DIAGRAMMES

LAURENT COPPEY

Décompositions multiplicatives directes des entiers

Diagrammes, tome S67-68 (2012), p. 53-100

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2012__S67-68__53_0>

© Université Paris 7, UER math., 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES , SUPPLEMENT AUX VOLUMES 67 + 68 , 2012, PARIS, pp. 53-100

DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES DIRECTES DES ENTIERS

L. COPPEY

EDITE PAR L. COPPEY , F. FOLTZ , R. GUITART, C. HENRY , C. LAIR

Décompositions multiplicatives directes des entiers

par Laurent Coppey

En hommage fidèle à Andrée Charles Ehresmann, à l'occasion de ses 75 ans

Sommaire.

Guide de lecture **p. 2**

0) Précatégories et prémonoïdes. **p. 3**

1) Décompositions directes des prémonoïdes commutatifs bien ordonnés. et noyaux d'instabilité. **p. 9**

2) Structures des décompositions directes additives de N **p. 15**

3) Les décompositions directes non triviales de N^2 en deux facteurs **p. 22**

4) Généralisation du résultat précédent à certaines décompositions de N^k **p. 24**

5) Classification générale **p. 30**

6) La suite des foncteurs dérivés associée à une décomposition directe multiplicative de N^* **p. 35**

7) Squelettes. **p. 41**

Guide de lecture

Dans son état actuel, ce texte (rédigé entre 2003 et 2005) reprend et développe une petite partie de ma thèse (il s'agissait d'un exemple), qui date de 1975. J'ai compris (un peu tardivement certes) que j'avais fait le pas essentiel avec la dimension 2, mais surtout avec ma méthode. Ivan Niven était parvenu 2 ou 3 ans avant moi au même résultat (toujours en dim. 2) avec une méthode radicalement différente (opération de groupes…).

J'ai jugé « pédagogique » de donner à ce texte une forme générale graduée, liée à la dimension, ce qui permet de s'habituer progressivement à la structure de prémonoïde bien ordonné, pratiquement seule en cause ici. On ne doit surtout pas confondre la propriété de « forte associativité » (dont il est question ici) avec celle de « totale associativité » qui est assez banale et conséquence de celle-là. J'ai consacré les deux premières sections (0 et 1) à ces questions générales de prémonoïdes (bien ordonnés) et leurs décompositions. Les démonstrations ne figurent pas ici, mais dans un autre texte, à venir. On a donc à faire à une sorte de « fascicule de résultats ».

J'ai respecté la chronologie de mes trouvailles, ce qui permet de bien mettre en évidence leur véritable origine, à savoir cette partie de ma thèse qui remonte à 1975 et qui a fait l'objet d'une conférence au Séminaire de Brême avec publication, quelque temps après. Une classification plus fine des « squelettes », encore à l'état de brouillon, ne fait pas partie de ce texte. Je n'y ai inclus aucune considération sur les facteurs séries des fonctions **L** (sous leur forme série : à toute décomposition directe multiplicative des entiers est associée une décomposition en produit de deux séries de même genre, dont l'une peut très bien converger dans un domaine plus vaste que la série initiale); tous les cas connus sont, du point de vue qui m'intéresse, assez triviaux, quant aux autres…qui ressortent des sections 5, 6 et 7, le travail d'application est encore à l'état d'ébauche.

Pour une première lecture efficace, on peut commencer à la section 5. Par contre cette lecture risque d'être périlleuse, bien que bourbakiment possible. La rédaction sur les graphes (gradués, bicolores, etc.…) qui sont associés aux décompositions squelettiques, leurs propriétés de connexité, etc.…) est très succincte ; c'est une ébauche de la section manquante sur la classification des squelettes, laquelle ne présente pas de difficulté particulière…

Les catégories et foncteurs « dérivés » qui apparaissent à la section 6 n'ont rien à voir a priori avec les catégories et foncteurs dérivés au sens de Verdier-Grothendieck, etc.…De plus, j'ai omis de retranscrire tous les résultats de décompositions multiplicatives des entiers en termes … d'entiers, ce qui serait sans doute souhaitable de faire (réinterpréter tous les ensembles **P**, $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$, …$\mathbf{P}^{(n)}$ comme autant de sous-ensemble de $\mathbf{N}^*$).

0. Précatégories et prémonoïdes.

***Définition* 0-1.**
Une *précatégorie* **C** est un graphe multiplicatif satisfaisant l'axiome dit d'*associativité forte* suivant :

$$\forall\, x, y, z \in \mathbf{C}\ \ [\ [\ \exists\, z.(y.x) \vee \exists\, (z.y).x\ ]\ \Rightarrow\ \exists\, [\ z.(y.x) = (z.y).x\ ]\ ]$$

Par convention, une formule telle que $\exists\ [\ A(x,y,\ldots) = B(x,y,\ldots)]$ est un raccourci pour la formule suivante : $[\ \exists\ A(x,y,\ldots)\ ] \wedge [\ \exists\ B(x,y,\ldots)] \ \wedge\ [\ A(x,y,\ldots) = B(x,y,\ldots)\ ]$.

Ainsi, dans une précatégorie, il suffit qu'un des composés $(z.y).x$ ou $z.(y.x)$ existe pour que tous les deux existent et soient égaux ; on peut noter ce composé sous la forme $z.y.x$ sans ambiguïté possible.

Soit D_n l'ensemble des dispositions cohérentes de parenthèses à n « places », ensemble dont le cardinal est appelé parfois le $n^{ième}$ nombre de Catalan. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments d'un système multiplicatif et d_n un élément de D_n ; la formule $\exists\ d_n(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ signifie que le calcul de l'expression $d_n(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ est possible dans le système multiplicatif en question, et le résultat de ce calcul est naturellement désigné aussi par $d_n(x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

***Définition* 0-2.**
Un graphe multiplicatif **G** est dit *complètement associatif* s'il satisfait l'axiome d'*associativité complète* suivant :

$$\forall\ n \geq 3 \qquad \forall\ x_1,x_2,, x_n \in \mathbf{G} \qquad \forall\ d_n\ ,\ \delta_n \in D_n$$
$$[\exists\ d_n(x_1,x_2,..,x_n) \wedge \exists\ \delta_n(x_1,x_2,..,x_n)\ ] \Rightarrow d_n(x_1,x_2,..,x_n) = \delta_n(x_1,x_2,..,x_n)$$

***Proposition* 0-1**.
Une précatégorie est un graphe multiplicatif *complètement associatif.*

Cette proposition signifie donc que la *forte associativité* entraîne la *complète associativité,* mais l'inverse n'est pas vrai , comme le montre l'exemple prototype suivant : le graphe multiplicatif ayant trois flèches consécutives x,y,z (qui ne soient pas des identités) et trois autres composés non triviaux, à savoir z.y et y.x et z.(y.x), est évidemment complètement associatif, mais non fortement associatif.

Remarques.
1) Dans une précatégorie, une expression du genre $\exists\ x_1.x_2\ldots x_n$ est valide dès lors qu'une expression au moins du genre $\exists\ d_n(x_1,x_2,..,x_n)$ est valide.

2) Une catégorie est une précatégorie particulière, dans laquelle $y.x$ est défini dès lors que $\alpha(y) = \beta(x)$, α et β désignant respectivement les applications source et but.

3) Un graphe orienté s'identifie à une précatégorie particulière dans laquelle les seuls composés définis sont les composés triviaux (i.e. du genre $\beta(x).x$ ou $x.\alpha(x)$).

***Définition* 0-3.**
Un *prémonoïde* est une précatégorie à un seul objet, lequel est identifié à l'élément neutre qu'il définit.
Un prémonoïde **M** est dit *commutatif* s'il satisfait l'axiome suivant :

$$\forall\, x, y \in \mathbf{M}\ [\ \exists\, y.x\ \Rightarrow\ [\exists\, x.y = y.x]\ ]$$

***Définition* 0-4.**
Un *homomorphisme* $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ entre précatégories est déterminé par la donnée d'une précatégorie « source » **C**, d'une précatégorie « but » **D** et d'un *foncteur* f de **C** dans **D**, i.e. d'une application f de **C** dans **D** satisfaisant les axiomes suivants :

$$\forall\, e \in \mathbf{C}_0\ [\ f(e) \in \mathbf{D}_0\ ]$$
$$\forall\, x,y \in \mathbf{C}\ \ [\ \exists\, y.x\ \Rightarrow\ [\ \exists\, f(y).f(x) = f(y.x)\ ]\ ]$$

Ces homomorphismes se composent et constituent ainsi la catégorie **PréCat** des « petites » précatégories. Elle admet la catégorie **Cat** des « petites » catégories comme sous-catégorie pleine ; elle admet aussi comme sous-catégorie pleine la catégorie **Gro** des « petits » graphes orientés, étant entendu qu'on identifie un graphe orienté au graphe multiplicatif trivial, dans lequel les seuls composés définis sont du genre : $x.\alpha(x) = \beta(x).x = x$. On dispose aussi de la catégorie **Gmca** des « petits » graphes multiplicatifs complètement associatifs, dont **PréCat** est une sous-catégorie pleine.

***Proposition* 0-2**.
Tout graphe multiplicatif complètement associatif **C** engendre librement une catégorie **C**' dans laquelle il se plonge.

On peut dire qu'à isomorphisme près, un graphe complètement associatif est un sous-graphe multiplicatif d'une catégorie ; on obtient donc un objet de ce genre à partir d'une catégorie en « enlevant » de celle-ci des flèches et de la composition ; on peut procéder de la manière suivante: soit **C** une catégorie ; soit **G** un sous-graphe orienté du graphe orienté **C** sous-jacent à **C** ; soit $\mathbf{G}*\mathbf{G}$ l'ensemble de tous les couples (y,x) d'éléments de **G** composables dans **C** et dont le composé y.x est encore dans **G** ; on constitue alors un graphe multiplicatif complètement associatif **G** en choisissant pour ensemble $\mathbf{G}*\mathbf{G}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{G}*\mathbf{G}$ contenant au moins les couples triviaux (i.e. ceux de la forme $(x,\alpha(x))$ ou $(\beta(x),x)$) , étant bien entendu que les valeurs des composés dans **G** sont celles qui prévalent dans **C**.

En particulier, toute précatégorie engendre librement une catégorie dans laquelle elle se plonge.

Engendrements.
Soit **C** une précatégorie et A une partie de **C** ; on dispose dans A d'une *loi de composition partielle induite* par celle de **C**, notée « $._A$ », définie de la manière suivante :

$$\forall\, x,y \in A\ \ [\ \exists\, y._A x\ \Leftrightarrow [\ \exists\, y.x \in \mathbf{C}\ \wedge\ y.x \in A\ ]\ ]\ ,$$

et on pose alors: $y._A x = y.x$.
L'objet $\mathbf{A} = (A, ._A)$ est un graphe multiplicatif complètement associatif si et seulement si A contient $A_0 = \alpha(A) \cup \beta(A)$, mais en général pas ce n'est pas une précatégorie.

Soit U : **PréCat** → **Ens** le foncteur d'oubli naturel qui « oublie » la composition partielle. Soit **C** une précatégorie et A une partie de **C** contenant avec tout élément x ses source et but, $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ (A définit donc un sous-graphe orienté de **C**). Notons **A** = (A, $._A$) le graphe multiplicatif induit par **C** sur A.

***Proposition* 0-3**.
A est une sous-précatégorie de **C** (ou U-sous-structure de **C**) si et seulement si **A** est une précatégorie.

.
***Définition* 0-5.**
Soit **C** un graphe multiplicatif et **A** un sous-graphe multiplicatif de **C**. On dira que **A** est *multiplicativement plein* dans **C**, s'il satisfait la condition suivante :

$$\forall\, x,y \in A \;\; [\, \exists\, y.x \in \mathbf{C} \Rightarrow y.x \in A \,]$$

Tout sous-graphe multiplicativement plein **A** d'une précatégorie en est une sous-précatégorie. Bien évidemment, l'inverse n'est pas vrai, en général.

***Définition* 0-6.**
Soit **C** un graphe orienté et A une partie de C ; on dit que A est *pleine* dans **C** si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall\, x \in C \;\; [\, x \in A \;\Leftrightarrow \alpha(x)\,,\, \beta(x) \in A \,]$$

Par définition, une partie pleine d'un graphe orienté définit déjà elle-même un graphe orienté.

***Proposition* 0-4**.
Soit **C** un graphe orienté (resp. un graphe multiplicatif, un graphe multiplicatif complètement associatif, une précatégorie, une catégorie) et soit A une partie *pleine* de C. Alors le système multiplicatif **A** induit par **C** sur A est lui-même un graphe orienté (resp. un graphe multiplicatif, un graphe multiplicatif complètement associatif, une précatégorie, une catégorie) et c'est dans chaque cas une sous-structure.

Une sous-précatégorie pleine d'une précatégorie est multiplicativement pleine, mais la réciproque n'est pas vraie.

***Proposition* 0-5**.
Soit **C** une précatégorie et **A** un sous-graphe multiplicatif de **C** ; il est complètement associatif ; il engendre dans **C** les sous-structures suivantes, relatives aux foncteurs d'oubli usuels : précatégorie, précatégorie multiplicativement pleine, précatégorie pleine.

• *Sous-précatégorie engendrée* : la sous-précatégorie $\mathbf{A}^{/p}$ engendrée par A est construite par récurrence comme suit : posons $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$; supposons les $\mathbf{A}_k$ définis pour k = 1,2,…,n ; on définit $\mathbf{A}_{n+1}$ à partir de $\mathbf{A}_n$ par la formule ci-dessous, dans laquelle $*\mathbf{X}^3$ désigne l'ensemble des triplets de flèches consécutives de **X** (la première étant notée le plus à droite) :
$\mathbf{A}_{n+1} = \{\, t \in C \mid \exists\, (z,y,x) \in *\mathbf{A}_n{}^3 \; [[z.y,(z.y).x \in \mathbf{A}_n \wedge t = y.x] \vee [y.x,z.(y.x) \in \mathbf{A}_n \wedge t = z.y]] \,\}$
Alors $\mathbf{A}^{/p} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_n \cup \ldots$ est la plus petite sous-précatégorie de **C** contenant A.
Le plus petit entier n , s'il existe, tel que $\mathbf{A}^{/p} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_n$ est noté n(A), sinon on pose $n(A) = \infty$.

On notera que dans un prémonoïde commutatif **M** la formule d'engendrement de $\mathbf{A}^{/p}$ à partir de **A** se simplifie en la suivante :

$$\mathbf{A}_{n+1} = \{ t \in M \mid \exists (z,y,x) \in {}^*\mathbf{A}_n{}^3 \, [z.y,(z.y).x \in \mathbf{A}_n \wedge t = y.x] \} ;$$

• *Sous-précatégorie multiplicativement pleine engendrée* : c'est la structure induite par **C** sur l'ensemble $\mathbf{A}^{*p}$ suivant :

$$\mathbf{A}^{*p} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \exists \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in A \wedge \exists \, [z = x_n.x_{n-1} \ldots x_1] \} ;$$

cette formule a bien un sens puisque, dans une précatégorie, l'associativité portant sur n éléments résulte de celle portant sur 3 éléments (proposition **0-1**) (ce qui n'est pas vrai dans un graphe multiplicatif, même complètement associatif) .

• *Sous-précatégorie pleine engendrée* : la sous-précatégorie pleine $\mathbf{A}^{pp}$ engendrée par **A** est constituée de tous les $x \in C$ tels que $\alpha(x)$ et $\beta(x) \in A_0$.

Remarque. On a : $A \subset A^{/p} \subset A^{*p} \subset A^{pp}$ et ces inclusions sont en général strictes . En voici un exemple. On prend pour précatégorie **C** le monoïde additif **N** et pour **A** le sous-graphe additif (ici l'addition fait office de « multiplication des flèches » !) induit par **N** sur l'ensemble de nombres suivant : A = 7.B , avec B = {0, 1, 2, 3, 6}, soit A = { 0, 7, 14, 21, 42 }.
Il est clair que $\mathbf{B}^{/p} = \mathbf{B}_1 = [0,6]$ et $\mathbf{A}^{/p} = \mathbf{A}_1 = 7.\mathbf{B}_1 = 7.[0,6] = \{ 0,7, 14, 21, 28, 35, 42\}$; par contre $\mathbf{B}^{*p} = 7.\mathbf{N}$ et $\mathbf{B}^{pp} = \mathbf{N}$. Bien sûr, on peut, dans ce type d'exemple, mettre à la place de 7 un nombre quelconque mais > 1.

Exemples dans le monoïde (**N**,+).
Dans le monoïde additif **N** il y a plusieurs problèmes intéressants. Certains sont résolus (depuis longtemps déjà), d'autres non. Citons seulement ceux-ci :

(i) On peut déterminer toutes les décompositions additives de **N** (voir plus loin), c'est-à-dire les familles de parties $(A_k)_{k \in K}$ de **N** telles que $\mathbf{N} = \bigoplus_{k \in K} A_k$, notation suggestive qui signifie, précisons-le, que tout entier n s'écrit de manière unique sous la forme $n = \sum_{k \in K} a_k$, où $a_k \in A_k$. L'ensemble d'indexation K peut être fini ou non, chaque facteur A_k aussi peut être fini ou non (tous les cas possibles a priori se présentent effectivement !). Quelle que soit la décomposition en cause, chaque facteur A_k détermine avec la structure additive induite un sous-prémonoïde $\mathbf{A}_k$ de **N.** Il semble difficile de démontrer qu'un facteur direct A de **N** définit un sous-prémonoïde additif **A** de **N** sans connaître «a priori » sa structure « fine » (liée à l'existence d'une certaine base généralisée de **N**-voir plus loin) ; cette question reste posée.

(ii) Une autre question est de caractériser simplement les sous-prémonoïdes de **N**, et pas seulement ceux qui sont facteurs directs de **N**. Parmi ces sous-prémonoïdes, il y a ceux qui sont indécomposables, et que j'ai proposé d'appeler les « nouveaux nombres premiers » , au moins ceux qui sont finis; en effet, les seules « parties-segments » **n** = [0,n-1] indécomposables sont celles correspondant aux entiers n premiers, et il est assez facile d'indiquer les décompositions additives d'un segment **n** en fonction de la décomposition de n en facteurs premiers (voir plus loin); par contre, il semble assez difficile de caractériser les « nouveaux nombres premiers » **A** ; notons quand même qu'une condition suffisante pour que **A** soit premier est que card(A) soit premier, mais c'est bien peu de chose !

(iii) Il serait intéressant aussi de savoir s'il y a pour les sous-prémonoïdes (finis) de **N** une propriété généralisant l'unique décomposition en facteurs premiers des entiers (déjà, pour les

parties-segments **n**, la question n'est pas triviale, mais relativement aisée…en tout cas équivalente à la question des décompositions directes générales additives de **N**).

(iv) Pour une partie A de **N** donnée, il est facile de décrire le sous-monoïde « additivement » plein $\mathbf{A}^{*p}$ engendré par A : ses éléments sont toutes les sommes finies d'entiers de la forme n.a, où $n \in \mathbf{N}$ et $a \in A$ et sa structure additive est la structure induite .

(v) Bien plus difficile est le problème consistant à caractériser ou à décrire $\mathbf{A}^{/p}$, ou même à calculer n(A) !
Voici, *sans les démonstrations*, quelques résultats regroupés en une seule proposition montrant bien ces difficultés, concernant l'ensemble $\mathbf{P} = \{0,1,2,3,5,7,11,13,\ldots,59,\ldots\}$ des nombres premiers, auquel on a ajouté 0 et 1 :

Proposition 0-6.
0-6-1. Si $\mathbf{U} = \{ u_0 = 0, u_1 = 1,\ldots, u_n ,\ldots\} \subset \mathbf{N}$, avec $u_n < u_{n+1} < 2u_n$, alors $\mathbf{U}^{/p} = \mathbf{N}$.
$\mathbf{P}^{/p} = \mathbf{N}$ (utilise le fait que $p_{n+1} < 2p_n$, où p_n désigne le $n^{ème}$ nombre premier).

0-6-2. $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} \cup \mathbf{J}$ où $\mathbf{J} = \{n \in \mathbf{N} \mid n-1, n+1 \in P\setminus\{0\}\}$ est l'ensemble des entiers dits *jumeleurs.*

0-6-3. $\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{N}$, les inclusions $\mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_2 \subset \mathbf{N}$ sont strictes donc $n(P) \geq 3$; $\inf\{\mathbf{N} \setminus \mathbf{P}_2\} = 93$.

Posons $\mathbf{P}_{[2k]} = \{ p_n \in \mathbf{P} \mid p_{n+1} = p_n + 2k \}$ et $\mathbf{J}_{2k} = \bigcup_{p_n \in \mathbf{P}_{[2k]}}]p_n, p_{n+1}[$.

$\mathbf{J}_2$ = J = {2,4,6,12,18,30,42,60,72,…}
$\mathbf{J}_4$ = {8,9,10,14,15,16,20,21,22,38,39,40,68,69,70,80,81,82,…}
$\mathbf{J}_6$ = {24,25,26,27,28,32,33,34,35,36,48,49,50,51,52,54,55,56,57,58,62,63,64,65,66,…}
$\mathbf{J}_8$ = {90,91,92,93,94,95,96,360,361,362,363,364,365,366,390,391,392,393,394,395,396,…}
…
On voit que $\mathbf{N} = \mathbf{P} \setminus \{2\} \cup \mathbf{J}_2 \cup \mathbf{J}_4 \cup \ldots \cup \mathbf{J}_{2k} \cup \ldots$ et que cette réunion est disjointe; l'ensemble des k tels que $\mathbf{J}_{2k} \neq \varnothing$ est infini ; on ne sait pas s'il existe des entiers k tels que $\mathbf{J}_{2k}$ soit fini ou éventuellement vide ! On ne connaît pas d'entier k pour lequel on puisse affirmer que $\mathbf{J}_{2k}$ est infini. Ces questions généralisent en quelque sorte la conjecture dite des entiers premiers jumeaux, qui prétend que $\mathbf{J} = \mathbf{J}_2$ serait infini !

0-6-4. $\mathbf{J}_4 \subset \mathbf{P}_2$ et $\mathbf{J}_6 \subset \mathbf{P}_2$; pour tout $p \in \mathbf{P}_{[12]}$ les entiers p+1, p+5, p+6, p+7, p+11 sont éléments de $\mathbf{P}_2 \setminus \mathbf{P}_1$.

