CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

YVES DIERS
JOËL LEROY

Catégorie des points d'un espace projectif

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 35, n° 1 (1994), p. 2-28

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1994__35_1_2_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XXXV-1 (1994)

CATÉGORIE DES POINTS D'UN ESPACE PROJECTIF

par Yves DIERS et Joël LEROY

ABSTRACT. We describe a category introduced by Anders Kock, whose objects are the points of a projective space, and whose morphisms between two distinct points P and Q are the other points of the line (PQ). Then we give categorical proofs of theorems of projective geometry.

Introduction

Nous décrivons une catégorie, introduite par Anders Kock en 1974 [2], dont les objets sont tous les points d'un espace projectif et dont les flèches entre deux objets distincts P et Q sont les autres points de la droite (PQ). Nous proposons des démonstrations catégoriques, i.e. en termes de diagrammes commutatifs, de quelques théorèmes de la géométrie projective [3] : théorème de Desargues, propriétés des birapports, division harmonique, quadrilatère complet, théorèmes de Ménélaüs, Céva, Pappus. Les catégories nous permettent d'introduire très facilement les multirapports qui généralisent les birapports et sont utilisés géométriquement.

1. Catégorie des points d'un espace projectif

Dans toute la suite, k désigne un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

1-1. Graphe des points d'un espace projectif.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur k non réduit au vecteur nul. Notons $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ la catégorie dont les objets sont les droites vectorielles de $\mathcal{E}$, les flèches sont les isomorphismes linéaires entre droites vectorielles de $\mathcal{E}$, et la composition des flèches est la composition usuelle des applications. $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est un groupoïde.

Soit $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ i.e. l'ensemble des droites vectorielles de $\mathcal{E}$. Un *point* de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ est une droite vectorielle de $\mathcal{E}$.

1-1-1. Définition. On appelle *graphe des points de l'espace projectif* $\mathcal{E}$ le graphe $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ qui a pour objets les points de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ et qui a pour flèches de A vers B les triplets (A, E, B) où E est un point quelconque de la droite projective (AB) distinct de A et B, et, pour flèches de A vers A, les triplets (A, r, A) où $r \in k^*$.

1-1-2. Théorème. *Les graphes* $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ *et* $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Un isomorphisme linéaire d'une droite vectorielle dans elle-même est une homothétie de rapport non nul et réciproquement. Soient A et B deux droites vectorielles distinctes et $A + B$ le plan vectoriel engendré. Soit f un isomorphisme de la droite vectorielle A sur la droite vectorielle B. L'ensemble C des vecteurs $f(a) - a$, où $a \in A$, est une droite vectorielle du plan $A + B$ distincte de A et B. On en déduit l'égalité des sommes directes $A \oplus B = B \oplus C$. Or on a : $a = f(a) + (a - f(a)), f(a) \in B$ et $a - f(a) \in C$. Donc f est la projection vectorielle de la droite A sur la droite B dans la direction C. Réciproquement, pour toute droite vectorielle C du plan $A + B$ distincte de A et B, la projection vectorielle de la droite vectorielle A sur la droite vectorielle B dans la direction C est un isomorphisme de la droite vectorielle A sur la droite vectorielle B. Par conséquent, l'application identique sur les objets de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ et la bijection Θ qui, à toute flèche (A, E, B), associe la projection vectorielle de la droite vectorielle A sur la droite vectorielle B dans la direction de la droite vectorielle E et, à toute flèche (A, r, A), associe l'homothétie de la droite vectorielle A de rapport r, définissent un isomorphisme de graphes : $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{D}(\mathcal{E})$.

1-1-3. Définition. On appelle *catégorie des points d'un espace projectif* $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ le graphe $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ muni de la structure de catégorie transportée de la structure de la catégorie $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ le long de l'isomorphisme précédent.

1-1-4. Corollaire.

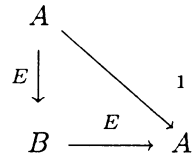
(1) *Un diagramme de la catégorie* $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ *est commutatif si et seule-*

ment si son image est un diagramme commutatif dans la catégorie $\mathbb{D}(\mathcal{E})$.

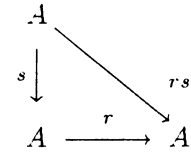
(2) *Toutes les flèches de* $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ *sont des isomorphismes.*

(3) *La flèche identité de* A *est* $(A, 1, A)$.

(4) *Si* A *et* B *sont distincts, la flèche inverse à droite ou à gauche de* (A, E, B) *est* (B, E, A), *i.e. le diagramme suivant est commutatif :*



(5) *La flèche composée de deux flèches de* $Hom(A, A)$ *est définie par*
$(A, s, A) \circ (A, r, A) = (A, rs, A)$, *i.e. le diagramme suivant est commutatif :*



(6) *La flèche inverse de* (A, r, A) *est* $(A, 1/r, A)$.

(7) *La catégorie des points d'un espace projectif est un groupoïde.*

Démonstration. Les conséquences 1,2,3 sont immédiates. Pour les autres, il suffit de travailler dans $\mathbb{D}(\mathcal{E})$. Si A et B sont deux droites vectorielles distinctes de $\mathcal{E}$ et E une droite du plan vectoriel $A \oplus B$, la projection vectorielle de la droite vectorielle A sur la droite B dans la direction E, composée par la projection vectorielle de la droite vectorielle B sur la droite A dans la même direction, est l'identité. Enfin, la composée de deux homothéties de la droite vectorielle A est une homothétie dont le rapport est le produit des rapports.

1-2. Lecture géométrique de diagrammes à deux flèches

1-2-1. Proposition. *Un triplet* (A, x, B) *est une flèche de la catégorie si et seulement si* A, x, B *sont trois points distincts alignés ou bien si* $x \in k^*$ *et* $A = B$.

Démonstration. C'est la définition des flèches du graphe $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

1-2-2. Proposition. *Etant donnés trois points distincts A, B, C, il existe un diagramme $A \xrightarrow{U} B \xrightarrow{U} C$ si et seulement si A, B, C sont alignés.*

Démonstration. Si un tel diagramme existe, A, U, B sont alignés distincts et B, U, C aussi, les points A et C appartiennent donc à la droite (BU). Réciproquement, le corps k est de caractéristique différente de 2, donc $card(k) \geq 3$, et toute droite projective contient au moins quatre points. Si A, B, C sont distincts alignés, il existe donc un point U tel que U, A, B, C soient distincts alignés, c'est à dire un diagramme du type précédent d'après 1-2-1.

