DIAGRAMMES

C. LAIR

# Éléments de théorie des esquisses. Section 3 : esquisses

*Diagrammes*, tome 49-50 (2003), p. 3-58

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2003__49-50__3_0>

© Université Paris 7, UER math., 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUMES 49 + 50 , 2003

# ELEMENTS DE THEORIE DES ESQUISSES

# SECTION 3 : ESQUISSES

C. Lair

## 1. Introduction.

Ce texte est le troisième d'une série [voir (E.T.E.n.)] où sont exposés quelques éléments de la *théorie des esquisses*. Nous y reprenons systématiquement la terminologie et les notations de (E.T.E.1.).

Nous présentons, ici, les premiers éléments de la théorie des esquisses proprement dites, après avoir exposé en (E.T.E.1.) et (E.T.E.2.) quelques rudiments de la *théorie des graphes à composition*, qui en sont structurellement les *supports*.

Introduites initialement [dans une version un peu plus particulière que celle considérée ici] par C. Ehresmann [voir (E.T.S.C.) et (E.T.S.A.)], nous regardons les esquisses avant tout comme des *descriptions diagrammatiques* de théories du premier ordre [au sens des logiciens].

On trouvera en (L.D.T.E.) une présentation certainement plus exhaustive sur bien des points [mais ne concernant, essentiellement, que les esquisses *projectives*].

Formellement [§2 et §3], les *esquisses* sont des graphes à composition [au sens de (E.T.E.1.)] où sont *distingués* certains cônes projectifs, non nécessairement

limites, et certains cônes inductifs,. non nécessairement limites. Tandis que les *prototypes* sont, plus rigidement, des *catégories* où sont distingués certains cônes projectifs, *nécessairement limites*, et certains cônes inductifs, *nécessairement limites*. Ainsi, en particulier, les graphes à composition s'identifient à des esquisses où *aucun* cône n'est distingué, tandis que les "théories" [au sens des catégoriciens, par exemple comme dans (S.F.A.T.)], i.e. les catégories complètes et/ou cocomplètes [pour certains genres de limites et/ou colimites], sont des prototypes où *tous* les cônes projectifs limites et/ou *tous* les cônes inductifs colimites [de ces genres] sont distingués.

Alors, les *propagateurs* entre esquisses, en particulier entre prototypes, ne sont pas autre chose que les homomorphismes entre ces structures, i.e. les foncteurs qui *préservent* les cônes distingués, tandis que les *métamorphoses naturelles* entre propagateurs ne sont rien d'autre que les transformations naturelles entre les foncteurs qui leur sont sous-jacents.

Un propagateur d'une esquisse, y compris d'un prototype, vers une catégorie complète et/ou cocomplète a tout naturellement pour image une esquisse qui *n'est pas*, en général, un prototype [et encore moins une catégorie complète et/ou cocomplète]. Mais, lorsqu'on "sature" cette image par composition et factorisations [de ses cônes au travers de ses cônes limites et/ou colimites distingués de même base], elle *engendre* un sous-prototype de la catégorie "contexte", i.e. codomaine de ce propagateur.

Plus généralement et plus structurellement encore, i.e. "hors"de tout tel "contexte", nous détaillons explicitement [§4] une procédure formelle [par "agrégation" d'esquisses, i.e. grâce à une limite inductive d'une famille d'esquisses s'engendrant successivement l'une après l'autre, à partir de l'esquisse initiale] montrant que toute telle esquisse initiale engendre toujours un prototype. Et, ce, de sorte que tout propagateur de cette esquisse vers un quelconque prototype "contexte" factorise de manière unique par ce prototype engendré.

Ainsi, les esquisses apparaissent comme autant de *présentations de catégories à limites distinguées*. En s'autorisant à n'utiliser que des esquisses, a fortiori des prototypes, d'une certaine *taille*, conditionnée par un *univers*, il apparaît [§5] que le foncteur d'oubli de la catégorie des prototypes, de cette taille, vers la catégorie des esquisses, de cette taille, admet, évidemment, un adjoint à gauche.

