DIAGRAMMES

FLORENCE CURY

Graphes multiplicatis enrichis. Partie II

Diagrammes, tome 53-54 (2005), exp. n° 1, p. 47-95

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2005__53-54__A1_0>

© Université Paris 7, UER math., 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUMES 53 + 54 , 2005

GRAPHES MULTIPLICATIS ENRICHIS

PARTIE II

Florence Cury

A.M.S. Sub. Class : 18 D 05 , 18 D 20

CHAPITRE II: LIMITES DANS LA CATEGORIE DES GRAPHES MULTIPLICATIFS ENRICHIS.

P. 47 ..... II.1. Limites projectives dans la catégorie des applications orientées enrichies: énoncé des conditions d'existence.

P. 48 ..... II.2. Limites projectives dans la catégorie des applications orientées enrichies: construction.

P. 50 ..... II.3. Limites projectives dans la catégorie des néofoncteurs enrichis: énoncé des conditions d'existence.

P. 51 ..... II.4. Limites projectives dans la catégorie des néofoncteurs enrichis: construction.

P. 59 ..... II.5. Limites projectives dans la catégorie des néofoncteurs enrichis: exemples.

P. 60 ..... II.6. Rappel: Théorème général d'existence de limites inductives dans une catégorie quelconque: conditions d'emboîtement, aux limites, aux monos, d'absorption, de génération.

P. 62 ..... II.7. Cas des néofoncteurs enrichis: vérification de la condition d'emboîtement.

P. 63 ..... II.8. Cas des néofoncteurs enrichis: vérification de la condition aux limites projectives.

P. 65 ..... II.9. Cas des néofoncteurs enrichis: vérification de la condition aux limites inductives.

P. 66 ..... II.10. Cas des néofoncteurs enrichis: vérification de la condition aux monomorphismes.

P. 70 ..... II.11. Cas des néofoncteurs enrichis: vérification de la condition d'absorption.

P. 74 ..... II.12. Lemmes préliminaires à la vérification de la condition de génération.

P. 78 ..... II.13. Cas des néofoncteurs enrichis: vérification de la condition de génération.

P. 92 ..... II.14. Théorème d'existence de limites inductives dans la catégorie des néofoncteurs enrichis.

P. 93 ..... II.15. Exemple de somme fibrée.

II.1. En guise de préliminaire, énonçons tout d'abord sous quelles conditions précises la catégorie des applications orientées enrichies est à limites projectives.

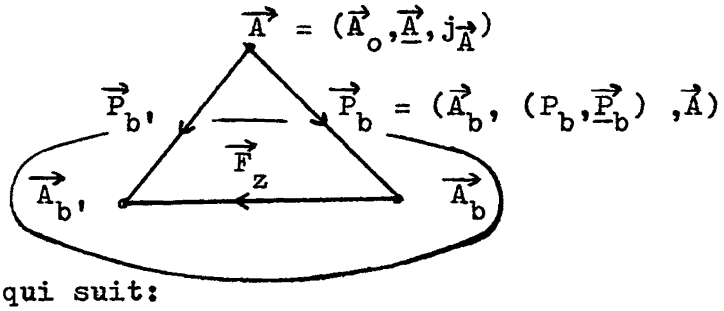
Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, $B^\cdot$ une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$ et $V^\wedge$ une catégorie monoïdale dont la catégorie sous-jacente $V^\cdot$ est à $\{B^\cdot\}$-limites projectives, alors la catégorie $V^\wedge$-apor l'est aussi.

II.2. Reprenant les hypothèses de la proposition de II.1, nous allons explicitement construire la limite projective d'un foncteur $S^{\bullet}: B^{\bullet} \longrightarrow V\text{^-apor}$.

Pour ce faire, nous supposons tout d'abord qu'un choix de $\{B^{\bullet}\}$-limites projectives est effectué dans $V^{\bullet}$ et nous dirons que ce choix définit des $\{B^{\bullet}\}$-limites projectives canoniques. D'autre part, nous notons, pour plus de simplicité:

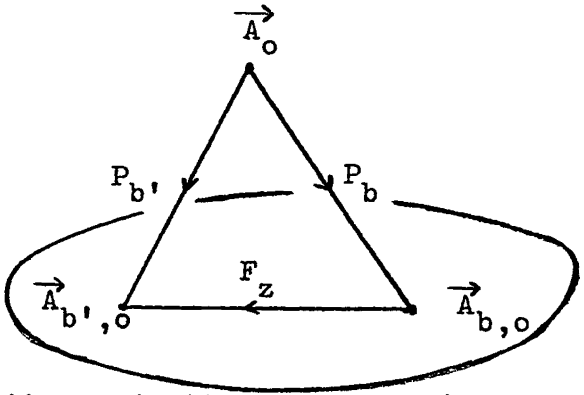
- $S^{\bullet}(b) = \vec{A}_b$, pour tout objet b de $B^{\bullet}$ ($\vec{A}_b = (\vec{A}_{b,o}, \underline{\vec{A}}_b , j_{\vec{A}_b})$ est donc un V^-graphe orienté),
- $S^{\bullet}(z) = \vec{F}_z = (\vec{A}_{b'}, (F_z, \underline{\vec{F}}_z) , \vec{A}_b)$, pour tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$ appartenant à B (et donc $\vec{F}_z: \vec{A}_b \longrightarrow \vec{A}_{b'}$ est une V^-application orientée),
- $Ob_{V\text{^}}: V\text{^-apor.} \longrightarrow \mathcal{U}$ le foncteur ("objets") qui à toute V^-application orientée $\vec{G}: \vec{C} \longrightarrow \vec{D}$ associe l'application (entre les ensembles d'objets) $G: \vec{C}_o \longrightarrow \vec{D}_o$.

Nous définissons, alors, le cône projectif de base $S^{\bullet}$ dans V^-apor



de la manière qui suit:

- le diagramme ci-dessous



définit la limite projective naturalisée canonique dans $\mathcal{U}$ du foncteur composé $B^{\bullet} \xrightarrow[S^{\bullet}]{} V\text{^-apor} \xrightarrow[Ob_{V\text{^}}]{} \mathcal{U}$ (autrement dit,

$\vec{A}_o$ est la partie du produit canonique $\prod_{b \in B_o^\bullet} \vec{A}_{b,o}$ dans $\mathcal{U}$ définie par:

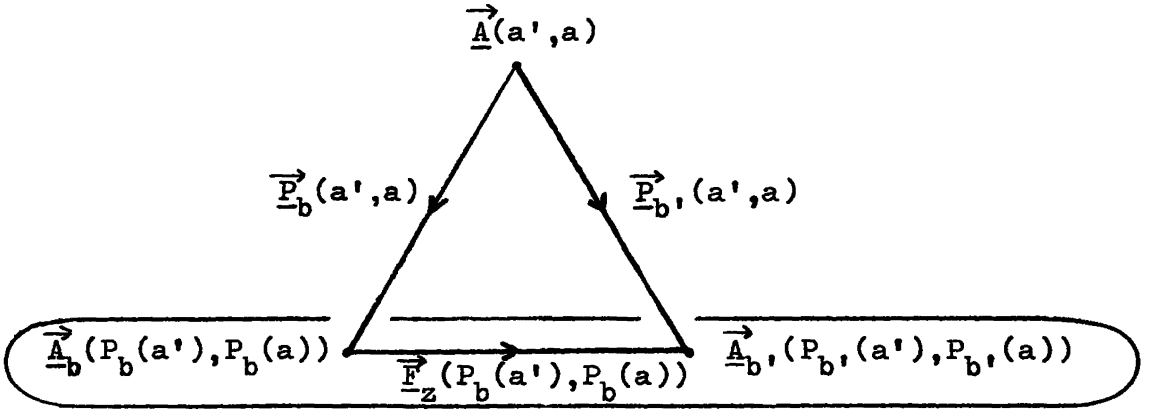
$$\vec{A}_o = \left\{ (a_b)_{b \in B_o^\bullet} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } b \in B_o^\bullet, \text{ on a } a_b \in \vec{A}_{b,o} \text{ et pour tout morphisme} \\ z: b \longrightarrow b' \text{ de } B^\bullet, \text{ on a } F_z(a_b) = a_{b'} \end{array} \right\}$$

et $P_b: \vec{A}_o \longrightarrow \vec{A}_{b,o}$ est l'application b-ième projection; le plus souvent, nous représenterons une famille, élément de $\vec{A}_o$, par son symbole générique: $a = (a_b)_{b \in B_o^\bullet}$),

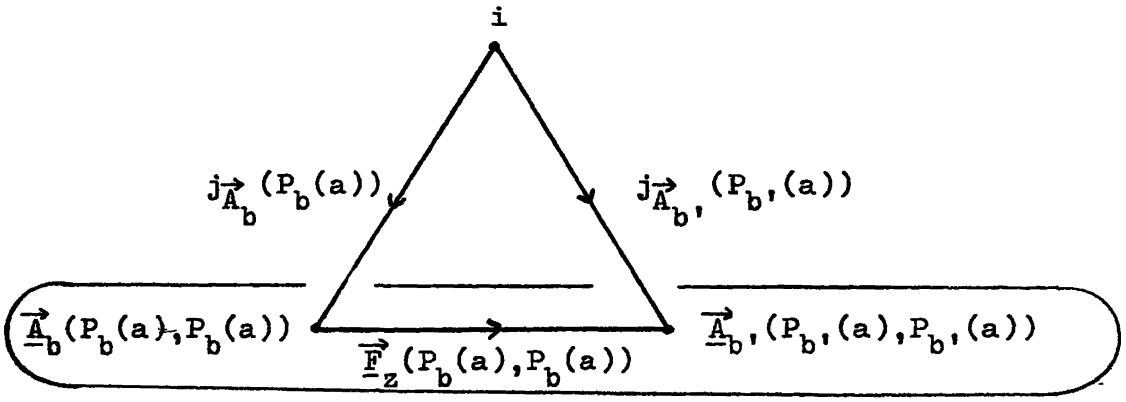
- pour tout couple (a',a) d'éléments de $\vec{A}_o$, le foncteur $S^\bullet_{a',a}: B^\bullet \longrightarrow V^\bullet$ qui, à tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$, associe le morphisme de $V^\bullet$

$$\vec{F}_z(P_b(a'),P_b(a)): \vec{A}_b(P_b(a'),P_b(a)) \longrightarrow \vec{A}_{b'}(P_{b'}(a'),P_{b'}(a))$$

admet alors pour limite projective canonique, dans $V^\bullet$, le cône projectif ci-dessous:

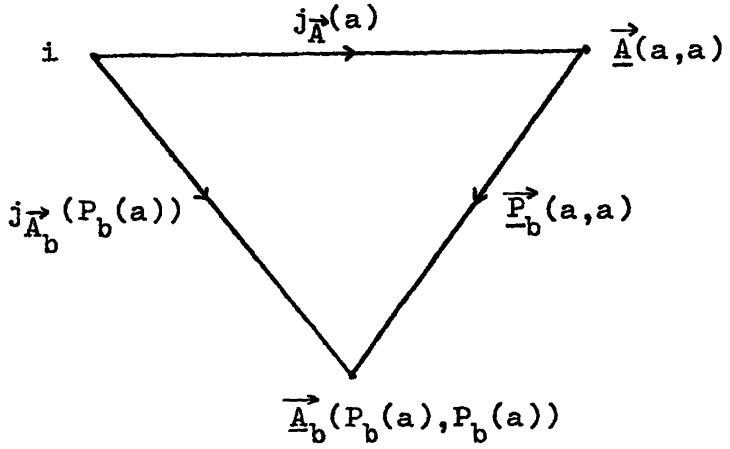


- pour tout objet a de $\vec{A}_o$, le diagramme



est commutatif (i.e. définit un cône projectif de base le foncteur $S^\bullet_{a,a}: B^\bullet \longrightarrow V^\bullet$), puisque, pour tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$ de $B^\bullet$

la V^-application orientée $\vec{F}_z : \vec{A}_b \longrightarrow \vec{A}_b$, est compatible avec les morphismes d'unitarité; en conséquence, nous désignons par $j_{\vec{A}}(a)$ l'unique morphisme de V• rendant le diagramme ci-dessous commutatif, pour tout objet b de B• :



Nous laissons au lecteur le soin de vérifier (et il le fera facilement) que le cône projectif de V^-apor ainsi défini est bien une limite projective naturalisée de $S^\bullet : B^\bullet \longrightarrow$ V^-apor.
De plus, en vertu de la construction du graphe orienté sous-jacent à un V^-graphe orienté donnée en I.12 et de la compatibilité du foncteur $\mathrm{Hom}_V\bullet(-,i)$ avec les limites projectives, on obtient:

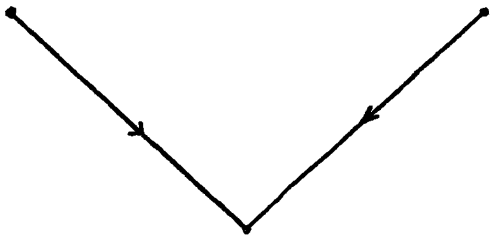
Corollaire. Moyennant les hypothèses de la proposition de II.1, si V• est une catégorie au-dessus de $\mathcal{U}$, le foncteur d'oubli

$$V\text{^-apor} \longrightarrow \Gamma$$

est compatible avec les $\{B^\bullet\}$-limites projectives (c'est donc un foncteur à $\{B^\bullet\}$-limites projectives).

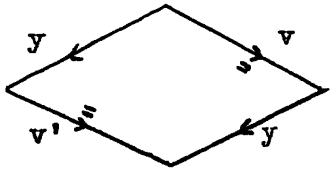
II.3. Comme en II.1 , nous allons préciser ici sous quelles conditions la catégorie des néofoncteurs enrichis admet des limites projectives.

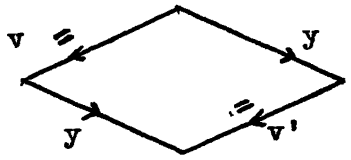
Pour ce faire, nous désignons par $\Lambda^\bullet$ la catégorie, triviale, représentée par le diagramme



Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, $B^\bullet$ une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$ et $V^\wedge$ une catégorie monoïdale dont la catégorie sous-jacente $V^\bullet$ est à $\{B^\bullet, \Lambda^\bullet\}$-limites projectives, alors la catégorie $V^\wedge$-néof est à $\{B^\bullet\}$-limites projectives. En particulier, $V^\wedge$-néof est à produits fibrés dès que $V^\bullet$ l'est.

II.4. Nous allons prouver la proposition précédente en construisant explicitement, lorsque $V^\bullet$ est à $\{B^\bullet, \Lambda^\bullet\}$-limites projectives, une limite projective naturalisée d'un foncteur $R^\bullet : B^\bullet \longrightarrow V^\wedge$-néof. Pour ce faire, nous effectuons un choix, dans $V^\bullet$, de $\{B^\bullet, \Lambda^\bullet\}$-limites projectives, que nous dirons canoniques, de sorte que, pour tout $y : v \longrightarrow v'$ de $V^\bullet$,





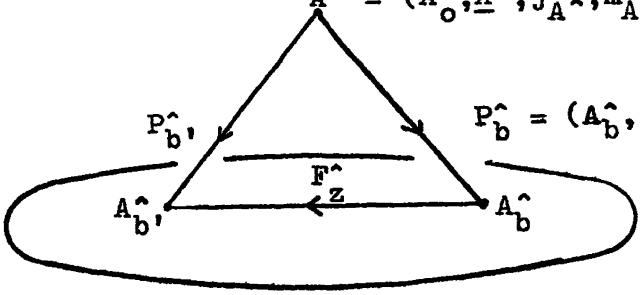
soient des produits fibrés canoniques, et nous posons, de plus:

- $R^\bullet(b) = A^\wedge_b$, pour tout objet b de $B^\bullet$,
- $R^\bullet(z) = F^\wedge_z$, pour tout morphisme $z : b \longrightarrow b'$ (et donc $F^\wedge_z : A^\wedge_b \longrightarrow A^\wedge_{b'}$ est un $V^\wedge$-néofoncteur).

Alors, nous définissons le cône projectif de base $R^\bullet$ dans $V^\wedge$-néof

$$A^\wedge = (A^\wedge_o, \underline{A}^\wedge, j_{A^\wedge}, m_{A^\wedge}, k_{A^\wedge}, \alpha_{A^\wedge}, \beta_{A^\wedge})$$

$$P^\wedge_b = (A^\wedge_b, (P_b, \underline{P}^\wedge_b, M_{P^\wedge_b}), A^\wedge)$$

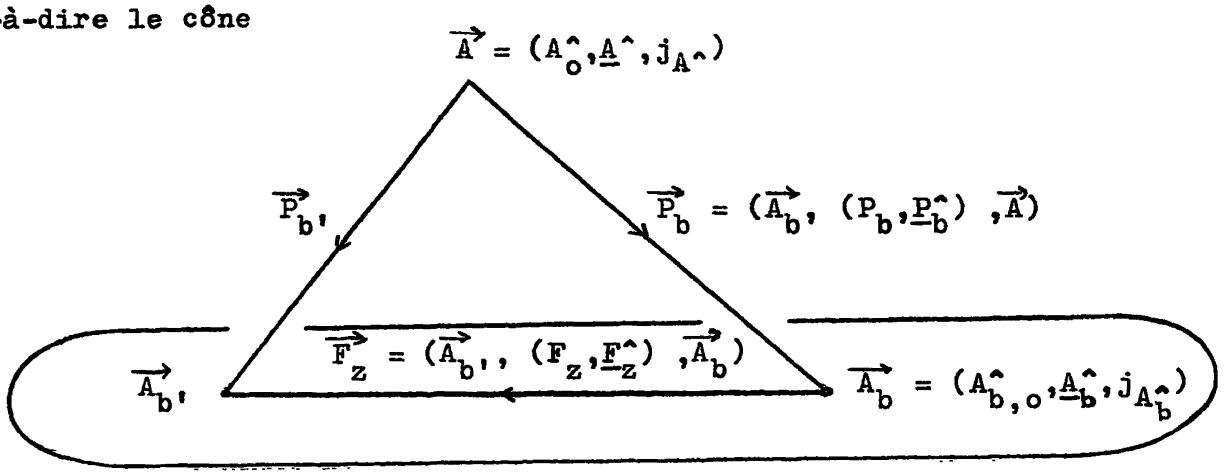


de la manière suivante:

- si $S^{\bullet}: B^{\bullet} \longrightarrow V^{\wedge}\text{-apor}$ est le foncteur composé des foncteurs

$$B^{\bullet} \xrightarrow{R^{\bullet}} V^{\wedge}\text{-néof} \xrightarrow{P_{V^{\wedge}\text{-an}}} V^{\wedge}\text{-apor} \quad ,$$

le cône projectif de base $S^{\bullet}$ dans $V^{\wedge}$-apor , sous-jacent au cône projectif de base $R^{\bullet}$ dans $V^{\wedge}$-néof représenté par le diagramme ci-dessus, c'est-à-dire le cône



,

est la limite projective naturalisée de $S^{\bullet}$ construite comme en II.2 (autrement dit, le foncteur $P_{V^{\wedge}\text{-an}}$ sera compatible avec les $\{B^{\bullet}\}$-limites projectives, l'ensemble $A^{\wedge}_{o}$ est défini par:

$$A^{\wedge}_{o} = \left\{ (a_b)_{b \in B^{\bullet}_{o}} = a \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } b \in B^{\bullet}_{o}, \text{ on a } a_b \in A^{\wedge}_{b,o} \text{ et pour tout} \\ \text{morphisme } z: b \longrightarrow b' \text{ de } B^{\bullet}, \text{ on a } F_z(a_b) = a_{b'} \end{array} \right\}$$

et l'application $P_b: A^{\wedge}_{o} \longrightarrow A^{\wedge}_{b,o}$ est l'application b-ième projection),

- pour tout triplet (a",a',a) d'objets de $A^{\wedge}$, si

$$R^{\divideontimes}_{a'',a',a}: B^{\bullet} \longrightarrow V^{\bullet}$$

(resp. $R^{\boxtimes}_{a'',a',a}: B^{\bullet} \longrightarrow V^{\bullet}$)

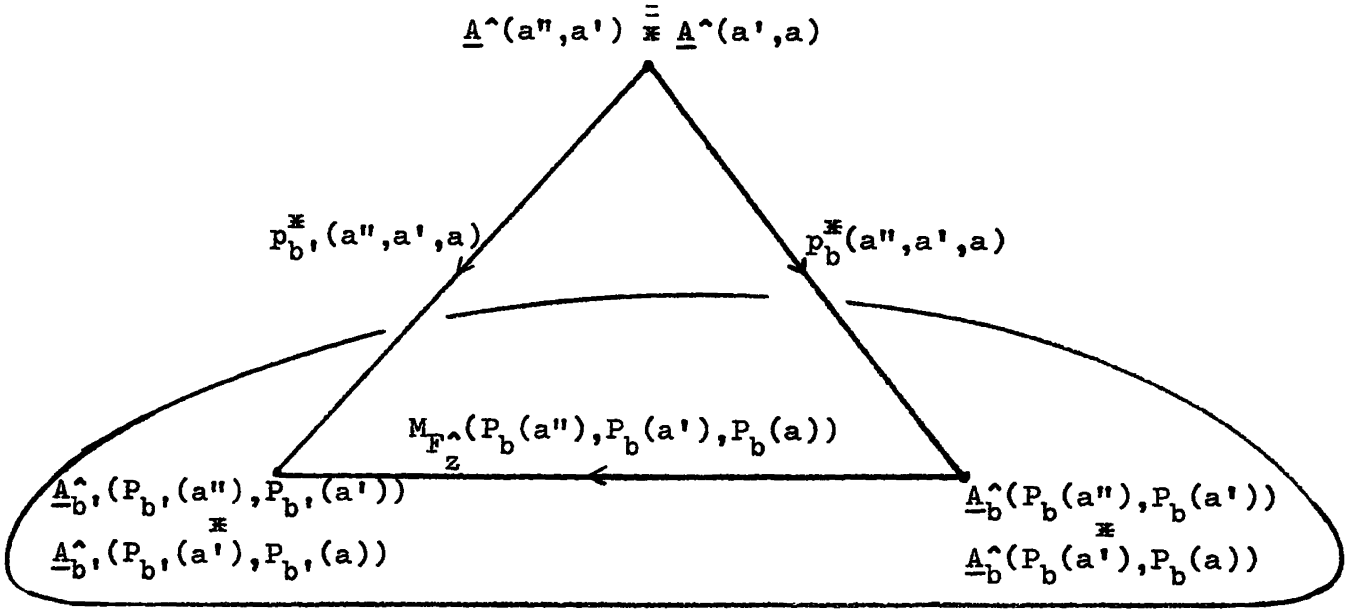
est le foncteur qui, à tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$, associe le morphisme

$$M_{F^{\wedge}_{z}}(P_b(a''),P_b(a'),P_b(a)): \begin{array}{l} \underline{A}^{\wedge}_{b}(P_b(a''),P_b(a')) \\ \underline{A}^{\wedge}_{b}(P_b(a'),P_b(a)) \end{array} \xrightarrow{\divideontimes} \begin{array}{l} \underline{A}^{\wedge}_{b'}(P_{b'}(a''),P_{b'}(a')) \\ \underline{A}^{\wedge}_{b'}(P_{b'}(a'),P_{b'}(a)) \end{array}$$