1-2-3. Proposition. *Etant donnés quatre points distincts A, B, C, D et A, B, C alignés, s'il existe un diagramme $A \xrightarrow{B} U \xrightarrow{C} D$, alors les points A, B, C, D sont alignés.*

Démonstration. Les points A, B, C sont alignés distincts, et A, B, U sont distincts alignés, donc les points U et C sont sur la droite (AB). Or U, C, D sont distincts alignés, donc les points A, B, D sont sur la droite (UC).

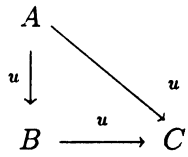
1-2-4. Proposition. *Pour quatre points A, B, C, D tels que A, B, C soient non alignés, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un diagramme $A \xrightarrow{B} U \xrightarrow{C} D$.*
(2) *Il existe un diagramme $A \xrightarrow{U} B, C \xrightarrow{U} D$.*
(3) *Les points A, B, C, D sont distincts coplanaires et les droites $(AB), (CD)$ sont sécantes au point U distinct de A, B, C, D.*
(4) *$(ABCD)$ est un vrai quadrilatère, i.e. les points A, B, C, D sont 3 à 3 non alignés.*
(5) *Les points A, B, C, D sont coplanaires et les droites (AD), (BC) sont sécantes au point U distinct de A, B, C, D.*

Démonstration. Vérification immédiate à l'aide de 1-2-1.

1-3. Diagrammes commutatifs triangulaires.

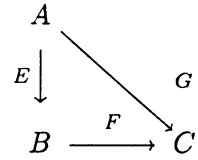
1-3-1 Proposition. *Le diagramme*



est commutatif si et seulement si $u = 1$ ou u est un point.

Démonstration. Ou bien $u \in k^*$ et alors $A = B = C$ et la commutativité du diagramme équivaut à $u^2 = u$ c'est à dire $u = 1$. Ou bien u est un point noté U et alors A, B, C sont distincts. Plaçons nous dans la catégorie $\mathbb{D}(\mathcal{E})$: la composée de deux projections vectorielles de même direction U dans le plan vectoriel contenant les droites vectorielles A, B, C est évidemment une projection vectorielle de direction U. On en déduit que le diagramme est commutatif.

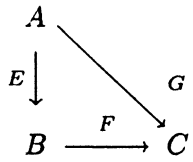
1-3-2. Théorème. *Si le diagramme*



est commutatif et A, B, C sont distincts, alors E, F, G sont trois points alignés.

Démonstration. Si A, B, C sont alignés, c'est évident. Supposons A, B, C non alignés. Dans $\mathbb{D}(\mathcal{E}), A, B, C$ sont trois droites vectorielles non coplanaires de $\mathcal{E}$. Soit f la projection vectorielle de A sur B suivant la direction E, soit g la projection vectorielle de B sur C suivant la direction F. La composée $g \circ f$ est une projection vectorielle de A sur C dont la direction G est déterminée par $g(f(a)) - a$ pour un vecteur a non nul de la droite vectorielle A. Pour tout $a \in A$, on a $g(f(a)) - a = [g(f(a)) - f(a)] + [f(a) - a]$. Par définition des projections g et f : $g(f(a)) - f(a) \in F$ et $f(a) - a \in E$, donc $g(f(a)) - a \in E + F$. On en déduit que la droite vectorielle G est contenue dans le plan vectoriel $E + F$, i.e. E, F, G sont alignés dans $\mathbf{P}(\mathcal{E})$.

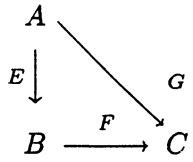
1-3-3. Corollaire. *Le diagramme*



où A, B, C sont trois points non alignés, est commutatif si et seulement si les droites (AC) et (EF) sont sécantes au point G.

Démonstration. L'existence du diagramme entraine que A, G, C sont distincts alignés et $(EF), (AC)$ sont des droites sécantes d'après 1-2-4. Si le diagramme est commutatif, les points E, F, G sont alignés d'après 1-3-2 et le point G est commun aux droites (AC) et (EF). L'unicité du point d'intersection de deux droites sécantes entraine la réciproque.

1-3-4. Corollaire. *Le diagramme*



où A, B, C sont trois points non alignés, est commutatif si et seulement si E, F, G sont des points distincts alignés.

Démonstration. Les points A, G, C sont alignés distincts et les droites (EF) et (AC) sont sécantes d'après 1-2-4. Dans ces conditions, E, F, G sont alignés si et seulement si (EF) et (AC) sont sécantes en G. La configuration géométrique d'une tranversale qui coupe les côtés d'un triangle (ABC) respectivement en E, F, G permet donc de

définir des diagrammes commutatifs triangulaires.

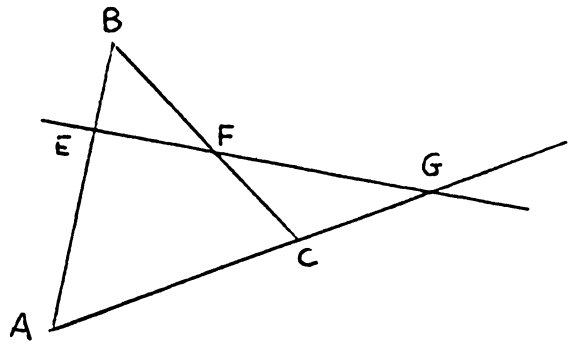


Figure 1

1-3-5. Corollaire. *Etant donné un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ {\scriptstyle E}\downarrow & \searrow^{G} & \\ B & \xrightarrow{F} & C \end{array}$$

où A, B, C sont trois points non alignés, en échangeant A et E, C et F, on obtient un nouveau diagramme commutatif.

Démonstration évidente.

1-3-6. Corollaire. *Pour un ensemble de quatre points distincts non alignés $Q = \{A, B, A', B'\}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ {\scriptstyle A'}\downarrow & \searrow^{J} & \\ I & \xrightarrow{B'} & B \end{array}$$

(2) *Les droites (AA') et (BB') sont sécantes au point $I \notin Q$.*
(3) *Les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes au point $J \notin Q$.*

Démonstration. L'existence du diagramme équivaut à (2) en vertu de 1-2-4. En particulier, A, I, B ne sont pas alignés et le corollaire 1-3-4 signifie (1) $\Leftrightarrow$ (3).