Ce travail résulte d'une collaboration avec D. Duval : on pourra en trouver une version initiale intégrée à (C.O.G.R.).

---

# 2. Cônes projectifs et cônes inductifs, cônes projectifs limites et cônes inductifs limites.

## 2.1. Cônes projectifs et cônes inductifs.

**2.1.a.** Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, un *cône projectif* $c$ *à valeurs dans* $\mathcal{G}$ est constitué par :

- la donnée d'un graphe à composition, appelé *l'indexation [projective] de* $c$ :

$$\texttt{IndexProj}(c)$$

[alors, on note plus suggestivement :

$$\mathcal{X}(c) = \texttt{IndexProj}(c)\,],$$

- la donnée d'un foncteur, qu'on appelle *la base [projective] de* $c$ :

$$\texttt{BaseProj}(c) : \mathcal{X}(c) \to \mathcal{G}$$

[alors, on note plus simplement :

  - $c(X) = \texttt{BaseProj}(c)(X)$, pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c)$,
  - $c(x) = \texttt{BaseProj}(c)(x)$, pour toute flèche $x$ de $\mathcal{X}(c)$ ],

- la donnée d'un point de $\mathcal{G}$, qu'on appelle le *sommet [projectif] de* $c$ :

$$\texttt{SommProj}(c)$$

[alors, on note plus simplement :

$$c^{\times} = \texttt{SommProj}(c)\,],$$

- la donnée, pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c)$, d'une flèche de $\mathcal{G}$, qu'on appelle la *projection de* $c$ *relative à* $X$ :

$$\texttt{Proj}(c,X) : c^{\times} \to c(X)$$

[alors, on note plus simplement :

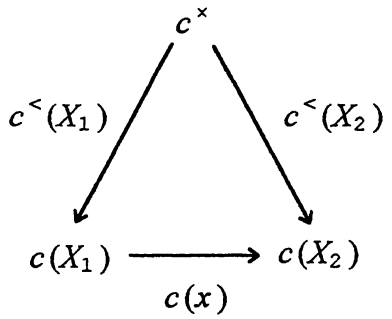
$$c^{<}(X) = \texttt{Proj}(c,X)\,],$$

et, ce, de sorte que :

- pour tous points $X_1$ et $X_2$ de $\mathcal{X}(c)$ et pour toute flèche $x : X_1 \to X_2$ de $\mathcal{X}(c)$, le couple $(c^<(X_1), c(x))$ est un couple composable de $\mathcal{G}$ et on a :

$$c(x) \cdot c^<(X_1) = c^<(X_2),$$

autrement dit, le diagramme [de $\mathcal{G}$] ci-dessous commute :




Alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note aussi, plus suggestivement encore :

$$c = (c^<(X) : c^\times \to c(X))_{X \in \mathcal{X}(c)}.$$

Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{G}$ sont deux graphes à composition et si $c$ est un cône projectif à valeurs dans $\mathcal{G}$ et d'indexation :

$$\texttt{IndexProj}(c) = \mathcal{X}(c) = \mathcal{X},$$

on dit aussi que $c$ est un *cône $\mathcal{X}$-projectif à valeurs dans $\mathcal{G}$*.

Alors, on désigne par :

$$\texttt{CP}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$$

l'ensemble de ces cônes $\mathcal{X}$-projectifs à valeurs dans $\mathcal{G}$.

Ainsi, on dispose [notamment] de l'application *base projective* :

$$\texttt{BP}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) : \texttt{CP}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \to \texttt{EnsFonc}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) = \mathbf{Fonc}(\mathcal{X}, \mathcal{G}),$$

i.e. de l'application telle que :

- pour tout cône $\mathcal{X}$-projectif $c$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, on a :

$$\texttt{BP}(\mathcal{X}, \mathcal{G})(c) = (\texttt{BaseProj}(c) : \mathcal{X} \to \mathcal{G}).$$

**2.1.b.** Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont trois graphes à composition, si $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est un foncteur et si $c$ est un cône $\mathcal{X}$-projectif à valeurs dans $\mathcal{G}$, on note :