0-6-5. S'il existe une infinité d'entiers jumeleurs 2k tels que $\mathbf{J}_{2k}$ ne soit pas vide, ou s'il existe un entier jumeleur $2m > 2$ tel que $\mathbf{J}_{2m}$ soit infini, alors $\mathbf{P}_2 \setminus \mathbf{P}_1$ est infini. Comme on ne sait pas si J_4 , J_6 ou J_{12} est infini, on ne sait toujours pas si $\mathbf{P}_2 \setminus \mathbf{P}_1$ est infini…

0-6-6. Pour que $6\ell+3 \notin P_2$ il faut et il suffit que l'un de ses *voisinages immédiats* au moins soit constitué de nombres non premiers. Les voisinages immédiats sont :
gauche $(6\ell-1, 6\ell+1)$ *milieu* $(6\ell+1, 6\ell+5)$ *droit* $(6\ell+5, 6\ell+7)$

0-6-7. $\mathbf{N} \setminus \mathbf{P}_2$ est infini.

0-6-8. Soit $2k \geq 10$ et $2k = 1$ (resp.2) mod. 3 et soit $2h$ un entier pair tel que $4 < 2h < 2k$ et $2h = 2$ (resp.1) mod. 3 ; alors on a : $p+2h \notin \mathbf{P}_2$. Exemple: pour tout $p \in \mathbf{P}_{[10]}$, $p+8 \notin \mathbf{P}_2$.
Cet énoncé *équivaut presque* à **0-6-6.**

0-6-9. Soit r un entier > 0 ; soit (s,t) l'un des trois couples d'entiers suivants :

$$(6r-1, 6r+1), \quad (6r+1, 6r+5), \quad (6r+5, 6r+7);$$

soit encore α (resp. β) un diviseur > 1 de s (resp. de t) ; alors la progression arithmétique $\{6\alpha\beta.\ell+6r+3, \ \ell > 0\}$ est entièrement contenue dans $\mathbf{N} \setminus \mathbf{P}_2$; de plus, si α et β sont des diviseurs propres de s et t respectivement, la progression arithmétique $\{6\alpha\beta.\ell+6r+3, \ \ell \geq 0\}$ est entièrement contenue dans $\mathbf{N} \setminus \mathbf{P}_2$.
En choisissant pour (α,β) l'un des couples (s,t) lui-même, on obtient ceci : pour tout $r > 0$, les progressions arithmétiques suivantes sont dans $\mathbf{N} \setminus \mathbf{P}_2$:

$$\{ 6(36r^2-1).\ell + 6r+3 ; \quad 6(36r^2+36r+5).\ell + 6r+3 ; \quad 6(36r^2+72r+35).\ell + 6r+3 ; \quad \ell > 0\}$$

Avec r = 1, on trouve : $\forall\ \ell > 0,\ 210.\ell + 9,\ 462.\ell + 9,\ 858.\ell + 9 \notin \mathbf{P}_2$.
Avec r = 0, on trouve : $\forall\ \ell > 0,\ 210.\ell + 3 \notin \mathbf{P}_2$.

Voici, pour finir cette section, quelques exemples de prémonoïdes commutatifs qui se présenteront naturellement dans la suite, la loi + étant chaque fois la loi *induite* par celle de **N,** ou $\mathbf{N}^k$.

- Si n est un entier, $\mathbf{n} = [0, n-1]$ est un sous-prémonoïde de **N**.
- Tout facteur direct de **N** est un sous-prémonoïde de **N**.
- Si $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont des entiers, $\mathbf{C} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} \times \ldots \times \mathbf{n_k}$ et $\mathbf{L} = \{(m_1, m_2, \ldots, m_k) \mid \exists\ i\ \ m_i < n_i \}$ sont des sous-prémonoïdes de $\mathbf{N}^k$.
- Toute réunion d'ensembles tels que **C** ou **L**, dans $\mathbf{N}^k$, détermine un sous-prémonoïde de $\mathbf{N}^k$.
- Le foncteur d'oubli U : **PréCat** $\rightarrow$ **Ens** (qui « oublie » la composition partielle) reflète les limites inductives filtrantes, sa restriction à la sous-catégorie pleine **PréMon** aussi !

Beaucoup de facteurs directs de $\mathbf{N}^k$, avec $k \geq 2$ ***ne sont pas*** des sous-prémonoïdes de $\mathbf{N}^k$, et c'est ce qui fait en partie la difficulté du problème central de cet article, pour lequel les théorèmes de trivialité des décompositions produits ne s'appliquent pas toujours ! Cependant, ces théorèmes sont très utiles pour « dégrossir » la situation, et c'est à eux qu'est consacrée la section suivante.

1. Décompositions directes des prémonoïdes commutatifs bien ordonnés. et noyaux d'instabilité.

***Définition* 1-1.**
Un prémonoïde commutatif *(bien) ordonné* $(E,+,\leq)$ est constitué d'un prémonoïde commutatif $(E, +)$ (d'élément neutre noté 0) et d'un *(bon) ordre* $\leq$ sur E satisfaisant les conditions suivantes :

si $z = x + y$, alors $x \leq z$ (et donc aussi $y \leq z$) et si $x = z$, alors $y = 0$.

Une conséquence immédiate de cette définition est la suivante : si $0 = x+y$, alors $x = y = 0$!

On conviendra d'employer systématiquement le symbole < pour indiquer une inégalité *stricte.*
Si $z = x + y$, on a l'équivalence entre « $y \neq 0$ » et « $x < z$ ».
On emploie génériquement les symboles $+ , < , \leq , 0$ quand il n'y a pas de confusion possible.

Soit $(E_i ,+)_{i \in I}$ une famille de prémonoïdes commutatifs. Le produit cartésien $E = \prod_{i \in I} E_i$ est naturellement muni de la loi de composition + suivante :

$\exists ((x_i) + (y_i)) \Leftrightarrow \forall i \in I \ \exists (x_i + y_i)$ et alors $(x_i)+(y_i) = (x_i + y_i)$,

de sorte que $(E,+)$ est un prémonoïde commutatif, produit des prémonoïdes $(E_i, +)$.

Soit maintenant $(E_i ,+, \leq)_{i \in I}$ une famille de prémonoïdes commutatifs bien ordonnés.
Etant donné un bon ordre sur I , on munit naturellement E de l'ordre lexicographique associé, qui est donc le suivant : $(x_i) < (y_i)$ si et seulement si $x_j < y_j$, en désignant par j le premier élément de I (pour le bon ordre donné sur I) pour lequel on a $x_i \neq y_i$ (on a donc, pour tout i tel que $i < j$, $x_i = y_i$). C'est un bon ordre sur E et $(E ,+, \leq)$ est un prémonoïde commutatif bien ordonné.

Notons qu'en général il n'y a pas de bon ordre sur E qui puisse faire de $(E,+, \leq)$ un produit des $(E_i ,+, \leq)$ dans la catégorie des prémonoïdes commutatifs bien ordonnés…

***Définition* 1-2**
Soit E un prémonoïde commutatif . On dit que $\partial = (A,B)$ est une *décomposition directe* de E lorsque tout élément x de E se décompose de manière unique en somme d'un élément a de A et d'un élément b de B. On suppose en outre que $0 \in A \cap B$. On note aussi a et b de manière fonctionnelle, comme ceci: $a = \underline{a}(x)$ et $b = \underline{b}(x)$.

Remarques.
1) La composition + étant partielle a priori, l'ensemble $A * B$ des couples $(a,b) \in A \times B$ qui sont composables pour l'addition + n'est pas nécessairement le produit $A \times B$. Si E est un monoïde, alors $A * B = A \times B$. Mais on peut bien avoir cette égalité sans que pour autant E soit un monoïde.
Exemples : soit $E_7 = [0,7] = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ et $\mathbf{E}_7 = (E_7,+)$ le prémonoïde naturel avec l'addition pour loi (limitée par 8 : 2+6, 3+5, etc…ne sont pas définis). Si $A = \{0,1,2,3\}$ et $B = \{0,4\}$, le couple (A,B) est une décomposition de $\mathbf{E}_7$ pour laquelle $A * B = A \times B$. Par contre, si $A' = \{0,1,2\}$ et $B' = \{0,3,6\}$ le couple (A',B') est aussi une décomposition directe de $(E_7,+)$ et pourtant $A'*B' = A' \times B' \setminus \{2,6\}$ n'a que 8 éléments (comme E_7) !

2) L'élément neutre 0 se décompose , et comme $0 \in A \cap B$, on a : $\underline{a}(0) = \underline{b}(0) = 0$. De plus , il est clair que $A \cap B = \{0\}$. Le fait que $0 \in A \cap B$ ne découle pas de l'unicité de décomposition : par exemple, si $\mathbf{E} = (\mathbf{Z}, +)$, $A = \mathbf{Z}$ et $B = \{-1\}$, tout élément x s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de A et d'un élément de B : $x = \underline{s}(x) + (-1)$, où $\underline{s}(x)$ désigne le successeur de x pour l'ordre usuel dans $\mathbf{Z}$; ici $A \cap B = \{-1\}$.

3) Dans le même ordre d'idées, et en se tenant à la définition ci-dessus, il est possible que tout élément de **E** ait un symétrique : par exemple, toujours avec $\mathbf{E} = (\mathbf{Z}, +)$ qui est un groupe, le couple (A,B) suivant est une décomposition directe : $A = \{3k\}$ et $B = \{0,-1,-2\}$.

Soit $\partial = (A,B)$ une décomposition directe du prémonoïde commutatif **E**, et X une partie de E. Les noyaux d'instabilité de ∂ sont des parties de A et B qui « mesurent » en quelque sorte leur défaut de stabilité par rapport à la loi de composition de prémonoïde de E.

***Définition* 1-3.**
On définit les *noyaux d'instabilité* associés à cette décomposition ∂ comme étant les sous-ensembles suivants de A et de B respectivement, auxquels on adjoindra {0} par convention :

$$N_\partial(A) = \{ a \in A \mid \exists\, a' \in A \mid a+a' \in B \}$$
$$N_\partial(B) = \{ b \in B \mid \exists\, b' \in B \mid b+b' \in A \};$$

on les désignera aussi simplement par N(A) et N(B), s'il n'y a pas de confusion possible.

***Définition*1-4.**
On définit les *noyaux d'instabilité relatifs à* X associés à cette décomposition ∂ comme étant les sous-ensembles suivants de $A \cap X$ et de $B \cap X$ respectivement, auxquels on adjoindra {0} par convention :

$$N_{\partial, X}(A) = \{ a \in A \cap X \mid \exists\, a' \in A \cap X \mid a+a' \in B \}$$
$$N_{\partial, X}(B) = \{ b \in B \cap X \mid \exists\, b' \in B \cap X \mid b+b' \in A \};$$

on les désignera aussi simplement par $N_X(A)$ et $N_X(B)$, s'il n'y a pas de confusion possible.

Examinons de plus près les décompositions d'un produit de deux prémonoïdes commutatifs bien ordonnés, bien qu'à l'évidence beaucoup des considérations suivantes restent valables pour un « produit » quelconque, et s'adaptent aussi facilement au cas d'un produit de *précatégories bien ordonnées*…

Soient $\mathbf{E}_1 = (E_1,+,\leq)$ et $\mathbf{E}_2 = (E_2,+,\leq)$ deux prémonoïdes commutatifs bien ordonnés. Munissons l'ensemble {1,2} du bon ordre usuel : $1 < 2$. Ainsi , dans le produit $E = E_1 \times E_2$, on dispose du bon ordre : $(x_1,x_2) < (y_1,y_2)$ si et seulement si : soit $x_1 < y_1$, soit si $x_1 = y_1$, $x_2 < y_2$. On peut identifier $\mathbf{E}_1$ (resp.$\mathbf{E}_2$) avec le sous-prémonoïde *additivement plein* $\mathbf{E}_1 \times \{0\}$ (resp. $\mathbf{E}_2 \times \{0\}$) de $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, de sorte que **E** apparaît comme *somme directe* de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, ou encore (E_1, E_2) est une décomposition directe de **E** en deux sous-prémonoïdes additivement pleins. Cette décomposition est complètement stable ($N(E_1) = N(E_2) = \{0\}$). Si $x = (x_1,x_2) \in E$, on écrira aussi : $x = x_1 + x_2$.

Soit (A, B) une décomposition directe de **E** ; rappelons que l'élément neutre 0 est élément de A et de B et que $A \cap B = \{0\}$; elle induit des décompositions directes (A_1, B_1) et (A_2, B_2) de

de $\mathbf{E}_1$ et de $\mathbf{E}_2$ respectivement. Alors tout élément x de **E** se décompose de manière unique en somme de quatre éléments : $x = a_1 + b_1 + a_2 + b_2$ où $(a_1 , b_1 , a_2 , b_2) \in A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2$, de sorte que le quadruplet (A_1, B_1 , A_2 , B_2) apparaît comme une décomposition directe de **E** en quatre facteurs. Plus généralement, quelles que soient les parties $X \subset E_1$ et $Y \subset E_2$, $X \oplus Y$ est défini et égal à $X \times Y$, car on a toujours : $(x,y) = (x,0)+(0,y)$.

***Théorème* 1-1 (version absolue).**
Supposons que $[N(B_1) = B_1$ ***ou*** $N(B_2) = B_2]$ ***et*** que $[N(A_2) = A_2$ ***ou*** $N(A_1) = A_1]$, alors la décomposition (A,B) est *triviale*, dans le sens que l'on a: $A = A_1 \oplus A_2$ et $B = B_1 \oplus B_2$.

La démonstration consiste en une récurrence transfinie utilisant le bon ordre lexicographique de **E**. *Elle figure dans ma thèse (1975).*

Application.
Nous caractériserons plus loin toutes les décompositions directes (A,B) de (**N**,+)**.** On verra qu'un facteur direct A d'une telle décomposition satisfait la condition suivante : $N(A) \neq A$ si et seulement si $|B| < \infty$.
Supposons que (A,B) soit une décomposition directe *non triviale* de $\mathbf{N}^2$; alors la condition :

$$[N(B_1) = B_1 \text{ ou } N(B_2) = B_2] \text{ et } [N(A_2) = A_2 \text{ ou } N(A_1) = A_1]$$

n'est pas remplie. Donc l'une au moins des deux conditions suivantes n'est pas remplie :

$$[N(B_1) = B_1 \text{ ou } N(B_2) = B_2] , [N(A_2) = A_2 \text{ ou } N(A_1) = A_1],$$

c'est à-dire que l'on a :

$$[N(B_1) \neq B_1 \text{ et } N(B_2) \neq B_2] \text{ ou } [N(A_2) \neq A_2 \text{ et } N(A_1) \neq A_1],$$

soit encore :

$$[\,|A_2| < \infty \text{ et } |A_1| < \infty] \text{ ou } [\,|B_1| < \infty \text{ et } |B_2| < \infty];$$

et ces deux conditions sont exclusives l'une de l'autre.

Raffinement de cette proposition à certaines parties de* E, *utilisant les noyaux relatifs.
On suppose toujours donné un prémonoïde commutatif bien ordonné **E** = (E,+, ≤) et une de ses décompositions directes $E = A \oplus B$.

***Définition* 1-5.**
Une partie X de **E** est dite *propre* (relativement à la décomposition directe donnée) si elle est non vide et si, pour tout x élément de X, $\underline{a}(x)$ et $\underline{b}(x)$ sont aussi éléments de X.

Premières conséquences de cette définition:
soit X une partie propre :
- inf(X) = 0 ; en effet, soit x_0 le plus petit élément de X ; il se décompose en $x_0 = a_0 + b_0$ et a_0 , $b_0 \in X$ avec $a_0 , b_0 \leq x_0$, d'où $x_0 = a_0 = b_0 = 0$.
- Si $X^* = X \setminus \{0\}$ n'est pas vide, $x_1 = \inf(X^*) \in A \cup B$.
- Si $X^{**} = X^* \setminus \{x_1\}$ n'est pas vide, $x_2 = \inf(X^{**}) \in A \cup B$: en effet, supposons que $x_1 \in A$ et soit $x_2 = a+b$ la décomposition de x_2 ; si $b \neq 0$, on a : $a < x_2$ et donc $a = 0$ ou $a = x_1$; si $a = 0$, alors $x_2 = b \in B$; le cas $a = x_1$ est impossible car incompatible avec « $b < x_2$ et $b \neq 0$ » ; et si $b = 0$, alors $x_2 \in A$.
- En poursuivant, il y a une section commençante dans X, qui est dans A (resp. B) : $x_0 = 0$, x_1, x_2,…, x_n ; s'il y a un premier élément, soit x_{n+1} (n peut être un ordinal transfini, limite ou non), qui n'est pas dans A (resp.B), il est obligatoirement dans B (resp.A) ; en effet, $x_{n+1} = a+b$ avec

$b \neq 0$; si $b < x_{n+1}$ alors $b = x_m$ avec $m < n+1$, soit $b \in A$, donc $b = 0$ et $x_{n+1} \in A$, ce qui est une contradiction ; reste donc la seule possibilité : $b = x_{n+1} \in B$.
- A partir de là, on peut trouver des éléments qui ne sont pas dans $A \cup B$.
- Si X est un sous-prémonoïde de E, le couple $(A_X, B_X) = (A \cap X, B \cap Y)$ est une décomposition directe de X.

On reprend les conditions générales du **théorème 1-1**.
Soit X (resp. Y) une partie propre de **E** contenue dans E_1 (resp. dans E_2); c'est donc aussi une partie propre de $\mathbf{E}_1$ (resp. $\mathbf{E}_1$) pour la décomposition directe induite par (A,B) sur E_1 (resp. sur E_1), soit (A_1, B_1) (resp. (A_2, B_2)).

***Théorème* 1-2. (version relative).**
Supposons $[N_X(B_1)=B_1 \cap X$ ou $N_Y(B_2) = B_2 \cap Y]$ et $[N_Y(A_2) = A_2 \cap Y$ ou $N_X(A_1) = A_1 \cap X]$ et supposons aussi que $X \times Y$ est une partie propre de E .
Alors la décomposition $(A \cap X \times Y,\ B \cap X \times Y)$ est *triviale*, dans le sens que l'on a:

$$A_{X \times Y} = A \cap X \times Y = (A_1 \cap X) \oplus (A_2 \cap Y) \text{ et } B_{X \times Y} \cap X \times Y = (B_1 \cap X) \oplus (B_2 \cap Y) .$$

La démonstration par récurrence transfinie est semblable à celle du **Théorème 1-1**.

On aura besoin d'un autre résultat assez général, concernant la *simplifiabilité.*

Soit $(E,+,\leq)$ un prémonoïde commutatif *bien ordonné.* On désigne par $\boldsymbol{P_0}(E)$ l'ensemble des parties de E contenant 0.
Etant données deux parties A et B de E , on désigne par $A * B$ l'ensemble des éléments de $A \times B$ qui sont des couples composables pour la loi de prémonoïde donnée.

***Définition* 1-6.**
On dit que la *somme directe* de A et de B est définie si la composition $\underline{k}$ définit une bijection de $A * B$ sur son image $\underline{k}(A * B) = A + B$, et c'est cette somme qu'on désigne par $A \oplus B$.

Il n'est pas nécessaire que 0 soit élément de A ou de B pour que $A \oplus B$ soit défini. Mais si 0 est élément commun de A et B, alors le fait que $A \oplus B$ soit défini entraîne que $A \cap B = \{0\}$.

Exemples.
Toujours avec le prémonoïde $\mathbf{E}_7$ (voir remarque 1 suivant définition 1-2).
Soient A' = {1,2} et B'' = {5,6}; la somme A'+B'' est égale à {6,7} et $A' * B'' = \{(1,5), (1,6), (2,5)\}$; donc A'+B'' ne peut être une somme directe ; $A' \oplus B''$ n'est pas défini.
Soient A' = {1,2} et B' = {3,6}; A'+B' = {4, 5, 7} et $A' * B' = \{(1,3), (1,6), (2,3)\}$; $A' \oplus B'$ est bien défini et pourtant $A' * B'$ n'est pas égal à $A' \times B'$.
Ce n'est pas la condition « imposée » stipulant que 0 soit élément des parties concernées qui est à l'origine de ce phénomène ; en effet $A = A' \cup \{0\}$ et $B = B' \cup \{0\}$ constituent une décomposition directe de $\mathbf{E}_7$ pour laquelle $A * B = A \times B \setminus \{(1,6)\}$, comme déjà vu.

***Théorème* 1-3**.
La loi $\oplus$ structure l'ensemble $\boldsymbol{P_0}(E)$ en un prémonoïde d'élément neutre $\mathbf{0} = \{0\}$, commutatif et *simplifiable*. De plus ($\boldsymbol{P_0}(E), \oplus, \subseteq$) est un prémonoïde commutatif *ordonné*.
Le sous-ensemble $\boldsymbol{P_0}^{\mathbf{f}}(E)$ des parties finies de E contenant 0 détermine aussi un prémonoïde *ordonné* ($\boldsymbol{P_0}^{\mathbf{f}}(E), \oplus, \subseteq$) commutatif et simplifiable.

($\boldsymbol{P_0}$(E), ⊕, ⊆) possèdent des inf. et des sup.quelconques, ($\boldsymbol{P_0}^{\mathbf{f}}$(E), ⊕, ⊆) des inf. quelconques et des sup. finis.
Enfin, la relation X ∠ Y définie par l'existence d'un X' tel que Y = X⊕X' est une relation d'ordre et ($\boldsymbol{P_0}$(E), ⊕, ∠) et ($\boldsymbol{P_0}^{\mathbf{f}}$(E), ⊕, ∠) sont des prémonoïdes ordonnés commutatifs et simplifiables. Bien sûr, X ∠ Y entraîne X ⊆ Y mais pas l'inverse en général.

La démonstration consiste en une suite (assez longue) de simples vérifications.

***Définition* 1-7**.
Soit (A,B) une décomposition directe d'un prémonoïde commutatif (E,+) dont les noyaux d'instabilité (voir définition 1-3) sont :
N(A) = {a ∈ A | ∃ a' ∈ A | a + a' ∈ B} et N(A) = {b ∈ B | ∃ b' ∈ B | b + b' ∈ A}.
Un élément tel que a' (resp. b') est appelé *complément* de a (resp.b).