1-4. Diagrammes rectangulaires commutatifs.

1-4-1. Proposition. *Tout diagramme de la forme suivante est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{x} & B \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & {\scriptstyle y}\downarrow \\ A & \xrightarrow{x} & B \end{array}$$

Démonstration. Ou bien $x \in k^*$ et alors $A = B$ et $yx = xy$ dans le corps commutatif. Ou bien x est un point E et alors, dans la catégorie $\mathbb{D}(\mathcal{E})$, A, B, E sont trois droites vectorielles distinctes coplanaires telles que $E \subset A + B$. Soient h et h' les homothéties des droites A et B de rapport y, et soit p la projection vectorielle de la droite A sur B dans la direction E. Alors la linéarité de p entraîne $h' \circ p = p \circ h$, c'est à dire que dans la catégorie $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{E} & B \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & {\scriptstyle y}\downarrow \\ A & \xrightarrow{E} & B \end{array} \qquad \text{i.e.} \quad (A, E, B) \circ (A, y, A) = (B, y, B) \circ (A, E, B).$$

1-4-2. Proposition. *Dès qu'il est défini. le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{A} & C \\ {\scriptstyle C}\uparrow & & {\scriptstyle B}\downarrow \\ A & \xrightarrow{-1} & A \end{array}$$

Démonstration. Par définition du graphe $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, les points A, B, C sont alignés et distincts. Dans $\mathcal{E}$, les sous-espaces vectoriels $A + B$,

$A + C, B + C$ sont des plans vectoriels confondus. Dans la catégorie $\mathbb{D}(\mathcal{E})$, soit f la projection vectorielle de A sur B suivant la direction C, soit g la projection vectorielle de B sur C suivant la direction A, soit h la projection vectorielle de C sur A suivant la direction B, et soit a un vecteur quelconque de A. On a : $a = f(a) + (a - f(a))$ où $f(a) \in B$ et $a - f(a) \in C$, et on a : $f(a) = (f(a) - a) + a$, donc on a : $g(f(a)) = -a + f(a)$, d'où $h \circ g \circ f(a) = -a$. La composée $h \circ g \circ f$ est donc l'homothétie de rapport -1.

1-4-3. Proposition. *Le diagramme suivant, où B et D n'appartiennent pas à la droite (AC),*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{E} & B \\ {\scriptstyle G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ D & \xrightarrow{H} & C \end{array}$$

est commutatif si et seulement si les droites $(EF), (AC)$ et (GH) sont concourantes.

Démonstration. Soit la flèche diagonale $(A, I, C) = (B, F, C) \circ (A, E, B)$. Le point I est le point de concours des droites (EF) et (AC). Le diagramme est commutatif si et seulement si $(A, I, C) = (D, H, C) \circ (A, G, D)$, c'est à dire si et seulement si la droite (HG) coupe la droite (AC) en I.

1-4-4. Proposition. *Le diagramme suivant, avec A, B, C non alignés,*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{E} & B \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ D & \xrightarrow{F} & C \end{array}$$

est commutatif si et seulement si : $E = F$ ou les droites $(AD), (BC)$ et (EF) sont concourantes en J.

Démonstration. $(ABCD)$ est un vrai quadrilatère d'après 1-2-4.. Soit la flèche diagonale $(A, K, C) = (B, J, C) \circ (A, E, B)$. Alors E, J, K

sont distincts alignés. Supposons $E \neq F$, le diagramme est commutatif si et seulement si $(A, K, C) = (D, F, C) \circ (A, J, D)$ c'est à dire si et seulement si F, J, K sont alignés ou encore si et seulement si E, J, F sont alignés. Sinon $E = F$, les points A, D, C ne sont pas alignés, les droites (EJ) et (AC) sont sécantes en K, donc $(A, K, C) = (D, E, C) \circ (A, J, D)$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{E} & B \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ D & \xrightarrow{E} & C. \end{array}$$

1-4-5. Corollaire. *Le diagramme suivant où A, B, C ne sont pas alignés*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I} & B \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ D & \xrightarrow{I} & C \end{array}$$

est commutatif si et seulement si $(ABCD)$ est un vrai quadrilatère et les droites (AD) et (BC) sont sécantes en J et les droites (AB) et (CD) sont sécantes en I.

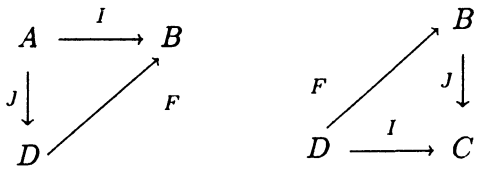
Démonstration. Conséquence immédiate de 1-2-4 et 1-4-4.

1-4-6. Proposition. *Si A, B, C sont trois points non alignés, la commutativité du premier diagramme équivaut à la commutativité du second :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I} & B \\ & {\scriptstyle E}\searrow\ \nearrow{\scriptstyle F} & \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ & {\scriptstyle I}\searrow & \\ D & \xrightarrow{\quad} & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{A} & B \\ & {\scriptstyle E}\searrow\ \nearrow{\scriptstyle D} & \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle C}\downarrow \\ & {\scriptstyle I}\searrow & \\ F & \xrightarrow{\quad} & J \end{array}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire 1-3-5, en échangeant A et I, D et F dans le premier diagramme et D et F, J et C

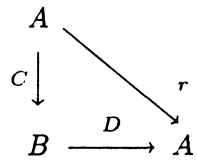
dans le deuxième diagramme ci-dessous



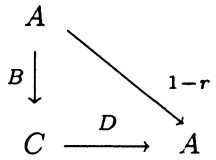
L'autre flèche diagonale est obtenue à partir de 1-3-3 car les droites (IJ) et (AC) sont sécantes en E.

1-5. Composition et birapport.

1-5-1. Proposition. *Le diagramme*



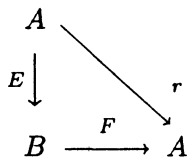
est commutatif si et seulement si le diagramme



est commutatif.