$f(c)$

le cône $\mathcal{X}$-projectif à valeurs dans $\mathcal{G}'$ *image de* $c$ *par* $f$, i.e. le cône $\mathcal{X}$-projectif à valeurs dans $\mathcal{G}'$ évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}$, on a :

$$f(c)(X) = f(c(X)),$$

- pour toute flèche $x$ de $\mathcal{X}$, on a :

$$f(c)(x) = f(c(x)),$$

- on a :

$$(f(c))^{\times} = f(c^{\times}),$$

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}$, on a :

$$(f(c))^{<}(X) = f(c^{<}(X)),$$

[au total, on a donc :

$$f(c) = (f(c^{<}(X)) : f(c^{\times}) \to f(c(X))_{X \in \mathcal{X}}].$$

Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont trois graphes à composition et si $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est un foncteur, on désigne par :

$$\mathtt{CP}(\mathcal{X},f) : \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathcal{G}) \to \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathcal{G}')$$

l'application telle :

- pour tout cône $\mathcal{X}$-projectif $c$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathtt{CP}(\mathcal{X},f)(c) = f(c).$$

Ainsi, le diagramme [d'applications] ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathtt{BP}(\mathcal{X},\mathcal{G})} & \mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\mathcal{G}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathtt{CP}(\mathcal{X},f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{Fonc}(\mathcal{X},f)} \\ \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathcal{G}') & \xrightarrow[\mathtt{BP}(\mathcal{X},\mathcal{G}')]{} & \mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\mathcal{G}') \end{array}$$

**2.1.c.** Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, un *cône inductif $c$ à valeurs dans $\mathcal{G}$*, est constitué par :

- la donnée d'un graphe à composition, appelé *l'indexation [inductive] de $c$* :

$$\texttt{IndexInd}(c)$$

[alors, on note plus suggestivement :

$$\mathcal{X}(c) = \texttt{IndexInd}(c)\,],$$

- la donnée d'un foncteur, qu'on appelle la *base [inductive] de $c$* :

$$\texttt{BaseInd}(c) : \mathcal{X}(c) \to \mathcal{G}$$

[alors, on note plus simplement

  - $c(X) = \texttt{BaseInd}(c)(X)$, pour tout point $X$ de $\mathcal{X}$,
  - $c(x) = \texttt{BaseInd}(c)(x)$, pour toute flèche $x$ de $\mathcal{X}$],

- la donnée d'un point de $\mathcal{G}$, qu'on appelle le *sommet [inductif] de $c$* :

$$\texttt{SommInd}(c)$$

[alors, on note plus simplement

$$c^{+} = \texttt{SommInd}(c)\,],$$

- la donnée, pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c)$, d'une flèche de $\mathcal{G}$, qu'on appelle l'*induction de $c$ relative à $X$*:

$$\texttt{Ind}(c,X) : c(X) \to c^{+}$$

[alors, on note plus simplement :

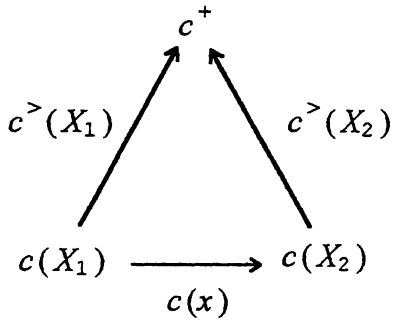
$$c^{>}(X) = \texttt{Ind}\,(c,X)\,],$$

et, ce, de sorte que :

- pour tous points $X_1$ et $X_2$ de $\mathcal{X}(c)$ et pour toute flèche $x : X_1 \to X_2$ de $\mathcal{X}(c)$, le couple $(c(x), c^{>}(X_2))$ est un couple composable de $\mathcal{G}$ et on a :

$$c^{>}(X_2) \bullet c(x) = c^{>}(X_1),$$

autrement dit, le diagramme [de $\mathcal{G}$] ci-dessous commute :




Alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note aussi, plus suggestivement encore :

$$c = (c^>(X) : c(X) \to c^+)_{X \in \mathcal{X}(c)}.$$

Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{G}$ sont deux graphes à composition et si $c$ est un cône inductif à valeurs dans $\mathcal{G}$ et d'indexation :

$$\mathtt{IndexInd}(c) = \mathcal{X}(c) = \mathcal{X},$$

on dit aussi que $c$ est un cône *$\mathcal{X}$-inductif à valeurs dans $\mathcal{G}$*.