On définit une *loi de composition partielle* $+_b$ dans A de la façon suivante: soient n et n' deux éléments de A ; n $+_b$ n' est défini si et seulement si n+n' est défini, et sa valeur n'est autre que n $+_b$ n' = $\underline{a}$ (n+n'). On définit de même la loi de composition partielle $+_a$ dans B.
Si a' est un complément de a, on voit que a $+_b$ a' est défini et vaut 0 (d'où le nom de complément !)

Proposition* 1-1**. ***(Unicité des compléments)
Si (A,B) est une décomposition directe d'un prémonoïde commutatif (E,+) et si l'ensemble A*B des couples composables pour l'addition + est le produit cartésien A×B, alors il y a unicité des compléments.

Ainsi, pour la loi $+_b$, le noyau apparaît comme l'ensemble des inversibles, car a+a' = b∈ B se traduit encore par : a $+_b$ a' = 0.

Cas particulier.
Si (A,B) est une décomposition directe d'un monoïde commutatif (E,+), il y a unicité des compléments ; N(A) (resp. N(B)) est l'ensemble des inversibles de (A, $+_b$) (resp. (B, $+_a$)). C'est le cas de toute décomposition additive directe de $\mathbf{N}^k$, k ≥ 1.

Nous avons déjà vu qu'en général A*B n'est pas A×B tout entier, dans le cas « prémonoïde ».

Exemples.
1) Soit toujours $\mathbf{E}_7$ = {0,1,2,3,4,5,6,7} avec l'addition pour loi (limitée par 8 : 2+6, 3+5, etc…ne sont pas définis) ; comme déjà vu, A = {0,1,2} et B = {0,3,6} constituent une décomposition directe de $\mathbf{E}_7$ pour laquelle A*B = A×B \{2,6} n'a que 8 éléments (comme E_7). Cependant ici il y a unicité des compléments , mais cela ne résulte pas de la démonstration ci-dessus.
2) Soit $\mathbf{E}_{13}$ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} avec l'addition pour loi (limitée à 13 : 6+7, 3+10, 2+11, 3+11, 4+11, 10+5, 10+11, etc...ne sont pas définis).
A = {0,1,2,3,4,10} et B = {0,5,11} constituent une décomposition directe de $\mathbf{E}_{13}$ et A*B = A×B\ R où R = {(2,11),(3,11),(4,11),(10,5),(10,11)} n'a que13 éléments.
L'élément 1 a deux compléments : 1 $+_b$ 4 = 1 $+_b$ 10 = 0 ; le système (A,$+_b$) n'est pas un prémonoïde ; plus précisément la loi $+_b$ est associative en dimension 3, mais non fortement associative, ni même complètement associative : par exemple, on a : (3$+_b$4)$+_b$10 est défini et vaut 1, tandis que 3$+_b$(4$+_b$10) n'est pas défini (14 ≥ 13) ; de même 1$+_b$(2$+_b$10) est défini et

vaut 2, tandis que $(1+_b2)+_b10 = 3+_b10$ n'est pas défini ($13 \geq 13$) ; la loi $+_b$ est associative en dimension 3 (i.e. si $(x+_by)+_bz$ et $x+_b(y+_bz)$ sont définis ils sont égaux) : en effet, d'abord si $x,y,z < 5$, $(x+_by)+_bz$ et $x+_b(y+_bz)$ (bien définis) sont égaux, car, à iso près, on est dans $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$; supposons maintenant $x = 10$; comme $10+_by$ est supposé défini, $y = 0,1$ ou 2 et donc$10+_by = 10,0$ ou 1 ; comme $x+_b(y+_bz)$ est supposé aussi défini, si $z < 5$, tout se passe encore comme si on était dans $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ l'élément 10 jouant le rôle de $4 = -1$! Enfin, si $z = 10$ aussi, y ne peut pas être 0 sinon $10+_b10$ serait défini,ce qui n'est pas, et on a bien pour $y = 1$ ou 2 : $(10+_b y)+_b10 = 10+_b(y+_b10)$ (= 10 ou 0) ; pour montrer que la loi $+_b$ n'est pas associative, donnons cet exemple $+_b$:

$(((10 +_b 1) +_b (10 +_b 2)) +_b 3) +_b (1 +_b 10) = ((0 +_b 1) +_b 3) +_b 0 = 4$

$((10 +_b 1) +_b ((10 +_b 2) +_b (3 +_b 1))) +_b 10 = (0 +_b (1 +_b 4)) +_b 10 = 10$

Ceci fait voir au passage que la notion de *forte associativité* est bien plus intéressante que celle de *complète associativité*…

3) Soit $\mathbf{E}_{15}$ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14} avec l'addition pour loi (limitée à 15: 4+11,10+5 etc…ne sont pas définis); les mêmes ensembles qu'au 2) A = {0,1,2,3,4,10} et B = {0,5,11} constituent une décomposition directe de $\mathbf{E}_{15}$ et $A*B = A\times B \setminus R$ où R = {(4,11),(10,5),(10,11)}, n'a que15 éléments (comme E_{15}) ! L'élément 1 a toujours deux compléments : $1 +_b 4 = 1 +_b 10 = 0$.

Par contre, ici la loi $+_b$ n'est pas associative, même en dimension 3 : en effet, $(10 +_b 2) +_b 3$ est défini et vaut $1 +_b 3 = 4$; de même $10 +_b (2 +_b 3)$ est défini et vaut $10 +_b 0 = 10$ (bien sûr, c'est l'élimination de 15 qui provoque ce phénomène…!)

Concernant l'associativité des lois $+_a$ et $+_b$, elle n'est donc pas acquise de manière générale comme le prouvent les exemples précédents.

Nous montrerons au paragraphe suivant que si (A,B) est une décomposition directe de $(\mathbf{N},+)$, alors $(A,+_b)$ et $(B,+_a)$ sont des monoïdes dont les groupes d'inversibles sont les noyaux N(A) et N(B). Ce résultat semble nécessiter la connaissance fine des décompositions de $(\mathbf{N},+)$.

En dimension 2, le résultat subsiste génériquement, mais se présentent déjà une infinité d'exceptions (décompositions non triviales et non génériques) dans lesquelles un des systèmes $(A,+_b)$ ou $(B,+_a)$ n'est pas associatif.

2. Structures des décompositions directes additives de N.

Soit (A,B) une décomposition (additive) directe de **N** en deux facteurs ; tout entier n s'écrit de manière unique comme somme d'un élément a de A et d'un élément b de B; on emploie aussi la notation *fonctionnelle* : a = $\underline{a}(n)$ et b = $\underline{b}(n)$. On remarque que $A \cap B = \{0\}$. Pour fixer les idées, on supposera $1 \in A$.

***Proposition* 2-1.**
Il existe une unique suite dite des *multiplicateurs*, suite finie ou non d'entiers strictement supérieurs à 1, soit m_1 , m_2 ,…, m_k ,…, à laquelle est associée une autre suite dite *base généralisée de* **N** :

$$b_0 = 1 \ , \ b_1 = m_1.b_0 \ , \ b_2 = m_2.b_1 \ , \ b_k = m_k.b_{k-1} = m_k.\, m_{k-1} \ldots m_1 \ , \ \ldots$$

de sorte que tout nombre N s'écrit de manière unique sous la forme suivante :

$$N = \sum_{i=0}^{\ell} N_i b_i \quad \text{avec} \quad N_i < m_{i+1} \text{ , pour tout i de 0 à } \ell \text{ .}$$

S'il y a un dernier multiplicateur m_k , on peut convenir que $m_{k+1} = \infty$, de sorte qu'il n'y a simplement pas de condition de bornage sur N_k dans le terme $N_k b_k$ et on peut convenir aussi que l'on a : $\ell \leq k$.

Le lien avec la décomposition $\mathbf{N} = A \oplus B$ supposée est alors le suivant :

$$A = \{ N = \sum_{i=0}^{\ell} N_i b_i \mid N_{2i+1} = 0 \} \quad \text{et} \quad B = \{ N = \sum_{i=0}^{\ell} N_i b_i \mid N_{2i} = 0 \} \text{ ,}$$

de sorte que tout nombre $N = \sum_{i=0}^{\ell} N_i b_i$ se décompose de façon unique en $N = \underline{a}(N)+\underline{b}(N)$ où

$$\underline{a}(N) = \sum_{i=0} N_{2i} b_{2i} \in A \quad \text{et} \quad \underline{b}(N) = \sum_{i=0} N_{2i+1} b_{2i+1} \in B$$

La suite dite des multiplicateurs peut être « vide », la « base généralisée » étant réduite alors à son seul terme $b_0 = 1$ (si $1 \in A$, alors $A = \mathbf{N}$ et $B = \{0\}$, si $1 \in B$, alors $B = \mathbf{N}$ et $A = \{0\}$).

Une démonstration figure dans ma thèse ou écrits antérieurs (1971-1975). Y figurent bien d'autres résultats concernant ce problème.

Connaissant le résultat, il n'est pas bien difficile d'imaginer une démonstration, somme toute fort simple, consistant en :
- une cascade de divisions euclidiennes d'un entier N par les éléments de la base généralisée, commençant par le plus grand possible, laquelle base généralisée se définit aisément à partir de la donnée de (A,B) en termes de sup. ou de inf. « relatifs »,
- des mises en défaut adéquates de l'unicité de décomposition grâce à la notion de complément (relatif) liée à la description explicite des noyaux d'instabilité (voir plus loin).

Il est clair que ce type de décompositions comprend le cas de la *division euclidienne* par b (en prenant $b_0 = 1$, $b_1 = b$, $b_2 = \infty$) et les divers *systèmes de numérations* en base b (suites constantes de multiplicateurs $m_k = b$).

On remarquera aussi que si A ou B est fini, la décomposition $A \oplus B$ apparaît comme une véritable division euclidienne (par le plus grand élément b de la base généralisée)

accompagnée d'une décomposition directe du reste (i.e. une décomposition directe du *segment* $\mathbf{E}_b = [0,b-1]$).

***Proposition* 2-2.**
Supposons $\mathbf{N} = A \oplus B$; alors A et B définissent des *sous-prémonoïdes* (commutatifs) de **N.**

Remarques.
1) Les applications $\pi_i : A \rightarrow [0,m_i[$ qui à $a \in A$ font correspondre $N_i = \pi_i(a)$ déterminent des homomorphismes entre prémonoïdes commutatifs, et que A est naturellement isomorphe au prémonoïde somme (finie ou non) $\oplus_i [0,m_{2i}[$ via les *injections naturelles* s_{2i} définies par $s_{2i}(n) = n.b_{2i}$; cet objet somme est aussi un produit, via les *projections* $\pi_{2i} : A \rightarrow [0,m_{2i}[$ *naturelles*, dans le cas où A est fini, et seulement dans ce cas.
2) Entre les injections s_{2i} et les projections π_{2i} existent les relations bien connues dans les catégories additives.
3) On a aussi la bijection : $\mathbf{N} \sim (\oplus_i [0,m_{2i}[ ) \oplus (\oplus_i [0,m_{2i+1}[ )$, ces sommes pouvant être finies ou non, étant entendu qu'il faut introduire le multiplicateur ∞ une fois si nécessaire, c'est-à-dire si l'ensemble des multiplicateurs est fini (voir plus loin). Ce n'est évidemment pas un isomorphisme de prémonoïdes.
4) Pour tout entier $n > 0$, le segment $[0,n-1]$ définit le sous-prémonoïde **n** = de **N**, évidemment non plein puisque l'addition y est toujours partielle, sur lequel (A,B) induit une décomposition directe (A_n,B_n) où $A_n = A \cap [0,n]$ et $B_n = B \cap [0,n]$.

Décompositions en plusieurs facteurs.

***Définition* 2-1.**
Une famille $(A_k)_{k \in K}$ de parties de **N** est appelé *décomposition directe additive de* **N** *en* K *facteurs* si tout entier n s'écrit de manière unique comme somme (à support fini dans K) d'éléments des A_k. On écrira : $\mathbf{N} = \oplus_{k \in K} A_k$. Il est clair que l'on a :

$$\forall\, k \in K, \forall\, k' \in K,\ k \neq k',\ A_k \cap A_{k'} = \{0\}.$$

***Proposition* 2-3.**
Supposons que $\mathbf{N} = \oplus_{k \in K} A_k$.
Alors, il existe une unique suite dite des *multiplicateurs*, suite finie ou non d'entiers strictement supérieurs à 1, soit $m_1 , m_2 , \ldots, m_i , \ldots$, à laquelle est associée une autre suite dite *base généralisée de* **N** :

$$b_0 = 1 \ , \ b_1 = m_1.b_0 \ , \ b_2 = m_2.b_1 \ , \ b_i = m_i.b_{i-1} = m_i. m_{i-1} \ldots m_1 \ , \ \ldots$$

de sorte que tout nombre N s'écrit de manière unique sous la forme suivante :

$$N = \sum_{i=0}^{\ell} N_i b_i \quad \text{avec} \quad N_i < m_{i+1} \text{ , pour tout i de 0 à } \ell \text{ .}$$

S'il y a un dernier multiplicateur m_j , on peut convenir que $m_{j+1} = \infty$, de sorte qu'il n'y a simplement pas de condition de bornage sur N_j dans le terme $N_j b_j$ et on peut convenir aussi que l'on a : $\ell \leq j$.

Le lien avec la décomposition $\mathbf{N} = \oplus_{k \in K} A_k$ supposée est alors le suivant : il y a une partition de l'ensemble (fini ou non) $I = \{0,1,2,\ldots,i,\ldots\}$ des indices de la base généralisée, soit $I = \oplus_{k \in K} I_k$ ayant les propriétés suivantes :

$$\forall\, i \in I\ \forall\, k \in K\ \ (\ i \in I_k \ \Rightarrow\ i+1 \notin I_k\ )$$

la convention de l'éventuel multiplicateur ∞ (lorsque I est fini !) permet de ne faire aucune restriction dans cette formulation.

$$\forall\, k \in K \quad A_k = \{\, N = \sum_{i=0}^{\ell} N_i b_i \mid \forall\, i \notin I_k\,,\, N_i = 0 \,\}$$

De sorte que tout nombre $N = \sum_{i=0}^{\ell} N_i b_i$ se décompose de façon unique en

$$N = \sum_{k \in K} \underline{a}_k(N) \quad \text{où} \quad \underline{a}_k(N) = \sum_{i \in I_k} N_i b_i$$

La suite dite des multiplicateurs peut être « vide », la « base généralisée » étant réduite alors à son seul terme $b_0 = 1$ (si $1 \in A_k$, alors $A_k = \mathbf{N}$ et $A_{k'} = \{0\}$, pour tout $k' \neq k$).

Une démonstration figure dans ma thèse ou écrits antérieurs (1971-1975).
Mêmes remarques générales que dans le cas de deux facteurs.

Remarque. Chaque facteur d'une décomposition (additive) de **N** en plusieurs facteurs est encore un sous-prémonoïde de **N** ; la démonstration est semblable au cas de deux facteurs.

***Calcul des noyaux d'instabilité d'une décomposition (additive) de* N.**
Soit donc $\partial = (A,B)$ une décomposition directe de **N** avec $1 \in A$.

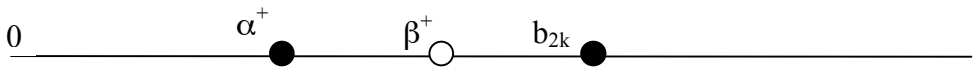
***Proposition* 2-4.**
On distingue deux cas : (i) $|A| = |B| = \infty$ et (ii) $|A|$ ou $|B|$ est fini:
(i) Si $|A| = |B| = \infty$, alors $N(A) = A$ et $N(B) = B$.
(ii) Si $|B| < \infty$ (et $|A| = \infty$), alors $N(A) = A \cap [0, \beta^+]$ où $\beta^+ = \sup(B)$ et $N(B) = B$
Si $|A| < \infty$ (et $|B| = \infty$), alors $N(B) = B \cap [0, \alpha^+]$ où $\alpha^+ = \sup(A)$ et $N(A) = A$

Démonstration.
(i) $|A| = |B| = \infty$. La suite des m_k est illimitée, de sorte que si $a = \sum^*_{i=0} N_{2i} b_{2i}$, on peut prendre $a' = \sum^*_{i=0} (m_{2i+1} - N_{2i}) b_{2i}$, qui est toujours défini, et on a bien $a+a' = \sum^*_{i=0} b_{2i+1} \in B$
(Le symbole $\sum^*_{i=0}$ signifie qu'on ne prend en compte, dans l'écriture même, que les indices i pour lesquels $N_{2i} > 0$, de sorte que l'on a bien aussi l'inégalité $m_{2i+1} - N_{2i} < m_{2i+1}$).
(ii) $1 < |B| < \infty$. La suite des multiplicateurs se termine avec un m_{2k} , et $m_{2k+1} = \infty$, de sorte que dans le terme $N_{2k} b_{2k}$, N_{2k} n'est pas borné. La base est finie : b_0 , b_1 ,…, b_{2k} .

Tout élément de A est de la forme $a = \sum_{i=0}^{k} N_{2i} b_{2i}$ sans borne a priori pour N_{2k} ;

Tout élément de B est de la forme $b = \sum_{i=0}^{k-1} N_{2i+1} b_{2i+1}$.

$|B| < \infty$



Sup(B) = $\beta^+ = \sum_{i=0}^{k-1}(m_{2i+2}-1)b_{2i+1} = \sum_{i=0}^{k-1} b_{2i+2} - \sum_{i=0}^{k-1} b_{2i+1}$; donc pour tout b ∈ B, il existe b'∈ B tel que b+b' ∈ A, de sorte que N(B) = B (pour $b \le \beta^+$, c'est le même argument qu'en (i))

Par contre, N(A) = A ∩ [0,b_{2k}[= A ∩ [0, β^+] = A ∩ [0, α^+] , où $\alpha^+ = \sum_{i=0}^{k-1}(m_{2i+1}-1)b_{2i}$ est le prédécesseur de b_{2k} dans A, ou le sup des a dominés par un élément de B.
On vérifie sans peine l'égalité suivante : $\alpha^+ + \beta^+ = b_{2k} - 1$

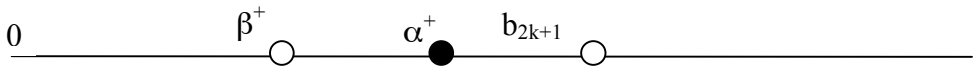
On notera que sont équivalentes les conditions suivantes :
- a < B , pour signifier qu'il existe un élément de B plus grand que a,
- $a < \beta^+$,
- $a < b_{2k}$,
- $a \le \alpha^+$, ou bien est de la forme $\sum_{i=0}^{k-1} N_{2i} b_{2i}$.

(ii) $1 < |A| < \infty$. La suite des multiplicateurs se termine avec un m_{2k+1} , et $m_{2k+2} = \infty$, de sorte que dans le terme $N_{2k+1}b_{2k+1}$, N_{2k+1} n'est pas borné. . La base est finie : b_0 , b_1 ,…, b_{2k+1}.

Tout élément de B est de la forme $b = \sum_{i=0}^{k} N_{2i+1} b_{2i+1}$ sans borne a priori pour N_{2k+1} ;

Tout élément de A est de la forme $a = \sum_{i=0}^{k} N_{2i} b_{2i}$

$|A| < \infty$



Sup(A) = $\alpha^+ = \sum_{i=0}^{k}(m_{2i+1}-1)b_{2i} = \sum_{i=0}^{k} b_{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} b_{2i}$; donc pour tout a ∈ A, il existe a'∈ A tel que a+a' ∈ B, de sorte que N(A) = A (pour $a \le \alpha^+$, c'est le même argument qu'en (i))

Par contre, N(B) = B ∩ [0,b_{2k+1}[= B ∩ [0, α^+] = B ∩ [0, β^+] , où $\beta^+ = \sum_{i=0}^{k-1}(m_{2i+2}-1)b_{2i+1}$ est le prédécesseur de b_{2k+1} dans B, ou le sup des b dominés par un élément de A.
On vérifie sans peine l'égalité suivante : $\alpha^+ + \beta^+ = b_{2k+1} - 1$

On notera que sont équivalentes les conditions suivantes :
- b < A , pour signifier qu'il existe un élément de A plus grand que b,
- $b < \alpha^+$,
- $b < b_{2k+1}$,
- $b \le \beta^+$, ou bien est de la forme $\sum_{i=0}^{k-1} N_{2i+1} b_{2i+1}$.

On retiendra qu'on a toujours :
- $\alpha^+ + \beta^+ = b^{++} - 1$;
- $a + a' = \sum^*_{i=0} m_{i+1}.b_i = \sum^*_{i=0} b_{i+1}$
- Quand l'indice maximum i concerné par le symbole $\sum^*_{i=0}$ est maximum absolu, soit i* , c'est que la somme a + a' *dépasse* $b^{++} = b_{i^*+1}$.

Concernant les noyaux d'instabilité pour la décomposition $\partial = (A,B)$ donnée, on peut dire ceci : avec A fini, on a $N_\partial(A) = A$ et $N_\partial(B) = B \cap [0,b^{++}[= B \cap [0, \alpha^+] = B \cap [0, \beta^+]$ comme vu ci-dessus, et pour la décomposition induite $\partial^* = (A^*,B^*)$ sur $[0,b^{++}[$ on voit que : $N_{\partial^*}(A^*) = A^* \setminus A^+ = A \setminus A^+$ et $N_{\partial^*}(B^*) = B \cap [0,b^{++}[= B^*$; la situation est inversée pour les noyaux (maximum ou non !). Cependant il apparaîtra plus loin que les noyaux relatifs sont plus intéressants que les noyaux absolus ; ici, en posant $X = [0,b^{++}[$, on voit que les noyaux de A et B relatifs à X sont les suivants : $N_{\partial, X}(A) = A$ et $N_{\partial, X}(B) = B^*$, ce qui, par rapport à la situation précédente, « agrandit » $N_{\partial^*}(A^*) = A \setminus A^+$ en $N_{\partial, X}(A) = A$ …

Remarques.
1) Pour $|B| < \infty$, l'élément b_{2k} de A joue le rôle de l'∞ du cas (i) ; l'élément α^+ est le prédécesseur de b_{2k} dans A.