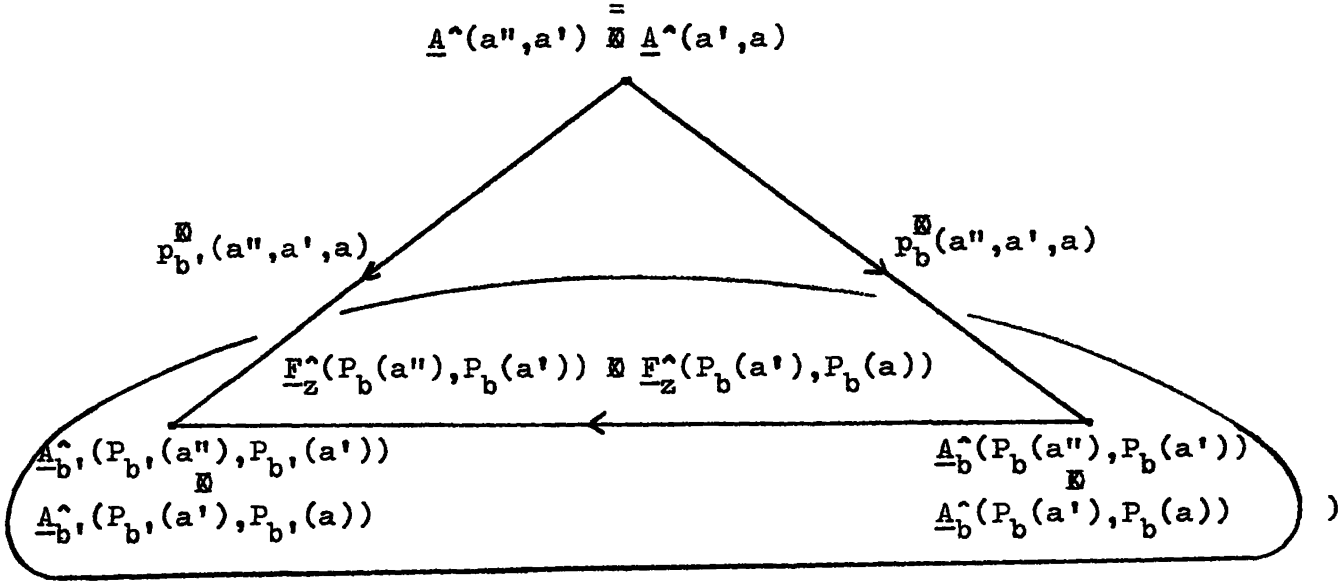
(resp.

$$\underline{F}^{\wedge}_{Z}(P_b(a''),P_b(a')) \;\underset{\mathbb{M}}{:}\; \underline{F}^{\wedge}_{Z}(P_b(a'),P_b(a)) \quad \underline{A}^{\wedge}_{b}(P_b(a''),P_b(a')) \;\underset{\mathbb{M}}{:}\; \underline{A}^{\wedge}_{b}(P_b(a'),P_b(a)) \longrightarrow \underline{A}^{\wedge}_{b'}(P_{b'}(a''),P_{b'}(a')) \;\underset{\mathbb{M}}{:}\; \underline{A}^{\wedge}_{b'}(P_{b'}(a'),P_{b'}(a)) \;),$$

alors, sa limite projective naturalisée canonique dans $V^{\bullet}$ est le cône projectif:



(resp.



(on remarquera que,si $R^{\bullet}$ est à valeurs dans $V^{\wedge}$-fonc , alors, pour tout

triplet (a",a',a) d'éléments de $A^\wedge_o$, les foncteurs $R^{\divideontimes}_{a",a',a}$ et $R^{\boxbar}_{a",a',a}$ sont égaux et ont donc même limite projective naturalisée canonique dans V^*, en vertu de l'identification, décrite en I.2 et en I.7, de la catégorie $V^\wedge$-fonc à une sous-catégorie pleine de $V^\wedge$-néof),

- pour tout triplet (a",a',a) d'éléments de $A^\wedge_o$ et pour tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$ de B^*, la compatibilité du $V^\wedge$-néofoncteur $F^\wedge_z$ avec les monomorphismes des composables prouve que la famille de monomorphismes de V^*

$$(m_{A^\wedge_b}(P_b(a"),P_b(a'),P_b(a)))_{b \in B^*_o}$$

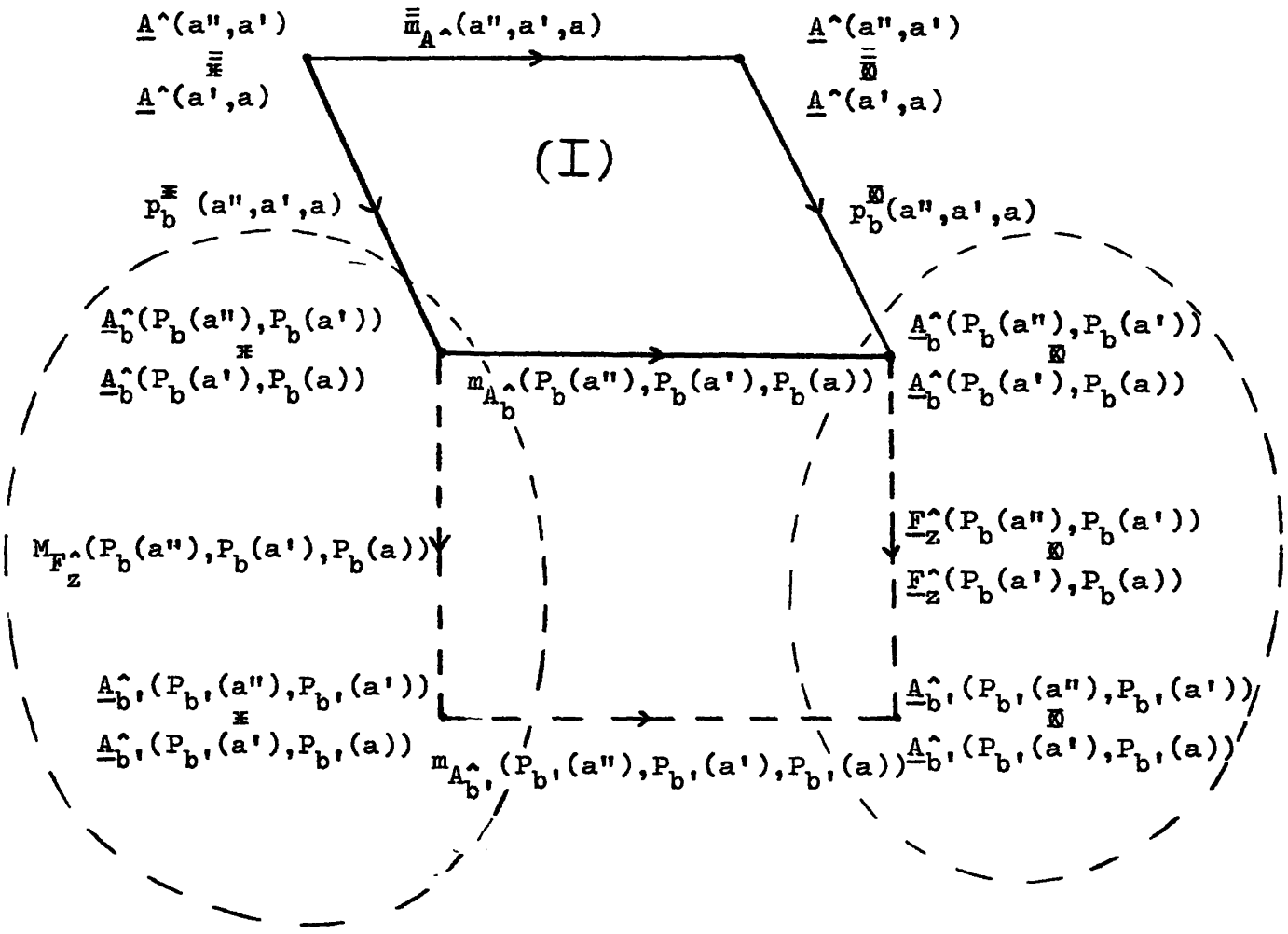
définit une transformation naturelle

$$m_{\underline{A}^\wedge}(P__(a"),P__(a'),P__(a)): R^{\divideontimes}_{a",a',a} \Longrightarrow R^{\boxbar}_{a",a',a}$$

dont la limite projective canonique dans V^* est un monomorphisme, noté

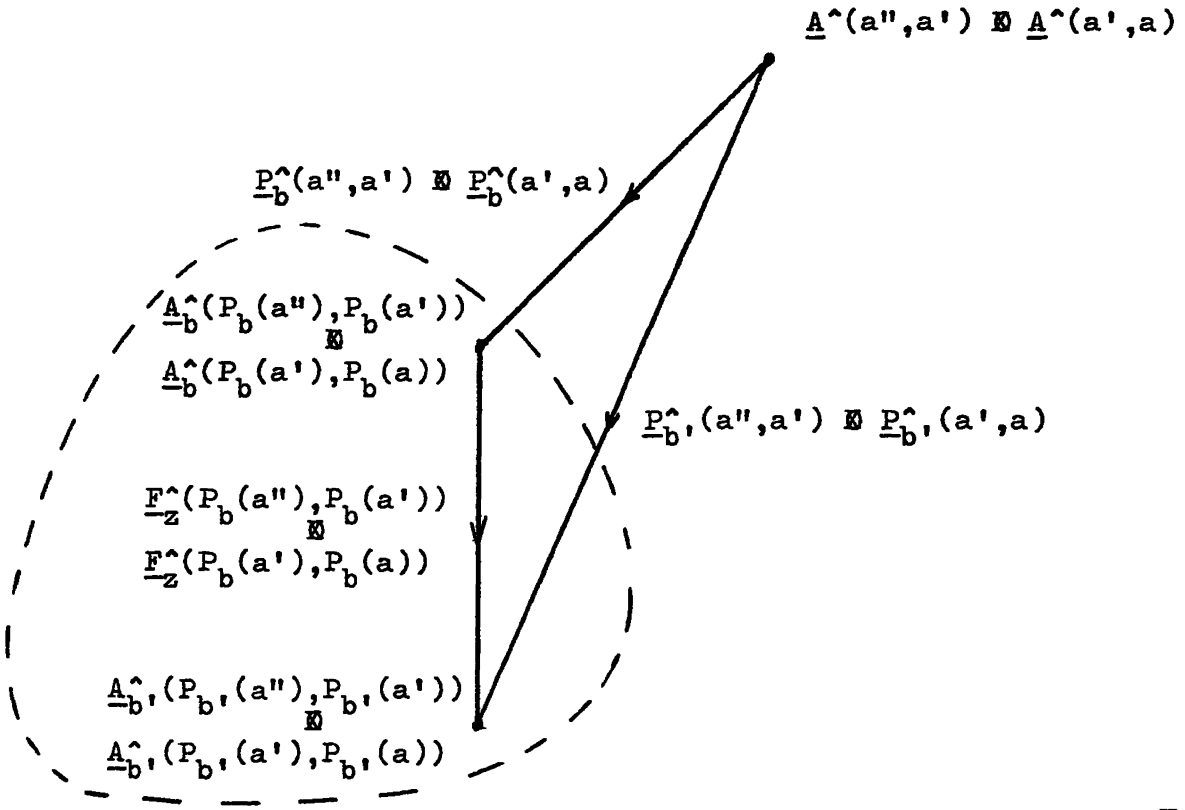
$$\bar{\bar{m}}_{A^\wedge}(a",a',a) ,$$

rendant, pour tout objet b de B^*, le diagramme (I) ci-dessous commutatif:

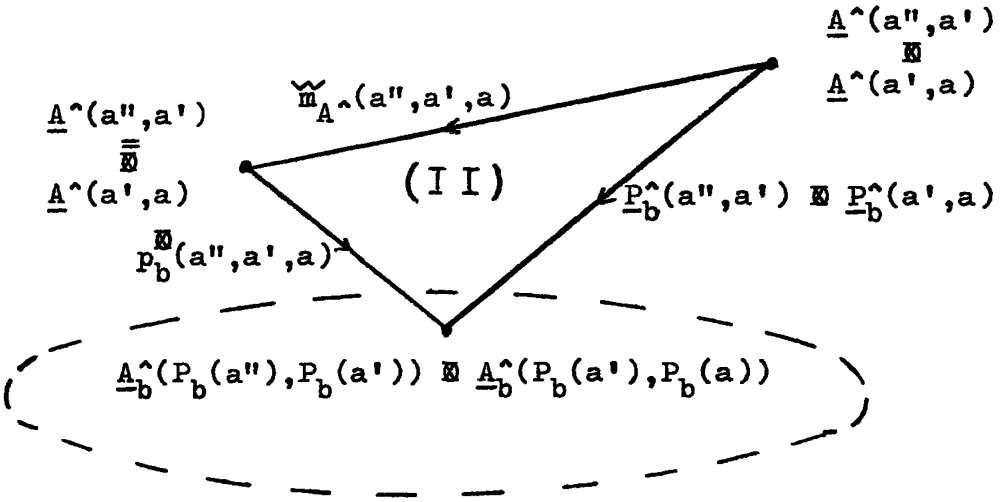


(on remarquera, également, que, si $R^{\bullet}$ est à valeurs dans $V^{\wedge}$-fonc , pour tout triplet (a",a',a) d'éléments de $A^{\wedge}_{o}$, le monomorphisme $\overline{\overline{m}}_{A^{\wedge}}(a",a',a)$ est l'identité),

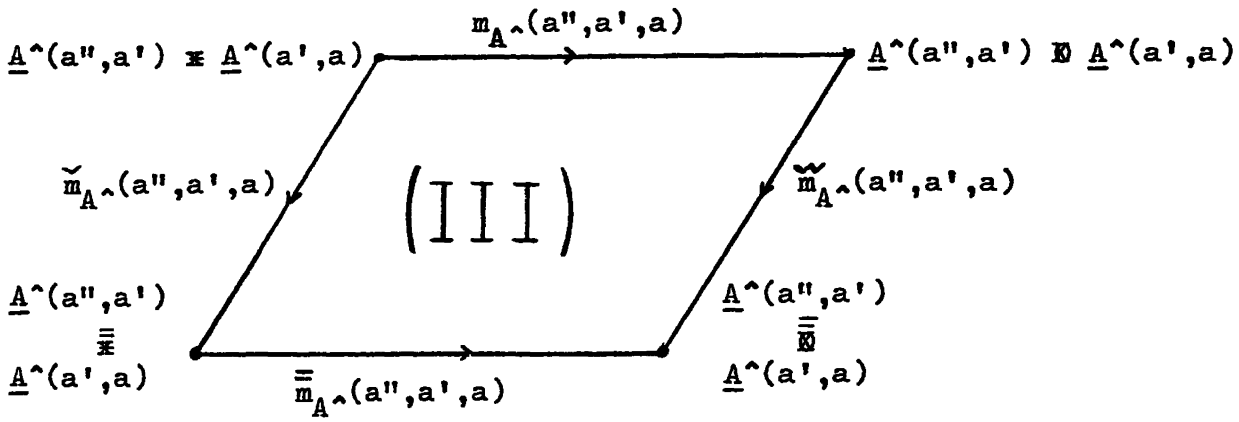
- pour tout triplet (a",a',a) d'objets de $A^{\wedge}$ et pour tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$ de $B^{\bullet}$, le diagramme ci-dessous commute, en vertu de la fonctorialité du produit tensoriel ⊠:



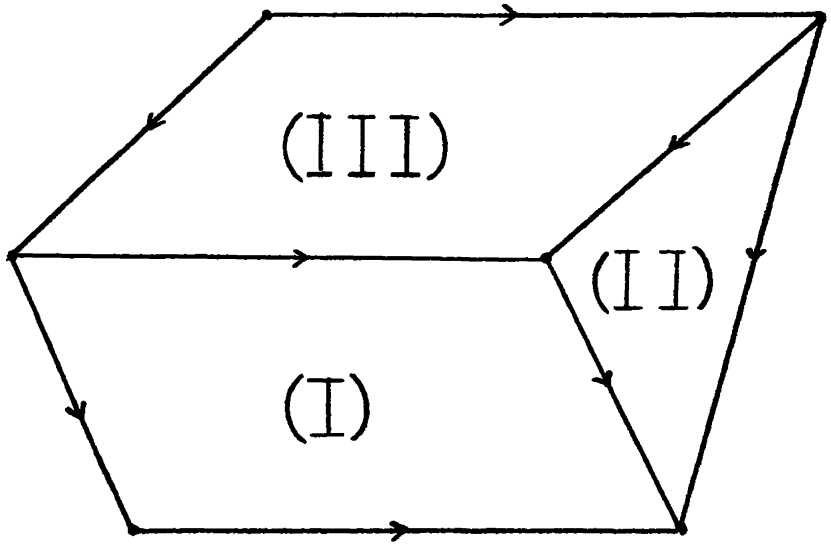
autrement dit, il définit un cône projectif de $V^{\bullet}$ et de base $R^{\boxtimes}_{a",a',a}$; ce qui montre qu'il existe un unique morphisme $\widetilde{\overline{m}}_{A^{\wedge}}(a",a',a)$ de $V^{\bullet}$ rendant, pour tout objet b de $B^{\bullet}$, le diagramme (II), qui suit, commutatif:



- pour tout triplet (a",a',a) d'éléments de $A_o^\wedge$, le diagramme (III) ci-dessous définit, alors, un produit fibré canonique de $V^\bullet$



(les diagrammes (I), (II) et (III) ont été dessinés de telle manière que le lecteur puisse les "rassembler" comme ci-dessous:



;

il remarquera, d'autre part, que, pour tout triplet (a",a',a) d'éléments de $A_o^\wedge$, le morphisme $m_{A^\wedge}(a",a',a)$ est un monomorphisme, puisque $\bar{\bar{m}}_{A^\wedge}(a",a',a)$ en est un, et qu'il se réduit à l'identité, d'après les choix de produits fibrés canoniques effectués dans $V^\bullet$, lorsque $R^\bullet$ est à valeurs dans la catégorie $V^\wedge$-fonc),

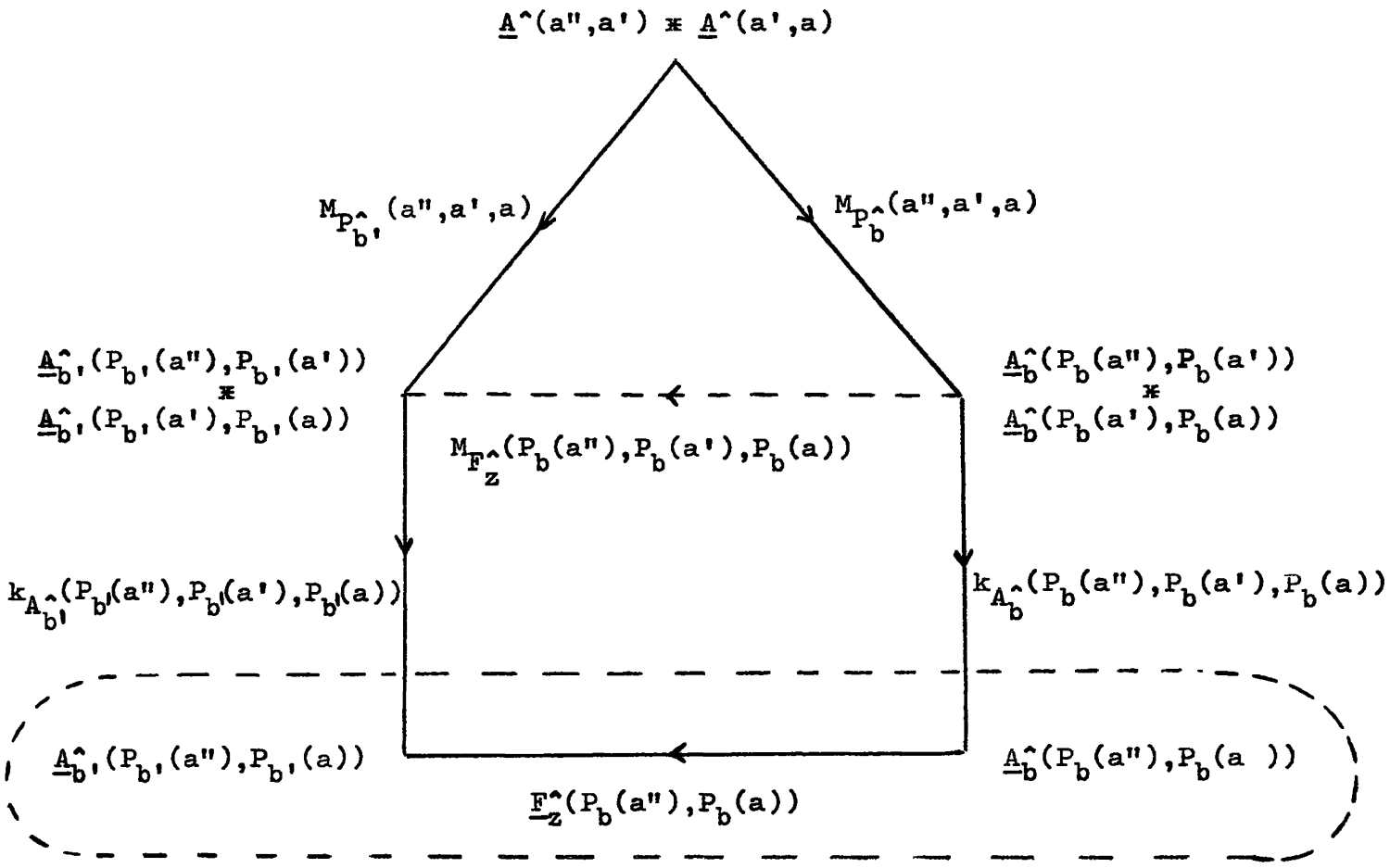
- pour tout triplet (a",a',a) d'éléments de $A^\wedge_o$ et tout objet b de $B^\cdot$, nous posons (avec les notations précédentes):

$$M_{P^\wedge_b}(a",a',a) = p^{\divideontimes}_b(a",a',a) \cdot \check{m}_{A^\wedge}(a",a',a) ,$$

il s'agit donc d'un morphisme de $V^\cdot$ qui se présente comme suit:

$$\underline{A}^\wedge(a",a') \divideontimes \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \begin{matrix} \underline{A}^\wedge_b(P_b(a"),P_b(a')) \\ \divideontimes \\ \underline{A}^\wedge_b(P_b(a'),P_b(a)) \end{matrix} ,$$