Alors, on désigne par :

$$\mathtt{CI}(\mathcal{X},\mathcal{G})$$

l'ensemble de ces cônes $\mathcal{X}$-inductifs à valeurs dans $\mathcal{G}$.

Ainsi, on dispose [notamment] de l'application *base inductive* :

$$\mathtt{BI}(\mathcal{X},\mathcal{G}) : \mathtt{CI}(\mathcal{X},\mathcal{G}) \to \mathtt{EnsFonc}(\mathcal{X},\mathcal{G}) = \mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\mathcal{G}),$$

i.e. de l'application telle que :

- pour tout cône $\mathcal{X}$-inductif $c$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathtt{BI}(\mathcal{X},\mathcal{G})(c) = (\mathtt{BaseInd}(c) : \mathcal{X} \to \mathcal{G}).$$

**2.1.d.** Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont trois graphes à composition, si $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est un foncteur et si $c$ est un cône $\mathcal{X}$-inductif, à valeurs dans $\mathcal{G}$, on note :

$$f(c)$$

le cône $\mathcal{X}$-inductif à valeurs dans $\mathcal{G}'$ *image de $c$ par $f$*, i.e. le cône $\mathcal{X}$-inductif à valeurs dans $\mathcal{G}'$ évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}$, on a :

$$f(c)(X) = f(c(X)),$$

- pour toute flèche $x$ de $\mathcal{X}$, on a :

$$f(c)(x) = f(c(x))),$$

- on a :

$$(f(c))^{+} = f(c^{+}),$$

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}$, on a :

$$(f(c))^{>}(X) = f(c^{>}(X)),$$

[au total, on a donc :

$$f(c) = (f(c^{>}(X)) : f(c(X)) \to f(c^{+}))_{X \in \mathcal{X}}].$$

Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont trois graphes à composition et si $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est un foncteur, on désigne par :

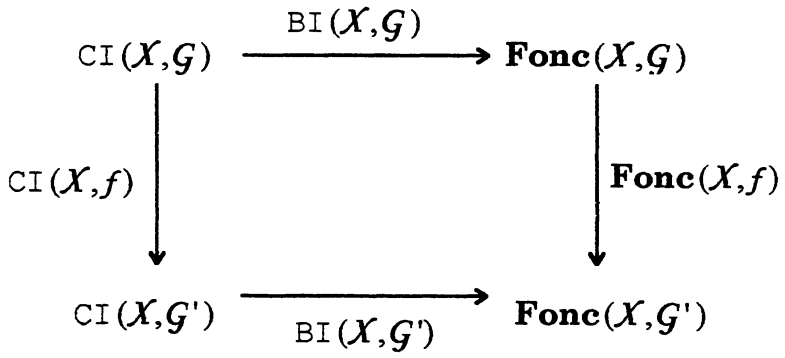
$$\mathtt{CI}(\mathcal{X}, f) : \mathtt{CI}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \to \mathtt{CI}(\mathcal{X}, \mathcal{G}')$$

l'application telle :

- pour tout cône $\mathcal{X}$-inductif $c$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathtt{CI}(\mathcal{X}, f)(c) = f(c).$$

Ainsi, le diagramme [d'applications] ci-dessous commute :




**2.1.e.** Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition et si $c$ est un cône projectif à valeurs dans $\mathcal{G}$, on note :

$$c^{\mathrm{op}}$$

le *cône inductif dual de* $c$, i.e. le cône inductif à valeurs dans $\mathcal{G}^{\mathrm{op}}$ évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