Démonstration. Dans la catégorie $\mathbb{D}(\mathcal{E})$, soit p la projection vectorielle de A sur B suivant la direction C, p' la projection de A sur C de direction B, q la projection vectorielle de B sur A suivant la direction D et q' la projection de C sur A dans la direction D. Si a est un vecteur quelconque de A, alors, on a : $a = p(a) + p'(a)$ et $p(a) = q \circ p(a) + d$ où $d \in D$. Si $q \circ p(a) = ra$, alors $a = ra + d + p'(a)$ et $p'(a) = (1 - r)a - d$ donc $q' \circ p'(a) = (1 - r)a$.

1-5-2. Définition. Soient A, B, E, F quatre points alignés avec $A \neq B$. On appelle *dirapport* du quadruplet (A, B, E, F), et on note $[A, B, E, F]$, le nombre $r \in k^*$ qui caractérise le morphisme composé $(A, r, A) = (B, F, A) \circ (A, E, B)$:



Exemple. Si $E = F$ et E est différent de A et B, alors $[A, B, E, E\ ] = 1$. Le dirapport n'est pas défini si $E = A$ ou $E = B$ ou $F = A$ ou $F = B$.

1-5-3. Théorème. *Si A, B, E, F sont quatre points distincts alignés, le dirapport $[A, B, E, F]$ est égal au birapport de (A, B, E, F).*

Démonstration. Dans le plan vectoriel $A+B$, considérons une base (u, v). Soit a un vecteur non nul de A de coordonnées (a_1, a_2), b un vecteur non nul de B de coordonnées (b_1, b_2), e un vecteur non nul de E de coordonnées (e_1, e_2), f un vecteur non nul de F de coordonnées (f_1, f_2). Les droites vectorielles B et E sont supplémentaires dans $A + B$ et les droites A et F le sont aussi. Donc il existe un couple unique $(x, y) \in k^2$ et un couple unique $(x', y') \in k^2$ tels que

$$\begin{cases} a_1 = xb_1 + ye_1 \\ a_2 = xb_2 + ye_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_1 = x'a_1 + y'f_1 \\ b_2 = x'a_2 + y'f_2 \end{cases},$$

c'est à dire $x = \dfrac{det(a, e)}{det(b, e)}$ et $x' = \dfrac{det(b, f)}{det(a, f)}$, où det désigne le déterminant dans la base (u, v). La composée des projections vectorielles de A sur B dans la direction E, puis de B sur A dans la direction F, associe donc au vecteur a le vecteur $x'xa$ où $xx' = \dfrac{det(a, e)}{det(b, e)} \dfrac{det(b, f)}{det(a, f)}$

est indépendant de la base (u, v). C'est le birapport du quadruplet $(A.B.E.F)$.

2 - Démonstrations catégoriques de théorèmes de géométrie

2-1. Théorème de Desargues. *Soient $A, B, C, A', B', C', \Omega$ sept points distincts tels que (ABC) et $(A'B'C')$ sont deux triangles dont les droites qui portent les côtés sont distinctes deux à deux. Les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes en Ω si et seulement si les paires de droites qui portent des côtés homologues sont sécantes en trois points alignés et distincts des sommets.*

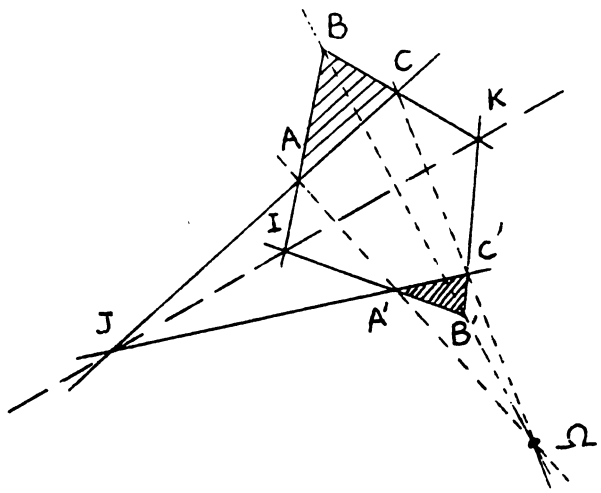
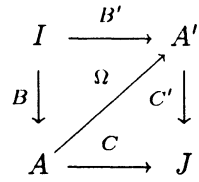


Figure 2

Démonstration. Soit I le point commun aux droites (AB) et $(A'B')$, soit J le point commun aux droites (AC) et $(A'C')$ et K le point commun aux droites (BC) et $(B'C')$. Si les droites (AA'), $(BB'), (CC')$ sont concourantes en Ω, alors $I \notin \{A, A', B, B'\}$ et $J \notin \{A, A', C, C'\}$ d'après 1-3-6. Le diagramme suivant est commu-

tatif d'après 1-4-3 :



Donc les droites $(BC),(B'C')$ et (IJ) sont concourantes, toujours d'après 1-4-3. Réciproquement, si I,J,K sont alignés et si $I,J,K \notin \{A,A',B,B',C,C'\}$, alors les droites $(IJ),(BC)$ et $(B'C')$ sont concourantes et le diagramme est commutatif d'après 1-4-3, donc les droites $(AA'),(BB'),(CC')$ sont concourantes.

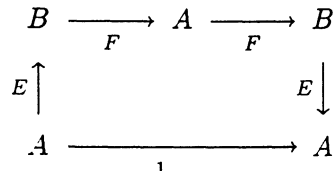
2-2. Propriétés des birapports.

2-2-1. Proposition. *Soient A,B,C,D,E,F,G des points alignés. Alors*

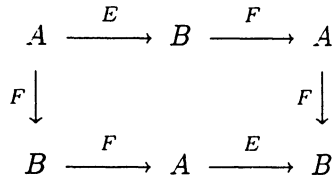
i) $[A,B,E,F][A,B,F,E] = 1$
ii) $[A,B,E,F] = [B,A,F,E]$
iii) $[A,B,E,F][A,B,F,G] = [A,B,E,G]$
iv) $[A,B,C,D] = [C,D,A,B]$
v) $[A,D,C,B][A,C,B,D] = -[A,B,C,D]$
vi) $[A,B,C,D] = 1 - [A,C,B,D]$

Démonstration.

i) Toute flèche ponctuelle (B,E,A) ayant pour inverse (A,E,B), le diagramme suivant est commutatif :



ii) Le diagramme suivant est commutatif :



Ce qui entraine, grâce à la proposition 1-4-1, que $[A,B,E,F] = [B,A,F,E]$.

iii) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{F} & A & \xrightarrow{F} & B \\ {\scriptstyle E}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle G} \\ A & \xrightarrow{E} & B & \xrightarrow{G} & A \end{array}$$