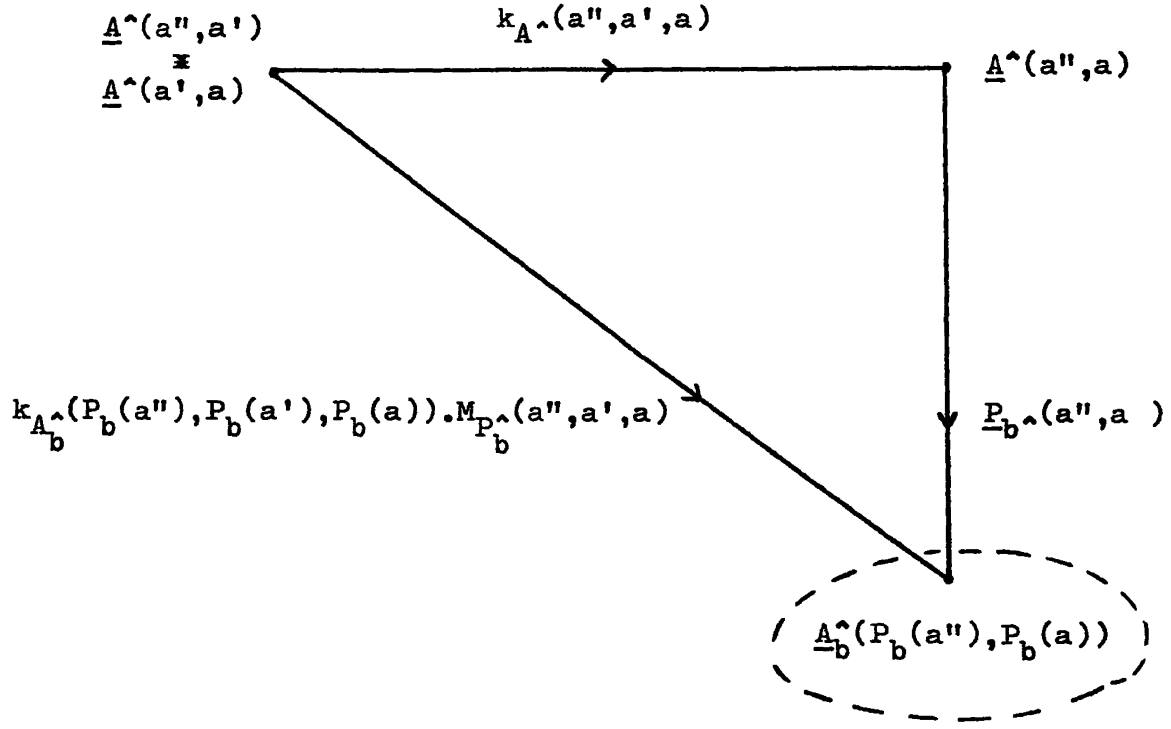
- pour tout triplet (a",a',a) d'éléments de $A^\wedge_o$ et tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$ de $B^\cdot$, la compatibilité du $V^\wedge$-néofoncteur $F^\wedge_z$ avec les morphismes de composition prouve que le diagramme



est commutatif (autrement dit, définit un cône projectif de base le foncteur:

$$S^{\bullet}_{a'',a} : \quad \begin{array}{ccc} B^{\bullet} & \longrightarrow & V^{\bullet} \\ b & & \underline{A}^{\wedge}_{b}(P_b(a''),P_b(a)) \\ \downarrow : z & \longmapsto & \underline{F}^{\wedge}_{z}(P_b(a''),P_b(a)) : \quad \downarrow \\ b' & & \underline{A}^{\wedge}_{b'}(P_{b'}(a''),P_{b'}(a)) \end{array}$$

dont, en vertu de la construction précédente qui reprend sur ce point celle de II.2, l'objet $\underline{A}^{\wedge}(a'',a\ )$ est la limite projective canonique dans $V^{\bullet}$), ce qui implique l'existence d'un unique morphisme $k_{A^{\wedge}}(a'',a',a)$ de $V^{\bullet}$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif, pour tout objet b de $B^{\bullet}$:



(on remarquera, enfin, que si $R^{\bullet}$ est à valeurs dans $V^{\wedge}$-fonc , pour tout objet b de $B^{\bullet}$, les $k_{A^{\wedge}_b}(-,-,-)$ définissent des compositions associatives et qu'en conséquence $k_{A^{\wedge}}(-,-,-)$ en définit une également),

- nous laissons au lecteur le soin de définir, en utilisant les diverses propriétés universelles adéquates qui se déduisent de cette construction, les applications $\underline{\alpha}_{A^{\wedge}}$ et $\underline{\beta}_{A^{\wedge}}$ et de vérifier que l'on a bien ainsi construit un cône projectif de $V^{\wedge}$-néof de base le foncteur $R^{\bullet}$.

Il va de soi, par construction, que ce cône projectif est une limite projective naturalisée de $R^{\bullet}$.

Les remarques établies au long de cette construction, la compatibilité du foncteur $\mathrm{Hom}_V.(-,i)\colon V^\cdot \longrightarrow \mathcal{U}$ avec les limites projectives et la construction (voir I.14) du néofoncteur sous-jacent à un $V^\wedge$-néofoncteur permettent évidemment d'énoncer:

Corollaire. Moyennant les hypothèses de la proposition de II.3, les foncteurs d'oubli:

- $P_{V^\wedge\text{-nf}}\colon V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow V^\wedge\text{-néof}$ et $P_{V^\wedge\text{-an}}\colon V^\wedge\text{-néof} \longrightarrow V^\wedge\text{-apor}$,
- $V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow \mathcal{F}$ et $V^\wedge\text{-néof} \longrightarrow \mathcal{N}'$ (voir 0.6 et I.14)

sont compatibles avec les $\{B^\cdot\}$-limites projectives (c'est dire aussi qu'ils sont à $\{B^\cdot\}$-limites projectives).

Remarquons que la compatibilité avec les $\{B^\cdot\}$-limites projectives du foncteur $P_{V^\wedge\text{-nf}}\colon V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow V^\wedge\text{-néof}$ et du foncteur $V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow \mathcal{F}$ se déduit de la construction des $\{B^\cdot\}$-limites projectives dans $V^\wedge$-fonc donnée en (C.O. C.A.) qui n'utilise que des produits fibrés "triviaux" dans $V^\cdot$.

II.5. La proposition de II.3 s'applique dans toutes les situations usuelles. Signalons, notamment, que, si $\mathcal{U}_o$ est un univers et $\mathcal{F}$ est la catégorie pleine de foncteurs relatifs à $\mathcal{U}_o$, la catégorie cartésienne $\mathcal{F}^\wedge$ vérifie toutes les hypothèses de II.3.
Ainsi, $\mathcal{F}^\wedge$-néof est une catégorie à produits (par exemple).
Donc, si $C^\cdot$ est une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$ et dotée d'un choix de produits fibrés (pour ceux qui existent) permettant de munir l'ensemble $S(C^\cdot)$ des spans de $C^\cdot$ d'une structure de $\mathcal{F}^\wedge$-graphe multiplicatif (voir I.5), il en est de même de la catégorie produit $C^\cdot \times C^\cdot$, munie du choix "produit", et l'on a dans $\mathcal{F}^\wedge$-néof :

$$S(C^\cdot \times C^\cdot)^\wedge \approx S(C^\cdot)^\wedge \times S(C^\cdot)^\wedge$$

De même, si $\mathcal{N}'$ est la catégorie pleine de néofoncteurs relatifs à $\mathcal{U}_o$, la catégorie cartésienne $\mathcal{N}'^\wedge$ vérifie les hyptohèses de II.3. En particulier $\mathcal{N}'^\wedge$-néof est à produits.

Si $\mathbb{T}^\wedge$ est alors le $\mathcal{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif "esquisse des triples", que l'on a construit en I.4, le lecteur vérifiera sans difficulté que tout $\mathcal{N}'^\wedge$-néofoncteur :

$$\mathbb{T}^\wedge \times \mathbb{T}^\wedge \longrightarrow \mathfrak{Z}^\wedge$$

s'identifie à une loi distributive (particulière) :

$$\mathbb{D}: (T^\cdot, \eta, \mu) \longrightarrow (T'^\cdot, \eta', \mu'),$$

dont la transformation naturelle sous-jacente :

$$D: T^\cdot.T'^\cdot \Longrightarrow T'^\cdot.T^\cdot$$

est une égalité (D.L.A.W.).

(Pour obtenir les lois distributives quelconques, il semble nécessaire de munir $\mathcal{N}'^\wedge$-néof d'une structure monoïdale fermée, c'est-à-dire d'un produit tensoriel $\mathbb{E}^\wedge$ - tel que $\mathbb{T}^\wedge \mathbb{E}^\wedge \mathbb{T}^\wedge$ décrive ces lois distributives - associé à une notion de transformation naturelle entre $\mathcal{N}'^\wedge$-néofoncteurs - i.e. à une notion de fermeture - dont la définition et l'étude, qui seront menées ultérieurement, nécessitent de tels développements qu'ils ne peut être question de les intégrer à ce travail ... déjà fort long !)

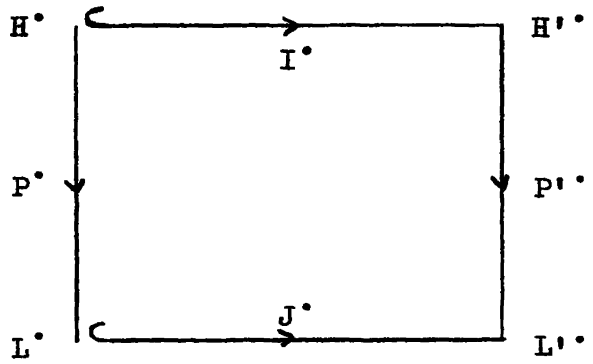
II.6. Avant de poursuivre notre étude de la catégorie des néofoncteurs enrichis (i.e. d'énoncer à quelles conditions elle admet des limites inductives) nous allons rappeler le Théorème général d'existence de $\{D^\cdot\}$-limites inductives dans une catégorie quelconque $H^\cdot$ (ainsi, dans la suite nous pourrons appliquer ce Théorème au cas $H^\cdot = V^\wedge$-néof).

Ce Théorème généralise, en même temps qu'il simplifie légèrement, le Théorème correspondant de (C.O.S.L.) dont on s'est très fortement inspiré.

Supposons donc que $H^\cdot$ et $D^\cdot$ soient deux catégories.

Pour prouver que $H^\cdot$ est à $\{D^\cdot\}$-limites inductives, il suffit qu'un certain nombre de conditions soient réunies, à savoir:

- (<u>condition d'emboîtement</u>) il existe un diagramme commutatif de foncteurs



où $H^\bullet$ (resp. $L^\bullet$) est une sous-catégorie pleine de $H'^\bullet$ (resp. $L'^\bullet$), $I^\bullet$ (resp. $J^\bullet$) est le foncteur injection canonique et $P^\bullet$ est la restriction de $P'^\bullet$,

- (condition aux limites projectives) $H'^\bullet$ est à $\mathcal{P}(H^{(D_o^\bullet)})$-produits et $H^\bullet$ est à noyaux,
- (condition aux limites inductives) $L^\bullet$ est à $\{D^\bullet\}$-limites inductives et le foncteur $J^\bullet: L^\bullet \hookrightarrow L'^\bullet$ est compatible avec ces limites,
- (condition aux monomorphismes) Y est un ensemble de $P'^\bullet$-monomorphismes de $H'^\bullet$ (voir 0.8),
- (condition d'absorption) il existe un choix de noyaux, dits canoniques, dans $H^\bullet$ de telle sorte que, pour tout noyau canonique n, on ait $Y.n \subset Y$,
- (condition de génération) le foncteur $P'^\bullet$ est $(L_o^\bullet, Y.H_o^\bullet)$-engendrant (voir 0.10).

Théorème. (Existence de limites inductives dans le cas général). Si $H^\bullet$ et $D^\bullet$ sont deux catégories telles que la condition d'emboîtement, les conditions aux limites, la condition aux monomorphismes, la condition d'absorption et la condition de génération sont vérifiées, alors $H^\bullet$ est une catégorie à $\{D^\bullet\}$-limites inductives.

La démonstration de ce Théorème est tout à fait analogue à celle de (C.O.S.L.) que l'on pourra donc consulter.

Pour appliquer ce Théorème à $V^{\wedge}$-néof il nous suffit donc de prouver que ces diverses conditions sont vérifiées.C'est ce que nous faisons en II.7 (emboîtement), II.8 (limites projectives), II.9 (limites inductives), II.10 (monomorphismes), II.11 (absorption), II.12 et II.13 (génération).En II.14, nous donnons alors le Théorème particulier d'existence de limites inductives dans $V^{\wedge}$-néof et,en II.15, nous construisons explicitement, à titre d'exemple, le $\mathcal{N}'^{\wedge}$-graphe multiplicatif "esquisse" d'une paire de foncteurs adjoints comme somme fibrée, dans $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néof , de l'esquisse de triple (voir I.4) et de l'esquisse de paire de foncteurs dont le composé détermine un endofoncteur.

II.7. Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers, $V^{\wedge} = (V^{\cdot}, \otimes, i, \phi, \psi, \omega)$ et $V'^{\wedge} = (V'^{\cdot}, \otimes', i', \phi', \psi', \omega')$ deux catégories monoïdales tels que:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$,
- $V^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $V'^{\cdot}$ telle que $\mathrm{Monos}(V^{\cdot}) \subseteq \mathrm{Monos}(V'^{\cdot})$,
- $\otimes$ (resp. $\phi ; \psi ; \omega$) est une restriction de $\otimes'$ (resp. $\phi' ; \psi' ; \omega'$),
- $i = i'$,

alors, le diagramme ci-dessous vérifie la condition d'emboîtement (de II.6):

$$\begin{array}{lcl} H^{\cdot} = V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}\text{-néof} & \xrightarrow{\ I^{\cdot}\ } & V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}\text{-néof} = H'^{\cdot} \\ P^{\cdot} = P_{V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}\text{-an}} & \text{(IV)} & P_{V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}\text{-an}} = P'^{\cdot} \\ L^{\cdot} = V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}\text{-apor} & \xrightarrow{\ J^{\cdot}\ } & V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}\text{-apor} = L'^{\cdot} \end{array} ,$$

où $I^{\cdot}$ et $J^{\cdot}$ sont les foncteurs inclusions.

Il est évident que $I^{\cdot}$ et $J^{\cdot}$ sont en effet des foncteurs pleins et injectifs et que ce diagramme commute.

Dans la suite, si des conditions analogues sont vérifiées, nous poserons pour plus de simplicité:

- $V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}$-néof $= V^{\wedge}$-néof , $V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}$-apor $= V^{\wedge}$-apor et $P_{V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}\text{-an}} = P_{V^{\wedge}\text{-an}}$ (comme nous l'avons déjà fait, à de nombreuses reprises, dans ce qui précède),
- $V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}$-néof $= V'^{\wedge}$-néof , $V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}$-apor $= V'^{\wedge}$-apor et $P_{V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}\text{-an}} = P_{V'^{\wedge}\text{-an}}$ (car il n'y aura pas risque de confusion).

II.8. Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers, $V^{\wedge} = (V^{\bullet}, \mathbb{Q}, i, \phi, \psi, \omega)$ et $V'^{\wedge} = (V'^{\bullet}, \mathbb{Q}', i', \phi', \psi', \omega')$ deux catégories monoïdales et $D^{\bullet}$ une catégorie tels que:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$,
- $V^{\bullet}$ est une sous-catégorie pleine de $V'^{\bullet}$ telle que $\mathrm{Monos}(V^{\bullet}) \subset \mathrm{Monos}(V'^{\bullet})$,
- $\mathbb{Q}$ (resp. ϕ; ψ; ω) est une restriction de $\mathbb{Q}'$ (resp. ϕ'; ψ'; ω'),
- $i = i'$,
- $D^{\bullet}_o \in \mathcal{U}'_o$,
- $V \in \mathcal{U}'_o$,
- $V'^{\bullet}$ est à $\mathcal{U}'_o$-produits et à produits fibrés (de deux morphismes de même but),
- $V^{\bullet}$ est à noyaux et à produits fibrés (de deux morphismes de même but),

alors, le diagramme (IV) de II.7 vérifie la condition aux limites projectives de II.6 .

Pour prouver cette assertion, nous ferons deux types de raisonnement:

- le premier, concernant la taille de $V^{\wedge}$-néof , utilise la Théorie des Univers (T.E.N.S.) (et le lecteur pourra traduire l'écriture " $Q \in \mathcal{U}'_o$ " en " Q est un ensemble équipotent à un élément de $\mathcal{U}'_o$ " , ce qui donne des résultats plus étendus et parfaitement rigoureux),
- le second, purement catégorique, utilise la proposition de II.3 que nous appliquerons à $V^{\wedge}$-néof et $V'^{\wedge}$-néof.

Concernant la taille de V^-néof , nous posons:

- $E' = \bigcup_{E \in \mathcal{U}_o} V^E$,

- $E'' = \mathcal{U}_o \times E' \times E' \times E' \times E' \times E' \times E'$,

- $E''' = E'' \times \mathcal{U}_o \times E' \times E' \times E''$,

nous avons alors:

- pour tout $E \in \mathcal{U}_o$, l'ensemble V^E est élément de $\mathcal{U}'_o$ puisque E et V le sont,

- $E' \in \mathcal{U}'_o$, puisque $E' = \bigcup_{E \in \mathcal{U}_o} V^E$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{U}'_o$, indexée par un élément de $\mathcal{U}'_o$,

- $E'' \in \mathcal{U}'_o$, puisque c'est un produit fini d'éléments de $\mathcal{U}'_o$,

- $E''' \in \mathcal{U}'_o$, pour les mêmes raisons;

or, on remarque immédiatement que:

- (V^-néof)$_o$ (i.e. l'ensemble des objets de V^-néof) est inclus dans E'' , puisque un de ses éléments quelconque est un septuplet

$$(A^\wedge_o, \underline{A}^\wedge, j_{A^\wedge}, m_{A^\wedge}, k_{A^\wedge}, \overleftarrow{\alpha}_{A^\wedge}, \overrightarrow{\beta}_{A^\wedge})$$

où chacune des composantes est élément de chacun des facteurs respectifs (dans cet ordre) de E'' ,

- l'ensemble sous-jacent à la catégorie V^-néof (que nous noterons encore V^-néof) est inclus dans E''' , puisque un de ses éléments quelconque est un quintuplet

$$(A^\wedge, (F, \underline{F}^\wedge, M_{F^\wedge}) , B^\wedge)$$

où chacune des composantes est élément de chacun des facteurs respectifs (dans cet ordre) de E''';

il en résulte que les ensembles (V^-néof)$_o$ et V^-néof sont éléments de $\mathcal{U}'_o$ et donc, puisque $D^\bullet_o \in \mathcal{U}'_o$, que <u>l'ensemble d'applications</u>

$$V^\wedge\text{-néof}^{(D^\bullet_o)}$$

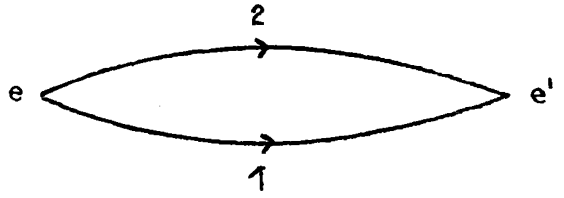
est élément de $\mathcal{U}'_o$ ainsi qu'une quelconque de ses parties.