- on a :

$$\mathtt{IndexInd}(c^{op}) = (\mathtt{IndexProj}(c))^{op}$$

[ou encore :

$$\mathcal{X}(c^{op}) = (\mathcal{X}(c))^{op}\,],$$

- on a :

$$\mathtt{BaseInd}(c^{op}) = (\mathtt{BaseProj}(c))^{op} : \mathcal{X}(c^{op}) = (\mathcal{X}(c))^{op} \to \mathcal{G}^{op}$$

[ou encore :

  - pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c^{op})$ :

$$(c^{op})(X) = c(X),$$

  - pour toute flèche $x$ de $\mathcal{X}(c^{op})$ :

$$(c^{op})(x) = c(x)\,],$$

- on a :

$$\mathtt{SommInd}(c^{op}) = \mathtt{SommProj}(c)$$

[ou encore :

$$(c^{op})^{+} = c^{\times}\,],$$

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c^{op})$, on a :

$$\mathtt{Ind}(c^{op}, X) = \mathtt{Proj}(c, X)$$

[ou encore :

$$(c^{op})^{>}(X) = c^{<}(X))\,].$$

De même, si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition et si $c$ est un cône inductif à valeurs dans $\mathcal{G}$, on note :

$$c^{op}$$

le *cône projectif dual de* $c$, i.e le cône projectif à valeurs dans $\mathcal{G}^{op}$ évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

- on a :

$$\mathtt{IndexProj}(c^{op}) = (\mathtt{IndexInd}(c))^{op}$$

[ou encore :

$$\mathcal{X}(c^{op}) = (\mathcal{X}(c))^{op}\,],$$

- on a :

$$\mathtt{BaseProj}(c^{op}) = (\mathtt{BaseInd}(c))^{op} : \mathcal{X}(c^{op}) = (\mathcal{X}(c))^{op} \to \mathcal{G}^{op}$$

[ou encore :

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c^{op})$ :

$$(c^{op})(X) = c(X),$$

- pour toute flèche $x$ de $\mathcal{X}(c^{op})$ :

$$(c^{op})(x) = c(x)\,],$$

- on a :

$$\texttt{SommProj}(c^{op}) = \texttt{SommInd}(c)$$

[ou encore :

$$(c^{op})^{\times} = c^{+}\,],$$

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c^{op})$, on a :

$$\texttt{Proj}(c^{op}, X) = \texttt{Ind}(c, X)$$

[ou encore :

$$(c^{op})^{<}(X) = c^{>}(X)\,)\,].$$

## 2.2. Cônes projectifs et cônes inductifs limites.

**2.2.a.** Si $C$ est une catégorie et si $c$ est un cône projectif à valeurs dans $C$, on dit que $c$ est un *cône projectif limite [à valeurs] dans* $C$ si :

- pour tout cône projectif $c'$, à valeurs dans $C$, de même indexation et de même base que $c$, il existe une et une seule *flèche de factorisation [projective] de* $c'$ *vers* $c$, i.e. une unique flèche de $C$ :

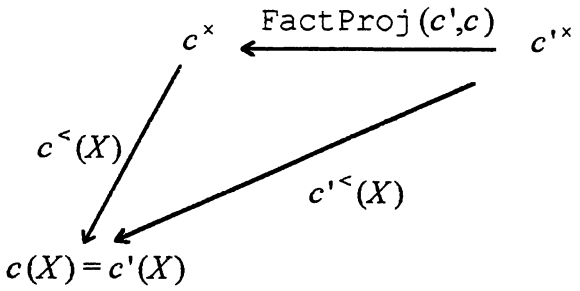
$$\texttt{FactProj}(c', c) : c'^{\times} \to c^{\times}$$

telle que :

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c) = \mathcal{X}(c')$, on a :

$$c^{<}(X) \cdot \texttt{FactProj}(c', c) = c'^{<}(X),$$

de sorte que le diagramme [de $C$] ci-dessous commute :