2) Enfin, si $|B| = 1$, alors $B = \{0\}$ et $A = \mathbf{N}$; $N(B) = B$ et $N(A) = A \cap [0, \beta^+]$ car $\beta^+ = 0$; on peut convenir que $\alpha^+ = 0$, tandis que $b_{2k} = b_0 = 1$ (un seul multiplicateur $m_1 = \infty$)

3) Pour $|A| < \infty$, l'élément b_{2k+1} de B joue le rôle de l'∞ du cas (i) ; l'élément β^+ est le prédécesseur de b_{2k+1} dans B.

4) Si A est fini, mais que $1 \in B$, alors A se substitue à l'ensemble B tel que traité ci-dessus. Tant qu'on n'aura pas vraiment besoin de statuer sur ce fait on désignera par α^+ le sup(A), par β^+ le sup$(B \cap [0, \alpha^+])$ et par b^{++} le premier élément de B qui n'est pas dans A.

5) Si $|A| = 1$, alors $A = \{0\}$ et $B = \mathbf{N}$; $N(A) = A$ et $N(B) = A \cap [0, \alpha^+]$ car $\alpha^+ = 0$; on peut convenir que $\beta^+ = 0$, tandis que $b_{2k} = b_0 = 1$.

6) Pour $a = \sum^*_{i=0} N_i b_i$ (que les i concernés soient tous pairs, ou tous impairs) on désignera *son complément* par a', c'est l'élément $a' = \sum^*_{i=0} (m_{i+1} - N_i) b_i$ (voir, dans la démonstration de la proposition 2-4, la signification de la notation astérisque). Celui-ci n'est défini que si $a \neq 0$.

***Proposition* 2-5**.
Soit (A,B) une décomposition directe additive de (**N**,+), alors les lois $+_a$ et $+_b$ sont associatives. $\mathbf{A} = (A,+_b)$ et $\mathbf{B} = (B,+_a)$ sont donc des monoïdes commutatifs dont les groupes d'inversibles sont respectivement N(A) et N(B).
Particulièrement, si $|A| = |B| = \infty$, alors **A** et **B** sont des groupes abéliens.

Démonstration.
On suppose $1, n, n', n'' \in A$.
On sait que $A = \{ n \in \mathbf{N} \mid \forall\, i \quad n_{2i+1} = 0 \}$; les indices qui interviennent ici sont donc pairs .
Si $n_i + n'_i < m_i$, alors on sait que $(n + n')_i = n_i + n'_i = (n +_b n')_i$; par contre, si $n_i + n'_i \geq m_i$ on a : $(n + n')_i = n_i + n'_i - m_i = (n +_b n')_i$.
Donc,

$$n +_b n' = \sum^*_{n_i + n'_i < m_i} (n_i + n'_i) b_i \; + \sum^*_{n_i + n'_i \geq m_i} (n_i + n'_i - m_i) b_i \,,$$

Nous avons alors :

$(n +_b n') +_b n'' =$

$= \sum^*_{(n+_b n')_i + n''_i < m_i} ((n +_b n')_i + n''_i)b_i + \sum^*_{(n+_b n')_i + n''_i \geq m_i} ((n +_b n')_i + n''_i - m_i)b_i$

$= \sum^*_R (n + n'_i + n''_i)b_i + \sum^*_T (n + n'_i + n''_i - m_i)b_i + \sum^*_S (n + n'_i + n''_i - 2m_i)b_i$

où $R = \{ i \mid 0 < n_i + n'_i + n''_i < m_i \}$, $S = \{ i \mid n_i + n'_i + n''_i \geq 2m_i \}$ et où

$T_1 = \{ i \mid n_i + n'_i + n''_i < 2m_i \wedge n_i + n'_i \geq m_i \}$ $T_2 = \{ i \mid n_i + n'_i + n''_i \geq m_i \wedge n_i + n'_i < m_i \}$ et $T = T_1 \cup T_2$

On trouve de même, simplement en échangeant les rôles de n et n'', car on est dans le cas commutatif :

$n +_b (n' +_b n'') =$

$= \sum^*_R (n + n'_i + n''_i)b_i + \sum^*_{T'} (n + n'_i + n''_i - m_i)b_i + \sum^*_S (n + n'_i + n''_i - 2m_i)b_i$ où

$T'_1 = \{ i \mid n_i + n'_i + n''_i < 2m_i \wedge n''_i + n'_i \geq m_i \}$ $T'_2 = \{ i \mid n_i + n'_i + n''_i \geq m_i \wedge n''_i + n'_i < m_i \}$ et

$T' = T'_1 \cup T'_2$.

Reste à vérifier que $T = T'$. Posons $U = \{ i \mid n_i + n'_i < m_i \}$ et $U^c = \{ i \mid n_i + n'_i \geq m_i \}$;

$T'_1 = (T'_1 \cap U) \cup (T'_1 \cap U^c)$; mais $(T'_1 \cap U) \subset T_2$ et $(T'_1 \cap U^c) \subset T_1$ d'où $T'_1 \subset T$;

de même $T'_2 = (T'_2 \cap U) \cup (T'_2 \cap U^c)$, $(T'_2 \cap U) \subset T_2$, $(T'_2 \cap U^c) \subset T_1$ d'où $T'_2 \subset T$;

on en déduit que l'on a : $T' \subset T$; on prouve de même que $T \subset T'$ et finalement $T = T'$.

Ceci achève de prouver que la loi $+_b$ est bien associative. Clairement 0 est élément neutre.

Enfin on a déjà remarqué que le noyau N(A) n'est autre que le groupe des inversibles du monoïde $(A, +_b)$. La démonstration est analogue pour $(B, +_a)$.

On voit que dans le cas de $(\mathbf{N}, +)$, toujours en supposant $1 \in A$, on a :

$(A, +_b) = (N(A), +_b) \cong \prod_i \mathbf{Z}/m_{2i+1}.\mathbf{Z}$ si $|B| = \infty$; c'est un groupe ;

$(A, +_b) \cong (\prod_i \mathbf{Z}/m_{2i+1}.\mathbf{Z}) \times \mathbf{N}$ si $|B| < \infty$; c'est un monoïde dont le groupe des inversibles n'est autre que $(N(A), +_b) \cong \prod_i \mathbf{Z}/m_{2i+1}.\mathbf{Z}$, tandis que :

$(B, +_a) = (N(B), +_a) \cong \prod_i \mathbf{Z}/m_{2i}.\mathbf{Z}$ si $|A| = \infty$; c'est un groupe ;

$(B, +_a) \cong (\prod_i \mathbf{Z}/m_{2i}.\mathbf{Z}) \times \mathbf{N}$ si le type $|A| < \infty$; c'est un monoïde dont le groupe des inversibles n'est autre que $(N(B), +_a) \cong \prod_i \mathbf{Z}/m_{2i}.\mathbf{Z}$

Nous aurons besoin d'un autre résultat technique que voici. Nous conservons les notations précédentes pour une décomposition directe (A,B) de $(\mathbf{N},+)$ donnée.

Etant donné un nombre n, on appelle *hauteur de* n (relative à (A,B), et on désigne par h(n), l'entier indice maximum i pour lequel $N_i \neq 0$ (il est donc pris en compte par le symbole de sommation avec astérisque $n = = \sum^* N_i b_i$);

de plus, si $n \notin A$, on désigne par $i_B(n)$ le plus petit indice i tel que $N_i \neq 0$ et $b_i \in B$; si on a supposé que $1 \in A$, l'indice en question $i_B(n)$ est un entier impair $2j+1$.

On pose aussi $\alpha^+_r = (m_{r+1}-1).b_r + (m_{r-1}-1).b_{r-2} + \ldots + (m_{r-2s-1}-1).b_{r-2s-2} + \ldots$, éléments qu'on peut appeler *maximas relatifs* de A ; le maximum absolu, s'il existe, n'est autre que l'élément α^+_r avec r maximum ; si $1 \in A$, ce maximum absolu est de la forme α^+_{2r} ; c'est l'élément qu'on a déjà noté simplement α^+.

Avec ces conventions, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

***Proposition* 2-5.**
Soit (A,B) une décomposition directe de **N** ; soit n un entier non nul dominé par un élément a de A (i.e. : $n \leq a$) ; il existe un unique entier $\beta < a$ tel que :

$$\beta \in B \ , \ n + \beta \in A \ , \ n + \beta \leq a + \alpha^+_{h(a)-2} .$$

La démonstration (assez technique) utilise plusieurs cas de récurrence.

Remarques.
1) On a un énoncé analogue en échangeant les rôles de A et de B.
2) L'inégalité de la proposition 5 est la meilleure possible comme le montre l'exemple suivant : $n = (m_{2k} - 1).b_{2k-1} + (m_1-1).b_0 + (m_3-1).b_2 + \ldots + (m_{2k-1}-1).b_{2k-2}$ et $a = b_{2k}$; l'élément $\beta \in B$ tel que $n + \beta \in A$ est b_{2k-1} et $n + \beta = a + \alpha^+_{h(a)-2}$.
3) Lorsque le majorant a est égal à un *maximum relatif* α^+_{2k}, l'inégalité de la proposition se simplifie *dans son écriture* : $n + \beta \leq a + \alpha^+_{h(a)-2}$ devient : $n + \beta \leq \alpha^+_{h(a)}$.

3. Les décompositions directes non triviales de $\mathbf{N}^2$ en deux facteurs.

Soit (A,B) une décomposition directe *non triviale* de $\mathbf{N}^2$. Elle induit les décompositions directes (A_1,B_1) sur $\mathbf{N} \times \{0\}$ et (A_2,B_2) sur $\{0\} \times \mathbf{N}$.
On reprendra les notations génériques des décompositions directes de **N** (auquel $\mathbf{N} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbf{N}$ sont identifiés); entre autres :

$$\sup(A_i) = \alpha_i^+, \quad \sup(B_i \cap [0, \alpha_i^+]) = \beta_i^+ \text{ et } \inf(B_i \backslash A_i) = b_i^{++}, \ i = 1, 2$$

On a vu (application du ***Théorème* 1-1**) que $[|B_1| < \infty$ et $|B_2| < \infty]$ ou $[|A_1| < \infty$ et $|A_2| < \infty]$
On supposera, pour fixer les idées, que l'on est dans la situation où $|A_1| < \infty$ et $|A_2| < \infty$.

Considérons les sous-prémonoïdes de $\mathbf{N}^2$ suivants : $\mathbf{E}_1 = [0, b_1^{++}[\times \mathbf{N}$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{N} \times [0, b_2^{++}[$.
La décomposition donnée ∂ = (A,B) induit sur $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ des décompositions directes. Par application du ***Théorème* 1-1** ces décompositions sont triviales (les bons ordres induits sur $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ ne sont pas isomorphes (en général), et on peut, si on y tient, modifier le bon ordre sur $\mathbf{E}_1$, par exemple, en utilisant le bon ordre '2<1' plutôt que '1<2'. L'essentiel est de s'assurer qu'on dispose bien de bons ordres qui font de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ des prémonoïdes bien ordonnés ; ce genre de remarques sera systématiquement utilisé par la suite, sans mention explicite…)

Soit $\mathbf{\Omega}$ le réseau engendré par $e_1 = (b_1^{++}, 0)$ et $e_2 = (0, b_2^{++})$.
Soit $\mathbf{C} = [0, b_1^{++}[\times [0, b_2^{++}[$.
On désigne toujours par $\underline{a}$ et $\underline{b}$ les applications qui fournissent les facteurs de décomposition : pour tout x, on a : $x = \underline{a}(x)+\underline{b}(x)$ avec $\underline{a}(x) \in A$ et $\underline{b}(x) \in B$.

***Proposition* 3-1.**
($\mathbf{\Omega}$, **C**) est une décomposition directe de $\mathbf{N}^2$; $\mathbf{\Omega}$ et **C** sont *propres* (***définition* 1-5**) pour la décomposition (A,B).
Plus précisément, tout $z \in \mathbf{N}^2$ s'écrit de façon unique $z = \omega+c$ où $\omega \in \mathbf{\Omega}$ et $c \in \mathbf{C}$, et on a :

$$\underline{a}(z) = \underline{a}(\omega) + \underline{a}(c) \text{ et } \underline{b}(z) = \underline{b}(\omega) + \underline{b}(c), \text{ avec } \underline{a}(\omega), \underline{b}(\omega) \in \mathbf{\Omega}.$$

La démonstration figure dans ma thèse (1975) et dans un préprint de 1973. Elle est trop longue pour être reproduite ici, mais les idées sont toujours les mêmes que dans les théorèmes généraux du paragraphe précédent (qui ne s'appliquent que partiellement ici !)

Nous savons donc que :

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{\Omega} \oplus \mathbf{C} = A_{\mathbf{\Omega}} \oplus B_{\mathbf{\Omega}} \oplus A_{\mathbf{C}} \oplus B_{\mathbf{C}}, \text{ et que } A = A_{\mathbf{\Omega}} \oplus A_{\mathbf{C}} \text{ et } B = B_{\mathbf{\Omega}} \oplus B_{\mathbf{C}}.$$

Aucun parenthésage n'est nécessaire puisque $\boldsymbol{P_0}(\mathbf{N}^2)$ est un prémonoïde.

Conservons toujours les mêmes notations que ci-dessus : le réseau $\mathbf{\Omega}$ engendré par e_1 et e_2 est une partie propre de $\mathbf{N}^2$ et ses *bords* $\mathbf{N}.e_1$ et $\mathbf{N}.e_2$ sont entièrement contenus dans **B**.
Comme la décomposition (A,B) n'est pas triviale, il existe un premier élément de A* (pour l'un ou l'autre des ordres lexicographiques de $\mathbf{\Omega} \approx \mathbf{N}^2$ c'est forcément le même élément !) soit $\omega^* = m.e_1 + n.e_2$ contenu dans $\mathbf{\Omega}$, ; on pose :

$$\mathbf{L} = \{\omega = m'.e_1 + n'.e_2 \in \mathbf{\Omega} \mid m' < m \text{ ou } n' < n\} ;$$

c'est, par définition de ω^*, un sous-ensemble de B. Enfin, on pose :

$$\mathbf{C}^* = [0, m.e_1[\times [0, n.e_2[\cap \mathbf{\Omega}$$

***Proposition* 3-2.**
La « demi-droite » $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\omega^*$ est un sous-ensemble propre de $\mathbf{\Omega}$ sur lequel la décomposition (A,B) induit une décomposition directe isomorphe à une décomposition de **N**, soit $(A_{\mathbf{D}}, B_{\mathbf{D}})$ et la décomposition induite par (A,B) sur $\mathbf{\Omega}$ est donnée par :

$$\mathbf{\Omega} \cap A = A_{\mathbf{D}} \text{ et } \mathbf{\Omega} \cap B = \mathbf{L} \oplus B_{\mathbf{D}} ;$$

pour $\omega = m'.e_1 + n'.e_2 \in \mathbf{\Omega}$, on obtient $\underline{a}(\omega)$ et $\underline{b}(\omega)$ comme suit :

- si $m'/n' \leq m/n$, on effectue la division euclidienne de m' par m : $m' = p.m + r$, $r < m$; l'entier p s'écrit de manière unique $p_a + p_b$, de sorte que $p_a.\omega^* + p_b.\omega^*$ est la décomposition dans **D** de $p.\omega^*$ et $\underline{a}(\omega) = p_a.\omega^*$ et $\underline{b}(\omega) = r.e_1 + (n'-p.n).e_2 + p_b.\omega^*$;
- si $m'/n' \geq m/n$, on effectue la division euclidienne de n' par n : $n' = q.n + s$, $s < n$; l'entier q s'écrit de manière unique $q_a + q_b$, de sorte que $q_a.\omega^* + q_b.\omega^*$ est la décomposition dans **D** de $q.\omega^*$ et $\underline{a}(\omega) = q_a.\omega^*$ et $\underline{b}(\omega) = s.e_2 + (m'-q.m).e_1 + q_b.\omega^*$.

C'est sans doute cette démonstration qui est la plus délicate (voir ma thèse (1975)).

Nous savons donc que :

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D} \oplus \mathbf{C} = \mathbf{L} \oplus A_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{D}} \oplus A_{\mathbf{C}} \oplus B_{\mathbf{C}} \text{ où}$$
$$A = A_{\mathbf{a}} \oplus A_{\mathbf{C}} = A_{\mathbf{D}} \oplus A_{\mathbf{C}} \text{ et } B = \mathbf{L} \oplus B_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{C}} .$$

Aucun parenthésage n'est nécessaire puisque $\boldsymbol{P_0}(\mathbf{N}^2)$ est un prémonoïde.

L'ensemble $\mathbf{N}^2$ est naturellement en bijection avec l'ensemble $\mathbf{L} \times \mathbf{D} \times \mathbf{C}$, mais ce n'est évidemment pas un isomorphisme entre les prémonoïdes $\mathbf{N}^2$ et $\mathbf{L} \times \mathbf{D} \times \mathbf{C}$. On pourrait songer à appliquer les ***Théorèmes* 1-1** et **1-2** au produit de prémonoïdes $\mathbf{L} \times \mathbf{D} \times \mathbf{C}$, mais toute la « subtilité » des ***Propositions* 3-1** et **3-2** précédentes consiste à établir justement que ces parties sont propres, et il faudrait en plus calculer quelques noyaux…Notre propos est en fait inverse, et nous allons, seulement maintenant, calculer ces noyaux.

Nous conservons toutes les notations précédentes attachées à la donnée d'une décomposition directe $\partial = (A,B)$ de $\mathbf{N}^2$.

Proposition* 3-3.** (Calcul des noyaux d'instabilité d'une décomposition directe de*** $\mathbf{N}^2$)

- Si ∂ est triviale, i.e. produit de décompositions directes de **N**, alors on a :

$$N_\partial(A) = N_{\partial 1}(A_1) \times N_{\partial 2}(A_2) \text{ et } N_\partial(B) = N_{\partial 1}(B_1) \times N_{\partial 2}(B_2),$$

c'est-à-dire la trivialité des noyaux d'instabilité (ce résultat a une portée générale).

- Si ∂ est non triviale, mettons avec $|A_1|$ et $|A_2| < \infty$, alors on a :

$$N_\partial(A) = N_{\partial, \mathbf{C}}(A) \oplus N_{\partial, \mathbf{D}}(A),$$
$$N_\partial(B) = N_{\partial, \mathbf{C}}(B) \oplus \mathbf{L} \oplus N_{\partial, \mathbf{D}}(B) = B,$$

à la condition nécessaire et suffisante que $|A_{\mathbf{D}}|$ soit infini .

Par contre, si $|A_{\mathbf{D}}|$ est fini : $N_\partial(B) = N_{\partial, \mathbf{C}}(B) \oplus \mathbf{L}^< \oplus N_{\partial, \mathbf{D}}(B)$ où $\mathbf{L}^<$ est une certaine partie bornée de **L**.

La démonstration, assez longue, ne présente pas de grandes difficultés.

Proposition* 3-4** (Structure des facteurs directs de*** $\mathbf{N}^2$)

- Si ∂ est triviale, A et B sont des prémonoïdes produits, $A \approx A_1 \times A_2$ et $B \approx B_1 \times B_2$.
- Si ∂ est non triviale, mettons avec $|A_1|$ et $|A_2| < \infty$; on trouve :
  - si $\omega^* \neq e_1 + e_2$, ou si $\omega^* = e_1 + e_2$ mais A_1 ou A_2 est réduit à 0, le facteur A est un sous-prémonoïde de $\mathbf{N}^2$ isomorphe à $A_{\mathbf{C}} \times A_{\mathbf{D}}$;
  - si $\omega^* = e_1 + e_2$ et A_1 et A_2 non réduits à 0, alors A n'est pas un sous-prémonoïde de $\mathbf{N}^2$ et le système additif $\mathbf{A} = (A, +_b)$ n'est pas associatif
  - pour que B soit un sous-prémonoïde de $\mathbf{N}^2$, il faut et il suffit que $B \cap \mathbf{N}.\omega^* = \{0\}$.

4. Généralisation du résultat précédent à certaines décompositions de $\mathbf{N}^k$.

Tout ce qui a été établi jusqu'ici pour $\mathbf{N}^2$ est applicable *pratiquement sans modification* au cas de *certaines* décompositions additives directes des $\mathbf{N}^k$ avec $k \geq 2$. Nous allons cependant reprendre les *énoncés précis* concernant cette généralisation, avec les *conditions précises* dans lesquelles ils s'appliquent.

Soit donc (A,B) une décomposition directe de $\mathbf{N}^k$; on désigne par (A_p , B_p) la décomposition « induite » sur le $p^{ième}$ facteur de la puissance $\mathbf{N}^k$, qu'on identifie à une décomposition directe de $\mathbf{N}$; on reprend les notations génériques des décompositions directes de $\mathbf{N}$:

- si A_p est fini, $\sup(A_p) = \alpha_p^+$, $\sup(B_p \cap [0, \alpha_p^+]) = \beta_p^+$ et $\inf(B_p \backslash A_p) = b_p^{++}$; rappelons qu'on a : $\beta_p^+ \leq \alpha_p^+ < b_p^{++}$ ($\beta_p^+ = \alpha_p^+$ seulement si $A_p = \{0\}$ et alors $\alpha_p^+ = \beta_p^+ = 0 < b_p^{++} = 1$)

- si B_p est fini, $\sup(B_p) = \beta_p^+$, $\sup(A_p \cap [0, \beta_p^+]) = \alpha_p^+$ et $\inf(A_p \backslash B_p) = b_p^{++}$; rappelons qu'on a : $\alpha_p^+ \leq \beta_p^+ < b_p^{++}$ ($\alpha_p^+ = \beta_p^+$ seulement si $B_p = \{0\}$ et alors, $\beta_p^+ = \alpha_p^+ = 0 < b_p^{++} = 1$)

On suppose que, pour tout p de 1 à k, on a : $|A_p| < \infty$ ou $|B_p| < \infty$

Soit $\mathbf{\Omega}$ le réseau engendré par $e_1 = (b_1^{++}, 0,0,..)$, $e_2 = (0,0, b_2^{++},0,..)$, …, $e_k = (0,0,\ldots,b_k^{++})$.
Soit $\mathbf{C} = [0, b_1^{++}[\times [0, b_2^{++}[\ldots \times [0, b_k^{++}[$.
On désigne toujours par $\underline{a}$ et $\underline{b}$ les applications qui fournissent les facteurs de décomposition pour tout x, on a : $x = \underline{a}(x)+\underline{b}(x)$ avec $\underline{a}(x) \in A$ et $\underline{b}(x) \in B$.