Nous pouvons appliquer, maintenant, la proposition de II.3 :

- puisque V'° est, par hypothèse, à $\mathcal{U}'_o$-produits et à produits fibrés, la catégorie V'^-néof est à $\mathcal{U}'_o$-produits (en vertu de la proposition de II.3, où l'on fait B° discrète et élément quelconque de $\mathcal{U}'_o$ et où les $\mathcal{U}_o$ et V^ sont, ici, $\mathcal{U}'_o$ et V'^), en particulier, d'après le résultat sur la taille de V^-néof que nous venons d'établir, la catégorie V'^-néof est à

$$\mathcal{P}\,(\ V^{\wedge}\text{-néof}^{(D^{\circ}_{o})}\ )\text{- produits},$$

- puisque, par hypothèse, V° est à noyaux et à produits fibrés, la catégorie V^-néof est à noyaux (en vertu de la proposition de II.3 où B° est la catégorie représentée par le diagramme:



).

Ainsi, la proposition qui vient d'être énoncée est démontrée.

II.9. Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers, V^ = (V°, $\mathbb{M}$, i, ϕ, ψ, ω) et V'^ = (V'°, $\mathbb{M}'$, i', ϕ', ψ', ω') deux catégories monoïdales et D° une catégorie tels que:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$,
- V° est une sous-catégorie pleine de V'° telle que Monos(V°) $\subseteq$ Monos(V'°),
- $\mathbb{M}$ (resp. ϕ ; ψ ; ω) est une restriction de $\mathbb{M}'$ (resp. ϕ'; ψ'; ω'),
- i = i',
- $D \in \mathcal{U}_o$ (ce qui signifie que D° est une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$),
- V° est une catégorie à $\mathcal{J}_o$-limites inductives ($\mathcal{J}$ étant la catégorie pleine de foncteurs entre catégories relatives à $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{J}_o$ l'en-

semble de ses objets),

- le foncteur inclusion $V^{\bullet} \hookrightarrow V'^{\bullet}$ est compatible avec les $\mathfrak{I}_o$-limites inductives,

alors, le diagramme (IV) de II.7 vérifie la condition aux limites inductives de II.6 .

En effet, F. Foltz a établi en (C.O.C.A.) que, avec les hypothèses qui précèdent, la catégorie $V^{\wedge}$-apor est à $\mathfrak{I}_o$-limites inductives, en les construisant explicitement.Pour prouver que le foncteur inclusion $J^{\bullet}$: $V^{\wedge}$-apor $\hookrightarrow$ $V'^{\wedge}$-apor est compatible avec ces limites inductives, il suffit alors de reprendre la construction de (C.O.C.A.) et d'utiliser:

- l'hypothèse de compatibilité du foncteur inclusion $V^{\bullet} \hookrightarrow V'^{\bullet}$ avec les $\mathfrak{I}_o$-limites inductives,
- la compatibilité avec les $\mathfrak{I}_o$-limites inductives du foncteur inclusion $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}'$ entre les catégories pleines d'applications entre éléments de $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ respectivement.

II.10. Si $\mathcal{U}'_o$ est un univers et $V'^{\wedge}$ une catégorie monoïdale, nous notons $Y_{\mathcal{U}'_o}$ l'ensemble des morphismes (i.e. des $V'^{\wedge}$-néofoncteurs) $G^{\wedge}$: $C^{\wedge} \longrightarrow B^{\wedge}$ de $V'^{\wedge}$-néof $(= V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}$-néof) tels que:

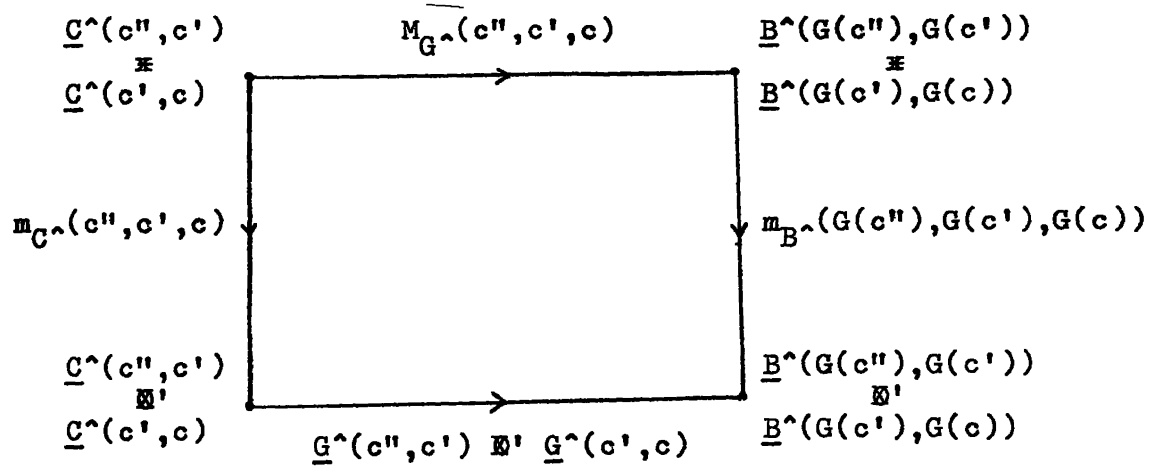
(y"). G: $C^{\wedge}_o \longrightarrow B^{\wedge}_o$ est une application injective,

(y'). pour tout couple (c',c) d'objets de $C^{\wedge}$, le morphisme

$$\underline{G}^{\wedge}(c',c): \underline{C}^{\wedge}(c',c) \longrightarrow \underline{B}^{\wedge}(G(c'),G(c))$$

est un monomorphisme de $V'^{\bullet}$,

(y). pour tout triplet (c",c',c) d'objets de $C^{\wedge}$,le diagramme ci-dessous (nécessairement commutatif, en vertu de la définition de I.6) est un produit fibré dans $V'^{\bullet}$:



(on remarquera, en particulier, qu'un $V'^\wedge$-foncteur vérifie nécessairement la condition (y)).

Intuitivement, un $V'^\wedge$-néofoncteur vérifie (y) lorsque les objets des composables de sa source sont "maximaux".Ainsi, dans le cas ensembliste, un néofoncteur injectif vérifie la condition (y) si, et seulement si, tout couple de morphismes de sa source qui a pour image un couple composable du but est composable dans sa source.

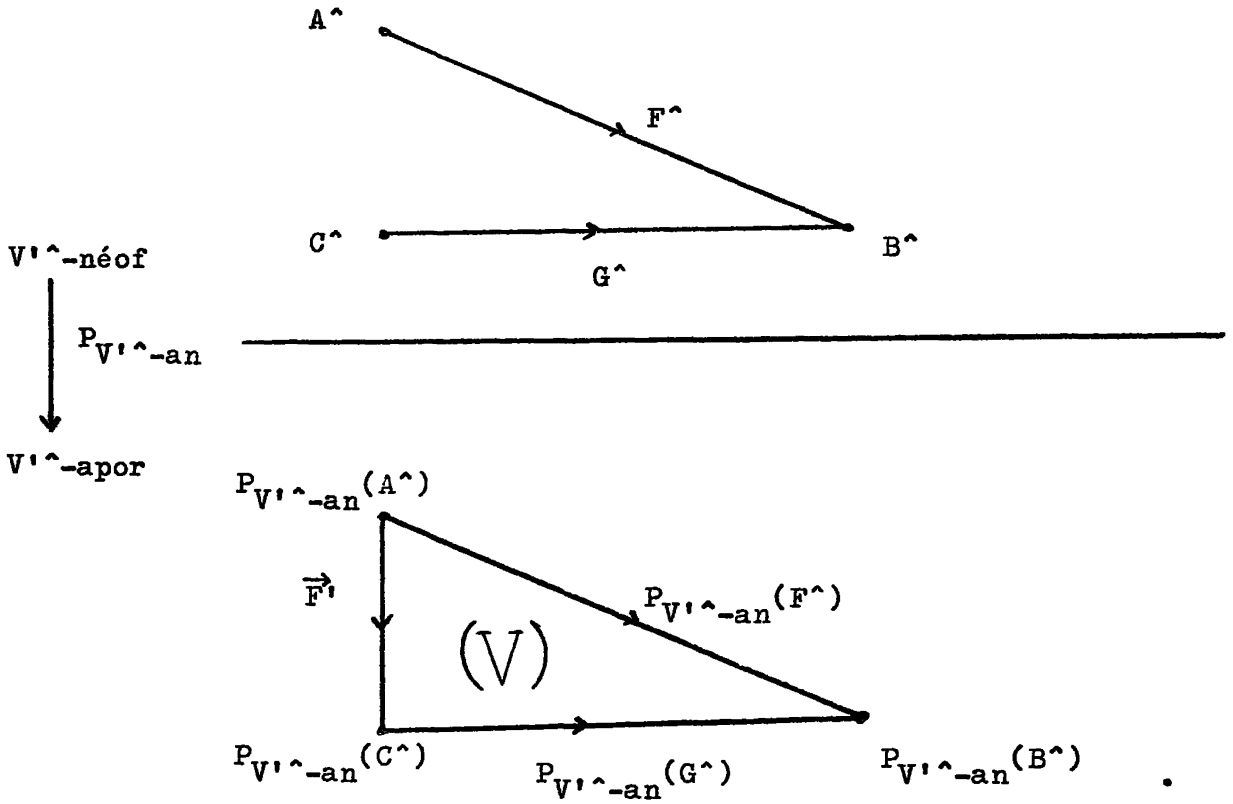
Moyennant cette définition, on vérifie immédiatement que $Y_{\mathcal{U}'_o}$ est une sous-catégorie de $V'^\wedge$-néof , saturée pour les isomorphismes.

De plus, nous avons:

Lemme. Si $\mathcal{U}'_o$ est un univers et $V'^\wedge$ une catégorie monoïdale, la sous-catégorie $Y_{\mathcal{U}'_o}$ de $V'^\wedge$-néof, dont les morphismes sont les $V'^\wedge$-néofoncteurs vérifiant les conditions (y"), (y') et (y) qui précèdent, est constituée de $P_{V'^\wedge\text{-an}}$-monomorphismes.

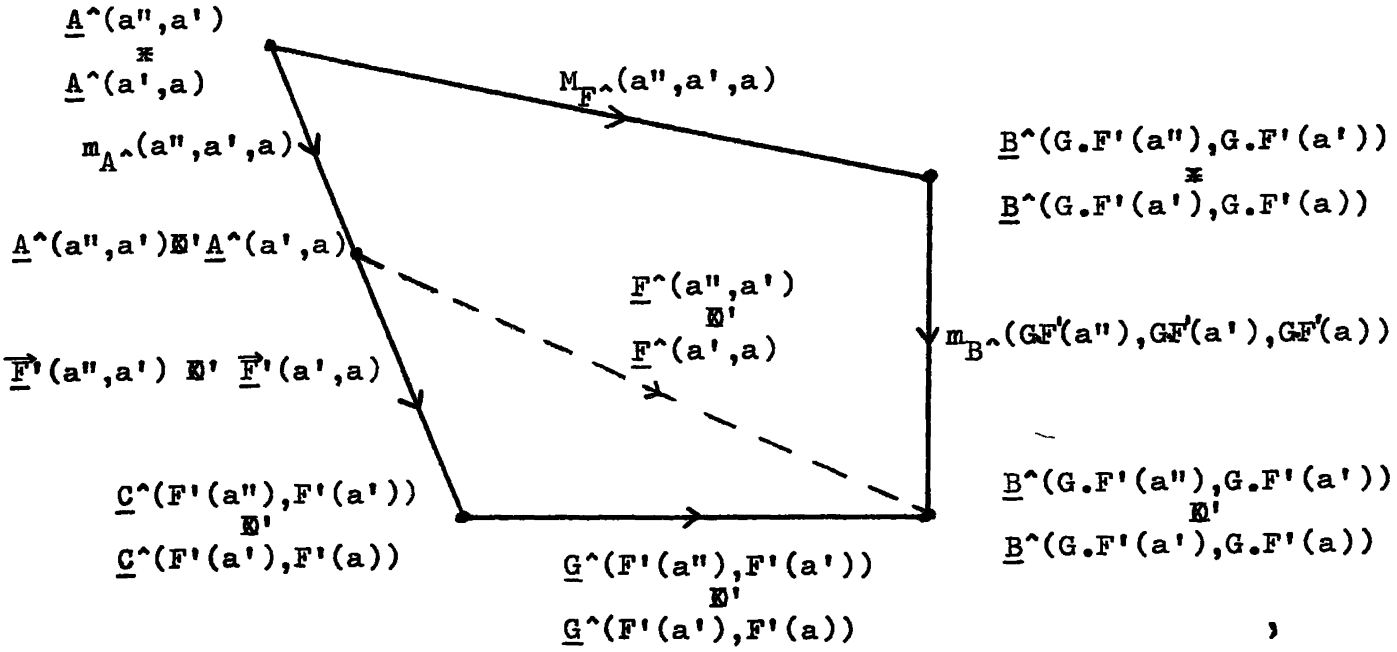
Pour démontrer ce lemme, nous constatons, tout d'abord, que, si $G^\wedge: C^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ appartient à $Y_{\mathcal{U}'_o}$, sa $V'^\wedge$-application orientée sous-jacente $P_{V'^\wedge\text{-an}}(G^\wedge)$ est un monomorphisme de $V'^\wedge$-apor , en vertu des conditions (y") et (y').

Supposons de plus que $F^\wedge: A^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ est un $V'^\wedge$-néofoncteur (morphisme de $V'^\wedge$-néof) pour lequel il existe une $V'^\wedge$-application orientée $\overrightarrow{F'}: P_{V'^\wedge\text{-an}}(A^\wedge) \longrightarrow P_{V'^\wedge\text{-an}}(C^\wedge)$ (morphisme de $V'^\wedge$-apor) rendant commutatif le diagramme (V) ci-dessous:

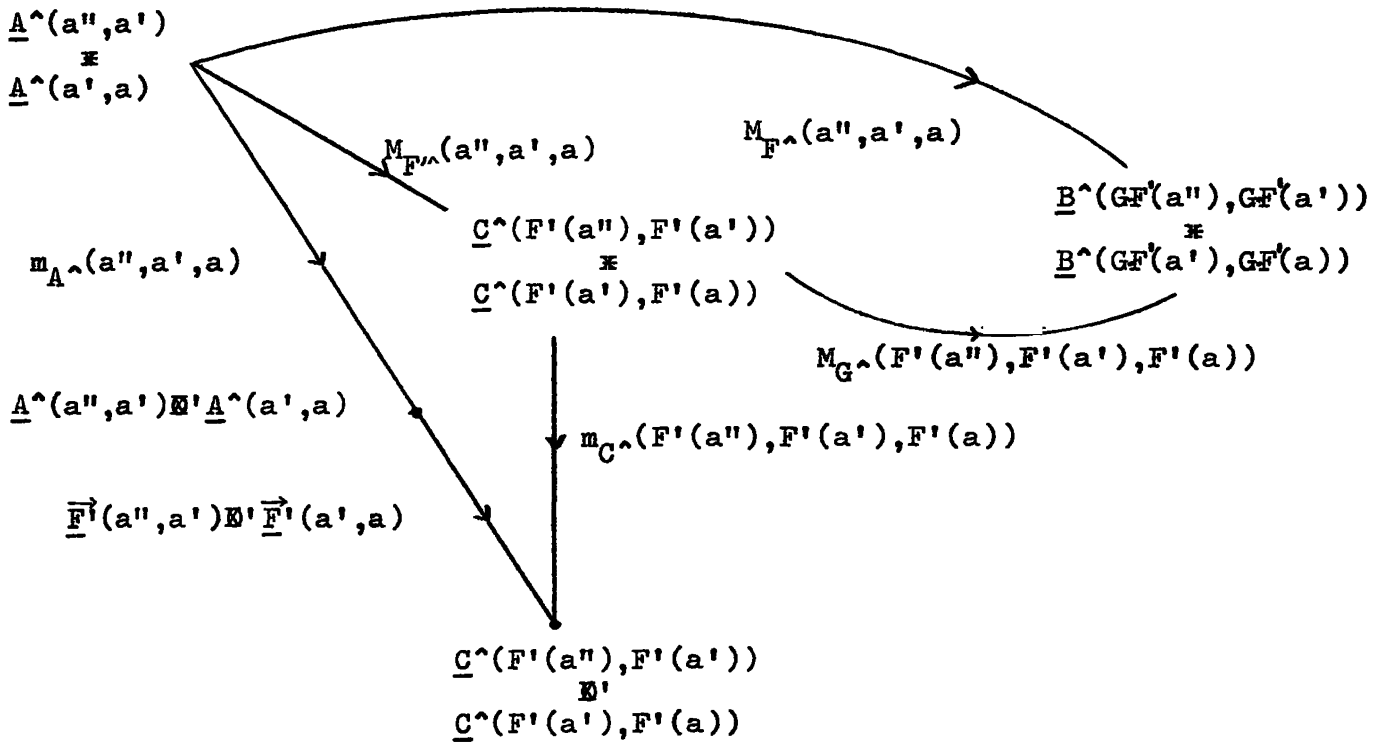


Il est clair que l'on définit un V'^-néofoncteur F'^: A^ ⟶ C^ en posant:

- $\vec{F}'$ est la V'^-application orientée sous-jacente à F'^,
- pour tout triplet (a",a',a) d'objets de A^, le diagramme ci-dessous étant commutatif (en vertu de la compatibilité de F^ avec les monomorphismes des composables et de la commutation du diagramme (V) ci-dessus)



$M_{F'^\wedge}(a'',a',a)$ est l'unique morphisme (d'après (y)) rendant commutatif le diagramme suivant:



Il est évident, dans ces conditions, que F'^ "relève" bien $\vec{F}'$, i.e.:

- $P_{V'^\wedge\text{-an}}(F'^\wedge) = \vec{F}'$,
- $G^\wedge . F'^\wedge = F^\wedge$.

De plus, la fidélité du foncteur $P_{V'^\wedge\text{-an}}$ (remarquée en I.11) prouve que F'^ est l'unique morphisme de V'^-néof qui relève $\vec{F}'$.

Le lemme se trouve donc démontré.

Il s'ensuit que nous pouvons, immédiatement, énoncer:

Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers, $V^\wedge = (V^\cdot, \boxtimes, i, \phi, \psi, \omega)$ et $V'^\wedge = (V'^\cdot, \boxtimes', i', \phi', \psi', \omega')$ sont deux catégories monoïdales tels que:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subsetneq \mathcal{U}'_o$,
- $V^\bullet$ <u>est une sous-catégorie pleine de</u> $V'^\bullet$ <u>telle que</u> $\mathrm{Monos}(V^\bullet) \subset \mathrm{Monos}(V'^\bullet)$,
- $\otimes$ (resp. ϕ ; ψ ; ω) <u>est une restriction de</u> $\otimes'$ (resp. ϕ'; ψ'; ω'),
- $i = i'$,

<u>si, de plus,</u> $Y_{\mathcal{U}'_o}$ <u>est la sous-catégorie de</u> $V'^\wedge$-néof <u>constituée des</u> $V'^\wedge$-<u>néofoncteurs vérifiant les conditions</u> (y"), (y') <u>et</u> (y) <u>précédentes, alors le diagramme</u> (IV) <u>de</u> II.7 <u>vérifie la condition aux monomorphismes de</u> II.6 .

Si des conditions analogues à celles de cette proposition sont vérifiées, nous noterons, dans la suite, pour plus de simplicité, $Y_{\mathcal{U}'_o} = Y$ car il n'y aura aucun risque d'ambiguïté.

II.11. <u>Proposition. Si</u> $\mathcal{U}_o$ <u>et</u> $\mathcal{U}'_o$ <u>sont deux univers,</u> $V^\wedge = (V^\bullet, \otimes, i, \phi, \psi, \omega)$ <u>et</u> $V'^\wedge = (V'^\bullet, \otimes', i', \phi', \psi', \omega')$ <u>sont deux catégories monoïdales tels que:</u>

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ <u>et</u> $\mathcal{U}_o \subsetneq \mathcal{U}'_o$,
- $V^\bullet$ <u>est une sous-catégorie pleine de</u> $V'^\bullet$ <u>telle que</u> $\mathrm{Monos}(V^\bullet) \subset \mathrm{Monos}(V'^\bullet)$,
- $\otimes$ (resp. ϕ ; ψ ; ω) <u>est une restriction de</u> $\otimes'$ (resp. ϕ'; ψ'; ω'),
- $i = i'$,
- $V^\bullet$ <u>est à noyaux et à produits fibrés (de deux morphismes de même but),</u>
- <u>le foncteur inclusion</u> $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ <u>est compatible avec les produits fibrés,</u>

<u>si, de plus,</u> Y <u>est la sous-catégorie de</u> $V'^\wedge$-néof <u>constituée des</u> $V'^\wedge$-<u>néofoncteurs vérifiant les conditions</u> (y"), (y') <u>et</u> (y) <u>de</u> II.10 , <u>alors le diagramme</u> (IV) <u>de</u> II.7 <u>vérifie la condition d'absorption de</u> II.6 .

En réalité, nous allons prouver un résultat plus fort que celui recherché (c'est-à-dire l'existence d'un choix de noyaux canoniques dans $V^\wedge$-néof

qui soient"absorbés" par Y), à savoir:

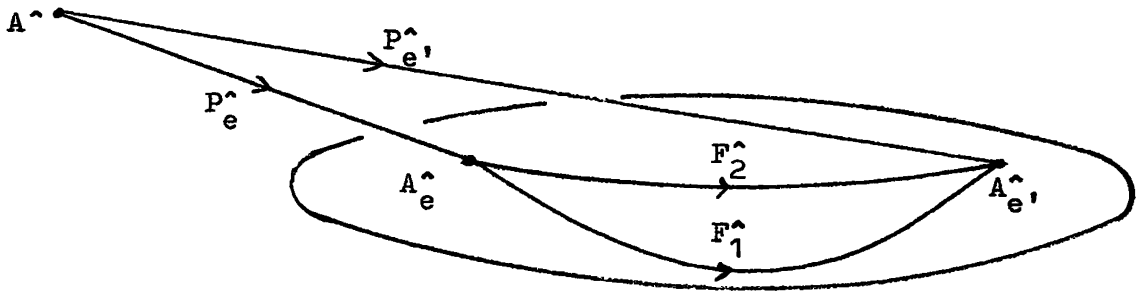
Lemme. Dans les conditions de la proposition précédente, tout noyau de V^-néof est élément de Y.