Alors, si $X=\mathcal{X}(c)$, si $\mathcal{b}=\mathtt{BaseProj}(c):X\to C$ et s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note, sommairement mais plus suggestivement :

$$c=\mathtt{ConeProjLim}(\mathcal{b})$$

et :

$$c^{\times}=\mathtt{LimProj}(\mathcal{b})$$

ou même, plus sommairement encore :

$$c=\mathtt{ConeProjLim}_{X\in X}\,\mathcal{b}(X)$$

et :

$$c^{\times}=\mathtt{LimProj}_{X\in X}\,\mathcal{b}(X).$$

**2.2.b.** Si $C$ est une catégorie et si $c$ est un cône inductif à valeurs dans $C$, on dit que $c$ est un *cône inductif limite [à valeurs] dans* $C$ si :

- pour tout cône inductif $c'$, à valeurs dans $C$, de même indexation et de même base que $c$, il existe une et une seule *flèche de factorisation [inductive] de* $c$ *vers* $c'$, i.e. une unique flèche de $C$:

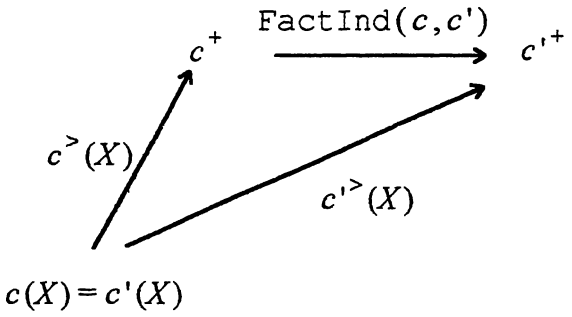
$$\mathtt{FactInd}(c,c'):c^{+}\to c'^{+}$$

telle que :

- pour tout point $X$ de $\mathcal{X}(c)=\mathcal{X}(c')$, on a :

$$\mathtt{FactInd}(c,c')\bullet c^{>}(X)=c'^{>}(X),$$

de sorte que le diagramme [de $C$] ci-dessous commute :




Alors, si $X = X(c)$, si $\mathcal{b} = \mathtt{BaseInd}(c) : X \to C$ et s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note, sommairement mais plus suggestivement :

$$c = \mathtt{ConeIndLim}(\mathcal{b})$$

et :

$$c^{+} = \mathtt{LimInd}(\mathcal{b}),$$

ou même, plus sommairement encore :

$$c = \mathtt{ConeIndLim}_{X \in X}\, \mathcal{b}(X)$$

et :

$$c^{+} = \mathtt{LimInd}_{X \in X}\, \mathcal{b}(X).$$

**2.2.c.** Si $C$ est une catégorie et si $c$ est un cône projectif à valeurs dans $C$, auquel cas $c^{op}$ est un cône inductif à valeurs dans $C^{op}$, il est clair que :

- $c$ est un cône projectif limite dans $C$ si, et seulement si, $c^{op}$ est un cône inductif limite dans $C^{op}$.

Alors, pour tout cône projectif $c'$, à valeurs dans $C$ et de même base que $c$, on a :

$$\mathtt{FactProj}(c',c) = \mathtt{FactInd}(c^{op}, c'^{op}).$$

De même, si $C$ est une catégorie et si $c$ est un cône inductif à valeurs dans $C$, auquel cas $c^{op}$ est un cône porjectif à valeurs dans $C^{op}$, il est clair que :

- $c$ est un cône inductif limite dans $C$ si, et seulement si, $c^{op}$ est un cône projectif limite dans $C^{op}$.