Proposition* 4-1** ***(extension de la proposition* 3-1*)
Si pour tout p de 1 à k, on a : $|A_p| < \infty$ ou $|B_p| < \infty$, alors $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{C})$ est une décomposition directe de $\mathbf{N}^k$ en parties propres relatives à la décomposition (A,B) donnée; c'est dire que pour tout $z \in \mathbf{N}^k$, $z = \omega+c$ avec $(\omega,c) \in \mathbf{\Omega} \times \mathbf{C}$ on a :

$$\underline{a}(z) = \underline{a}(\omega) + \underline{a}(c) \text{ et } \underline{b}(z) = \underline{b}(\omega) + \underline{b}(c), \text{ avec } \underline{a}(\omega) \text{ et } \underline{b}(\omega) \in \mathbf{\Omega}.$$

Nous avons donc :

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{\Omega} \oplus \mathbf{C} = A_{\mathbf{\Omega}} \oplus B_{\mathbf{\Omega}} \oplus A_{\mathbf{C}} \oplus B_{\mathbf{C}}, \text{ et que } A = A_{\mathbf{\Omega}} \oplus A_{\mathbf{C}} \text{ et } B = B_{\mathbf{\Omega}} \oplus B_{\mathbf{C}} .$$

Remarque.
Certains des entiers b_p^{++} peuvent fort bien être égaux à 1 ; dans ce cas le « segment » correspondant $[0, b_p^{++}[$ est réduit à $\{0\}$. On dira aussi que $\mathbf{C}$ est l'*intérieur* de l'hypercube $\overline{\mathbf{C}} = \prod_{1 \leq p \leq k} ([0, b_p^{++}]$; on parlera aussi de la *dimension* de $\mathbf{C}$: c'est le nombre d'entiers $p \leq k$ tels que l'on ait : $b_p^{++} > 1$; elle peut être a priori tout nombre compris entre 0 et k ; quelle qu'elle soit, le théorème précédent est valable (si elle est nulle, des cas évoqués dans la démonstration ne se présentent pas, tout simplement…)
La ***proposition* 3-2**, qui complète la ***proposition* 3-1** et conduit à la description complète des décompositions non triviales de $\mathbf{N}^2$, ne se laisse pas généraliser d'aussi facile façon que la ***proposition* 3-1** en la ***proposition* 4-1**. Nous terminons ce paragraphe en fournissant quelques éléments sur les décompositions additives en petites dimensions (3, 4 et 5).

Classification des décompositions non triviales de $\mathbf{N}^3$.
Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ les éléments de la « base canonique » de $\mathbf{N}^3$.

(i) Si on suppose que les facteurs A_1, A_2, A_3 de A sur les axes $\mathbf{N}e_1$, $\mathbf{N}e_2$, $\mathbf{N}e_3$ sont finis, la ***proposition* 3-1** s'applique et on est ramené à décrire la décomposition induite sur le réseau $\mathbf{\Omega}$, qui est naturellement isomorphe à $\mathbf{N}^3$. On supposera donc en plus que A_1, A_2, A_3 sont réduits à {0}, c'est-à-dire aussi que $\mathbf{N}e_1$, $\mathbf{N}e_2$, $\mathbf{N}e_3$ sont dans B.
On supposera aussi que la décomposition induite sur $\{0\}\times\mathbf{N}^2 \approx \mathbf{N}^2$ est non triviale.
Il y a donc des éléments de A dont la première composante est nulle et les deux autres non nulles et éléments de B. Il y en a un « minimum » (au sens d'un ordre lexicographique sur $\{0\}\times\mathbf{N}^2$), mettons α^* ; on pose $\mathbf{D} = \mathbf{N}\alpha^*$; c'est une partie propre de $\mathbf{N}e_2\oplus\mathbf{N}e_3$, et donc de $\mathbf{N}^3$.

***Proposition* 4-2.**
- Sous les hypothèses précédentes, tous les éléments de $\mathbf{N}e_1\oplus\mathbf{N}e_2$, $\mathbf{N}e_1\oplus\mathbf{N}e_3$ sont dans B.
- Si $A_{\mathbf{D}}$ est infini la décomposition (A,B) de $\mathbf{N}^3$ donnée est produit des décompositions induites sur $\mathbf{N}e_1$ et $\mathbf{N}e_2\oplus\mathbf{N}e_3$ respectivement, cette dernière étant non triviale ; on dira, dans ce cas, que (A,B) est *semi-triviale*.
- Si $A_{\mathbf{D}}$ est fini, le « plan » $\mathbf{P} = \mathbf{N}e_1 \oplus \mathbf{D}$ est une partie propre de $\mathbf{N}^3$ sur laquelle (A,B) induit une décomposition (A_0, B_0), donc isomorphe à une décomposition de $\mathbf{N}^2$, non triviale.

La démonstration des points 1 et 3 ressort du cas général (voir plus loin). Celle du point 2 utilise le ***théorème* 1-1** et le calcul des noyaux en dimensions 1 et 2.

(ii) Supposons maintenant que B_1, A_2 , A_3 sont finis et que la décomposition induite sur $\mathbf{N}e_2\oplus\mathbf{N}e_3$ est toujours non triviale, avec « droite exceptionnelle » $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha^*$, comme ci-dessus.

***Proposition* 4-3**.
- Si $B_{\mathbf{D}}$ est infini, la décomposition (A,B) de $\mathbf{N}^3$ donnée est produit des décompositions induites sur $\mathbf{N}e_1$ et $\mathbf{N}e_2\oplus\mathbf{N}e_3$ respectivement, cette dernière étant non triviale ; on dira, dans ce cas, que (A,B) est *semi-triviale*.
- Si $B_{\mathbf{D}}$ est fini et si la décomposition directe de $\mathbf{N}^3$ considérée n'est pas semi-triviale, alors le « plan » $\mathbf{P} = \mathbf{N}e_1 \oplus \mathbf{D}$ est une partie propre de $\mathbf{N}^3$ sur laquelle (A,B) induit une décomposition (A_0, B_0) isomorphe à une décomposition de $\mathbf{N}^2$, non triviale, donc avec droite exceptionnelle $\mathbf{D}_0 = \mathbf{N}\beta^*$.

La démonstration du point 2 ressort du cas général (voir plus loin) et est semblable à celle du point 3 de la ***proposition* 4-2**. Celle du point 1 utilise le ***théorème* 1-1** et le calcul des noyaux en dimensions 1 et 2.

Exemples numériques.
Choix des paramètres :
Sur $\mathbf{N}e_1$: $1 \in A$; multiplicateurs : 2,2,3,7; $b_1^{++} = 84 \in A$ $(\sup(B_1) = 14)$
Sur $\mathbf{N}e_2$: $1 \in A$; multiplicateurs : 5,3,3; $b_2^{++} = 45 \in B$ $(\sup(A_2) = 34)$
Sur $\mathbf{N}e_3$: $1 \in B$; multiplicateurs : 3,2,3,2; $b_3^{++} = 36 \in B$ $(\sup(A_3) = 21)$
Elément $\alpha^* = 3\, b_2^{++} + 5\, b_3^{++} = 135\, e_2 + 180 e_2 \in A$
Sur $\mathbf{D}$: $\alpha^* \in A$; multiplicateurs : 3,2,3,5 ; $b_D^{++} = 90\alpha^* \in A_D$ $(\sup(B_D) = 21\alpha^*)$
Elément $\beta^* = 7b_1^{++} + 3b_D^{++} = 588e_1 + 36450e_2 + 48600e_3 \in B$
Sur $\mathbf{D}_0$: $\beta^* \in B$; multiplicateurs : 3,7,2 ; $b_{D0}^{++} = 42.\beta^* \in A_{D0}$ $(\sup(B_{D0}) = 22.\beta^*)$
Soit 22 paramètres (c'est très peu de paramètres et ils sont petits)

Une bonne page de calculs montre, par exemple que :

$\underline{a}$ (796523, 22434083, 35684219) = (349281, 21651573, 28868763)
$\underline{b}$ (796523, 22434083, 35684219) = (447242, 782510, 6815456)

Evidemment, cet exemple n'est destiné qu'à imaginer un programme donnant toutes les décompositions voulues des éléments de $\mathbf{N}^3$, en fonction des paramètres qui caractérisent telle ou telle décomposition non triviale.

Un autre exemple, d'ordre plus théorique.
Choix des paramètres :
Sur $\mathbf{N}e_1$: $1 \in A$; multiplicateurs : $\varnothing$; $A_1 = \mathbf{N}$
Sur $\mathbf{N}e_2$: $1 \in B$; multiplicateurs : $\varnothing$; $B_2 = \mathbf{N}$
Sur $\mathbf{N}e_3$: $1 \in B$; multiplicateurs : $\varnothing$; $B_3 = \mathbf{N}$
Elément $\alpha^* = (1,1) \in A$
Sur $\mathbf{D}$: $\alpha^* \in A$; multiplicateurs : $\varnothing$; $A_{\mathbf{D}} = \mathbf{N}$
Elément $\beta^* = e_1 + \alpha^* (1,1,1) \in B$
Sur $\mathbf{D}_0$: $\beta^* \in B$; multiplicateurs : $\varnothing\beta^*$; $B_{\mathbf{D}0} = \mathbf{N}$
Soit 4 paramètres, tous égaux à 1 !

$A = \mathbf{N}e_1 \cup \mathbf{N}(e_2+e_3)$ $\quad B = (\mathbf{N}e_2 \cup \mathbf{N}e_3) \oplus \mathbf{N}(e_1+ e_2 +e_3)$
Décomposition d'un élément $(\mathbf{x,y,z})$: en posant $\mathbf{u} = \inf(\mathbf{x,y,z})$ et $\mathbf{v} = \inf(\mathbf{y-u,z-u})$ on voit que :
Si $\mathbf{u \neq x}$: $\underline{\mathbf{a}}\,(\mathbf{x,y,z}) = (\mathbf{x-u,0,0})$, $\underline{\mathbf{b}}\,(\mathbf{x,y,z}) = (\mathbf{u,y,z})$
Si $\mathbf{u = x}$: $\underline{\mathbf{a}}\,(\mathbf{x,y,z}) = (\mathbf{0,v,v})$, $\underline{\mathbf{b}}\,(\mathbf{x,y,z}) = (\mathbf{x,y-v,z-v})$

Cet exemple est *générique* en un certain sens: suites vides de multiplicateurs et composantes des éléments exceptionnels α^* et β^* réduites au minimum : 1. C'est un des *squelettes sains* qui seront décrits plus loin en toute généralité.

Caractérisation de toutes les décompositions directes de $\mathbf{N}^3$**.**
Si les traces de A *et* B sont infinies sur l'un au moins des axes $\mathbf{N}e_1$, $\mathbf{N}e_2$, $\mathbf{N}e_3$ la décomposition de $\mathbf{N}^3$ considérée se présente comme produit de décompositions induites, isomorphes à des décompositions de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^2$: ce sont les cas de *trivialité* ou de *semi-trivialité*. Cette condition suffisante n'est évidemment pas nécessaire.
Pour achever la classification, il suffit de décrire les décompositions qui ne se présentent pas comme des produits canoniques de décompositions : on les qualifie d'*irréductibles* dans la classification générale. Aux permutations des axes près, et à l'échange des rôles entre A et B près, il y a trois types « nouveaux » de décompositions qui se présentent effectivement :
(i) $A_1, A_2, A_3 = \{0\}$ après réduction (***proposition* 4-1**); il existe un triplet d'entiers non nuls (m,n,p) tel que :

- $\mathbf{L} = \{(x,y,z) \mid x<m \vee y<n \vee z<p\} \subset B$
- $\alpha = me_1 + ne_2 + pe_3 \in A$;
- $\mathbf{D} = \mathbf{N}\alpha$ est une partie propre sur laquelle (A,B) induit une décomposition directe ;
- Tout élément $z = p\alpha + \ell$ où $p\alpha \in \mathbf{D}$, $\ell \in \mathbf{L}$ et $\underline{a}(z) = \underline{a}(p\alpha)$, $\underline{b}(z) = \underline{b}(p\alpha) + \ell$.

(ii) $A_1, A_2, A_3 = \{0\}$ après réduction (***proposition* 4-1**); il existe deux couples d'entiers non nuls (m,n) et (p,q) tels que :

- $\alpha = me_2 + ne_3 \in A$;
- $\mathbf{D} = \mathbf{N}\alpha$ est une partie propre sur laquelle (A,B) induit une décomposition directe pour laquelle $A_{\mathbf{D}}$ est finie ; on pose $\beta = \inf\{b \in B_{\mathbf{D}} \mid b > A_{\mathbf{D}}\}$;
- $\alpha' = pe_1 + q.\beta \in A$
- $\mathbf{D}' = \mathbf{N}\alpha'$ est une partie propre sur laquelle (A,B) induit une décomposition directe;

(iii) B_1, A_2, A_3 = {0} après réduction (***proposition* 4-1**) ; il existe deux couples d'entiers non nuls (m,n) et (p,q) tels que :

- $\alpha = me_2 + ne_3 \in A$;
- **D** = **N**α est une partie propre sur laquelle (A,B) induit une décomposition directe pour laquelle $B_{\mathbf{D}}$ est finie ; on pose $\alpha^1 = \inf\{a \in A_{\mathbf{D}} \mid a > B_{\mathbf{D}}\}$;
- $\beta = pe_1 + q\alpha^1 \in B$
- **D'** = **N**β est une partie propre sur laquelle (A,B) induit une décomposition directe;;

Dans les cas (ii) et (iii) la décomposition d'un élément de $\mathbf{N}^3$ est fournie par un programme, comme suggéré dans l'exemple numérique ci-dessus, fondé sur la ***proposition* 4-3.**

Ces trois cas d'irréductibilité ne sont pas du même niveau : on peut dire que le premier est simple, ou d'ordre1 (cf. la droite **D** = **N**α), tandis que les deux autres sont d'ordre 2 (cf. les couples de droites (**D,D'**), **D'** s'appuyant en quelque sorte sur **D**. Nous préciserons plus loin cette notion d'*ordre d'irréductibilité*.

Petite incursion en dimensions 4 et 5

La classification générale fera l'objet d'un chapitre à part. En y regardant un peu vite, les deux derniers cas d'irréductibilité précités pourraient apparaître comme des exceptions, or il s'agit au contraire des deux exemples qu'il faut avoir en tête pour bien saisir le cas général.

Réductions et squelettes sains.

Le premier type de réduction consiste à remplacer les décompositions induites sur les droites « canoniques » (axes et autres droites auxiliaires) par des décompositions *triviales* (donc avec A ou B réduit à {0} là où A ou B devrait être seulement fini ! Les suites de multiplicateurs sont systématiquement vides); nous renvoyons aux ***propositions* 3-1 *et* 4-1** concernées par ce type de réduction.

Se trouvent écartées de fait les décompositions comme celle de $\mathbf{N}^3$, dite de type (ii) dans le paragraphe précédent : en effet, par essence $A_{\mathbf{D}}$ est fini ***et*** non réduit à {0}; il ne saurait donc être choisi égal à {0}! Par contre les deux autres types du paragraphe précédent, (i) et (iii), sont représentés par des squelettes sains que l'on mentionne ci-dessous.

Se trouvent écartées aussi les décompositions qui induiraient sur une droite « canonique » une décomposition avec A et B infinis!

Le second type de réduction consiste à choisir systématiquement égales à 1 les coordonnées non nulles des *éléments spéciaux* du type α, α^1, β …(générateurs des « droites » **D**, **D'**…)

***Définition* 4-1**.

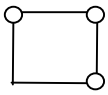
Après application des deux types de réduction, on obtient *des* décompositions appelées *squelettes sains*.

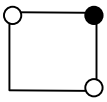
Les squelettes sains sont entièrement déterminés par leurs traces sur le cube (ou hypercube) de côté 1 construit sur les axes et dont un sommet est à l'origine. Ils forment une *typologie* de *certaines* décompositions possibles (*mais pas toutes* !).

Nous reviendrons plus loin sur la notion générale de squelette, mais auparavant, nous présentons la classification des squelettes sains en dimensions 2, 3 et 4, en évitant les redites dues à l'échange des rôles de A et de B, ou à certaines permutations des axes.

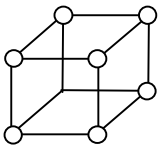
Ici, les *ronds blancs* représentent des éléments de B, les *ronds noirs* des éléments de A, et les *ronds gris* des éléments qui se décomposent non trivialement.

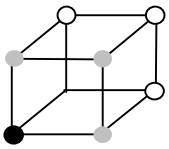
***Dimension* 2.**

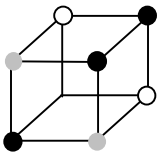
Trivial 

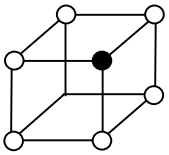
Irréductible 

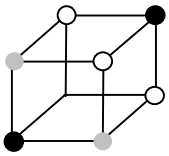
***Dimension* 3.**

Triviaux 



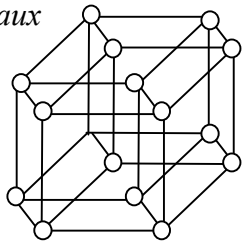
Semi-trivial 

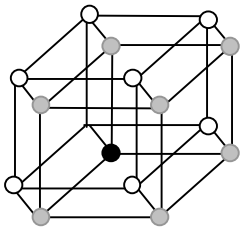
*Irréductibles (ordre*1*)* ***Type (i)*** 

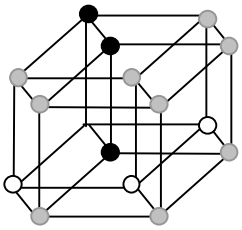
(ordre 2*)* ***Type (iii)*** 

***Dimension* 4.**

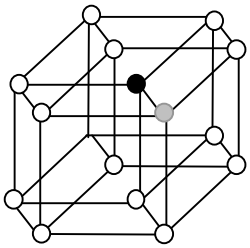
Triviaux

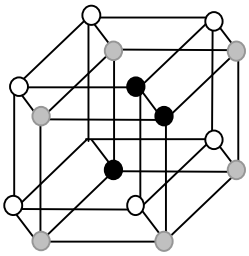


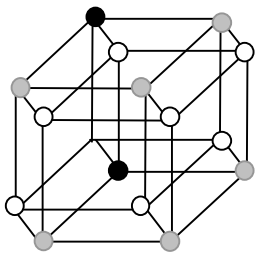


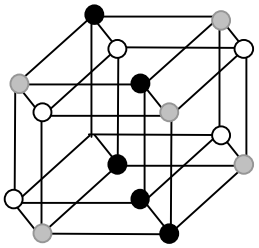


Semi-triviaux



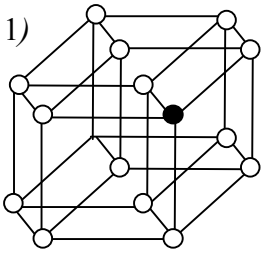




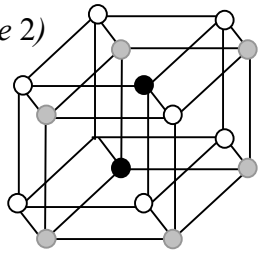


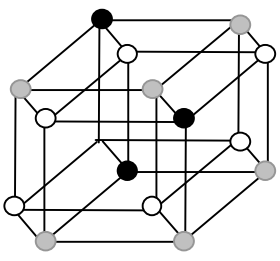
Irréductibles

(ordre 1*)*



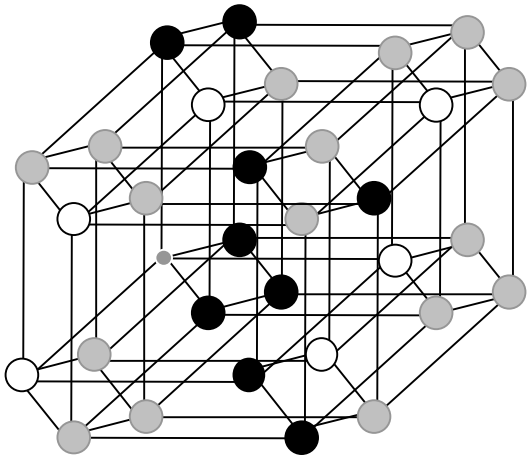
(ordre 2*)*





Un squelette sain de dimension 5 pour finir.
Données génératrices *(justification au dernier chapitre)***:**
(00100) (00010) (00001) (11000) (11111) ∈ A
(10000) (01000) (00110) (11001) ∈ B

irréductible d'ordre 3



Retenons essentiellement que les squelettes sains offrent une bonne typologie de *certaines* décompositions directes additives des puissances de **N**, mais ***pas toutes***.
Pour une typologie plus complète, on doit introduire les notions de *suture* et de *terminaison* qui permettent de définir des *squelettes* plus généraux que les squelettes sains envisagés jusqu'ici. Il paraît sage de s'habituer un peu aux squelettes « sains » avant d'aborder le cas général.

V. Classification générale.

Objets irréductibles.
Soit (A,B) une décomposition directe de $\mathbf{N}^k$; parmi les parties propres de $\mathbf{N}^k$, il y a les suivantes : soit H un sous-ensemble de K = {1, 2, …,k} ayant h éléments; l'ensemble des éléments $(x_p)_{p\in K}$ tels que $x_p = 0$ si $p \notin H$ est une partie propre relative à la décomposition donnée (A,B) sur laquelle (A,B) induit donc une décomposition directe (A',B') qui est naturellement isomorphe à une décomposition directe de $\mathbf{N}^h$ encore notée (A',B') ; la partie supplémentaire canonique de $\mathbf{N}^h$ est celle des éléments $(x_p)_{p\in K}$ tels que $x_p = 0$ si $p \in H$; c'est aussi une partie propre relative à la décomposition donnée (A,B) sur laquelle (A,B) induit une décomposition directe (A'',B'') qui est naturellement isomorphe à une décomposition directe de $\mathbf{N}^\ell$ encore notée (A'',B'') ($h + \ell = k$) ; bien sûr $\mathbf{N}^k = \mathbf{N}^h \oplus \mathbf{N}^\ell$, mais en général (A,B) n'est pas la somme directe (ou le produit !) des décompositions induites (A',B') et (A'',B'').