Pour prouver ce lemme, nous constatons que, en vertu de la proposition de II.3 dont les conditions sont vérifiées par hypothèse, V^-néof est à noyaux.

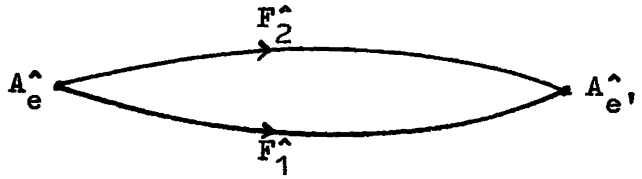
Nous supposons donc V° muni d'un choix de noyaux et de produits fibrés canoniques de sorte que, pour tout z: v ⟶ v' appartenant à V°,



soient des produits fibrés canoniques.Ceci permet alors de construire explicitement, comme en II.4 dont nous reprenons les différents points ainsi que les diverses notations, le noyau (i.e. la limite projective)

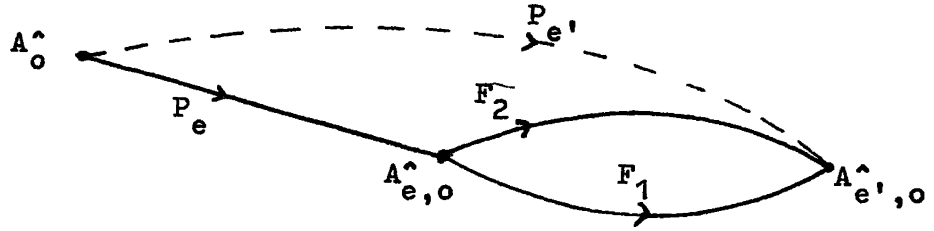


du couple de deux V^-néofoncteurs (appartenant à V^-néof)



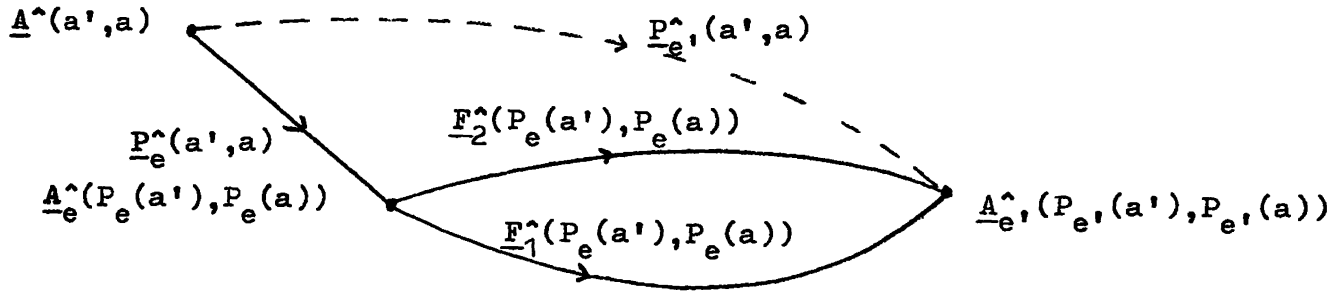
Il nous faut donc montrer que $P^{\wedge}_{e}$ vérifie les conditions (y"), (y') et (y) de II.10, or:

- par construction (voir II.4),le diagramme commutatif



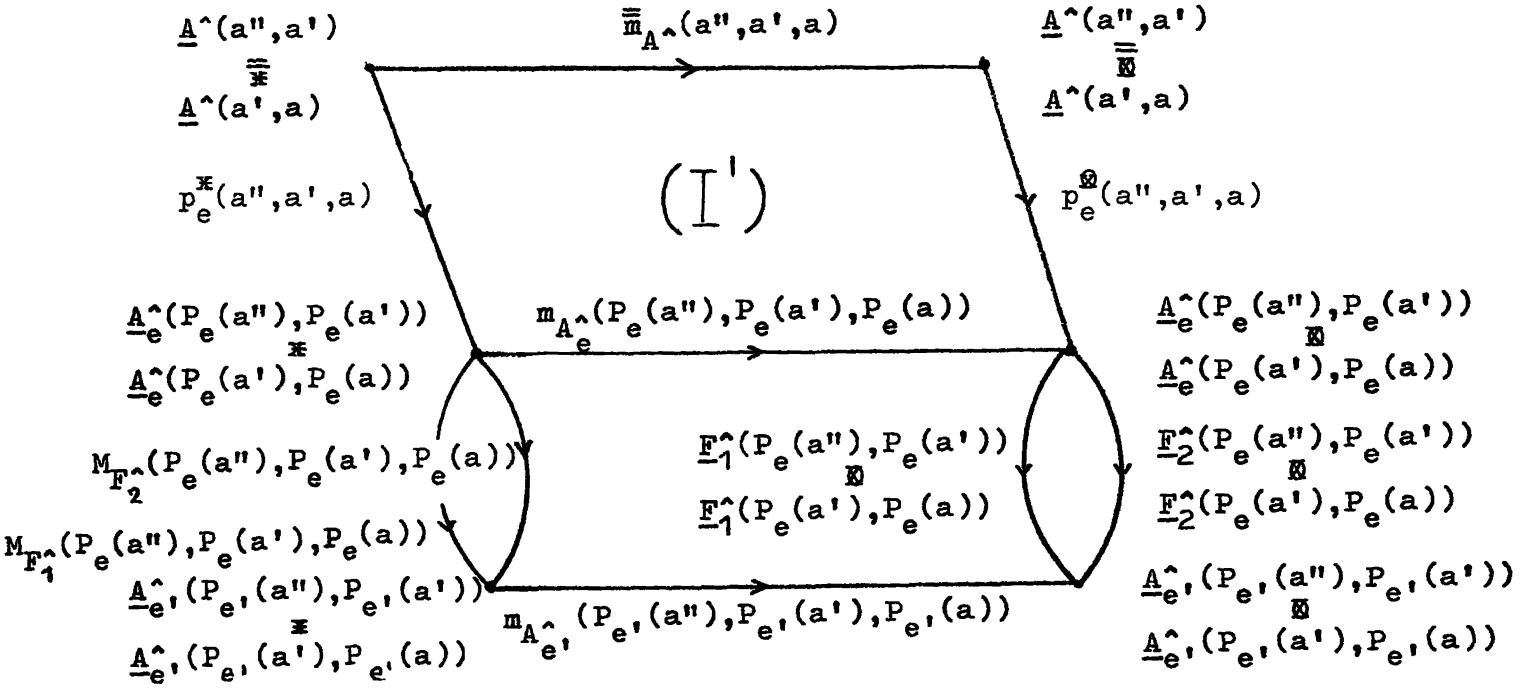
est un noyau dans $\mathcal{U}$, en conséquence P_e est une application injective et vérifie donc la condition (y") de II.10 ,

- pour tout couple (a',a) d'objets de $A^\wedge$, par construction (voir II.4), le diagramme commutatif



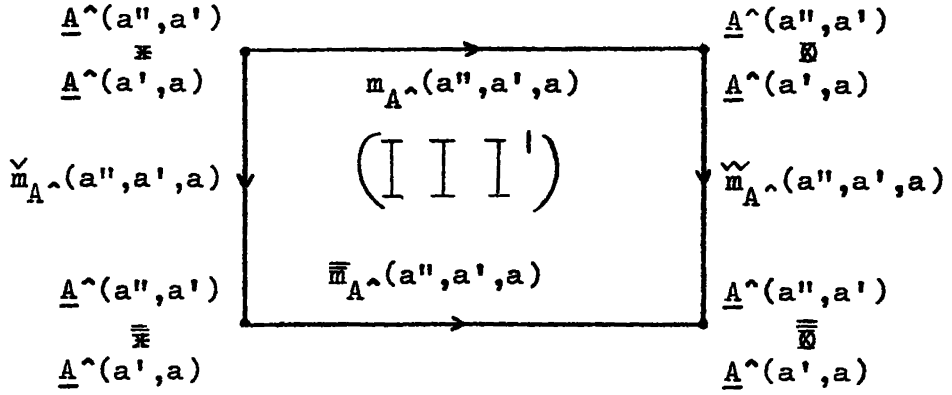
définit un noyau dans V°, c'est dire que $\underline{P}^\wedge_e(a',a)$ est un monomorphisme de V°, donc de V'°, et que $P^\wedge_e$ vérifie la condition (y') de II.10 ,

- pour tout triplet (a",a',a) d'objets de $A^\wedge$, par construction (voir II.4), le diagramme commutatif (I') ci-dessous (qui est la réplique, dans le cas particulier considéré ici, du diagramme (I) de II.4):

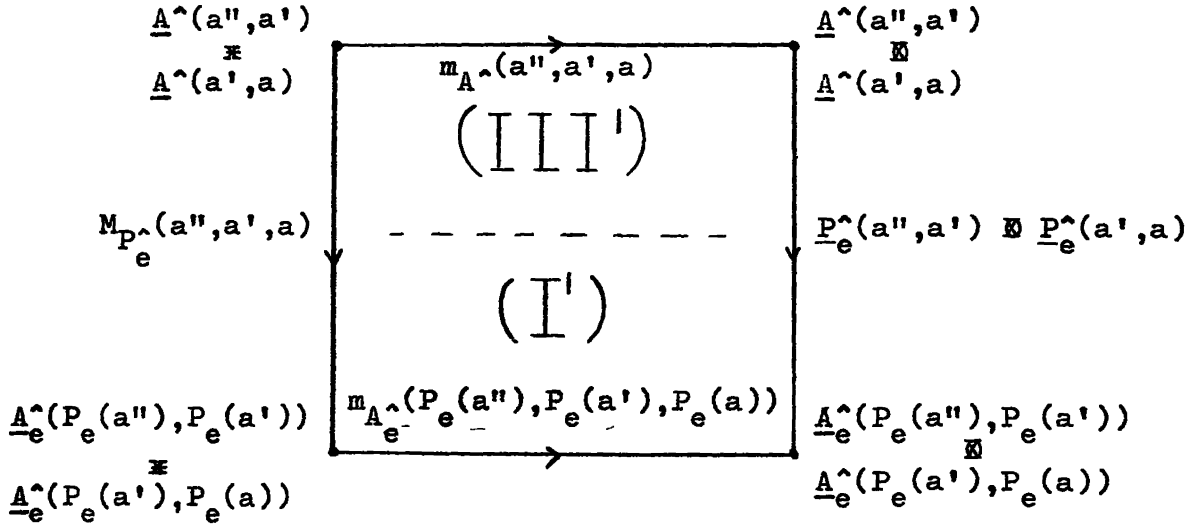


définit $\bar{\bar{m}}_{A^\wedge}(a'',a',a)$ comme étant le morphisme noyau de la transformation naturelle $m_{A^\wedge}(P_-(a''),P_-(a'),P_-(a))$, on vérifie alors que (I') définit un produit fibré dans $V^\bullet$,

- pour tout triplet (a",a',a) d'objets de $A^\wedge$, par construction (voir II.4), le diagramme commutatif (III') ci-dessous:



(qui est la réplique du diagramme (III) de II.4) définit un produit fibré dans $V^\bullet$, il en résulte donc que le composé "latéral" (ou vertical) des diagrammes (I') et (III'), à savoir:



définit un produit fibré dans $V^\bullet$, donc dans $V'^\bullet$ (le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ étant compatible) et donc que $P_e^\wedge$ vérifie la condition (y) de II.10.

Donc, tout noyau de $V^\wedge$-néof , construit comme en II.4, appartient

à Y, et, comme Y est saturée pour les isomorphismes, un noyau quelconque dans $V^{\wedge}$-néof (i.e. non nécessairement construit comme en II.4) appartient également à Y. Ce qui prouve le lemme énoncé.
La proposition qui le précède est alors immédiate puisque, Y étant une catégorie, elle absorbe un quelconque de ses morphismes, par exemple les noyaux de $V^{\wedge}$-néof.

II.12. Nous établissons, ici, deux lemmes qui simplifieront la démonstration de la condition de génération donnée en II.13. Aussi, si $\mathcal{U}'_o$ est un univers et $V'^{\wedge}$ une catégorie monoïdale, nous notons $\underline{Y}_{\mathcal{U}'_o}$ (que nous abrègerons en $\underline{Y}$, lorsqu'il n'y aura pas risque de confusion) l'ensemble des morphismes (i.e. des $V'^{\wedge}$-applications orientées) de $V'^{\wedge}$-apor $\vec{F}: \vec{A} \longrightarrow \vec{B}$ tels que:
(y''). $F: \vec{A}_o \longrightarrow \vec{B}_o$ est une application injective,
(y'). pour tout couple (a',a) d'objets de $\vec{A}$, le morphisme

$$\underline{\vec{F}}(a',a): \underline{\vec{A}}(a',a) \longrightarrow \underline{\vec{B}}(F(a'),F(a))$$

est un monomorphisme de $V'^{\bullet}$.
(On remarquera que:
- tout élément de $\underline{Y}$ est un monomorphisme de $V'^{\wedge}$-apor ,
- $\underline{Y}$ est une sous-catégorie de $V'^{\wedge}$-apor , saturée pour les isomorphismes,
- tout élément de Y (voir II.10) a pour image, par $P_{V'^{\wedge}\text{-an}}$, un élément de $\underline{Y}$.)
Moyennant cette définition, nous avons:

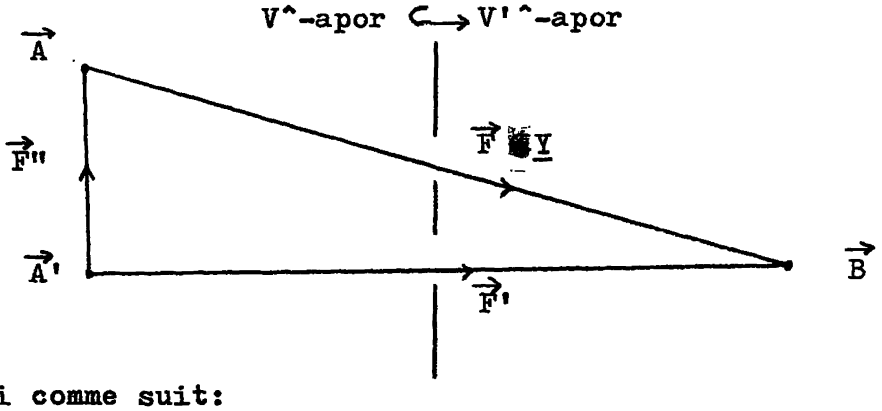
Lemme 1. *Si* $\mathcal{U}_o$ *et* $\mathcal{U}'_o$ *sont deux univers, si* $V^{\wedge} = (V^{\bullet}, \mathbb{O}, i, \phi, \psi, \omega)$ *et* $V'^{\wedge} = (V'^{\bullet}, \mathbb{O}', i', \phi', \psi', \omega')$ *sont deux catégories monoïdales tels que:*
- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ *et* $\mathcal{U}_o \subseteq \mathcal{U}'_o$,
- $V^{\bullet}$ *est une sous-catégorie pleine de* $V'^{\bullet}$,

- $i = i'$,
- $V^\cdot$ est à $\mathcal{U}_o$-sommes,
- le foncteur inclusion $V^\cdot \hookrightarrow V'^\cdot$ est compatible avec les $\mathcal{U}_o$-sommes,
- tout morphisme de $V'^\cdot$, dont la source est objet de $V^\cdot$, admet un X"-reflet (où l'on pose $X'' = \mathrm{Monos}(V'^\cdot)$) dont la source est objet de $V^\cdot$,

alors, tout morphisme de $V'\hat{}$-apor, dont la source est objet de $V\hat{}$-apor, admet un Y-reflet dont la source est objet de $V\hat{}$-apor.

(Rappelons qu'un X"-reflet d'un morphisme de $V'^\cdot$ n'est rien d'autre qu'une image, au sens usuel, de ce morphisme; nous avons employé cette terminologie, qui peut sembler alourdir l'énoncé de ce lemme, pour mettre en lumière le fait que c'est Y qui convient, et ce de manière simple, du point de vue de la notion de reflet dans $V'\hat{}$-apor.
Remarquons, d'autre part, que les hypothèses de ce lemme ne font pas intervenir $\mathbb{E}, \phi, \psi, \omega$ (resp. $\mathbb{E}', \phi', \psi', \omega'$) puisque la notion de $V\hat{}$-graphe orienté (resp. $V'\hat{}$-graphe orienté) n'est, en réalité, relative qu'au couple $\vec{V} = (V^\cdot, i)$ (resp. $\vec{V}' = (V'^\cdot, i')$) .)
Pour prouver ce lemme, nous munissons $V^\cdot$ d'un choix de $\mathcal{U}_o$-sommes, dites canoniques, et $V'^\cdot$ d'un choix de X"-reflets, dits canoniques.

Supposons, alors, que $\vec{F}' : \vec{A}' \longrightarrow \vec{B}$ est un morphisme de $V'\hat{}$-apor tel que $\vec{A}'$ soit objet de $V\hat{}$-apor . Le Y-reflet $\vec{F}$ de $\vec{F}'$, qui doit pouvoir se représenter par un diagramme de la forme:



est défini comme suit:

- $\vec{A}_o = \{F'(a') \,/\, a' \in \vec{A}'_o\}$ (comme $\vec{A}'_o$ est élément de $\mathcal{U}_o$, il en est de même, à une équipotence près, de $\vec{A}_o$), F: $\vec{A}_o \longrightarrow \vec{B}_o$ est l'inclusion et F": $\vec{A}'_o \longrightarrow \vec{A}_o$ est la restriction de F': $\vec{A}'_o \longrightarrow \vec{B}_o$,

- pour tout couple (a_2,a_1) d'objets de $\vec{A}$, si:

+ $E_{(a_2,a_1)} = \{(a'_2,a'_1) \in \vec{A}'_o \times \vec{A}'_o \,/\, F''(a'_2) = a_2 \text{ et } F''(a'_1) = a_1\}$ (alors, c'est un élément de $\mathcal{U}_o$),

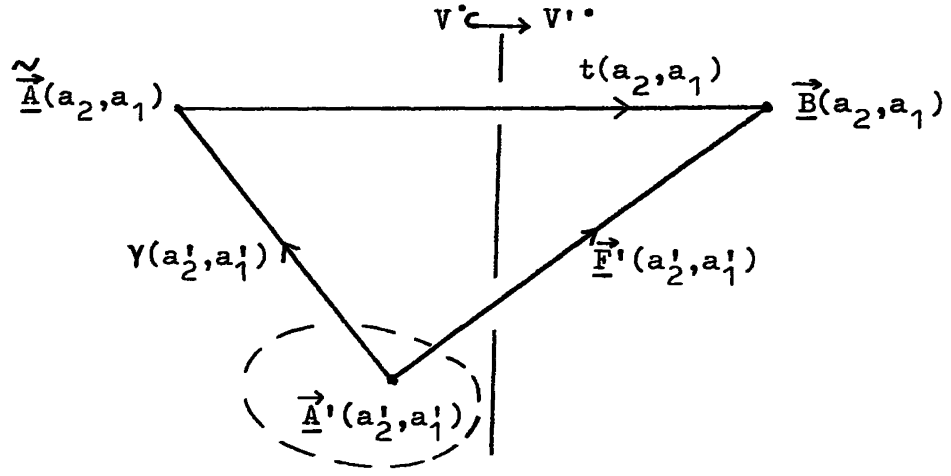
+ $\underset{\sim}{\vec{A}}(a_2,a_1)$ est la somme canonique dans V° (donc dans V'°) de la famille d'objets $(\underline{\vec{A}}'(a'_2,a'_1))_{(a'_2,a'_1) \in E_{(a_2,a_1)}}$,

+ pour tout élément (a'_2,a'_1) de $E_{(a_2,a_1)}$, le morphisme

$$\gamma(a'_2,a'_1): \underline{\vec{A}}'(a'_2,a'_1) \longrightarrow \underset{\sim}{\vec{A}}(a_2,a_1)$$

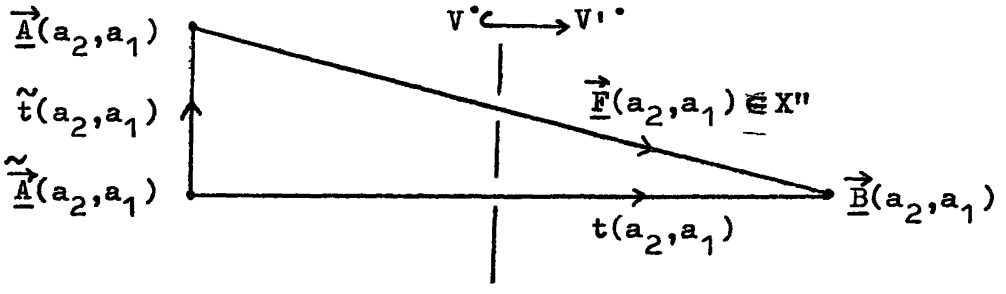
est la coprojection canonique dans V° (ou V'°),

+ $t(a_2,a_1)$ est l'unique morphisme de V'° rendant commutatif, pour tout $(a'_2,a'_1) \in E_{(a_2,a_1)}$, le diagramme suivant



,

alors, $\underline{\vec{A}}(a_2,a_1)$ est le X"-reflet de $t(a_2,a_1)$, ce qui signifie que l'on a un diagramme commutatif, et "universel", de la forme



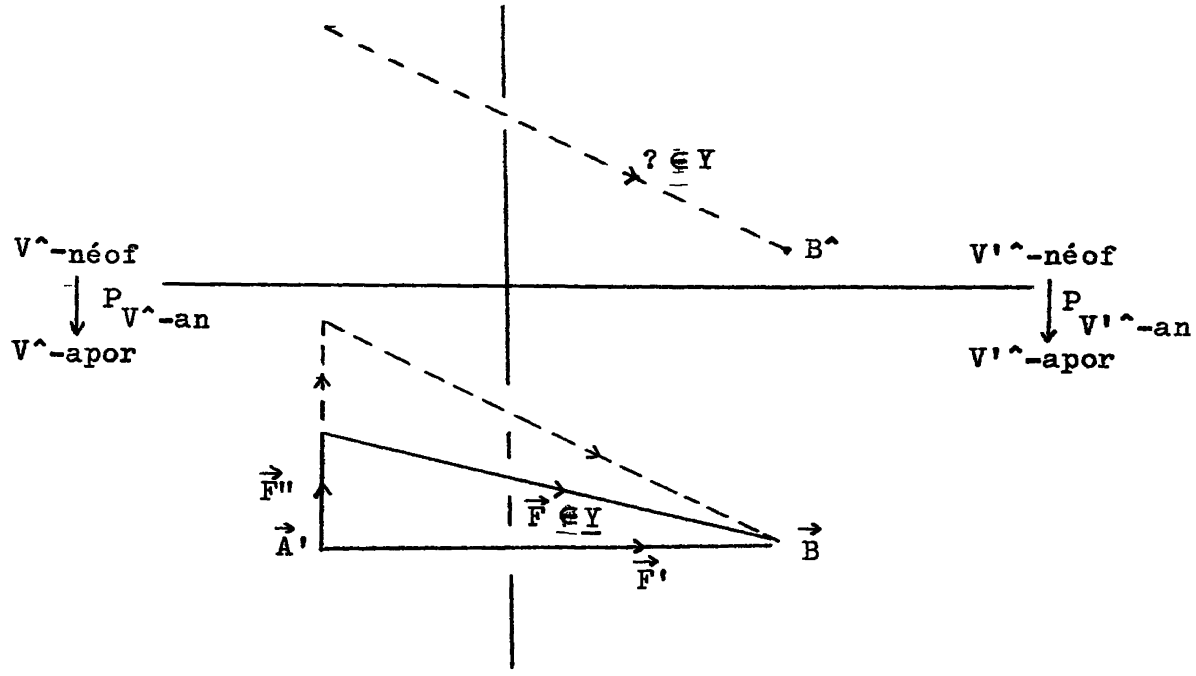
,

- nous laissons au lecteur le soin de définir les applications $j_{\vec{A}}$ et $\vec{F}''$.