Alors, pour tout cône inductif $c'$, à valeurs dans $C$ et de même base que $c$, on a :

$$\texttt{FactInd}(c,c') = \texttt{FactProj}(c'^{op}, c^{op}).$$

---

# 3. Esquisses, propagateurs et métamorphoses naturelles.

## 3.1. Esquisses.

**3.1.a.** Une *esquisse* $\mathbb{E}$ est constituée par :

- la donnée d'un graphe à composition, appelé le *support de* $\mathbb{E}$ :

$$\mathtt{Supp}(\mathbb{E})$$

[on note aussi, plus simplement :

$$\underline{\mathbb{E}} = \mathtt{Supp}(\mathbb{E})],$$

- la donnée d'un ensemble de cônes projectifs [d'indexations variables] à valeurs dans $\underline{\mathbb{E}}$, appelés les *cônes projectifs distingués de* $\mathbb{E}$ :

$$\mathtt{CPDist}(\mathbb{E}),$$

- la donnée d'un ensemble de cônes inductifs [d'indexations variables] à valeurs dans $\underline{\mathbb{E}}$, appelés les *cônes inductifs distingués de* $\mathbb{E}$ :

$$\mathtt{CIDist}(\mathbb{E}),$$

Alors, on dit que :

- les points du graphe à composition $\underline{\mathbb{E}}$ [support de $\mathbb{E}$] sont [aussi] les *points de [l'esquisse]* $\mathbb{E}$ et on note :

$$\mathtt{Pt}(\mathbb{E}) = \mathtt{Pt}(\underline{\mathbb{E}}),$$

- les flèches du graphe à composition $\underline{\mathbb{E}}$ [support de $\mathbb{E}$] sont [aussi] les *flèches de [l'esquisse]* $\mathbb{E}$ et on note successivement :

$$\mathtt{Fl}(\mathbb{E}) = \mathtt{Fl}(\underline{\mathbb{E}}),$$

$$\mathtt{SelDom}(\mathbb{E}) = \mathtt{SelDom}(\underline{\mathbb{E}}),$$

$$\mathtt{SelCodom}(\mathbb{E}) = \mathtt{SelCodom}(\underline{\mathbb{E}}),$$

- les flèches identités du graphe à composition $\underline{\mathbb{E}}$ [support de $\mathbb{E}$] sont [aussi] les *flèches identités de [l'esquisse]* $\mathbb{E}$ et on note successivement :

$$\mathtt{FlId}(\mathbb{E}) = \mathtt{FlId}(\underline{\mathbb{E}}),$$

$$\mathtt{SelPoint}(\mathbb{E}) = \mathtt{SelPoint}(\underline{\mathbb{E}}),$$

- les couples de flèches consécutives du graphe à composition $\underline{\mathbb{E}}$ [support de $\mathbb{E}$] sont [aussi] les *couples de flèches consécutives de [l'esquisse]* $\mathbb{E}$ et on note :

$$\mathtt{CCons}(\mathbb{E}) = \mathtt{CCons}(\underline{\mathbb{E}}),$$

- les couples composables du graphe à composition $\underline{\mathbb{E}}$ [support de $\mathbb{E}$] sont [aussi] les *couples composables de [l'esquisse]* $\mathbb{E}$ et on note successivement :

$$\mathtt{CComp}(\mathbb{E}) = \mathtt{CComp}(\underline{\mathbb{E}}),$$

$$\mathtt{Comp}(\mathbb{E}) = \mathtt{Comp}(\underline{\mathbb{E}}).$$

De même, on dit que :

- les cônes projectifs à valeurs dans le graphe à composition $\underline{\mathbb{E}}$ [support de $\mathbb{E}$] sont [aussi] les *cônes projectifs à valeurs dans [l'esquisse]* $\mathbb{E}$ et, pour tout graphe à composition $\mathcal{X}$:
  - on note :

$$\mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathbb{E}) = \mathtt{CP}(\mathcal{X},\underline{\mathbb{E}}),$$

    l'ensemble des cônes $\mathcal{X}$-projectifs à valeurs dans $\mathbb{E}$ et :

$$\mathtt{BP}(\mathcal{X},\mathbb{E}) = \mathtt{BP}(\mathcal{X},\underline{\mathbb{E}})$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathbb{E}) = \mathtt{CP}(\mathcal{X},\underline{\mathbb{E}})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\underline{\mathbb{E}})$$

    l'application base projective,

  - on désigne par :

$$\mathtt{CPD}(\mathcal{X},\mathbb{E}) = \mathtt{CPDist}(\mathbb{E}) \cap \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathbb{E})$$