***Définition* 5-1**.
S'il existe une partie propre H de K ($h = |H| \neq 0$ et $|K \setminus H| = \ell \neq 0$) telle que l'on ait :

$$(\mathbf{N}^k, (A,B)) = (\mathbf{N}^h, (A',B')) \oplus (\mathbf{N}^\ell, (A'',B''))$$

on dit que l'objet $(\mathbf{N}^k,(A,B))$ est *réductible*; dans le cas contraire on dit qu'il est *irréductible*.

On suppose que pour tout p, $1 \leq p \leq k$, $A_p = \{0\}$. Alors on a la proposition suivante :

***Proposition* 5-1**.
Si, pour un certain ordre lexicographique L, $a = \inf_L(A^*)$ n'a aucune composante nulle, alors pour tout autre ordre lexicographique L', on a $\inf_{L'}(A^*) = a$; on peut donc écrire sans risque de confusion : $\omega^* = \inf(A^*)$ ($\omega^* = a$ est bien défini sans référence à tel ou tel ordre lexico L)

Ainsi, $a' = a = \omega^* = \inf(A^*)$ est défini indépendamment de l'ordre lexicographique L choisi sur $\mathbf{N}^k$.

Supposons toujours que pour tout p, $1 \leq p \leq k$, $A_p = \{0\}$. Alors on a la proposition suivante :

***Proposition* 5-2**.
Si l'élément $\omega^* = \inf(A^*)$ est bien défini, c'est-à-dire s'il existe un ordre lexicographique L tel que ω^* ($= \inf_L(A^*)$) ait *toutes ses composantes* a_i non nulles, alors l'objet ($\mathbf{N}^k$, (A,B)) est *irréductible.*

La réciproque de cette proposition est fausse dès la dimension 3 : il suffit de se référer aux décompositions de type ***(ii)*** et ***(iii)***. Donnons encore un contre-exemple en dimension 4.

***Une décomposition de* $\mathbf{N}^4$ *non descriptible en termes de décompositions de* $\mathbf{N}, \mathbf{N}^2, \mathbf{N}^3$.**
Soient $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$ les éléments de la « base canonique » de $\mathbf{N}^4$.
Pour une permutation (i,j,k,l) de (1,2,3,4), on pose $\mathbf{N}_{ij} = \mathbf{N}(e_i + e_j) \oplus \mathbf{N}e_k \oplus \mathbf{N}e_l$
Le couple de parties $A = \mathbf{N}(e_3 + e_4) \cup \mathbf{N}(e_1 + e_2)$ et $B = \mathbf{N}_{13} \cup \mathbf{N}_{24} \cup \mathbf{N}_{23} \cup \mathbf{N}_{14}$ constitue une décomposition directe de $\mathbf{N}^4$.
Voici la décomposition d'un élément u = (x,y,z,t) en somme a+b, avec $a \in A$ et $b \in B$ selon la valeur de m = inf(x, y, z, t) :

- m = x et $t \geq z$; a = (0, 0, z-x, z-x) et b = (x, y, x, t-z+x)
- m = x et $z \geq t$; a = (0, 0, t-x, t-x) et b = (x, y, z-t+x, x)
- m = y et $t \geq z$; a = (0, 0, z-y, z-y) et b = (x, y, y, t-z+y)
- m = y et $z \geq t$; a = (0, 0, t-y, t-y) et b = (x, y, z-t+y, y)
- m = z et $x \geq y$; a = (y-z, y-z, 0, 0) et b = (x-y+z, z, z, t)
- m = z et $y \geq x$; a = (x-z, x-z, 0, 0) et b = (z, y-x+z, z, t)
- m = t et $x \geq y$; a = (y-t, y-t, 0, 0) et b = (x-y+t, t, z, t)
- m = t et $y \geq x$; a = (x-t, x-t, 0, 0) et b = (t, y-x+t, z, t)

Nous verrons que cet exemple est en quelque sorte générique, puisqu'il représente un nouveau type de décomposition non triviale de $\mathbf{N}^4$, c'est-à-dire non « déductible » des décompositions directes des puissances de **N** inférieures à 4. On remarquera que le groupe $\mathbf{S_4}$ et sa représentation sur $\mathbf{S_3}$ sont en cause ici!

Soit $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ une décomposition directe telle que, pour tout p, on ait : $|A_p| < \infty$. D'après la ***proposition* 4-1**, dont on reprend les notations, ($\mathbf{\Omega}$, **C**) est une décomposition directe de $\mathbf{N}^k$; les parties $\mathbf{\Omega}$ et **C** sont propres pour la décomposition (A,B) donnée.
Tout $z \in \mathbf{N}^k$ s'écrit de façon unique $z = \omega + c$ où $\omega \in \mathbf{\Omega}$ et $c \in \mathbf{C}$, et l'on a :

$$\underline{a}(z) = \underline{a}(\omega) + \underline{a}(c) \text{ et } \underline{b}(z) = \underline{b}(\omega) + \underline{b}(c), \text{ où } \underline{a}(\omega), \underline{b}(\omega) \in \mathbf{\Omega}$$

On est donc ramené à décrire la décomposition induite sur $\mathbf{\Omega}$. Comme $\mathbf{\Omega}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{N}^k$, il s'agit de décrire les décompositions directes de $\mathbf{N}^k$ telles que tous les axes $\mathbf{N}_p = \mathbf{N}e_p$, $e_p = (0,.0,., 0, 1_p, 0.,.0)$, soient dans B, ce que nous supposons donc.

***Proposition* 5-3**.
Si l'élément $\omega^* = \inf(A^*)$ est bien défini, c'est-à-dire s'il existe un ordre lexicographique *L* tel que ω^* ($= \inf_L(A^*)$) ait *toutes ses composantes* $b_i e_i$ non nulles, la demi-droite $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\omega^*$ est une partie propre, l'ensemble $\mathbf{L} = \{x \mid \exists\, p\ (x_p < b_p)\}$ est contenu dans B et l'on a : $A = A_{\mathbf{D}}$ et aussi $B = B_{\mathbf{D}} \oplus \mathbf{L}$.

Nous savons donc que si $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ est une décomposition directe telle que, pour tout p, on ait : $|A_p| < \infty$, alors :

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D} \oplus \mathbf{C} = \mathbf{L} \oplus A_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{D}} \oplus A_{\mathbf{C}} \oplus B_{\mathbf{C}} \text{ où}$$
$$A = A_{\omega} \oplus A_{\mathbf{C}} = A_{\mathbf{D}} \oplus A_{\mathbf{C}} \text{ et } B = \mathbf{L} \oplus B_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{C}},$$

et, lorsqu'on a opéré la première réduction, ou si l'on veut si $\mathbf{C} = \{0\}$, alors :

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D} = \mathbf{L} \oplus A_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{D}} \text{ où}$$
$$A = A_{\mathbf{D}} \text{ et } B = \mathbf{L} \oplus B_{\mathbf{D}}.$$

Nous indiquons enfin comment calculer pratiquement p et ℓ.
Soit $x = \sum_i x_i e_i$; on a $\omega^* = \sum_i b_i e_i$; si $x \notin \mathbf{L}$, c'est que toutes les composantes de x sont plus grandes que celles de ω^* ; pour tout i, de 1 à k, on effectue la division euclidienne de x_i par b_i : $x_i = p_i.b_i + r_i$, avec $r_i < b_i$; si $x \neq \omega^*$ il existe au moins un indice i pour lequel $p_i \neq 0$; soit alors p le plus petit des $p_i \neq 0$; alors l'élément suivant : $\ell = \sum_i ((p_i - p).b_i + r_i).e_i = \sum_i (x_i - p.b_i).e_i$ est dans **L** : en effet, soit j un indice pour lequel $p_j = p$; on a : $\ell_j = r_j < b_j$;

l'élément ℓ n'est autre que $x - p.\omega^*$; pour avoir la décomposition de x, il convient de décomposer encore p sur la demi droite $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\omega^*$.

***Définition* 5-2**
Soit $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ une décomposition directe telle que tous les axes $\mathbf{N}_p = \mathbf{N}.e_p$ se décomposent en $A_p \oplus B_p$ chaque A_p étant fini. Si, après réduction, existe l'élément $\alpha = \inf(A^*)$ comme dans la ***proposition* 5-3** ci-dessus, un tel objet sera dit *objet irréductible simple*, et plus précisément, si tous les A_p sont réduits à $\{0\}$ (i.e. $\mathbf{C} = \{0\}$) *objet irréductible réduit simple.* Ce sont les objets de la ***proposition* 5-2.**

***Définition* 5-3.**
On dira que $(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{iq})$ est à *la base d'un sous-objet irréductible simple de* $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ si la décomposition induite par (A,B) sur $\mathbf{N}.e_{i1} \oplus \mathbf{N}.e_{i2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{N}.e_{iq}$, qui est canoniquement isomorphe à une décomposition de $\mathbf{N}^q$, est un objet irréductible simple, ce qui suppose qu'existe un plus petit élément α de $A\backslash\{0\} \cap (\mathbf{N}.e_{i1} \oplus \mathbf{N}.e_{i2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{N}.e_{iq})$ qu'on appellera le *générateur d'irréductiblité* du sous-objet en question.

Définition* 5-4 *(sutures).
Soit $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ un objet irréductible simple, avec générateur d'irréductiblité α dans A ; l'ensemble $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ se décompose en $A_{\mathbf{D}} \oplus B_{\mathbf{D}}$; si $A_{\mathbf{D}}$ est ***fini*** (***et par essence*** non réduit à $\{0\}$!) nous dirons que c'est une *suture de genre* a (ou que l'objet $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ présente une *suture de genre* a) ; les éléments non nuls de $A_{\mathbf{D}}$ sont appelés *points de suture*.
On définit de façon symétrique les *sutures de genre* b et leurs points de suture.

Notons que la seule considération des squelettes sains élimine d'office les *sutures*.

Dans ce qui suit, ***propositions* 5-4** à **5-10**, on travaille avec un objet $(\mathbf{N}^k, (A,B))$ où *chaque* $\mathbf{N}_p$ *est contenu dans* B.

***Proposition* 5-4.**
Supposons que $E_q = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{iq})$ et $E_r = (e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jr})$ soient à la base de deux sous-objets irréductibles distincts de $(\mathbf{N}^k, (A,B))$, avec générateurs d'irréductibilité respectifs α_q et α_r. Alors les ensembles E_q et E_r sont disjoints.

***Proposition* 5-5.**
Il existe une unique partition P de $K = \{0,1,2,\ldots,k\}$ ayant la propriété suivante : $\forall\, I \in P$
ou bien $\mathrm{card}(I) \geq 2$ et dans ce cas, $(e_i)_{i \in I}$ est une base de sous-objet irréductible de $(\mathbf{N}^k, (A,B))$,
ou bien $\mathrm{card}(I) = 1$ et l'ensemble S de ces singletons est tel que $\mathbf{S} = \bigoplus_{S \in S} \mathbf{N}.e_s \subset B$.

***Proposition* 5-6.**
Supposons en plus que P ne contienne qu'un élément de base $E_q = (e_1, e_2, \ldots, e_q)$ et de générateur d'irréductibilité $\alpha = \sum_{i=1}^{q} n_i e_i$; désignons par $(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ les éléments de S.
Alors les supplémentaires canoniques des axes $\mathbf{N}.e_i$ sont entièrement contenus dans B.

***Proposition* 5-7.**
Dans le cas de deux bases de sous-objets irréductibles (de même nature), soit $E_p = (e_1,\ldots, e_p)$ et $E_q = (f_1,\ldots, f_p)$ (dans B toutes deux) et deux générateurs d'irréductibilité : $\alpha = \sum_{i=1}^{p} n_i e_i$ et $\alpha' = \sum_{j=1}^{q} n'_j f_j$ (dans A tous deux), on a $\mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q \subset B$.

***Proposition* 5-8.**
Toujours avec les mêmes hypothèses, et les mêmes notations et posant $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ et $\mathbf{D}' = \mathbf{N}.\alpha'$, $\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}'$est une partie propre et l'on a : $A = A_{\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}'}$ et $B = B_{\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}'} \oplus \mathbf{L}_p \oplus \mathbf{L}_q$.

La démonstration se fait par récurrence transfinie portant sur les couples (p,p') *d'entiers coordonnées des éléments de* $\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}'$.

***Proposition* 5-9** (*généralise la* ***proposition* 5-7**)
Dans le cas de r bases de sous-objets irréductibles, soit $E_1, E_2,...E_r$ (toutes dans B) et leurs générateurs d'irréductibilité : $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_r$ (tous dans A) on a : $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \subset B$, où, rappelons-le: $\mathbf{L}_s = \{ \ell_s = \sum_{i=1}^{p_s} \lambda_{s\,i} \mathbf{e}_{s\,i} \mid \exists i \ \lambda_{s\,i} < n_{s\,i} \}$.

On établit ce résultat par récurrence sur le nombre r.

***Proposition* 5-10** (*généralise la* ***proposition* 5-8**)
Toujours avec les mêmes hypothèses, et les mêmes notations et posant $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}.\alpha_1$, $\mathbf{D}_2 = \mathbf{N}.\alpha_2$, $\mathbf{D}_r = \mathbf{N}.\alpha_r$, alors $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}_r$ est une partie propre et on a :

$$A = A_{\mathbf{D}} \text{ et } B = B_{\mathbf{D}} \oplus \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r .$$

On établit ce résultat par récurrence transfinie portant sur les r-*uples* $(p_1, p_2,\ldots,p_r)$ *d'entiers coordonnées des éléments de* $\mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}_r$.

La proposition suivante concerne le cas général et « rétablit » la symétrie entre A et B.

Proposition* 5-11** ***(cas général).
- On suppose que chaque axe est entièrement dans A ou entièrement dans B (il y a donc eu éventuellement une première *simplification* par les axes sur lesquels on a: $|A| = |B| = \infty$, grâce au ***théorème* 1-1**, et aussi une première *réduction*, grâce à la ***proposition* 4-1**).
- On dispose des *cycles et singletons* qui sont dans B :
$(f_1, f_2 ,\ldots, f_t)$ les éléments de S_B ; ils engendrent le sous-monoïde $\mathbf{S}_B$,
les r cyles bases de sous-objets irréductibles $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2,\ldots,\mathbf{E}_r$ à bords dans B, avec générateurs d'irréductibilité $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, éléments de A, générateurs des droites $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_r$.
- On dispose aussi des *cycles et singletons* qui sont dans A :
$(g_1, g_2 ,\ldots, g_u)$ les éléments de S_A ; ils engendrent le sous-monoïde $\mathbf{S}_A$,

les s cycles bases de sous-objets irréductibles $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,…,$\mathbf{F}_s$ à bords dans A, avec générateurs d'irréductibilité β_1, β_2, **…,** β_s , éléments de B, générateurs des droites $\mathbf{D'}_1$, $\mathbf{D'}_2$, **…,** $\mathbf{D'}_s$;
- On dispose encore des « régions » $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, **…**, $\mathbf{L}_r$ qui sont entièrement dans B ,
et des « régions » $\mathbf{L'}_1$, $\mathbf{L'}_2$, **…**, $\mathbf{L'}_s$ qui sont entièrement dans A .
Alors,

$$\mathbf{S}_A \oplus \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}_r \oplus \mathbf{S}_B \oplus \mathbf{D'}_1 \oplus \mathbf{D'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D'}_s$$
$$\text{et } \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \oplus \mathbf{L'}_1 \oplus \mathbf{L'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L'}_s$$

sont des parties propres.
- On pose :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_r \ , \ \mathbf{L'} = \mathbf{L'}_1 \oplus \mathbf{L'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L'}_s$$
$$\text{et } \mathbf{D} = \mathbf{S}_A \oplus \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}_r \oplus \mathbf{S}_B \oplus \mathbf{D'}_1 \oplus \mathbf{D'}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{D'}_s .$$

Les générateurs de **D** sont désignés génériquement par γ_i; ce sont les éléments f_1, f_2 ,…, f_t de S_B , les éléments g_1, g_2 ,…, g_u de S_A , et les générateurs α_1, α_2, **…,** α_r , β_1, β_2, **…,** β_s.

Tout élément z se décompose de façon unique en $z = \ell + \ell' + \sum_i p_i.\gamma_i$, avec $\ell \in \mathbf{L}$, $\ell' \in \mathbf{L}'$ et $\sum_i p_i.\gamma_i \in \mathbf{D}$, et sa décomposition selon (A,B) est donnée par :

$$\underline{a}(z) = \ell' + \underline{a}\left(\sum_i p_i.\gamma_i\right) \text{ et } \underline{b}(z) = \ell + \underline{b}\left(\sum_i p_i.\gamma_i\right).$$

On établit ce résultat par récurrence transfinie portant sur les n*-uples d'entiers* $(p_i)_{1 \le i \le n}$ *coordonnées des éléments de* **D**.

VI. La suite des foncteurs dérivés associée à une décomposition directe multiplicative de $\mathbf{N}^*$.

***Définition* 6-1**.
Une décomposition directe du (pré)monoïde *multiplicatif* $\mathbf{N}^*$ sera dite *décomposition directe multiplicative* de $\mathbf{N}^*$. C'est donc un couple (A,B) de parties de $\mathbf{N}^*$ tel que la multiplication des entiers définit une bijection de $A \times B$ sur $\mathbf{N}^*$.

Remarques.
1) L'emploi du *même* symbole « × » pour la multiplication et le produit cartésien exprime de façon « imagée » que la *notation* $A \times B = \mathbf{N}^*$ *n'est pas ambiguë*, dans ce cas.
2) Etant donné un bon ordre de l'ensemble des nombres premiers (par exemple, l'ordre croissant !) le monoïde multiplicatif $(\mathbf{N}^*,\times)$ est *naturellement isomorphe* au monoïde *somme* de **N** copies de (**N**, +) qu'on note (bizarrement) $(\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}, +)$: à l'entier $n = p_{i1}{}^{\alpha 1}. p_{i2}{}^{\alpha 2}\dots p_{ik}{}^{\alpha k}$, on fait correspondre l'élément $\tilde{n} = (\tilde{n}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ dont les composantes sont : $\tilde{n}_i = \alpha_m$ si $i = i_m$ et $\tilde{n}_i = 0$ si i n'est pas l'un des indices $i_1, i_2 \dots, i_k$. Cet isomorphisme a les propriétés formelles d'un logarithme ; on le désignera par *Log* et son inverse par *Exp* ; sur l'axe canonique d'indice p, ce *Log* se restreint en le véritable logarithme de base p ; on peut encore dire que *Log* est un logarithme « *multi-base*s » (idem pour son inverse *Exp*).
3) Une décomposition directe multiplicative de $\mathbf{N}^*$ s'identifie alors à une décomposition directe additive de $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$, la quelle induit sur tout $\mathbf{N}^{(X)}$, où X est une partie de **N**, une décomposition additive, qui est du type de celles étudiées jusqu'ici lorsque X est fini.

Pour des raisons structurelles faciles à comprendre, à l'interprétation additive précédente on préfère la description *fonctorielle* suivante (cf. ma thèse:1975-78), qui lui est parfaitement équivalente :
La donnée d'une décomposition directe multiplicative (A,B) de **N*** équivaut à celle d'un certain foncteur $\mathbf{\Phi}$ de *source la catégorie* $P_f(\mathbf{P})$ des ensembles finis de nombres premiers (et inclusions entre eux) vers la *catégorie des décompositions directes additives* des puissances finies de **N** et restrictions entre elles :
A une partie finie $X = \{p_{i1}, p_{i2},\dots, p_{in}\}$ de l'ensemble **P** des nombres premiers (objet de $P_f(\mathbf{P})$) le foncteur $\mathbf{\Phi}$ fait correspondre une décomposition additive directe $\mathbf{\Phi}(X)$ de $\mathbf{N}^n$, notée génériquement (A,B) (c'est ici qu'il convient de disposer d'un certain *bon ordre* dans l'ensemble **P**, par exemple l'ordre croissant !). Si $Y = \{p_{j1}, p_{j2},\dots, p_{jm}\}$ est une partie de X à m éléments, la décomposition induite par (A,B) sur le sous-ensemble $\mathbf{N}_{j1} \oplus \mathbf{N}_{j2} \oplus \dots \oplus \mathbf{N}_{jm}$ de $\mathbf{N}^n$ détermine une décomposition additive directe $\mathbf{\Phi}(Y)$ de $\mathbf{N}^m$.
Le foncteur $\mathbf{\Phi}$ est ainsi complètement défini : l'inclusion $Y \subset X$ doit être vue comme une flèche $\iota : X \to Y$, et $\mathbf{\Phi}(\iota) : \mathbf{\Phi}(X) \to \mathbf{\Phi}(Y)$ est la « *restriction canonique*» associée.

A chaque entier premier p_i on fait correspondre un symbole $\mathbf{t}(p_i)$ qui caractérise le *type* de la décomposition induite (A_i , B_i) sur $\mathbf{N}_i$ $(= \mathbf{N}p_i)$ auquel on a à faire :
$\mathbf{t}(p_i) = n$ si $|A_i| = |B_i| = \infty$;
$\mathbf{t}(p_i) = b$ si $|A_i| < \infty$ (et $|B_i| = \infty$);
$\mathbf{t}(p_i) = a$ si $|B_i| < \infty$ (et $|A_i| = \infty$).

On pose :
$\mathbf{I} = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = n \}$; pour une raison d'homogénéïté de notations, on pose $\mathbf{I} = \{\{i\}\}_{i \in \mathbf{I}}$
$\mathbf{F} = \{ p \mid \mathbf{t}(p) =$ a ou b $\}$; plus précisément $\mathbf{F}_\beta = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = b \}$ et $\mathbf{F}_\alpha = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = a \}$.

Soit $p_i \in \mathbf{F}_\beta$ (resp. $\mathbf{F}_\alpha$) ; on désigne par e_i le plus petit élément de $\mathbf{N}_{pi} = \mathbf{N}_i$ qui ne soit pas dominé par A_i (resp. B_i) ; c'est un élément de B (resp. A) .