On établit, alors, facilement que la V'^-application orientée $\vec{F}'$ se décompose bien, et de manière universelle, de la manière voulue dans la catégorie V'^-apor.

Le Lemme 1 se trouve donc établi .

Le Lemme 2 ci-dessous indique que, pour chercher le morphisme de Y, ayant sa source dans V^-néof , "engendré universellement" par un morphisme $\vec{F}' : \vec{A}' \longrightarrow \vec{B}$ (où $\vec{B} = P_{V'^-an}(B^)$) de V'^-apor tel que $\vec{A}'$ est objet de V^-apor , il suffit de résoudre le problème pour le $\underline{Y}$-reflet de $\vec{F}'$ (ce qui correspond, d'ailleurs, à la situation dans le cas ensembliste) comme le suggère le diagramme ci-dessous:



Plus précisément, nous laissons au lecteur le soin d'établir que, si $\vec{F}' : \vec{A}' \longrightarrow \vec{B}$ (où $\vec{B} = P_{V'^-an}(B^)$) est un morphisme de V'^-apor tel que $\vec{A}'$ est objet de V^-apor , alors s'il existe un $(Y.(V^-néof)_o , P_{V'^-an})$-morphisme engendré par le $\underline{Y}$-reflet de $\vec{F}'$, c'est aussi un $(Y.(V^-néof)_o , P_{V'^-an})$-morphisme engendré par $\vec{F}'$.

Ceci permet donc d'énoncer:

Lemme 2. Si $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}'_0$ sont deux univers, si $V^\wedge = (V^\cdot, \mathbb{E}, i, \phi, \psi, \omega)$ et $V'^\wedge = (V'^\cdot, \mathbb{E}', i', \phi', \psi', \omega')$ sont deux catégories monoïdales tels que:

- $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}'_0$ et $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}'_0$,
- $V^\cdot$ est une sous-catégorie pleine de $V'^\cdot$ telle que $\mathrm{Monos}(V^\cdot) \subset \mathrm{Monos}(V'^\cdot)$,
- $i = i'$,
- $\mathbb{E}$ (resp. ϕ; ψ; ω) est une restriction de $\mathbb{E}'$ (resp. ϕ'; ψ'; ω'),
- $V^\cdot$ est une catégorie à $\mathcal{U}_0$-sommes,
- le foncteur inclusion $V^\cdot \longrightarrow V'^\cdot$ est compatible avec les $\mathcal{U}_0$-sommes,
- tout morphisme de $V'^\cdot$, dont la source est objet de $V^\cdot$, admet un X"-reflet dont la source est objet de $V^\cdot$ (et où X" = $\mathrm{Monos}(V'^\cdot)$),

alors, pour que le diagramme (IV) de II.7 vérifie la condition de génération de II.6, il suffit que toute $V'^\wedge$-application orientée appartenant à $\underline{Y}$ et dont la source est objet de $V^\wedge$-apor engendre un $(Y.(V^\wedge\text{-néof})_0, P_{V'^\wedge\text{-an}})$-morphisme.

II.13. Proposition. Si $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}'_0$ sont deux univers, si $V^\wedge=(V^\cdot, \mathbb{E}, i, \phi, \psi, \omega)$ et $V'^\wedge = (V'^\cdot, \mathbb{E}', i', \phi', \psi', \omega')$ sont deux catégories monoïdales tels que:

- $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}'_0$ et $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}'_0$,
- $V^\cdot$ est une sous-catégorie pleine de $V'^\cdot$ telle que $\mathrm{Monos}(V^\cdot) \subset \mathrm{Monos}(V'^\cdot)$,
- $i = i'$,
- $\mathbb{E}$ (resp. ϕ; ψ; ω) est la restriction de $\mathbb{E}'$ (resp. ϕ'; ψ'; ω'),
- $V^\cdot$ et $V'^\cdot$ sont à limites inductives dénombrablement filtrantes et le foncteur inclusion est compatible avec ces limites inductives,
- $V'^\cdot$ est à produits fibrés de deux morphismes et pour tout couple (z', z) de deux morphismes de $V'^\cdot$ tel que:

$$+ \underline{\beta}_{V'^\cdot}(z) = \underline{\beta}_{V'^\cdot}(z') = v' \text{ (i.e. ils ont même but } v'),$$

+ $\mathcal{E}_{V'^\bullet}(z)$ est objet de $V^\bullet$,

+ z' est un monomorphisme,

il existe un produit fibré $z \underset{V}{\times} z'$ dans $V'^\bullet$ qui est objet de $V^\bullet$,

- les limites inductives dénombrablement filtrantes commutent avec les produits fibrés dans $V'^\bullet$,

- $V^\bullet$ est à $\mathcal{U}_o$-sommes et le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ est compatible avec ces sommes,

- pour tout objet w de $V'^\bullet$, les foncteurs

$$\mathbb{E}'\, w : V'^\bullet \longrightarrow V'^\bullet$$

et

$$w\, \mathbb{E}' - : V'^\bullet \longrightarrow V'^\bullet$$

(et donc leurs restrictions à $V^\bullet$) sont compatibles avec les limites inductives dénombrablement filtrantes (c'est le cas si $V'^\wedge$ est fermée),

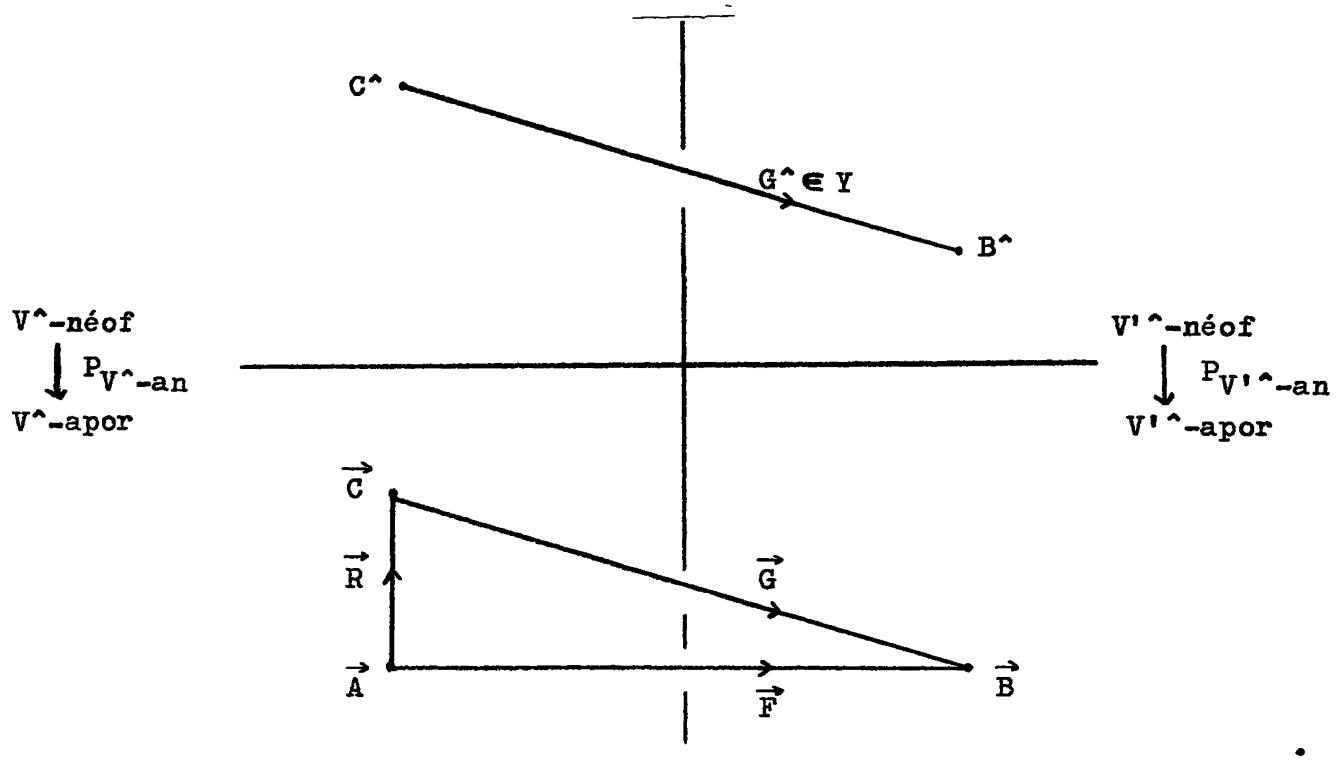
- tout morphisme de $V'^\bullet$, dont la source est objet de $V^\bullet$, admet un X"-reflet dont la source est objet de $V^\bullet$ (où $X'' = \mathrm{Monos}(V'^\bullet)$),

alors, le foncteur $P_{V'^\wedge\text{-an}}$ est $((V^\wedge\text{-apor})_o\ ,\ Y.(V^\wedge\text{-néof})_o\ )$-engendrant.

Le diagramme (IV) de II.7 vérifie donc la condition de génération de II.6.

Dans la suite, nous supposons qu'on a effectué un choix de limites et de X"-reflets (pour celles et ceux dont l'hypothèse assure l'existence), dits canoniques, de sorte que le foncteur $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ soit compatible avec ce choix. De plus, si $G^\wedge$ est un $V'^\wedge$-néofoncteur, on note, comme en I.11, $\vec{G}$ sa $V'^\wedge$-application orientée sous-jacente et, si $B^\wedge$ est un $V'^\wedge$-graphe multiplicatif, $\vec{B}$ désigne son $V'^\wedge$-graphe orienté sous-jacent.

Supposons donc que $B^\wedge$ est un objet de $V'^\wedge$-néof , $\vec{F} : \vec{A} \longrightarrow \vec{B}$ est un morphisme de $V'^\wedge$-apor où $\vec{A}$ est objet de $V^\wedge$-apor. Pour prouver la proposition qui précède, il nous faut construire des $C^\wedge$, $G^\wedge$ et $\vec{R}$ "universels" devant vérifier les conditions représentées par le diagramme commutatif suivant:



Ceci signifie, autrement dit, qu'il nous faut construire un triplet $(C^\wedge, G^\wedge, \vec{R})$ vérifiant les conditions:

(S)
- $C^\wedge$ est un objet de $V^\wedge$-néof ,
- $G^\wedge: C^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ est un élément de Y ,
- $\vec{R}: \vec{A} \longrightarrow \vec{C}$ est une $V^\wedge$-application orientée telle que $\vec{G}.\vec{R} = \vec{F}$.

Pour construire ce triplet, d'après le Lemme 2 de II.12, il revient au même de supposer que $\vec{F}$ est élément de l'ensemble $\underline{Y}$ construit en II.12 . C'est donc ce que nous supposons dans la construction qui suit et que nous subdivisons, pour plus de clarté car elle est fort longue, en étapes a), b), ...

a). Pour ce qui concerne les <u>objets des structures et les restrictions aux objets des morphismes</u> du triplet $(C^\wedge, G^\wedge, \vec{R})$ que nous voulons construire, il est clair qu'il nous faut poser:

- $C^\wedge_o = \{F(a) \,/\, a \in \vec{A}_o\}$,
- $G: C^\wedge_o \longrightarrow B^\wedge_o$ est l'inclusion (donc G vérifie la propriété (y") de II.10),

- $R: \vec{A}_o \longrightarrow \vec{C}_o$ (i.e. $R: \vec{A}_o \longrightarrow C^\wedge_o$) est la restriction de $F: \vec{A}_o \longrightarrow \vec{B}_o$ (i.e. $F: \vec{A}_o \longrightarrow B^\wedge_o$), alors R est injective puisque F l'est, $\vec{F}$ appartenant à $\underline{Y}$.

Dans la suite, si a (resp. a',a" ...) est élément de $\vec{A}_o$, nous poserons, pour simplifier, F(a) = c (resp. F(a') = c' , F(a") = c" ...) pour rappeler qu'il s'agit aussi d'objets de C^.Inversement, si c (resp. c',c" ...) est un objet de C^, il lui correspond une seule image réciproque dans $\vec{A}_o$, puisque F est injective, et nous la noterons a (resp. a', a" ...).

b). Pour définir les "Hom à valeurs dans V^ "des structures et les restrictions à ces "Hom" des morphismes de $(C^\wedge, G^\wedge, \vec{R})$ que nous voulons construire, nous utiliserons un raisonnement par récurrence (dénombrable) dont la "première étape" est définie comme suit:

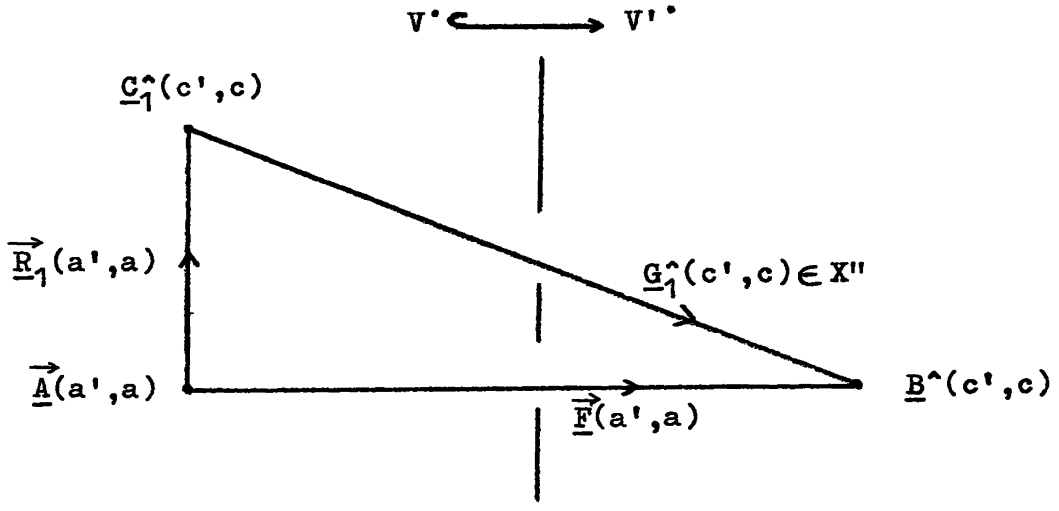
- les applications

$$\underline{C}^\wedge_1 : C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow V^\bullet_o \ ,$$

$$\underline{G}^\wedge_1 : C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow X" \ ,$$

$$\underline{\vec{R}}_1 : \vec{A}_o \times \vec{A}_o \longrightarrow V$$

sont telles que, pour tout couple (a',a) d'objets de $\vec{A}$, le diagramme commutatif



représente la décomposition de $\underline{\vec{F}}(a',a)$ en son X"-reflet dans V''• .

c). Pour pouvoir construire la (n + 1)-ième étape de la récurrence, dont la première étape est définie en b) , à partir de la n-ième étape, il nous faut construire une famille $((M_{(q,p)},m_{(q,p)}))_{(q,p)}$ $\substack{1\leqslant q\leqslant n\\ 1\leqslant p\leqslant n}$.

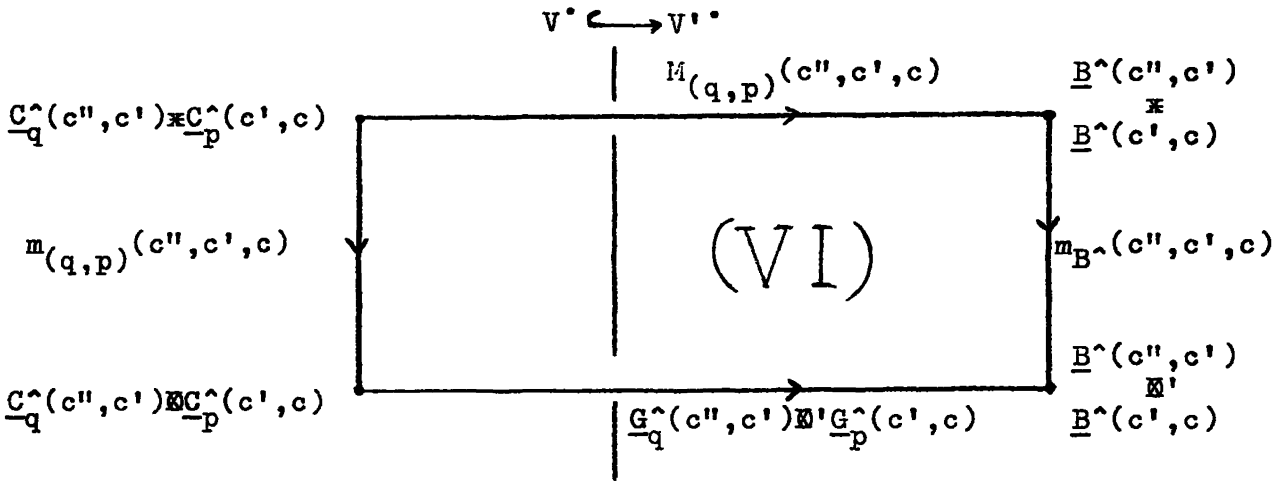
Pour ce faire, supposons que, pour tout $1\leqslant p\leqslant n$, on ait défini les applications

$$\underline{C}^{\wedge}_p\colon C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \longrightarrow V^{\cdot}_o \ ,$$
$$\underline{G}^{\wedge}_p\colon C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \longrightarrow X'' \ ,$$

de telle sorte que, pour tout couple (c',c) d'objets de C^, on ait:

$$\underline{G}^{\wedge}_p(c',c)\colon \underline{C}^{\wedge}_p(c',c) \longrightarrow \underline{B}^{\wedge}(c',c) \ .$$

Alors, le diagramme commutatif (VI) ci-dessous, qui est, pour tout triplet (c",c',c) d'objets de C^, un produit fibré canonique dans V'• :



(un tel diagramme existe par hypothèse, puisque $m_{B^{\wedge}}(c'',c',c) \in X''$, et de plus $m_{(q,p)}(c'',c',c)$ est alors un monomorphisme), définit, pour tout $1\leqslant p\leqslant n$ et tout $1\leqslant q\leqslant n$, les applications

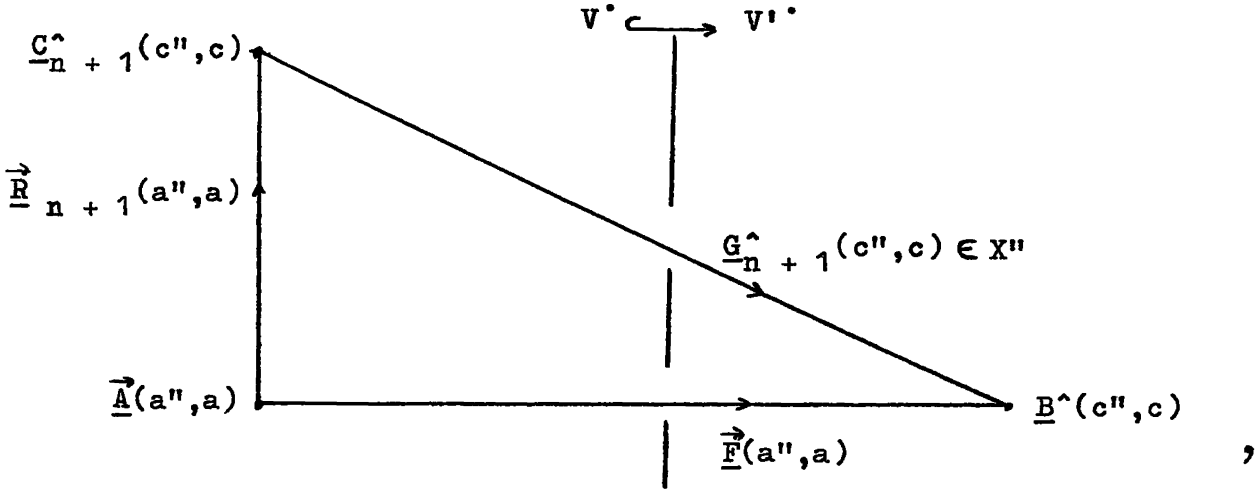
$$M_{(q,p)}\colon C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \longrightarrow V' \ ,$$
$$m_{(q,p)}\colon C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \longrightarrow \mathrm{Monos}(V^{\cdot}) \ .$$

d). Nous sommes, maintenant, en mesure de construire les applications ((n + 1)-ième étape de la récurrence):

$$\underline{C}^{\wedge}_{n+1}\colon C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \longrightarrow V^{\cdot}_o \ ,$$

$$\underline{G}^{\wedge}_{n+1} : C^{\wedge}_{o} \times C^{\wedge}_{o} \longrightarrow X'' \quad ,$$
$$\underline{\vec{R}}_{n+1} : \vec{A}_{o} \times \vec{A}_{o} \longrightarrow V$$

telles que, pour tout couple (c",c) d'objets de C^, le diagramme ci-dessous commute