Donc $[A,B,E,F][A,B,F,G] = [A,B,E,G]$.

iv) Dans le diagramme ci-dessous, les deux rectangles intérieurs sont commutatifs grâce aux propositions 1-3-1 et 1-4-2, donc le diagramme extérieur est commutatif et, en vertu de la proposition 1-4-1, on a $[A,B,C,D] = [C,D,A,B]$:

$$\begin{array}{ccccccc} A & & \xrightarrow[C]{} & & B & & \xrightarrow[D]{} & & A \\ {\scriptstyle D}\uparrow & & & & {\scriptstyle C}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle D} \\ C & \xrightarrow{A} & D & \xrightarrow{-1} & D & \xrightarrow{-1} & D & \xrightarrow{B} & C \end{array}$$

v) Tous les diagrammes intérieurs ci-dessous sont commutatifs grâce aux propositions 1-3-1 et 1-4-2, donc le rectangle extérieur est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{C} & D & & \xrightarrow[C]{} & & B & \xrightarrow{D} & A \\ {\scriptstyle -1}\downarrow & & {\scriptstyle -1}\downarrow & & & & {\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ A & \xrightarrow{C} & D & \xrightarrow{B} & A & \xrightarrow{B} & C & \xrightarrow{D} & A \end{array}$$

vi) $(B,D,A)\circ(A,C,B) = r \Leftrightarrow (C,D,A)(A,B,C) = 1-r$ (proposition 1-5-1).

2-2-2. Proposition. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{E} & B \\ {\scriptstyle I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ C & \xrightarrow{J} & A \end{array}$$

où A, B, C sont alignés, est commutatif si et seulement si $[A, B, E, F] = [A, C, I, J]$.

Démonstration. Lecture évidente du diagramme commutatif.

2-2-3. Proposition. *Soient deux droites distinctes δ et δ' et quatre autres droites distinctes concourantes en J qui coupent la droite δ respectivement en A, B, E, F et la droite δ' respectivement en A', B', E', F'. Alors les birapports $[A, B, E, F]$ et $[A', B', E', F']$ sont égaux.*

Démonstration. 1er cas : $A \neq A'$ et $B \neq B'$.

D'après la proposition 1-4-4., les hypothèses signifient que les diagrammes intérieurs suivants sont commutatifs donc aussi le diagramme extérieur

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{E} & B & \xrightarrow{F} & A \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{E'} & B' & \xrightarrow{F'} & A' \end{array}$$

La proposition 1-4-1 permet de conclure que $[A, B, E, F] = [A', B', E', F']$.

2ème cas : $A = A'$ ou $B = B'$.

Supposons par exemple que $A = A'$, alors les hypothèses entraînent que $B \neq B'$. Les droites $(EE'), (FF')$ et (BB') sont concourantes, donc le diagramme suivant est commutatif d'après la proposition 1-4-3:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{E} & B \\ {\scriptstyle E'}\downarrow & & {\scriptstyle F}\downarrow \\ B' & \xrightarrow{F'} & A \end{array}$$

c'est à dire $[A, B, E, F] = [A', B', E', F']$.

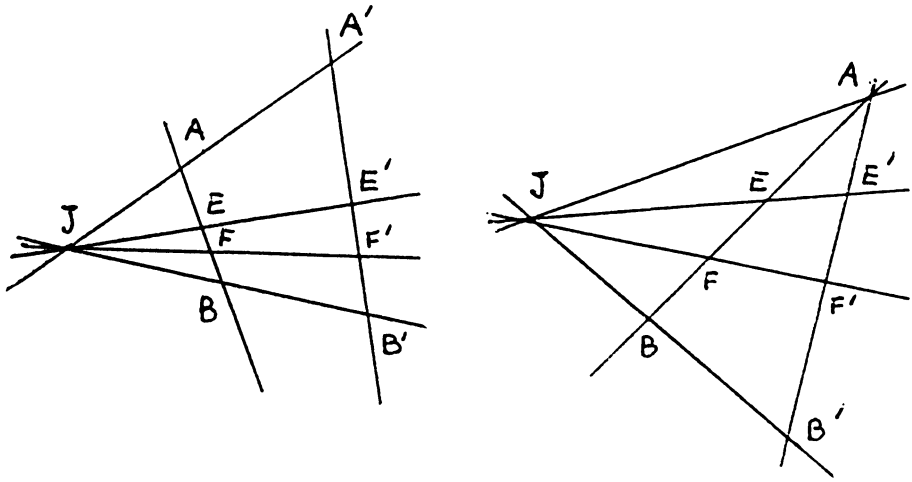


Figure 3

2-2-4. Proposition. *Dès qu'il existe, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I} & B \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ D & \xrightarrow{I} & C \end{array} \qquad \text{avec } A, B, C \text{ alignés,}$$

est commutatif si et seulement si $[A, B, I, J][A, C, J, I][A, D, I, J] = 1$.

Démonstration. En utilisant la proposition 1-3-1, on a $(B, J, C) = (A, J, C) \circ (B, J, A)$ et $(D, I, C) = (A, I, C) \circ (D, I, A)$. Le diagramme est commutatif si et seulement si le diagramme ci dessous l'est aussi.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{I} & B & \xrightarrow{J} & A \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ D & \xrightarrow{I} & A & \xrightarrow{I} & C \end{array}$$

C'est à dire encore, en renversant le sens de certaines flèches.

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{J} & A & \xrightarrow{J} & C & \xrightarrow{I} & A & \xrightarrow{I} & D \\ {\scriptstyle I}\uparrow & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ A & & & & & & & & A \end{array}$$

$$\xrightarrow[1]{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

2-2-5. Proposition. *Dès qu'il existe, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I} & B \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ B & \xrightarrow{I} & A \end{array} \qquad \text{où } I \neq J,$$

est commutatif si et seulement si $[A, B, I, J] = -1$.

Démonstration. Ce diagramme est commutatif si et seulement si le diagramme suivant l'est aussi :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{J} & A & \xrightarrow{I} & B \\ {\scriptstyle I}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ A & & & & A \end{array}$$

$$\xrightarrow[1]{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

c'est à dire $[A, B, I, J] = r \neq 1$ et $r^2 = 1$, ce qui équivaut à $r = -1$.

2-3. Quadrilatère complet.