On dispose d'une partition naturelle $\mathbf{B}_\alpha$ (resp. $\mathbf{B}_\beta$) de l'ensemble $\mathbf{F}_\alpha$ (resp. $\mathbf{F}_\beta$) : $\mathbf{B}_\alpha$ et $\mathbf{B}_\beta$ ne sont autres que les ensembles de *bases d'objets irréductibles* ou *des singletons* :

soit $\{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}\} \subset \mathbf{F}_\beta$ un élément de $\mathbf{B}_\beta$, avec $n > 1$; alors $E_n = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in})$ est une base d'objet irréductible, ce qui signifie qu'il existe un n-uple d'entiers non nuls $(m_{ij})_{1 \le j \le n}$ tel que l'élément $\alpha = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.e_{ij}$ soit générateur d'irréductibilité, c'est-à-dire que la somme $\mathbf{N}.e_{i1} \oplus \mathbf{N}.e_{i1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{N}.e_{in}$ se décompose en $\mathbf{L} \oplus \mathbf{D}$, où $\mathbf{L} = \{\ell = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij} \mid \exists j \ \lambda_{ij} < m_{ij}\}$ est entièrement contenu dans B et $\mathbf{D} = \mathbf{N}\alpha$ est une partie propre pour la décomposition (A,B) donnée avec $\alpha \in A$.

Bien sûr, si $p \in \mathbf{F}_\beta$ ne fait partie d'aucune base d'objet irréductible, c'est le singleton $\{p\}$ qui est élément de $\mathbf{B}_\beta$. On désigne par $\mathbf{S}_\beta$ l'ensemble de ces singletons et par $\mathbf{B'}_\beta$ l'ensemble des bases d'objets irréductibles : $\mathbf{B}_\beta = \mathbf{B'}_\beta \cup \mathbf{S}_\beta$. On définit de même $\mathbf{B'}_\alpha$, $\mathbf{S}_\alpha$ et $\mathbf{B}_\alpha$ et on pose $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\alpha \cup \mathbf{S}_\beta \cup \mathbf{I}$

***Définition* 6-2**.
Une partie de **P** est dite *saturée d'ordre* 1 *,* ou plus brièvement 1-*saturée*, si c'est une réunion d'éléments de $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\alpha \cup \mathbf{B}_\beta$.

Toute partie finie $X = \{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}\}$ de **P** engendre une partie finie 1-saturée X_f.

Toute partie X de **P** admet une décomposition analogue à celle de **P** en $\mathbf{I} \cup \mathbf{F} = \mathbf{I} \cup \mathbf{F}_\alpha \cup \mathbf{F}_\beta$; on en désignera les éléments par la même lettre, mais avec l'indice X ; il est clair que l'on a les égalités suivantes : $\mathbf{I}_X = \mathbf{I} \cap X$; $\mathbf{F}_X = \mathbf{F} \cap X$; $\mathbf{F}_{\beta X} = \mathbf{F}_\beta \cap X$; $\mathbf{F}_{\alpha X} = \mathbf{F}_\alpha \cap X$.

Par contre, pour une base d'objet irréductible donnée $E = \{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}\} \in \mathbf{B'}_\alpha$ (resp. $\mathbf{B'}_\beta$) :
- ou bien $E \cap X = X$, et dans ce cas $E \in \mathbf{B'}_{\alpha X}$ (resp. $\mathbf{B'}_{\beta X}$),
- ou bien $E \cap X \neq X$, et dans ce cas $E \cap X \in \mathbf{S}_{\alpha X}$ (resp. $\mathbf{S}_{\beta X}$).

Dans ce dernier cas on n'a pas d'égalité $\mathbf{B}_{\alpha X} = \mathbf{B}_\alpha \cap \mathbf{P}(X)$, puisqu'il y a des transferts possibles de $\mathbf{B'}_\alpha \cap \mathbf{P}(X)$ vers $\mathbf{S}_{\alpha X}$ (les bases *incomplètes* dans X sont *désagrégées* en singletons). Une partie X est 1-saturée si et seulement si le phénomène de désagrégation ne s'y produit pas, c'est-à-dire si on a à la fois $\mathbf{B}_{\alpha X} = \mathbf{B}_\alpha \cap \mathbf{P}(X)$ et $\mathbf{B}_{\beta X} = \mathbf{B}_\beta \cap \mathbf{P}(X)$.

***Définition* 6-3**.
L'ensemble $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{I} \cup \mathbf{B}$ est appelé *ensemble dérivé d'ordre* 1 de **P** relativement à la décomposition directe multiplicative donnée (A,B).

On peut munir $\mathbf{P}^{(1)}$ d'un quelconque bon ordre, mais aussi, si l'on y tient, d'un bon ordre « *compatible* » avec celui de **P**, c'est-à-dire qui induit sur **I** le bon ordre provenant de **P** et qui a aussi la propriété suivante :

$$\forall E \in \mathbf{B}\ \ \forall \{p\} \in \mathbf{P}^{(1)}\ \ [\, p < \sup(E) \ \Rightarrow\ \{p\} < E\,]$$

Ce bon ordre est parfaitement déterminé par celui de **P.**

Par exemple, avec **P** = { 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …}, supposons que {3}, {17}, {29} soient des singletons et {1, 5, 11} , {7, 13} , {2, 19}, {23, 31}des bases d'objets irréductibles, alors on pourra adopter dans $\mathbf{P}^{(1)}$ le bon ordre commençant par :

$$\{3\} < \{1, 5, 11\} < \{7, 13\} < \{17\} < \{2, 19\} < \{29\} < \{23, 31\} < \ldots$$

Soit $X^{(1)}$ une partie finie de $\mathbf{P}^{(1)}$; il lui correspond une partie finie et 1-saturée X de **P**, à savoir $X = \int X^{(1)} = \{\, p \mid \exists\, E \in X^{(1)}\ (p \in E)\ \}$. Posons $|X| = n$ et $|X^{(1)}| = m$. On distingue dans X l'ensemble **I**(X) des singletons {p} et l'ensemble **B**'(X) des bases d'objets irréductibles E ; ce sont les éléments de $X^{(1)}$. A chaque base d'objet irréductible E correspond un générateur d'irréductibilité $\alpha(E)$. La décomposition $\mathbf{\Phi}(X)$ de $\mathbf{N}^n$ détermine alors, par restriction à la partie propre $\left(\oplus_{p \in I(X)}\ \mathbf{N}_p\right) \oplus \left(\oplus_{E \in \mathbf{B}'(X)}\ \mathbf{N}.\alpha(E)\right)$ (***proposition* 5-11**) et choix des bons ordres, une décomposition directe de $\mathbf{N}^m$; c'est cette décomposition qu'on note $\mathbf{\Phi}^{(1)}(X^{(1)})$, ou simplement $\mathbf{\Phi}(X^{(1)})$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

Soit $Y^{(1)}$ une partie de $X^{(1)}$ et $Y = \int Y^{(1)}$; posons $|Y| = n'$ et $|Y^{(1)}| = m'$; Y est une partie saturée de X, de sorte que **B**'(Y) est un sous-ensemble de **B**'(X) et I(Y) un sous-ensemble de I(X) ; ainsi le carré d'inclusions suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \left(\oplus_{p \in I(Y)}\ \mathbf{N}_p\right) \oplus \left(\oplus_{E \in \mathbf{B}'(Y)}\ \mathbf{N}.\alpha(E)\right) & \rightarrow & \mathbf{N}^{m'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\oplus_{p \in I(X)}\ \mathbf{N}_p\right) \oplus \left(\oplus_{E \in \mathbf{B}'(X)}\ \mathbf{N}.\alpha(E)\right) & \rightarrow & \mathbf{N}^{m} \end{array}$$

et $\mathbf{\Phi}^{(1)}(Y^{(1)})$, décomposition additive directe de $\mathbf{N}^{m'}$, apparaît bien comme la restriction canonique de $\mathbf{\Phi}^{(1)}(X^{(1)})$, de sorte que $\mathbf{\Phi}^{(1)}$ est un foncteur de source $P_f(\mathbf{P}^{(1)})$.

***Définition* 6-4**.
Nous dirons que $\mathbf{\Phi}^{(1)}$ est le foncteur *dérivé* de $\mathbf{\Phi}$ relativement à la décomposition directe multiplicative (A,B) donnée.

On définit par récurrence les ensembles dérivés $\mathbf{P}^{(r)}$ et les foncteurs dérivés $\mathbf{\Phi}^{(r)}$ de tous ordres.
De même on définit les ensembles saturés de tous ordres.
Par restriction à une partie X de **P**, on définit de même les ensembles dérivés $X^{(r)}$, le foncteur restriction $\mathbf{\Phi}_X$ et sa suite de foncteurs dérivés $\mathbf{\Phi}_X{}^{(r)}$.

***Définition* 6-5**.
Tout ensemble $\mathbf{N}\alpha$, où α est élément de $X^{(r)}$, est appelé *axe principal.*

Description constructive d'une décomposition multiplicative (A,B) ***de*** $\mathbf{N}^*$.

Première étape.
C'est la donnée pour chaque entier premier p d'une décomposition directe de **N** qui sera celle de l'axe $\mathbf{N}_p$, c'est-à-dire, pour chaque p, d'une *suite (finie ou non) de multiplicateurs* $\boldsymbol{\mu}(p)$, et d'un *choix pour* 1 ($1 \in$ A *ou* $1 \in$ B) ; si la suite est infinie c'est que $p \in \mathbf{I}$ et $\mathbf{t}(p) = n$; si la suite est finie c'est que $p \in \mathbf{F}$ **:**
- $p \in \mathbf{F}_\beta$ et $\mathbf{t}(p) = b$, si $1 \in$A et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ impair ou si $1 \in$B et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ pair ;

- $p \in \mathbf{F}_\alpha$ et $\mathbf{t}(p) = a$, si $1 \in B$ et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ impair ou si $1 \in A$ et $|\boldsymbol{\mu}(p)|$ pair ;
à ce stade, la fonction de typification $\mathbf{t} : \mathbf{P} \rightarrow \{n,a,b\}$ est donc entièrement déterminée.

Deuxième étape.
Elle consiste à préciser les éléments de **B'**, aussi bien ceux de $\mathbf{B}'_\alpha$ que de $\mathbf{B}'_\beta$; les seules règles à respecter sont les suivantes : pour qu'un ensemble fini $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de **P** puisse appartenir à $\mathbf{B}'_\beta$ (resp. $\mathbf{B}'_\alpha$) il est nécessaire que ce soit un sous ensemble fini de plus de 2 éléments de $\mathbf{F}_\beta = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = b\}$ (resp. $\mathbf{F}_\alpha = \{ p \mid \mathbf{t}(p) = a \}$) ; d'autre part, deux éléments de **B'** ne peuvent qu'être disjoints.
Font alors partie des singletons, outre les éléments p tels que $\mathbf{t}(p) = n$, les éléments p de $\mathbf{S}_\beta$ (resp. $\mathbf{S}_\alpha$) tels que $t(p) = b$ (resp. $t(p) = a$) et qui n'ont pas été retenus pour constituer les éléments de **B'**; l'ensemble $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{I} \cup \mathbf{B}$ est alors constitué ;

Troisième étape.
Elle consiste à fournir les multiplicateurs (entiers > 0) qui permettent de localiser les générateurs d'irréductibilité ; c'est la donnée d'une fonction $\boldsymbol{\nu} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{N}^*$ où **B** n'est autre que l'ensemble des nombres premiers qui participent aux bases d'objets irréductibles choisies, i.e. $\mathbf{B} = \bigcup \mathbf{B}' = \{ p \mid \exists E \in \mathbf{B}' \ (p \in E)\}$.
Soit $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \in \mathbf{B}'$; les décompositions sur les axes $\mathbf{N}_i$ sont fournies par la fonction $\boldsymbol{\mu}$; on peut *étendre la définition de* **t** en posant $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}(p_i)$ pour n'importe quel $p_i \in E$; supposons par exemple que $\mathbf{t}(E) = b$ c'est-à-dire que $|A_i| < \infty$ et $|B_i| = \infty$ sur chaque axe $\mathbf{N}_i$; alors on définit, pour chaque indice i, l'entier e_i qui est le plus petit entier de B_i dans $\mathbf{N}_i$ non majoré par un élément de A_i ; « l'hyper-cube » $\prod_{i=1}^{n} [0, e_i[$ a une décomposition directe complètement triviale, c'est-à-dire produit des décompositions induites sur les segments $[0,e_i[$; on sait (***proposition* 4-1**) que le réseau $\boldsymbol{\Omega}$ engendré par les e_i doit être une partie propre (isomorphe à $\mathbf{N}^n$); le n-uple d'entiers non nuls $(\boldsymbol{\nu}(p_i))_{1 \le i \le n}$ constitue les coordonnées du générateur d'irréductibilité: $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\nu}(p_i).e_i$; $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D}$, où $\mathbf{L} = \{\ell = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \exists i \ \lambda_i < \boldsymbol{\nu}(p_i)\}$ est entièrement contenu dans B et $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ doit être une partie propre pour la décomposition (A,B) à construire, et $\alpha \in A$.

A ce stade, on poursuit en définissant $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{B}'^{(1)}$, puis $\boldsymbol{\nu}^{(1)}$:

Première étape $^{(1)}$.
$\boldsymbol{\mu}^{(1)}(\{p\}) = \boldsymbol{\mu}(p)$ pour tout p élément de **I** ou de **S**; pour $E \in \mathbf{B}'$, avec générateur d'irréductibilité α, $\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)$ est la suite (finie ou non) des multiplicateurs qui décrivent la décomposition de $\mathbf{N}\alpha \sim \mathbf{N}$, sachant que le choix « $1 \in A$ ou $1 \in B$ » n'est plus à faire, puisque 1 correspond en fait à $1.\alpha$, et que, par définition des éléments de **B'**, $\alpha \in A$ si $E \in \mathbf{B}'_\beta$ et $\alpha \in B$ si $E \in \mathbf{B}'_\alpha$. Ainsi $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ « complète » la définition de $\boldsymbol{\mu}$ en attribuant une valeur aux « nouveaux » éléments (ceux de **B'**) .
A ce stade, la fonction symbolique de typification $\mathbf{t}^{(1)} : \mathbf{P}^{(1)} \rightarrow \{n,a,b\}$ est entièrement déterminée : la valeur de $\mathbf{t}^{(1)}(E)$ est déterminée en fait par la nature de la décomposition de $\mathbf{N}.\alpha$, elle-même déterminée par $\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)$ *et* $\mathbf{t}(E)$:
si $|\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)| = \infty$, alors $\mathbf{t}^{(1)}(E) = n$;

si $\mathbf{t}(E) = b$ ($\alpha \in A$) : $|\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)|$ pair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = a$ et $|\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)|$ impair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = b$;
si $\mathbf{t}(E) = a$ ($\alpha \in B$) : $|\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)|$ pair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = b$ et $|\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)|$ impair $\Rightarrow \mathbf{t}^{(1)}(E) = a$.

Si $\mathbf{t}(E) = b$ (resp. = a) le générateur d'irréductibilité α est dans A (resp.B) ; ceci ne détermine pas la valeur de $\mathbf{t}^{(1)}(E)$; il y faut la connaissance de $\boldsymbol{\mu}^{(1)}(E)$. La décomposition $\boldsymbol{\Phi}(E)$ présentera une *suture* si et seulement si $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E)$ (suture de genre b si $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E) = a$ ou suture de genre a si $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E) = b$).

Deuxième étape $^{(1)}$.
On peut passer à $\mathbf{B}'^{(1)}$: un élément E_1 de $\mathbf{B}'^{(1)}$ doit obligatoirement contenir au moins un *nouvel* élément du genre $E = \{p_1, p_2, \ldots p_n\} \in \mathbf{B}'$; par contre, un élément de $\mathbf{B}'^{(1)}$ peut fort bien incorporer des *singletons de la première génération* (plus précisément, un élément de $\mathbf{S}_\beta$ peut fort bien être élément d'un élément E_1 de $\mathbf{B}'^{(1)}_\beta$, de même qu'un élément de $\mathbf{S}_\alpha$ peut fort bien être élément d'un élément $E^{(1)}$ de $\mathbf{B}'^{(1)}_\alpha$; exemple: $E^{(1)} = \{p,E,E'\}$ peut être élément de $\mathbf{B}'^{(1)}_\beta$ à la condition nécessaire que $p \in \mathbf{S}_\beta$, et que $E, E' \in \mathbf{B}'$avec $\mathbf{t}^{(1)}(E) = \mathbf{t}^{(1)}(E') = b$; bien noter que ceci ne signifie pas du tout qu'on doive avoir $\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}(E')$; les quatre valeurs a priori de $(\mathbf{t}(E), \mathbf{t}(E'))$ sont possibles :

(a, a) [$\boldsymbol{\Phi}(E)$ et $\boldsymbol{\Phi}(E')$ ne présentent pas de sutures] ,
(a, b) [$\boldsymbol{\Phi}(E)$ ne présente pas de suture et $\boldsymbol{\Phi}(E')$ présente une suture de genre a] ,
(b, a) [$\boldsymbol{\Phi}(E')$ ne présente pas de suture et $\boldsymbol{\Phi}(E)$ présente une suture de genre a] ,
(b, b) [$\boldsymbol{\Phi}(E)$ et $\boldsymbol{\Phi}(E')$ présentent des sutures de genre a] ,

et l'objet $\boldsymbol{\Phi}(X)$, où $X = \int X^{(1)} = \{ p \mid \exists E \in X^{(1)} (p \in E) \} = \{p\} \cup E \cup E'$, est un objet irréductible d'ordre ≥ 2.

Troisième étape $^{(1)}$.
Elle consiste à fournir les multiplicateurs (entiers > 0) qui permettent de localiser les générateurs d'irréductibilité d'ordre 2; c'est la donnée d'une fonction $\boldsymbol{\nu}^{(1)} : \mathbf{B}^{(1)} \rightarrow \mathbf{N}^*$ où $\mathbf{B}^{(1)}$ n'est autre que l'ensemble des éléments de $\mathbf{P}^{(1)}$ qui participent aux bases d'objets irréductibles choisies, i.e. $\mathbf{B}^{(1)} = \int \mathbf{B}'^{(1)} = \{E \mid \exists\ E^{(1)} \in \mathbf{B}'^{(1)}\ (E \in E^{(1)})\}$ (ici certains éléments E peuvent fort bien être de la forme {p}).
Soit $E^{(1)} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \in \mathbf{B}'^{(1)}$; les axes $\mathbf{N}_i$ sont soit des axes canoniques de première génération, soit des axes de type $\mathbf{N}.\alpha$, où α est un générateur d'irréductibilité d'ordre 1 (qui se « *substitue* » aux entiers premiers formant sa *base*). Dans tous les cas, les décompositions induites sur les axes $\mathbf{N}_i$ sont fournies par la fonction $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$; on peut *étendre la définition de* $\mathbf{t}^{(1)}$ en posant $\mathbf{t}^{(1)}(E^{(1)}) = \mathbf{t}^{(1)}(E_i)$ pour n'importe quel $E_i \in E^{(1)}$; supposons par exemple que $\mathbf{t}^{(1)}(E) = b$ c'est-à-dire que $|A_i| < \infty$ et $|B_i| = \infty$ sur chaque axe $\mathbf{N}_i$; alors on définit, pour chaque indice i, l'entier e_i qui est le plus petit entier de B_i dans $\mathbf{N}_i$ non majoré par un élément de A_i ; « l'hyper-cube » $\prod_{i=1}^{n} [0, e_i[$ a une décomposition directe complètement triviale, c'est-à-dire produit des décompositions induites sur les segments $[0,e_i[$; on sait (***proposition* 4-1**) que le réseau $\boldsymbol{\Omega}$ engendré par les e_i doit être une partie propre (isomorphe à $\mathbf{N}^n$); le n-uple d'entiers non nuls $(\boldsymbol{\nu}^{(1)}(E_i))_{1 \leq i \leq n}$ constitue les coordonnées du générateur d'irréductibilité d'ordre 2, soit: $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\nu}^{(1)}(E_i).e_i$; $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{D}$, où $\mathbf{L} = \{\ell = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \exists i\ \lambda_i < \boldsymbol{\nu}^{(1)}(E_i)\}$ est

entièrement contenu dans B et $\mathbf{D} = \mathbf{N}.\alpha$ doit être une partie propre pour la décomposition (A,B) à construire, et $\alpha \in A$.

Et la construction de la décomposition (A,B) continue ainsi par récurrence. Il n'y a aucune raison a priori pour que cette récurrence aboutisse à la description de (A,B) en un nombre fini d'étapes. C'est dire aussi que la suite des foncteurs dérivés peut être infinie, auquel cas le foncteur $\mathbf{\Phi}$ n'est entièrement déterminé qu'après la donnée d'une infinité d'étapes comme celles décrites ci-dessus.

Par contre, pour un ensemble fini $X \subset \mathbf{P}$, le nombre des dérivés utiles est forcément fini : en effet, la suite $(|X^{(n)}|)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante tant que se présentent de nouveaux irréductibles et dès que $|X^{(n)}| = |X^{(n+1)}|$, cela signifie qu'il n'y a pas, à l'étape n+1, de nouvel irréductible qui se présente, et la décomposition $\mathbf{\Phi}(X)$ (ou si l'on veut le foncteur $\mathbf{\Phi}_X$) est entièrement déterminée. L'entier $|X^{(n)}|$ est le nombre de composantes irréductibles en lesquelles $\mathbf{\Phi}(X)$ se décompose en produit (ou somme directe).