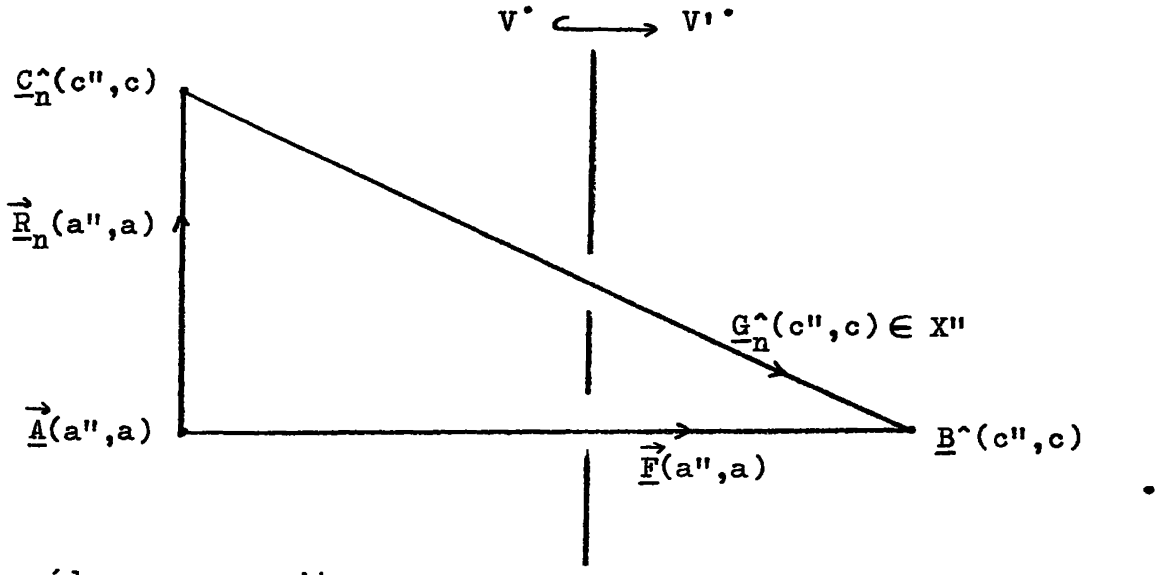


,

et ceci, connaissant les applications (n-ième étape de la récurrence):

$$\underline{C}^{\wedge}_{n} : C^{\wedge}_{o} \times C^{\wedge}_{o} \longrightarrow V^{\cdot}_{o} \quad ,$$
$$\underline{G}^{\wedge}_{n} : C^{\wedge}_{o} \times C^{\wedge}_{o} \longrightarrow X'' \quad ,$$
$$\underline{\vec{R}}_{n} : \vec{A}_{o} \times \vec{A}_{o} \longrightarrow V$$

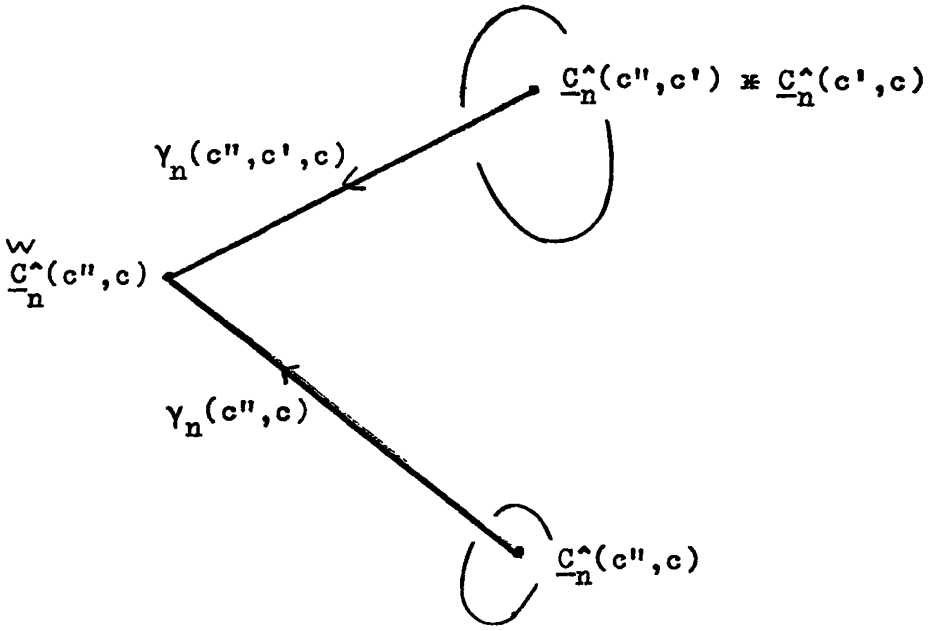
qui, pour tout couple (c",c) d'objets de C^, rendent le diagramme suivant commutatif:



.

Nous procédons comme suit:

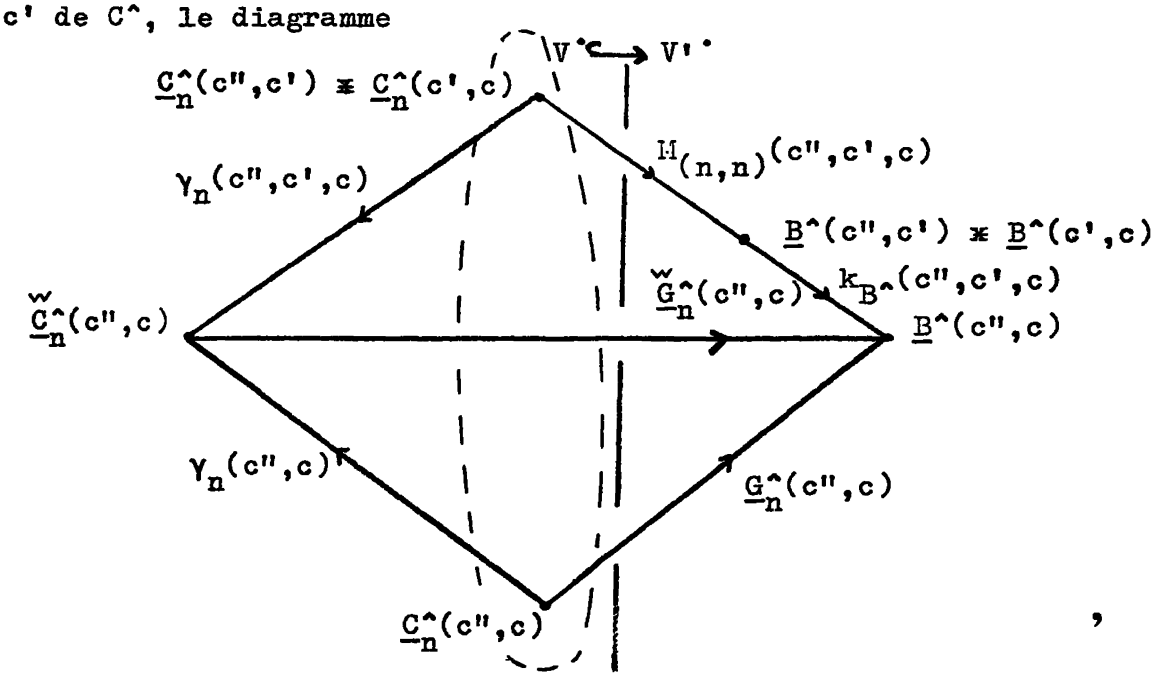
- pour tout couple (c",c) d'objets de C^, le diagramme



définit une somme canonique dans $V^{\bullet}$ (et donc dans $V'^{\bullet}$) de la famille

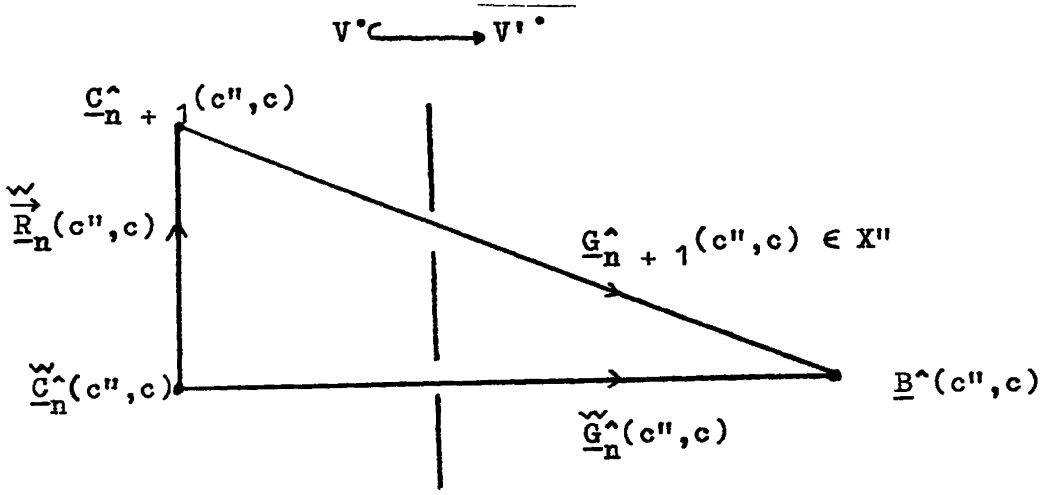
$$\left(\underline{C}_n^{\wedge}(c'',c) \ , \ (\underline{C}_n^{\wedge}(c'',c') \ast \underline{C}_n^{\wedge}(c',c))_{c' \in C_o^{\wedge}} \right) ,$$

- pour tout couple (c'',c) d'objets de $C^{\wedge}$, on désigne, en conséquence, par $\overset{\vee}{\underline{G}}_n^{\wedge}(c'',c)$ l'unique morphisme de $V'^{\bullet}$ rendant commutatif, pour tout objet c' de $C^{\wedge}$, le diagramme



,

- pour tout couple (c'',c) d'objets de $C^{\wedge}$, on définit alors $\underline{G}_{n+1}^{\wedge}(c'',c)$ et $\underline{C}_{n+1}^{\wedge}(c'',c)$ en imposant que le diagramme



représente la décomposition de $\overset{\rightsquigarrow}{\underline{G}}^{\wedge}_n(c'',c)$ en son X''-reflet dans V'°,

- enfin, nous posons, pour tout couple (a'',a) d'objets de $\vec{A}$,

$$\vec{\underline{R}}_{n+1}(a'',a) = \overset{\rightsquigarrow}{\vec{\underline{R}}}_n(c'',c).\ \gamma_n(c'',c).\vec{\underline{R}}_n(a'',a)$$

(et on a bien, ainsi,

$$\underline{G}^{\wedge}_{n+1}(c'',c).\vec{\underline{R}}_{n+1}(a'',a) = \vec{\underline{F}}(a'',a) \quad) .$$

(Remarquons que seule la famille $(M_{(n,n)}(c'',c',c))_{1 \leqslant n}$ a été utilisée. Cependant, la famille $(M_{(q,p)}(c'',c',c))_{1 \leqslant q \text{ et } 1 \leqslant p}$ sera indispensable en g).)

e). La construction précédente permet également de définir, pour tout entier $n \geqslant 1$, une <u>application "composition"</u>

$$k_{C^{\wedge}_n} : C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \times C^{\wedge}_o \longrightarrow V$$

telle que, pour tout triplet (c'',c',c) d'objets de C^, on ait:

$$k_{C^{\wedge}_n}(c'',c',c): \underline{C}^{\wedge}_n(c'',c') \times \underline{C}^{\wedge}_n(c',c) \longrightarrow \underline{C}^{\wedge}_{n+1}(c'',c) .$$

Il suffit, en effet, de poser, pour tout triplet (c'',c',c) d'objets de C^:

$$k_{C^{\wedge}_n}(c'',c',c) = \overset{\rightsquigarrow}{\underline{R}}_n(c'',c\ ).\ \gamma_n(c'',c',c) .$$

f). Désignons par N° la structure de catégorie associée à l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^{*}, \leqslant)$. La récurrence que l'on vient de définir va nous permettre de <u>construire complètement</u> $(C^{\wedge}, G^{\wedge}, \vec{R})$ en "<u>passant à la limite</u>" (i.e. à des $\{N^{\circ}\}$-limites inductives et à des $\{N^{\circ} \times N^{\circ}\}$-limites inductives).

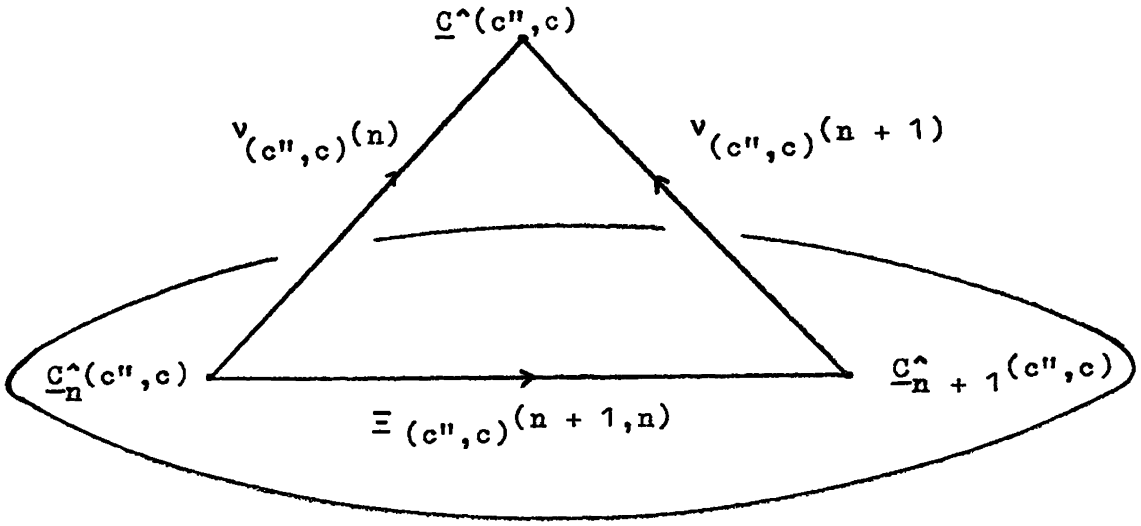
Pour tout couple (c",c) d'objets de $C^\wedge$, nous désignons par:

$$\Xi_{(c",c)}: N^\cdot \longrightarrow V^\cdot$$

le foncteur qui, à tout $(n+1,n): n \longrightarrow n+1$ de $N^\cdot$, associe:

$$\Xi_{(c",c)}(n+1,n): \underline{C}^\wedge_n(c",c) \xrightarrow{\gamma_n(c",c)} \overset{\sim}{\underline{C}}{}^\wedge_n(c",c) \xrightarrow{\overset{\sim}{\underline{R}}_n(c",c)} C^\wedge_{n+1}(c",c) .$$

Alors, le diagramme commutatif suivant:



représente, pour tout couple (c",c) d'objets de $C^\wedge$, la limite inductive dénombrablement filtrante (i.e. la $\{N^\cdot\}$-limite inductive) de $\Xi_{(c",c)}$ dans $V^\cdot$ (et donc dans $V'^\cdot$) et ceci définit bien une application

$$\underline{C}^\wedge: C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow V .$$

En vertu de la construction de d) , on établit facilement que la famille de monomorphismes, indexée par $N^{\ast}$, dont l'élément générique est:

$$\underline{G}^\wedge_n(c",c): \underline{C}^\wedge_n(c",c) \longrightarrow \underline{B}^\wedge(c",c),$$

définit, pour tout couple (c",c) d'objets de $C^\wedge$, une transformation naturelle:

$$\underline{G}^\wedge(c",c): \quad \Xi_{(c",c)} \Longrightarrow \mathrm{Const}(\underline{B}^\wedge(c",c))$$

(où $\mathrm{Const}(\underline{B}^\wedge(c",c)): N^\cdot \longrightarrow V'^\cdot$ est le foncteur constant sur $\underline{B}^\wedge(c",c)$), dont la $\{N^\cdot\}$-limite inductive est:

$$\varinjlim \Xi_{(c'',c)} = \underline{C}\hat{}(c'',c) \xrightarrow{\underline{G}\hat{}(c'',c)} \underline{B}\hat{}(c'',c) = \varinjlim \mathrm{Const}(\underline{B}\hat{}(c'',c))$$

(on a bien $\underline{B}\hat{}(c'',c) = \varinjlim \mathrm{Const}(\underline{B}\hat{}(c'',c))$ car $\mathbf{N}^{\bullet}$ est une catégorie connexe).

Il en résulte que, pour tout couple (c",c) d'objets de $C\hat{}$, $\underline{G}\hat{}(c'',c)$ est un monomorphisme (d'où $G\hat{}$ vérifie (y')), d'après la commutation des limites inductives filtrantes avec les produits fibrés dans $V'^{\bullet}$, et donc que l'on définit bien, ainsi, une application:

$$\underline{G}\hat{}: C\hat{}_o \times C\hat{}_o \longrightarrow X'' .$$

Si, maintenant, on pose, pour tout couple (a",a) d'objets de $\vec{A}$:

$$\underline{\vec{R}}(a'',a): \underline{\vec{A}}(a'',a) \xrightarrow{\underline{\vec{R}}_1(a'',a)} \underline{C}\hat{}_1(c'',c) \xrightarrow{\nu_{(c'',c)}(1)} \underline{C}\hat{}(c'',c)$$

(voir la construction de b)), on établit facilement que:

$$\underline{G}\hat{}(c'',c).\underline{\vec{R}}(a'',a) = \underline{\vec{F}}(a'',a)$$

et l'on définit bien une application:

$$\underline{\vec{R}}: \vec{A}_o \times \vec{A}_o \longrightarrow V .$$

Nous avons donc terminé la construction (annoncée en b)) des "Hom à valeurs dans $V\hat{}$ " des structures et des restrictions à ces "Hom" des morphismes du triplet $(C\hat{},G\hat{},\vec{R})$.

Il nous reste à construire ce qui concerne la composition, ce que nous faisons dans la suite.

g). Supposons que (c",c',c) est un triplet quelconque d'objets de $C\hat{}$.

D'après précédemment, nous avons les transformations naturelles:

$$\underline{G}\hat{}(c'',c'): \Xi_{(c'',c')} \Longrightarrow \mathrm{Const}(\underline{B}\hat{}(c'',c'))$$

$$\underline{G}\hat{}(c',c): \Xi_{(c',c)} \Longrightarrow \mathrm{Const}(\underline{B}\hat{}(c',c))$$

(qui sont donc des morphismes de $V'^{\bullet^{(N^{\bullet})}}$).