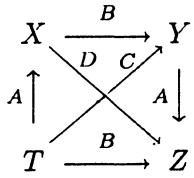
2-3-1. Proposition. *(quaterne harmonique)*
Soient A, B, C, D *quatre points distincts alignés. Alors* $[A, B, C, D] = -1$ *si et seulement si* $(C, A, B) \circ (A, B, C) = (A, D, B)$.

Démonstration. D'après la proposition 1-4-2., on sait que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{A} & B \\ {\scriptstyle B}\uparrow & \overset{D}{\nearrow} & {\scriptstyle C}\downarrow \\ A & \xrightarrow{-1} & A \end{array}$$

Donc $[A,B,D,C] = -1$ si et seulement si $(C,A,B) \circ (A,B,C) = (A,D,B)$. Or $[A,B,C,D] = -1$ équivaut à $[A,B,D,C] = -1$.

2-3-2. Proposition. *Soit un quadrilatère $(XYZT)$. Si le diagramme suivant est commutatif, alors les points A,B,C,D sont alignés et $[A,B,C,D] = -1$:*



Démonstration.

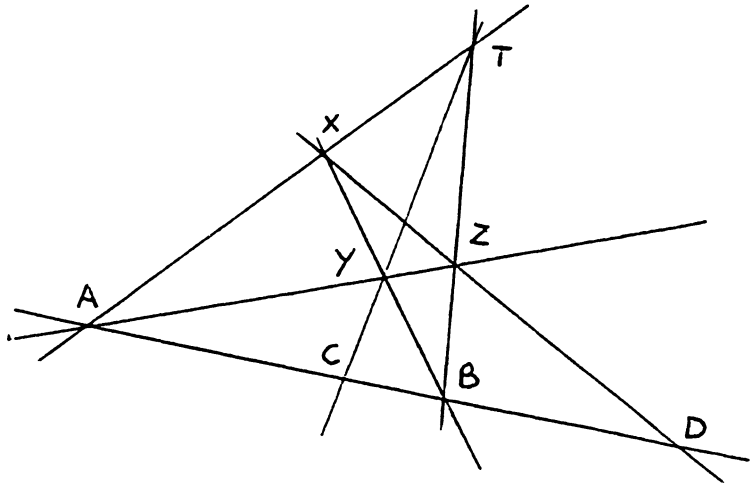
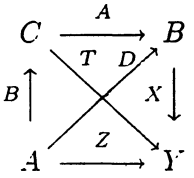


Figure 4

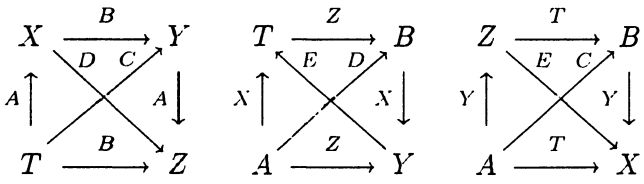
D'après la proposition 1-4-6, ce diagramme est commutatif si et seulement si le diagramme



est commutatif, ce qui entraîne que A, B, C, D sont alignés et $[A, B, C, D] = -1$ d'après la proposition 2-3-1. Les droites (AB), (XZ) et (YT) sont les diagonales du quadrilatère complet $(XYZT)$, et $\{C\} = (AB) \cap (YT)$, $\{D\} = (AB) \cap (XZ)$. La diagonale (AB) du quadrilatère complet $(XYZT)$ est coupée harmoniquement par les deux autres.

2-3-3. Corollaire. *Toute diagonale d'un quadrilatère complet $(XYZT)$ est coupée harmoniquement par les deux autres.*

Démonstration. Soit un quadrilatère $(XYZT)$ et $(A) = (XT) \cap (YZ)$,
$(B) = (XY) \cap (TZ), (C) = (AB) \cap (YT), (D) = (XZ) \cap (AB)$ et $(E) = (YT) \cap (XZ)$. Les diagrammes suivants sont commutatifs



d'où $[A, B, C, D] = -1, [X, Z, D, E] = -1, [Y, T, C, E] = -1$.

2-4. Trirapport.

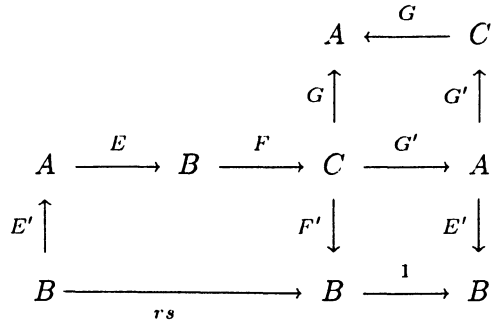
2-4-1. Définition. Soient six points A, B, C, E, F, G dans un plan projectif tels que A, B, C sont distincts, $E \in (AB), F \in (BC), G \in (AC)$ et $E \notin \{A, B\}, F \notin \{B, C\}, G \notin \{A, C\}$. On appelle *trirapport du sextuplet* (A, B, C, E, F, G) le nombre r, noté $[A, B, C, E, F, G]$, tel que $(C, G, A) \circ (B, F, C) \circ (A, E, B) = (A, r, A)$.

2-4-2. Exemples. Si A, B, C, U sont quatre points alignés alors, d'après la proposition 1-3-1, on a $[A, B, C, U, U, U] = 1$ et $[A, B, C, C, A, B] = -1$ (proposition 1-4-2).

2-4-3. Proposition. *(lien entre trirapport et dirapport)*
Soient $A, B, C, E, F, G, E', F', G'$ des points coplanaires tels que les trirapports $[A, B, C, E, F, G]$ et $[A, B, C, E', F', G']$ existent. Si

$[A, B, C, E', F', G'] = 1$,
alors $[A, B, C, E, F, G] = [A, B, E, E'][B, C, F, F'][C, A, G, G']$.

