $\mathbf{C}$) il a noté que la zêta de V est en relation étroite avec les *nombres de Betti* de V_0 considérée comme *variété topologique* (complexe).

L'idée de Weil est de remarquer que N_m est le nombre de *points fixes* de l'endomorphisme $F_m : x \rightsquigarrow x^{q^m}$ ("Frobenius") de V (à tout $x \in V$ on fait correspondre le point dont le coordonnées sont les puissances q^m-ièmes de celles de x, en supposant pour simplifier V affine). Or, pour une *variété topologique* V_0 et un endomorphisme f de V_0 en "position générale" (i.e., dont le graphe coupe "transversalement" la diagonale), le nombre de points fixes de f est donné par la "formule de Lefschetz."

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(H^i(f))$$

où $H^i(f)$ est l'endomorphisme de l'espace de cohomologie $H^i(V_0 ; \mathbf{R})$ induit par f. L'idée de Weil est de généraliser ce procédé au cas d'une variété V sur un corps *quelconque*, et de l'appliquer en particulier à F_m ; mais il faut pour cela *définir* des "espaces de cohomologie" $H^i(V)$.

La cohomologie usuelle ("de Zariski") ne convient pas, parce que les coefficients sont nécessairement des corps de caractéristique $p > 0$ (si le corps de base est de caractéristique p), et les raisonnements de Lefschetz ne s'étendent pas à ce cas. Il faut une cohomologie définie sur un corps de *caractéristique* 0. Il semble que la "cohomologie étale" d'une variété soit exactement la solution cherchée. M. Artin et A. Grothendieck ont pu en tout cas démontrer une "formule de Lefschetz" pour cette cohomologie et prouver que si V est *complète* et *non singulière*, sa fonction zêta est *rationnelle* et a la forme conjecturée par Weil (mais "l'hypothèse de Riemann" n'a pas encore été obtenue dans ce cas).

RÉFÉRENCES[1]

N. BOURBAKI, "Éléments de Mathématique: Livre II, Algèbre," Chaps. I–IX (Actual. Sci. Ind., Nos. 1144, 1236, 1044, 1102, 1179, 1261, 1272). Hermann, Paris, 1940–1959. (Abbreviated "Alg.")

N. BOURBAKI, "Eléments de Mathématique: Livre III, Topologie générale," Chaps. I–X (Actual. Sci. Ind., Nos. 1142, 1143, 1235, 1045, 1084). Hermann, Paris, 1940–1965. (Abbreviated "Top. gén.").

N. BOURBAKI, "Éléments de Mathématique: Algèbre commutative," Chaps. I–VII (Actual. Sci. Ind., Nos. 1290, 1293, 1308, 1314). Hermann, Paris, 1961–1965. (Abbreviated "Alg. Comm.")

J. DIEUDONNÉ, Algebraic Geometry. *Adv. Math.* 3 (1969), 233–321. (Abbreviated "D.")

[1] This reference list is also to be used with the preceding article in this issue.

R. GODEMENT, "Topologie algébrique et théorie des faisceaux." (Actual. Sci. Ind., No. 1252). Hermann, Paris, 1958. (Abbreviated "G.")

A. GROTHENDIECK, "Sur quelques points d'algèbre homologique." *Tohoku Math. J.* **9** (1957), 119–221. (Abbreviated "T.")

A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNÉ, "Éléments de Géométrie algébrique," *Publ. Math. I.H.E.S.*, Nos. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960–68.

P. HILTON, "Catégories non abéliennes," Presses de l'Univ. de Montréal, 1964.

Printed in Belgium