On en déduit une transformation naturelle:

$$\underline{G}\hat{}(c'',c') \,\mathbb{E}'\, \underline{G}\hat{}(c',c): \Xi_{(c'',c')} \,\mathbb{E}'\, \Xi_{(c',c)} \Longrightarrow \mathrm{Const}\begin{pmatrix} \underline{B}\hat{}(c'',c') \\ \mathbb{E}' \\ \underline{B}\hat{}(c',c) \end{pmatrix}$$

(morphisme de $V'^{.(N^{\bullet} \times N^{\bullet})}$), où:

$$\Xi_{(c'',c')} \mathbb{O}' \Xi_{(c',c)} : N^{\circ} \times N^{\circ} \xrightarrow{\Xi_{(c'',c')} \times \Xi_{(c',c)}} V'^{\circ} \times V'^{\circ} \xrightarrow{\mathbb{O}'} V'^{\circ}.$$

Comme, de plus, nous avons la transformation naturelle constante (morphisme de $V'^{\circ (N^{\circ} \times N^{\circ})}$):

$$\text{Const}(m_{\underline{B}^{\wedge}(c'',c',c)}) : \text{Const} \begin{pmatrix} \underline{B}^{\wedge}(c'',c') \\ \ast \\ \underline{B}^{\wedge}(c',c) \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Const} \begin{pmatrix} \underline{B}^{\wedge}(c'',c') \\ \mathbb{O}' \\ \underline{B}^{\wedge}(c',c) \end{pmatrix},$$

le diagramme (de $V'^{\circ (N^{\circ} \times N^{\circ})}$):

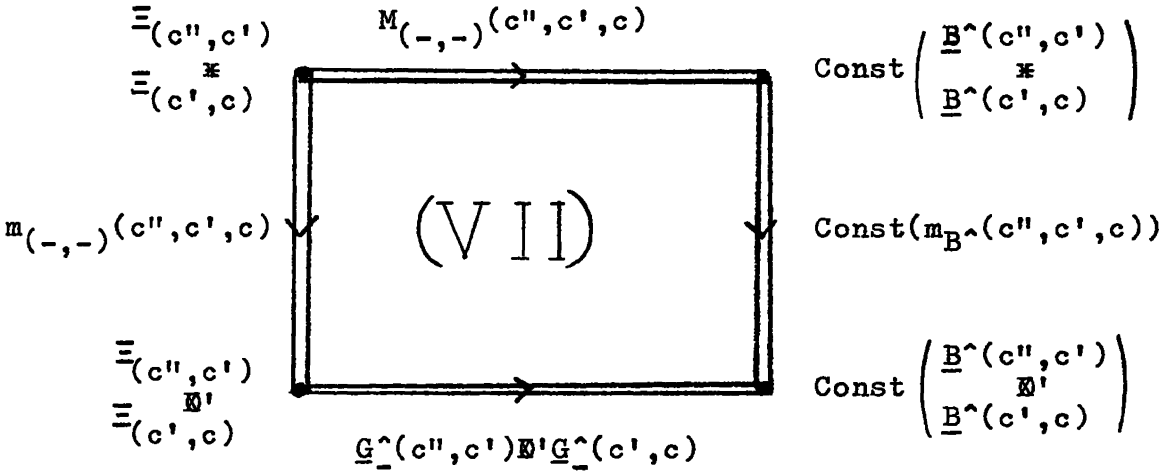
$$\begin{array}{ccc} \Xi_{(c'',c')} \mathbb{O}' \Xi_{(c',c)} & \xrightarrow{\underline{G}^{\wedge}(c'',c') \mathbb{O}' \underline{G}^{\wedge}(c',c)} & \text{Const} \begin{pmatrix} \underline{B}^{\wedge}(c'',c') \\ \ast \\ \underline{B}^{\wedge}(c',c) \end{pmatrix} \\ & & \downarrow \text{Const}(m_{\underline{B}^{\wedge}(c'',c',c)}) \\ & & \text{Const} \begin{pmatrix} \underline{B}^{\wedge}(c'',c') \\ \mathbb{O}' \\ \underline{B}^{\wedge}(c',c) \end{pmatrix} \end{array},$$

admet pour image dans V'° , par le foncteur $ev_{(q,p)} : V'^{\circ (N^{\circ} \times N^{\circ})} \longrightarrow V'^{\circ}$ (évaluation en l'objet $((q,q),(p,p))$ de $N^{\circ} \times N^{\circ}$), le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}_q^{\wedge}(c'',c') \mathbb{O} \underline{C}_p^{\wedge}(c',c) & \xrightarrow{\underline{G}_q^{\wedge}(c'',c') \mathbb{O}' \underline{G}_p^{\wedge}(c',c)} & \underline{B}^{\wedge}(c'',c') \ast \underline{B}^{\wedge}(c',c) \\ & & \downarrow m_{\underline{B}^{\wedge}(c'',c',c)} \\ & & \underline{B}^{\wedge}(c'',c') \mathbb{O}' \underline{B}^{\wedge}(c',c) \end{array}$$

Comme $V'^{\bullet}$ est à produits fibrés, il en est de même de $V'^{\bullet(N^{\bullet} \times N^{\bullet})}$ et ils s'y calculent "point par point".

Autrement dit, on peut prendre pour produit fibré dans $V'^{\bullet(N^{\bullet} \times N^{\bullet})}$ le diagramme (VII):

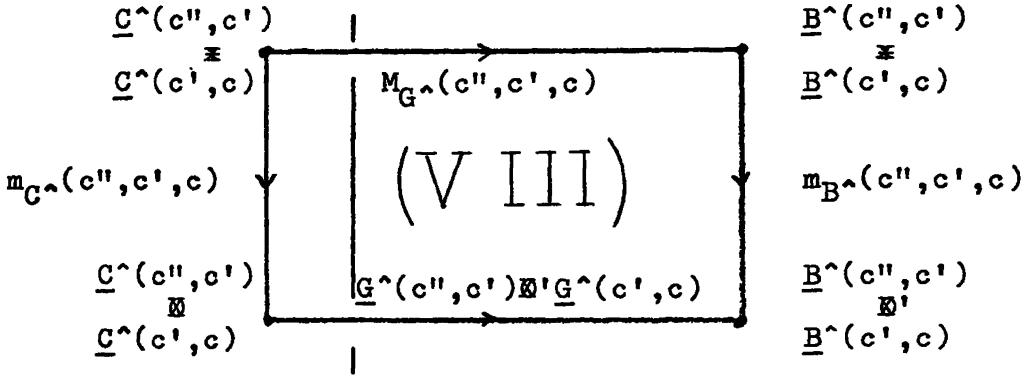


dont l'image par le foncteur $ev_{(q,p)}$ est le diagramme (VI) de c) (dont on rappelle qu'il est, par définition, un produit fibré dans $V'^{\bullet}$).

Les hypothèses de commutation de limites et de compatibilité des foncteurs $- \mathbb{M}' w$ et $w \mathbb{M}' -$ (pour tout $w \in V'^{\bullet}_{o}$) avec les limites inductives dénombrablement filtrantes, et la connexité de $N^{\bullet} \times N^{\bullet}$ assurent que l'on peut choisir un foncteur "passage à la limite inductive"

$$\varinjlim : V'^{\bullet\,\overline{(N^{\bullet} \times N^{\bullet})}} \longrightarrow V'^{\bullet} ,$$

pour lequel l'image du diagramme (VII) précédent est un diagramme de la forme:



qui est un produit fibré dans $V'^{\bullet}$ (donc, $G\hat{}$ vérifie (y) et $m_{C\hat{}}(c'',c',c)$ est bien un monomorphisme).

Enfin, si l'on pose, pour tout $1 \leqslant p$ et tout $1 \leqslant q$ (avec $s = \sup(q,p)$):

$$k_{(q,p)}(c'',c',c) = \nu_{(c'',c)}(s+1).k_{C^\wedge_s}(c'',c',c).(\Xi_{(c'',c')}(s,q) \ast \Xi_{(c',c)}(s,p))$$

(on rappelle que les $(k_{C^\wedge_n}(c'',c',c))_{n \geqslant 1}$ ont été définis en e)),

on voit qu'il s'agit d'un morphisme de $V^\bullet$ de la forme:

$$k_{(q,p)}(c'',c',c): \underline{C}^\wedge_q(c'',c') \ast \underline{C}^\wedge_p(c',c) \longrightarrow \underline{C}^\wedge(c'',c) .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la famille

$$(k_{(q,p)}(c'',c',c))_{(q,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$$

définit alors une transformation naturelle:

$$k_{(-,-)}(c'',c',c): \Xi_{(c'',c')} \ast \Xi_{(c',c)} \longrightarrow \mathrm{Const}(\underline{C}^\wedge(c'',c)),$$

dont l'image, par le foncteur $\varinjlim$, est (puisque $N^\bullet \times N^\bullet$ est connexe):

$$k_{C^\wedge}(c'',c',c): \underline{C}^\wedge(c'',c') \ast \underline{C}^\wedge(c',c) \longrightarrow \underline{C}^\wedge(c'',c) .$$

Ainsi, nous avons construit les applications:

$$m_{C^\wedge} : C^\wedge_o \times C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow \mathrm{Monos}(V^\bullet) ,$$
$$k_{C^\wedge} : C^\wedge_o \times C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow V ,$$
$$M_{G^\wedge} : C^\wedge_o \times C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow V' .$$

h). Pour achever la construction du triplet $(C^\wedge, G^\wedge, \vec{R})$, il nous suffit donc de définir les applications:

$$j_{C^\wedge} : C^\wedge_o \longrightarrow V ,$$
$$\alpha_{C^\wedge} : C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow V ,$$
$$\underline{\beta}_{C^\wedge} : C^\wedge_o \times C^\wedge_o \longrightarrow V$$

qui viendront, donc, s'ajouter à celles obtenues en a), f) et g).

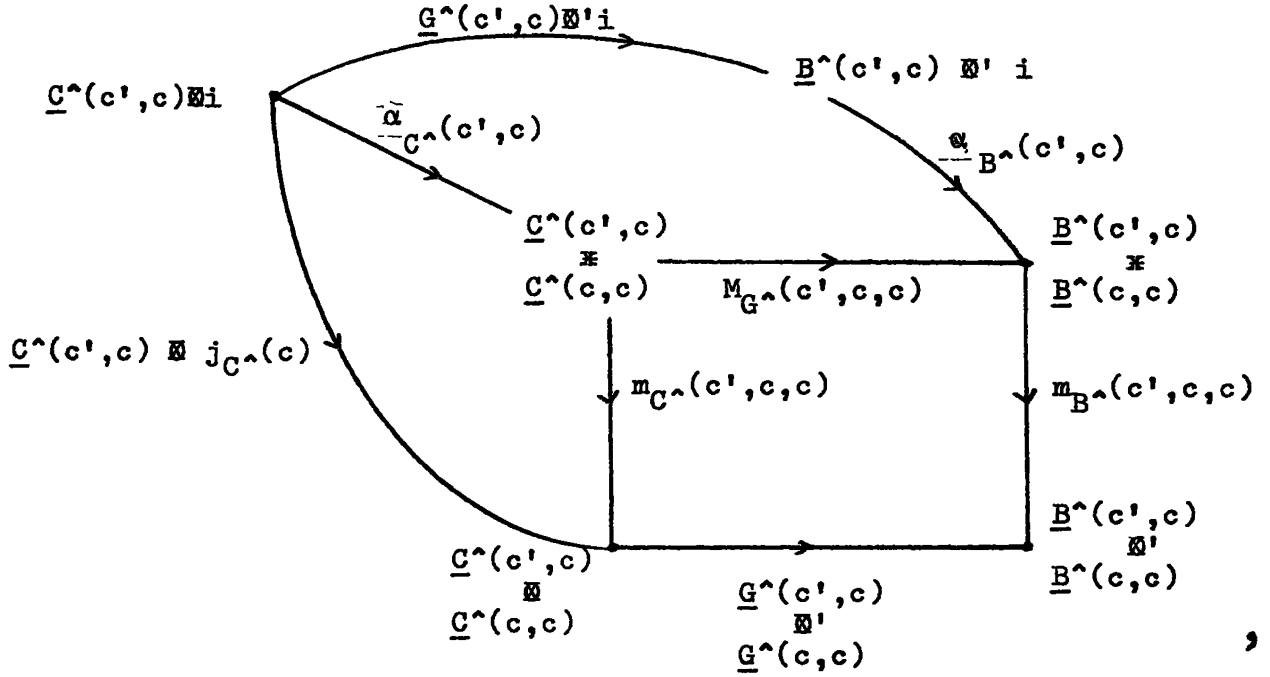
Si (c',c) est un couple quelconque d'objets de $C^\wedge$, nous posons:

- $j_{C^\wedge}(c)$ est le morphisme composé dans $V^\bullet$:

$$j_{C^\wedge}(c): i \xrightarrow[j^{\vec{A}}(a)]{} \underline{\vec{A}}(a,a) \xrightarrow[\underline{\vec{R}}(a,a)]{} \underline{C}^\wedge(c,c) ,$$

ce qui définit l'application $j_{C^\wedge}$,

- $\underline{\alpha}_{C^\wedge}(c',c)$ est l'unique morphisme de $V^\bullet$ qui rend commutatif le diagramme ci-dessous (on rappelle que le diagramme (VIII) est un produit fibré dans $V'^\bullet$):



ce qui définit l'application $\underline{\beta}_{C^\wedge}$ (et par analogie, l'application $\underline{\beta}_{C^\wedge}$).

i) Nous laissons au lecteur le soin de prouver que $C^\wedge$ est bien un $V^\wedge$-graphe multiplicatif (axiomes d'unitarité), $G^\wedge$ est bien un $V'^\wedge$-néofoncteur (compatibilités) et $\vec{R}$ une $V^\wedge$-application orientée (compatibilité) et que $(C^\wedge, G^\wedge, \vec{R})$ est bien "universel" (il lui faudra, bien sûr, de la patience, mais il lui suffira d'appliquer le caractère universel de chacune des constructions précédentes dans l'ordre où elles se présentent).

La proposition énoncée se trouve donc démontrée.

Remarquons que l'on aurait pu utiliser des hypothèses légèrement plus

faibles, nous avons cependant préféré les énoncer sous cette forme, d'une part pour plus de facilité, d'autre part parce qu'elles sont toujours vérifiées dans la pratique.

II.14. Les propositions de II.7, II.8, II.9, II.10, II.11 et II.13 assurent que le Théorème général d'existence de limites inductives s'applique au diagramme (IV) de II.7 (i.e. à $V^{\wedge}$-néof) et ce, sous des hypothèses qui sont la réunion des hypothèses de ces diverses propositions.

Nous préférons cependant, pour fixer les idées, énoncer le Théorème particulier d'existence de limites inductives dans $V^{\wedge}$-néof avec des hypothèses un peu plus fortes (mais qui, de toute manière, sont "toujours" vérifiées dans la pratique).

En effet, $V^{\wedge}$ et $V'^{\wedge}$ jouent, intuitivement, des rôles analogues relativement aux univers $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$: la distinction qu'elles introduisent ne concerne, en fait, que la "taille" des objets considérés. Il nous a donc semblé préférable de ne pas distinguer avec précision les propriétés nécessaires, qui concernent leurs limites (et qui ne sont pas "techniquement" analogues dans $V^{\cdot}$ et $V'^{\cdot}$), de celles qui sont superflues.

Théorème (Existence de limites inductives dans $V^{\wedge}$-néof).

Si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers, si $V^{\wedge} = (V^{\cdot}, \otimes, i, \phi, \psi, \omega)$ et $V'^{\wedge} = (V'^{\cdot}, \otimes', i', \phi', \psi', \omega')$ sont deux catégories monoïdales, si $\mathcal{F}_o$ (resp. $\mathcal{F}'_o$) est l'ensemble des catégories relatives à $\mathcal{U}_o$ (resp. $\mathcal{U}'_o$) et si, de plus:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$ (première condition de taille),
- $V \in \mathcal{U}'_o$ (deuxième condition de taille),
- $V^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $V'^{\cdot}$,

- $\mathbb{E}$ (resp. ϕ; ψ; ω) est une restriction de $\mathbb{E}'$ (resp. ϕ'; ψ'; ω'),
- $i = i'$,
- $V^\bullet$ est à $\mathfrak{I}_o$-limites projectives, $V'^\bullet$ est à $\mathfrak{I}'_o$-limites projectives et le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ est compatible avec ces limites,
- $V^\bullet$ est à $\mathfrak{I}_o$-limites inductives, $V'^\bullet$ est à $\mathfrak{I}'_o$-limites inductives et le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ est compatible avec ces limites,
- les limites inductives dénombrablement filtrantes commutent avec les produits fibrés (de deux morphismes) dans $V'^\bullet$,
- pour tout objet w de $V'^\bullet$, les foncteurs $- \mathbb{E}'\ w : V'^\bullet \longrightarrow V''$ et $w\ \mathbb{E}'\ - : V'^\bullet \longrightarrow V'^\bullet$ sont compatibles avec les $\mathfrak{I}'_o$-limites inductives,
- tout morphisme de $V'^\bullet$, dont la source est objet de $V^\bullet$, admet une image dans $V'^\bullet$ dont la source est objet de $V^\bullet$ (troisième condition de taille),
- tout couple (z',z) de morphismes $z : v \longrightarrow v'$ et $z' : v'' \longrightarrow v'$ de $V'^\bullet$, tel que z' est un monomorphisme de $V'^\bullet$ et v est objet de $V^\bullet$, admet un produit fibré $z \underset{v'}{\times} z'$ qui est objet de $V^\bullet$ (quatrième condition de taille),

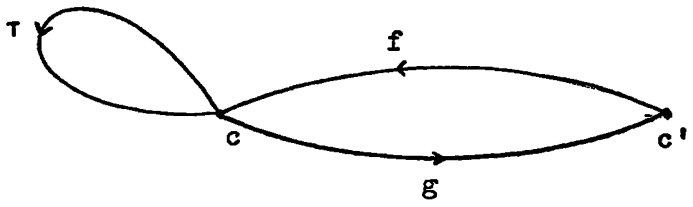
alors, la catégorie $V^\wedge$-néof est à $\mathfrak{I}_o$-limites inductives.

II.15. Soit $\mathcal{U}_o$ un univers et $\mathcal{N}'$ (resp. $\mathfrak{I}$) la catégorie pleine de néofoncteurs (resp. de foncteurs) relatifs à $\mathcal{U}_o$.
Moyennant l'axiome des univers (voir 0.12), il existe un univers $\mathcal{U}'_o$ tel que:
- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$ (T.E.N.S).

Si $\mathcal{N}''$ (resp. $\mathfrak{I}'$) est la catégorie pleine de néofoncteurs (resp. de foncteurs) relatifs à $\mathcal{U}'_o$, il est évident que toutes les hypothèses du Théorème de II.14 sont vérifiées. C'est dire que $\mathcal{N}'^\wedge$-néof (resp. $\mathfrak{I}^\wedge$-néof) est à $\mathfrak{I}_o$-limites inductives.
On peut, évidemment, multiplier les exemples de cette nature.

Exhibons, pour fixer les idées, une somme fibrée particulière dans la catégorie $\mathcal{N}'^\wedge$-néof.

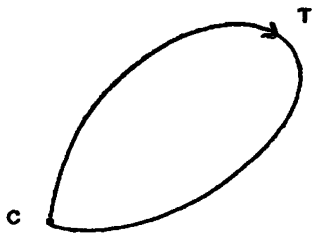
Désignons par $\mathbb{P}^{\wedge}$ le $\mathcal{N}'^{\wedge}$-graphe multiplicatif qui n'a pas de 2-morphismes non triviaux et dont le graphe multiplicatif sous-jacent est représenté par:



où $T = f.g$

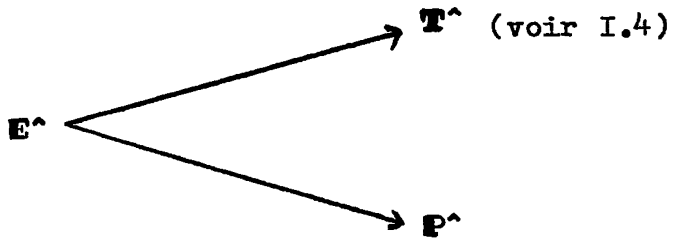
(intuitivement, c et c' "représentent" deux catégories et (f,g) une paire de foncteurs).

Soit, également, $\mathbb{E}^{\wedge}$ le $\mathcal{N}'^{\wedge}$-graphe multiplicatif n'ayant pas de 2-morphismes non triviaux et dont le graphe multiplicatif sous-jacent est représenté par:



(intuitivement, T représente un endofoncteur).

Il est clair que l'on a un diagramme, dans $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néof , constitué de $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néofoncteurs "insertion":



Alors, la somme fibrée, dans $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néof , de ce diagramme est un $\mathcal{N}'^{\wedge}$-

graphe multiplicatif $A^\wedge$ tel que tout $\mathscr{N}'^\wedge$-néofoncteur

$$\theta : \mathbb{A}^\wedge \longrightarrow \mathfrak{Z}^\wedge$$

(où $\mathfrak{Z}^\wedge$ est le $\mathscr{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif sous-jacent à la structure canonique de 2-catégorie sur $\mathfrak{Z}$) s'identifie à la donnée d'une paire d'adjoints

$$\theta(c) = C^\bullet \underset{G = \theta(g)}{\overset{F = \theta(f)}{\rightleftarrows}} C'^\bullet = \theta(c')$$

définissant le triple associé à la restriction de θ à $\mathbb{T}^\wedge$.
On peut donc dire que: l'esquisse de paires d'adjoints (i.e. $\mathbb{A}^\wedge$) est la somme fibrée, au-dessus de l'esquisse d'endofoncteur (i.e. $\mathbb{E}^\wedge$), de l'esquisse de triple (i.e. $\mathbb{T}^\wedge$) et de l'esquisse de paire de foncteurs (i.e. $\mathbb{P}^\wedge$) ... ce qui n'est certainement pas fait pour surprendre.

On voit, de nouveau, sur cet exemple, que la notion de graphe multiplicatif enrichi (et en particulier de 2-graphe multiplicatif, i.e. de $\mathscr{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif) est beaucoup plus manipulable, d'un point de vue "géométrique" (i.e. pour décrire certaines structures), que la notion de catégorie enrichie (et en particulier, celle de 2-catégorie) car on n'utilise (et on n'a à définir) que les seules relations nécessaires. Si certaines constructions paraissent compliquées, c'est soit qu'elles le sont aussi dans le cas des catégories enrichies (par exemple, pour prouver que $V^\wedge$-fonc est à limites inductives, on doit faire un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir le résultat de II.14), soit qu'il s'agit d'établir un rapport entre la situation simple des graphes multiplicatifs enrichis et la situation riche des catégories enrichies (voir par exemple le Chapitre III concernant l'existence d'un adjoint au foncteur $V^\wedge$-fonc $\longleftarrow$ $V^\wedge$-néof).

o

o o

BIBLIOGRAPHIE.

(A.D.E.C.) G. M. Kelly, Adjunction for enriched categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(A.M.C.A.) C. Auderset, Adjonctions et monades au niveau des 2-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XV,1, Paris 1974.

(C.D.S.T.) E. Burroni, Catégories discrètement structurées et triples, Esquisses mathématiques 4, Paris 1970.

(C.L.C.A.) S. Eilenberg et G. M. Kelly, Closed categories, Proc. of the Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, New-York 1966.

(C.O.C.A.) F. Foltz, Complétion des V-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol XIV,1, Paris 1973.

(C.O.S.L.) C. Ehresmann, Construction de structures libres, Lect. Notes in Math. 92, Springer, 1969.

(D.L.A.W.) J. Beck, Distributive laws, Lect. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses mathématiques 23, Paris 1975.

(E.N.F.C.) B. J. Day et G. M. Kelly, Enriched functor categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Inst. Polit. Iaşi, XIV, 1968.

(I.N.B.I.) J. Bénabou, Introduction to bi-categories, Lect. Notes in Math. 47, Springer, 1967.

(M.M.A.G.) C. Ehresmann, Maîtrise de mathématiques: Algèbre et Géométrie (1ère partie: Algèbre), C.D.U., Paris 1968.

(T.E.N.S.) A. Bastiani, Théorie des ensembles, C.D.U., Paris 1970.

o

o o