Démonstration. Posons $[A, B, E, E'] = r$ et $[B, C, F, F'] = s$, alors $[B, A, E', E] = r$. Dans le diagramme ci-dessous, chaque rectangle est commutatif :



D'après la proposition 1-4-1, la partie inférieure du diagramme donne $[A, B, C, E, F, G'] = rs$ et la partie supérieure donne :

$$[A, B, C, E, F, G] = [A, B, C, E, F, G'][A, C, G', G],$$

d'où :

$$[A, B, C, E, F, G] = [A, B, E, E'][B, C, F, F'][C, A, G, G'].$$

2-4-4. Exemples. Soient A, B, C, E, F, G, U sept points alignés. Alors

$$[A, B, U, E][B, C, U, F][C, A, U, G] = [A, B, C, U, U, U] = 1.$$

Puisque $[A, B, C, F, F, F] = 1$ pour $F \notin \{A, B, C\}$, et $[B, C, F, F] = 1$, et $[A, C, G, F] = [C, A, F, G]$, on en déduit :

$$\begin{aligned}[A, B, C, E, F, G] &= [A, B, F, E][B, C, F, F][C, A, F, G] \\ &= [A, B, F, E][A, C, G, F].\end{aligned}$$

En outre, $[A, B, C, C, A, B] = -1$, mais les birapports $[A, B, A, C]$ et $[A, C, B, A]$ ne sont pas définis.

2-5. Théorème de Ménélaüs. *Soit un triangle (ABC) et trois points E, F, G distincts des sommets et respectivement sur les droites $(AB), (BC), (AC)$. Les points E, F, G sont alignés si et seulement si le trirapport $[A, B, C, E, F, G]$ vaut 1, c'est à dire si le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & C \\ {\scriptstyle E}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G} \\ A & \xrightarrow{1} & A \end{array}$$

Démonstration. D'après le théorème 1-3-2, les points E,F,G sont alignés si et seulement si $(B, F, C) \circ (A, E, B) = (A, G, C)$ c'est à dire, si et seulement si $(C, G, A) \circ (B, F, C) \circ (A, E, B) = (A, 1, A)$. Ce qui signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & C \\ {\scriptstyle E}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G} \\ A & \xrightarrow{1} & A \end{array}$$

2-6. Théorème de Céva. *Soit un triangle (ABC) et trois points C', A', B' distincts des sommets et respectivement sur les droites (AB), $(BC), (AC)$. Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes si et seulement si le trirapport $[A, B, C, C', A', B'] = -1$, c'est à dire si le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{A'} & C \\ {\scriptstyle C'}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle B'} \\ A & \xrightarrow{-1} & A \end{array}$$

Démonstration. Les droites $(AA'),(BB')$ et (CC') sont concourantes si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{C} & B' \\ {\scriptstyle C'}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ B & \xrightarrow{A'} & C \end{array}$$

c'est à dire encore en éclatant le diagramme au point C avec $C \xrightarrow{B'} A \xrightarrow{B'} C$:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{C'} & A & \xrightarrow{C} & B' \\ {\scriptstyle A'}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ C & \xrightarrow{B'} & A & \xrightarrow{B'} & C \end{array}$$

Le diagramme extérieur ci-dessous et le diagramme intérieur de droite sont commutatifs, donc le diagramme de gauche aussi et réciproquement :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{C'} & A & \xrightarrow{C} & B' \\ {\scriptstyle A'}\downarrow & & {\scriptstyle -1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ C & \xrightarrow{B'} & A & \xrightarrow{B'} & C \end{array}$$

2-7. Théorèmes de Ménélaüs et Céva affines.

Ayant choisi une droite à l'infini distincte des droites $(AB),(AC)$, (BC) dans le plan projectif $\langle A,B,C\rangle, E', F', G'$ sur la droite à l'infini, on a $[A,B,C,E',F',G'] = 1$, d'où le théorème de Ménélaüs affine : si les points A,B,C,E,F,G sont dans le plan affine complémentaire

$$[A,B,C,E,F,G] = [A,B,E,E'][B,C,F,F'][C,A,G,G']$$
$$= \frac{\overline{EA}\,\overline{FB}\,\overline{GC}}{\overline{EB}\,\overline{FC}\,\overline{GA}} = 1,$$

et le théorème de Céva affine : si A', B', C' sont dans le plan affine précédent,

$$[A, B, C, C', A', B'] = [A, B, C, E'][B, C, A', F'][C, A, B', G']$$
$$= \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1.$$

2-8. Théorème de Pappus. *Dans un plan projectif, soient deux droites δ et δ' distinctes, A, B, C trois points sur la droite δ et A', B', C' trois points sur la droite δ' tous distincts et n'appartenant pas à $\delta \cap \delta'$. Les points d'intersection I, J, K des couples de droites respectifs $((AB'),(A'B)),((AC'),(A'C))$ et $((BC'),(B'C))$ sont alignés.*

Démonstration. Si les droites $(BC'),(AB')$ et (CA') ne sont pas concourantes, notons U, V, W les points d'intersection des couples respectifs de droites $((BC'),(CA')),((BC'),(B'A)),((CA'),(B'A))$. Les points U, V, W ne sont pas alignés sinon A, B, C, A', B', C' seraient alignés. On a $U \in (BC'), U \in (CA'), V \in (BC'), V \in (AB'), W \in (CA'), W \in (AB')$, d'où $A \in (VW), B \in (UV), C \in (UW), A' \in (UW), B' \in (VW), C' \in (UV)$. On en déduit, à l'aide du théorème de Ménélaüs, les petits diagrammes rectangulaires commutatifs suivant juxtaposés :

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccccc} W & \xrightarrow{1} & W & \xrightarrow{1} & W & \xrightarrow{1} & W & \xrightarrow{1} & W & \xrightarrow{1} & W \\ {\scriptstyle I}\uparrow & & {\scriptstyle A'}\downarrow & & {\scriptstyle B'}\downarrow & & {\scriptstyle C}\downarrow & & {\scriptstyle A}\downarrow & & {\scriptstyle J}\downarrow \\ V & \xrightarrow{B} & U & \xrightarrow{C'} & V & \xrightarrow{K} & U & \xrightarrow{B} & V & \xrightarrow{C'} & U \end{array}$$

donc le diagramme extérieur est commutatif. Simplifions la ligne du bas du diagramme en remarquant que $[V, U, B, C'] = r \Leftrightarrow [U, V, B, C'] = 1/r$. Le diagramme suivant est commutatif en vertu de la proposition 1-4-1 :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{B} & U & \xrightarrow{C'} & V \\ {\scriptstyle K}\downarrow & & & & {\scriptstyle K}\downarrow \\ U & \xleftarrow{C'} & V & \xleftarrow{B} & U \end{array}$$

Finalement, le contour extérieur du grand diagramme (*) est réduit au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{1} & W \\ {\scriptstyle I}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ V & \xrightarrow{K} & U \end{array}$$

donc I, J, K sont alignés. Si les droites $(BC'), (AB')$ et (CA') sont concourantes, alors $(AC'), (BA')$ et (CB') ne le sont pas, et on raisonne de la même manière en échangeant les points A et B, A' et B'.