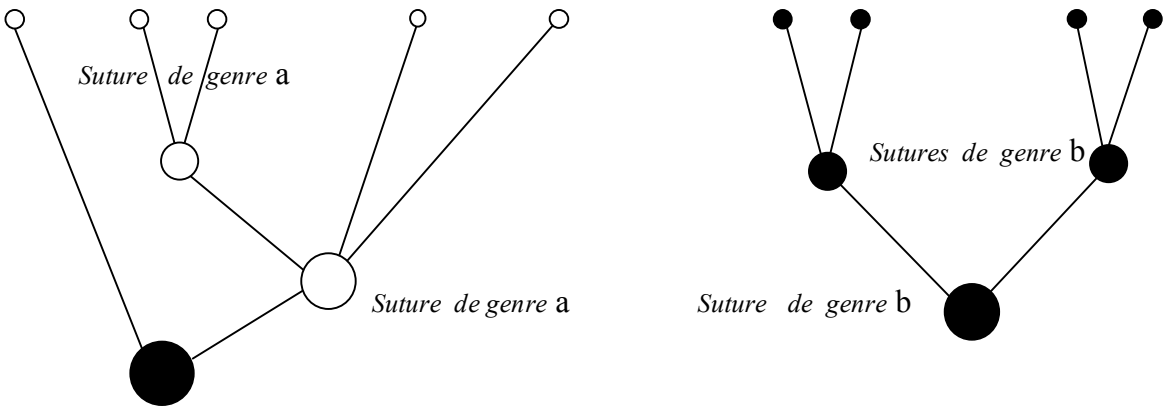
VII. Les squelettes.

***Définition* 7-1 (*Squelettes simples*).**
Un *squelette simple* est une décomposition directe additive de $\mathbf{N}^X$ qui a les propriétés suivantes :
- l'ensemble de départ X (l'analogue de **P**) est fini, c'est la base du squelette;
- les fonctions $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$,…sont toutes à valeur *minimum finie*; cette valeur est *vide* quand il n'y a pas de suture, par contre, s'il se présente une suture à l'ordre r sur $\mathbf{N}\alpha$, on la suppose réduite à *un seul point de suture*, c'est-à-dire que la suite $\boldsymbol{\mu}^{(r)}(\alpha)$ se réduit à *un seul multiplicateur de valeur minimum* 2, i.e. $\boldsymbol{\mu}^{(r)}(\mathbf{N}\alpha) = (2)$ (division par 2) ;
- enfin, toutes les fonctions $\boldsymbol{\nu}^{(r)} : \mathbf{B}^{(r)} \rightarrow \mathbf{N}^*$ qui se présentent sont constantes et égales à 1.
Un squelette simple sans suture est dit *sain*; sinon il est dit *suturé.*

***Proposition* 7-1**.
Un squelette sain est entièrement déterminé par sa restriction à l'hypercube canonique de côté 1, bâti sur X. Chacun de ses axes principaux $\mathbf{N}\alpha$ (***définition* 6-5**) est entièrement dans A ou entièrement dans B, selon que $\alpha \in$ A ou $\alpha \in$ B.
Un squelette suturé est entièrement déterminé par sa restriction à l'hypercube canonique de côté 2^k, bâti sur X, où k est le nombre des niveaux r où se présentent effectivement des sutures (plus précisément par sa restriction à un certain parallélotope contenu dans cet hypercube). Si α est suture de genre a (resp. b) l'axe $2\alpha\mathbf{N}$ est entièrement dans B (resp A).

***Définition* 7-2 (*Graphes squelettiques simples*).**
A tout squelette simple de base X on fait correspondre *un graphe squelettique simple.*
Ce graphe a les propriétés suivantes :
- c'est un graphe *gradué*, les objets d'ordre 0 sont les éléments de X; soit S_{r-1} l'ensemble des objets d'ordre < r ; l'ensemble Γ des générateurs d'irréductibilité éléments de $S_{r-1}{}^{(1)}$ est réunion disjointe de l'ensemble Σ des sutures et de l'ensemble Λ des autres générateurs ; l'ensemble S_r n'est autre que l'ensemble $S_{r-1} \cup \Lambda \cup 2.\Sigma$; l'ensemble $\Lambda \cup 2.\Sigma$ est l'ensemble des objets d'ordre r; les objets sont de couleur noire ou blanche;
- à tout élément irréductible α de base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \subset S_{r-1}$ correspond un cône (arêtes):
  + de sommet α et base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ de *couleurs opposées*, si α n'est pas une suture ;
  + de sommet 2α et base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ de *même couleur*, si α est une suture.

Exemples:



***Proposition* 7-2.**
Un squelette simple est entièrement déterminé par son graphe squelettique.
Il est irréductible si et seulement si son graphe est connexe.
Il est toujours le produit direct de ses composantes irréductibles, elles-mêmes associées aux composantes connexes de son graphe squelettique.
Les objets d'ordre r d'un squelette sain sont les éléments de $X^{(r)} \setminus X^{(r-1)}$.

Exemple de squelette sain irréductible, en dimension 20.
Seules les données *nouvelles*, à chaque ordre r, sont mises en retrait :
$X = X^{(0)} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{20}\}$ base canonique de $\mathbf{N}^{20}$
$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \in \mathbf{S}_\beta$ $\quad e_6, e_7, e_8 \in \mathbf{S}_\alpha$
$c_1 = \{e_9, e_{10}, e_{11}\}$ $\quad c_2 = \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\} \in B'_\beta$
$c_3 = \{e_{16}, e_{17}\}$ $\quad c_4 = \{e_{18}, e_{19}, e_{20}\} \in B'_\alpha$

$X^{(1)} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, c_1, c_2, c_3, c_4\}$
$e_1, e_2, e_3, c_4 \in \mathbf{S}^{(1)}_\beta$ $\quad e_7, e_8, c_1 \in \mathbf{S}^{(1)}_\alpha$
$d_1 = \{e_4, e_5, c_3\} \in B'^{(1)}_\beta$ $\quad d_2 = \{e_6, c_2\} \in B'^{(1)}_\alpha$

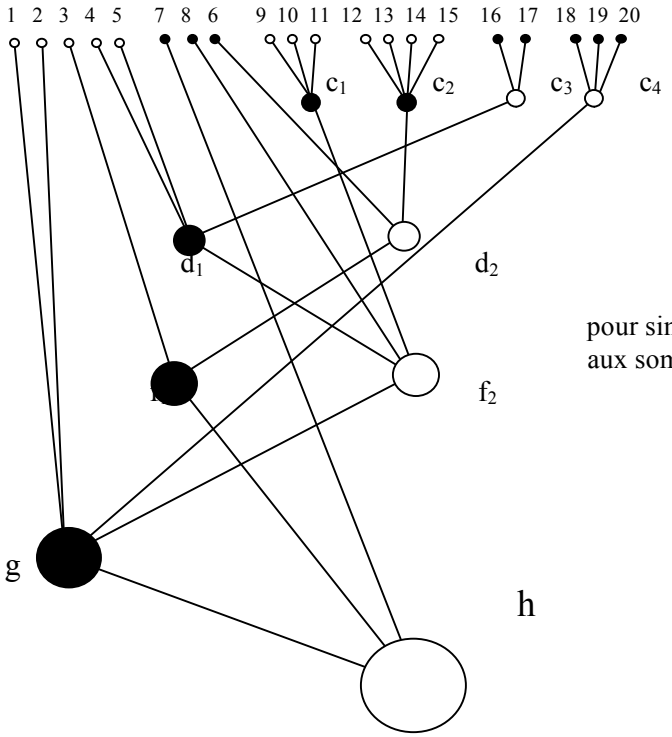
$X^{(2)} = \{e_1, e_2, e_3, c_4, e_7, e_8, c_1, d_1, d_2\}$
$e_1, e_2, c_4 \in \mathbf{S}^{(2)}_\beta$ $\quad e_7 \in \mathbf{S}^{(2)}_\alpha$
$f_1 = \{e_3, d_2\} \in B'^{(2)}_\beta$ $\quad f_2 = \{e_8, c_1, d_1\} \in B'^{(2)}_\alpha$

$X^{(3)} = \{e_1, e_2, c_4, e_7, f_1, f_2\}$
$e_7, f_1 \in \mathbf{S}^{(3)}_\alpha$
$g = \{e_1, e_2, c_4, f_2\} \in B'^{(3)}_\beta$

$X^{(4)} = \{e_7, f_1, g\}$
$h = \{e_7, f_1, g\} \in B'^{(4)}_\beta$

$X^{(5)} = \{ h \}$

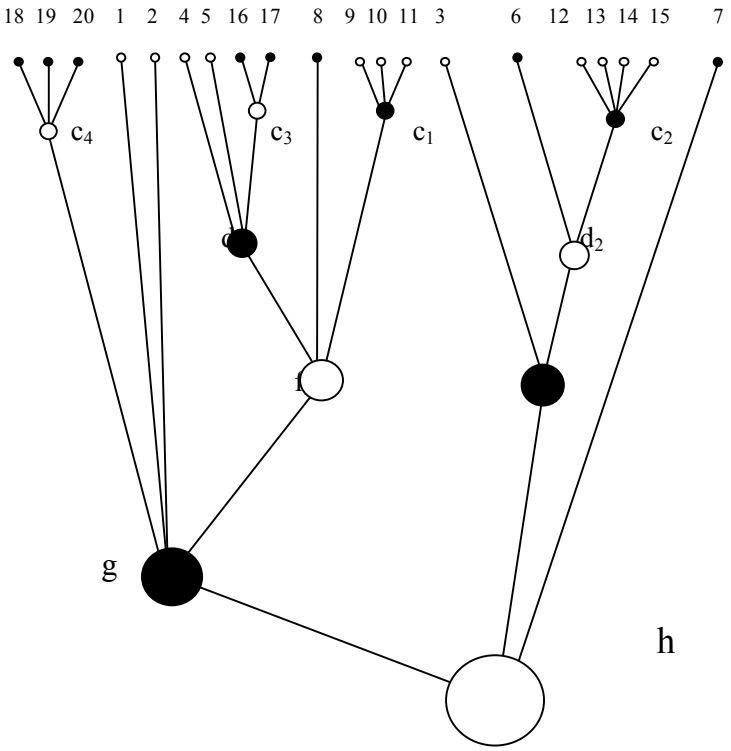
.



pour simplifier, on a donné aux sommets le nom de leur base

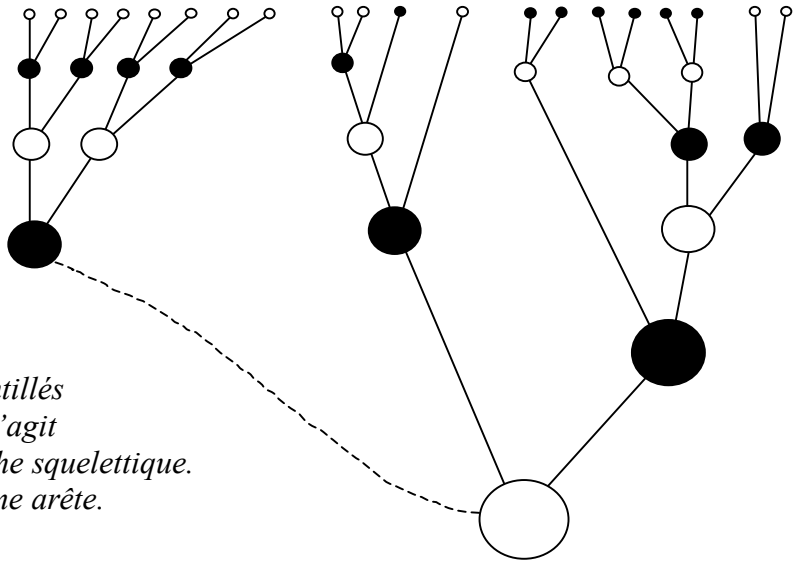
Chacune des données correspond à un sommet de l'hypercube de dimension 20 ; il y en a 18 ; tous les autres sommets de cet hypercube sont entièrement déterminés : il y en a exactement 2^{20}-18 = 1048558 : c'est le sens de la ***proposition* 7-2**, qui découle elle-même des ***propositions* 4-1** et **5-11.**

On peut toujours éviter les croisements d'arêtes dans une représentation planaire, et ce de plusieurs manières : il suffit de commencer par les éléments irréductibles d'ordre maximum. En voici un exemple :



Autre exemple de squelette sain, en dimension 20.

Ici, le graphe squelettique a deux composantes connexes, ce qui correspond à une décomposition de cette structure squelettique de décomposition en produit de deux décompositions irréductibles des hypercubes de dimensions respectives 8 et 12. Ces trois squelettes sont sains.



Le lien en pointillés indique qu'il s'agit du même graphe squelettique. Ce n'est pas une arête.

***Définition* 7-3 (*Squelettes généraux*)**.
Lorsque se présente, dans une décomposition directe additive d'un $\mathbf{N}^X$, une *base de sous-objet irréductible simple* (α_1, α_2,…, α_q) avec *générateur d'irréductibilité* α, les squelettes simples rendent compte ***génériquement*** de ce qui se passe en α seulement si $\mathbf{t}(\alpha)$ = a ou b.
Les squelettes généraux prennent en compte le cas où $\mathbf{t}(\alpha)$ = n, en fournissant comme « standard » l'écriture en base 2, i.e. $\boldsymbol{\mu}(\alpha)$ =(2, 2,…, 2,…). Certes, ces *squelettes généraux* sont *infinis*, mais les branches infinies sont des *terminaux*: en effet, si $\mathbf{t}(\alpha)$ = n, aucun élément de $\mathbf{N}\alpha$ ne peut participer à une quelconque base de sous-objet irréductible d'ordre supérieur. Nous disons que c'est un *terminal*.

Insistons sur ceci , en liaison avec la remarque suivant la ***définition* 7-2** : supposons α irréductible de base E = (α_1, α_2,…, α_q) $\subset$ B (resp. $\subset$ A) et $\mathbf{t}(\alpha)$ = n, le tout dans un squelette général ; alors $\alpha \in$ A (resp. $\alpha \in$ B), ***nécessairement***.

***Définition* 7-4 (*Graphes squelettiques généraux*).**
A tout squelette de base X on fait correspondre un graphe *fini* qui le représente et le détermine complètement . Ce graphe est construit comme dans le cas d'un squelette simple, sauf que peut se présenter aussi le cas où un élément irréductible α de base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \subset S_{r-1}$ est tel que $\mathbf{t}(\alpha)$ = n ; dans ce cas la couleur de α est opposée à celle de sa base mais l'objet en question est affecté de l'indice ∞ rappelant ainsi qu'il ne participe plus à une quelconque base d'objet irréductible d'ordre supérieur. Si aucun objet n'est affecté de l'indice ∞, c'est que le squelette en question est simple.

Proposition* 7-3 *(complète la proposition* 7-2*).
Un squelette général est entièrement déterminé par son graphe squelettique général.
Il est irréductible si et seulement si son graphe est connexe.
Il est toujours le produit direct de ses composantes irréductibles, elles-mêmes associées aux composantes connexes de son graphe squelettique.
Si un objet α d'ordre r est affecté de l'indice ∞, sa composante connexe (ensemble des *prédécesseurs* de α) détermine un squelette général irréductible ayant $\mathbf{N}\alpha$ comme seul axe terminal et il en est un facteur direct (son supplément étant de type L, cf. exemples en (0)).

Les notions de squelettes et de graphes squelettiques s'étendent évidemment au cas où X est infini (par exemple : X = **P**, $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$,…) et ces structures sont elles-mêmes descriptibles en termes de foncteurs à valeurs squelettiques finies.

***Proposition* 7-4**.
A toute décomposition directe additive (A,B) de $\mathbf{N}^X$, X fini ou non, est associé un graphe squelettique général et donc un squelette général *naturel* (A^s, B^s) (cf. ***propositions* 7-2** et **7-3**).

La construction du graphe squelettique associé est assez simple : on dispose de 4 sortes d'objets dans X :

$\bullet$ $\quad\circ\quad$ $\bullet_\infty$ $\quad\circ_\infty$

selon que l'objet α en question est dans A ou B et $\mathbf{t}(\alpha) \neq$ n ou $\mathbf{t}(\alpha)$ = n . On construit alors l'ensemble $X^{s(1)}$ des objets d'ordre 1 du graphe squelettique à partir de $X^{(1)}$ en « sautant les sutures » (on a déjà expliqué ce procédé dans le cas des graphes squelettes simples - définition **7-2**) : les objets du genre $\bullet_\infty$ ou $\circ_\infty$ sont inertes, tout comme les objets de genre $\bullet$ ou $\circ$

qui ne participent à aucune base d'objets irréductibles (d'ordre 0) ; par contre toute base d'un générateur irréductible α s'efface au profit

- soit du générateur α lui-même s'il n'y a pas de suture, et il est de couleur opposée à la base et affecté éventuellement de l'indice ∞ (si $\mathbf{t}(\alpha) = n$),
- soit du plus petit multiple possible $n.\alpha$ qui soit de même couleur que la base, « après »0 les points de suture.

L'ensemble $X^{s(1)}$ jouant alors le rôle de X, on pose $X^{s(2)} = (X^{s(1)})^{s(1)}$. En poursuivant, on obtient tous les dérivés *sains* $X^{s(r)}$ de X et en définitive le graphe squelettique général associé à la décomposition (A,B) donnée. Il suffit alors de reprendre les étapes de la description constructive d'une décomposition multiplicative de $\mathbf{N}^*$, comme décrite à la section (6) (en termes additifs via le foncteur *Log*) pour construire le squelette (A^s, B^s).

Soit $L(\mathbf{a},z)$ une série de Dirichlet, où $\mathbf{a}$ est une fonction à valeurs complexes strictement multiplicative ; soit (A,B) une décomposition multiplicative de $\mathbf{N}^*$; alors $L(\mathbf{a},z)$ se décompose en produit de deux séries de Dirichlet $L(\mathbf{a}_A,z)$ et $L(\mathbf{a}_B,z)$ où l'on a posé :

$$\mathbf{a}_A(n) = \mathbf{a}(n) \text{ si } n \in A,\ \mathbf{a}_A(n) = 0 \text{ autrement}$$
$$\mathbf{a}_B(n) = \mathbf{a}(n) \text{ si } n \in B,\ \mathbf{a}_B(n) = 0 \text{ autrement.}$$

Bien évidemment, les fonctions $\mathbf{a}_A$ et $\mathbf{a}_B$ ne sont plus en général strictement multiplicatives, ni même multiplicatives.

Par exemple, à toute décomposition multiplicative (A,B) de $\mathbf{N}^*$ correspond une décomposition naturelle de la fonction $\zeta = L(\mathbf{1},z)$ en $\zeta_A.\zeta_B$ où on a posé $\zeta_A = L(\mathbf{1}_A,z)$ et $\zeta_B = L(\mathbf{1}_B,z)$; les décompositions « connues » de ζ correspondent à des décompositions (A,B) de $\mathbf{N}^*$ vraiment triviales par exemple, les produits quelconques de facteurs eulériens…;

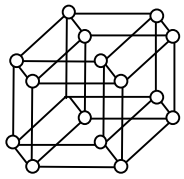
Citons aussi les décompositions suivantes: à toute fonction $\varphi : \mathbf{P} \to \mathbf{N}$ telle que $\varphi(p) > 1$, on peut associer la décomposition multiplicative suivante: $A_\varphi = \{ n \in \mathbf{N}^* \mid \forall\ p \in \mathbf{P},\ \upsilon_p(n) < \varphi(p)\}$ et $B_\varphi = \{ n \in \mathbf{N}^* \mid \forall\ p \in \mathbf{P},\ \upsilon_p(n) \in \varphi(p).\mathbf{N} \}$. Sur chaque axe $\mathbf{N}.p$, cette décomposition induit la division euclidienne par $\varphi(p)$, et (A_φ, B_φ) en est la somme directe infinie. Les séries ζ_{B_φ} sont évidemment convergentes pour $Re(z) > ½$; si φ est constante k, on peut préciser que la somme n'est pas nulle dans la région $1/k \le Re(z)$, de sorte que la fonction ζ_{A_φ} admet un prolongement analytique dans cette région, qui a les mêmes zéros que ζ .

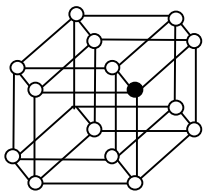
On dispose aussi des décompositions liées aux partitions de $\mathbf{P}$ en 2 ; on peut faire des mixtures entre ces dernières et les précédentes. Dans tous ces cas, les décompositions multiplicatives directes de $\mathbf{N}^*$ associées sont triviales.

Comme promis dans l'introduction, je n'en dirai pas plus, ici, à ce très vaste sujet.

Voici pour finir les graphes associés aux squelettes sains de dimension 4.
Ils ont 1, 2, 3 ou 4 composantes. Le nombre de composantes indique le « degré » de décomposition (en produit : en 1, 2, 3 ou 4 facteurs).
La théorie des groupes intervient ici, pour tenir compte des « répliques » (on en a fait figurer seulement 2 ici, pour « visualiser » l'effet de l'échange entre A et B.
Enfin, on pourra constater de visu l'intérêt qu'il y a à se référer aux graphes squelettiques, plutôt qu'aux squelettes ou à leur traces sur les hypercubes voulus.

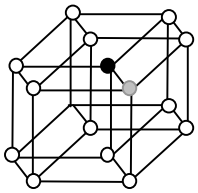
Trivial

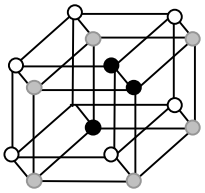




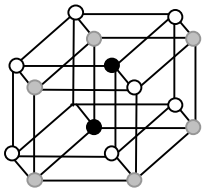
Irréductible (ordre 1*)*

Semi-trivial

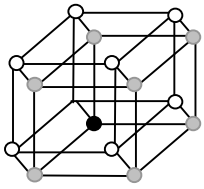


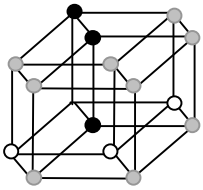


Irréductible (ordre 2*)*

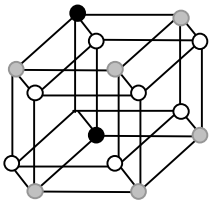


Triviaux

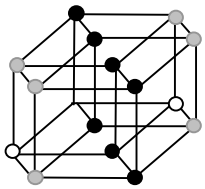




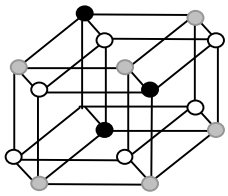
Semi-trivial



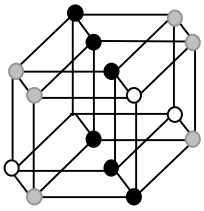
Réplique



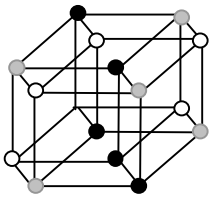
Irréductible (ordre 2*)*



Réplique



Semi-trivial



A SUIVRE…