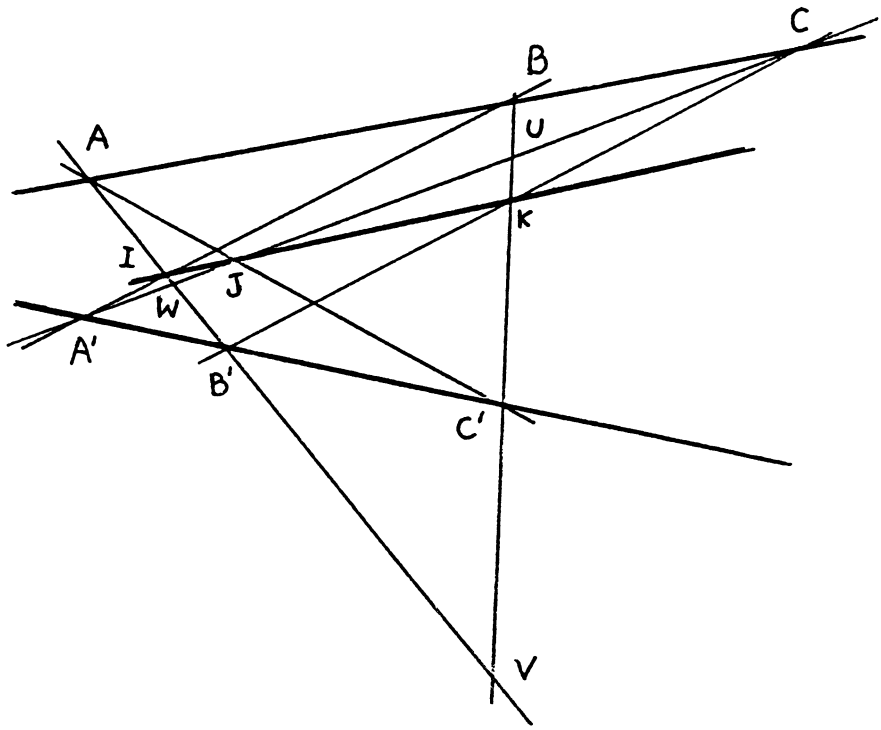
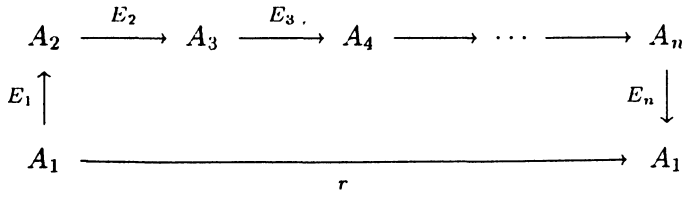


Figure 5

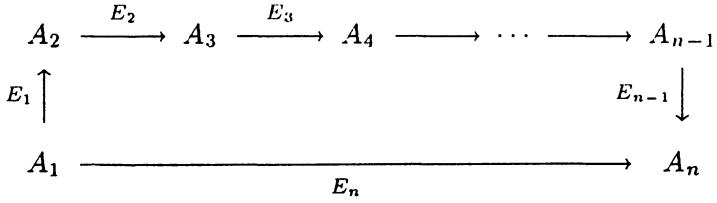
2-9. Multirapport.

2-9-1. Définition. Etant donné le diagramme commutatif :



le nombre r est appelé n-rapport du $2n$-uplet $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n)$, et on le note $[A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n]$.

2-9-2. Proposition. *S'il existe un diagramme commutatif n-gonal de la forme :*



avec $n \geq 3$,

alors le point E_n appartient à la variété projective engendrée par $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{n-1}$.

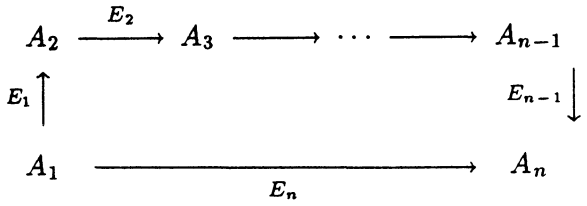
Démonstration. La proposition est vraie pour $n = 3$ (théorème 1-3-2). Soit $n \geq 3$ et $(A_1, F, A_{n-1}) = (A_n, E_{n-1}, A_{n-1}) \circ (A_1, E_n, A_n)$. Si $F \in \langle E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{n-2} \rangle$ alors $E_n \in \langle E_1, E_2, \ldots, E_{n-1} \rangle$ car $E_n \in (F, E_{n-1})$. Le résultat est prouvé par induction.

2-9-3. Théorème de Ménélaüs généralisé.

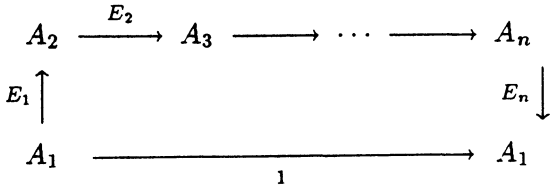
Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ n points projectivement libres. Les n points $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$, respectivement sur les droites (A_1A_2), $(A_2A_3), (A_3A_4), \ldots (A_{n-1}A_n), (A_nA_1)$, distincts des points A_1, $A_2, A_3 \ldots, A_n$, sont projectivement liés si et seulement si le n-rapport $[A_1, A_2, \ldots, A_n, E_1, E_2, \ldots, E_n]$ vaut 1.

Démonstration. Les points $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{n-1}$ sont projectivement libres car $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ le sont. Les points $E_1, E_2, \ldots,$

E_n sont projectivement liés, d'après la proposition 2-9-2, si et seulement si le diagramme suivant est commutatif



c'est à dire :



REFERENCES

[1] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1972.

[2] A. Kock, *The category aspect of projective space*, Aarhus Universitet preprint n°7, 1974.

[3] M. Berger, *Géométrie*, vol. tome 1, Cedic Nathan, 1977.

Yves DIERS
Laboratoire de Mathématiques
Université de Valenciennes
B.P. 311
F-59304 Valenciennes - FRANCE

JoëlL LEROY
6 Rue des Clozeaux
F-60112 Verderel Les Sauqueuses FRANCE