    l'ensemble des cônes $\mathcal{X}$-projectifs distingués dans $\mathbb{E}$ et par :

$$\mathtt{BPD}(\mathcal{X},\mathbb{E}) : \mathtt{CPD}(\mathcal{X},\mathbb{E}) \to \mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\underline{\mathbb{E}})$$

    l'application *base projective distinguée*, i.e. la restriction de l'application base projective :

$$\mathtt{BP}(\mathcal{X},\mathbb{E}) = \mathtt{BP}(\mathcal{X},\mathbb{E})$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathbb{E}) = \mathtt{CP}(\mathcal{X},\underline{\mathbb{E}})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$

à l'ensemble de ces cônes $\mathcal{X}$-projectifs distingués :

$$\mathtt{CPD}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{CPDist}(\mathbf{E}) \cap \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathbf{E}) \subseteq \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathbf{E}),$$

- les cônes inductifs à valeurs dans le graphe à composition $\mathbf{E}$ [support de $\mathbf{E}$] sont [aussi] les *cônes inductifs à valeurs dans [l'esquisse]* $\mathbf{E}$ et, pour tout graphe à composition $\mathcal{X}$:
  - on note :

$$\mathtt{CI}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{CI}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}}),$$

l'ensemble des cônes $\mathcal{X}$-inductifs à valeurs dans $\mathbf{E}$ et :

$$\mathtt{BI}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{BI}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$
$$\vdots$$
$$\mathtt{CI}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{CI}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$

l'application base inductive,

  - on désigne par :

$$\mathtt{CID}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{CIDist}(\mathbf{E}) \cap \mathtt{CP}(\mathcal{X},\mathbf{E})$$

l'ensemble des cônes $\mathcal{X}$-inductifs distingués dans $\mathbf{E}$ et par :

$$\mathtt{BID}(\mathcal{X},\mathbf{E}) : \mathtt{CID}(\mathcal{X},\mathbf{E}) \to \mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$

l'application *base inductive distinguée*, i.e. la restriction de l'application base inductive :

$$\mathtt{BI}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{BI}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$
$$\vdots$$
$$\mathtt{CI}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{CI}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{Fonc}(\mathcal{X},\underline{\mathbf{E}})$$

à l'ensemble de ces cônes $\mathcal{X}$-inductifs distingués :

$$\mathtt{CID}(\mathcal{X},\mathbf{E}) = \mathtt{CIDist}(\mathbf{E}) \cap \mathtt{CI}(\mathcal{X},\mathbf{E}) \subseteq \mathtt{CI}(\mathcal{X},\mathbf{E}).$$

**3.1.b.** On dit qu'une esquisse $\mathbf{E}$ est *purement projective* si :

- l'ensemble de ses cônes inductifs distingués est vide, i.e. on a :

$$\mathtt{CIDist}(\mathbb{E}) = \varnothing .$$

De même, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est *purement inductive* si :

- l'ensemble de ses cônes projectifs distingués est vide, i.e. on a :

$$\mathtt{CPDist}(\mathbb{E}) = \varnothing .$$

Enfin, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est *triviale* si :

- l'ensemble de ses cônes inductifs distingués est vide, i.e. on a :

$$\mathtt{CIDist}(\mathbb{E}) = \varnothing ,$$

- l'ensemble de ses cônes projectifs distingués est vide, i.e. on a :

$$\mathtt{CPDist}(\mathbb{E}) = \varnothing ,$$

autrement dit, si :

- $\mathbb{E}$ est purement projective,
- $\mathbb{E}$ est purement inductive.

En particulier, tout graphe à composition $\mathcal{G}$ s'identifie à son *esquisse triviale associée* :

$$\mathtt{TrivAss}(\mathcal{G})$$

i.e. à l'unique esquisse triviale de support $\mathcal{G}$, c'est-à-dire à l'esquisse triviale obtenue lorsqu'on impose que :

$$\underline{\mathtt{TrivAss}(\mathcal{G})} = \mathcal{G}$$

[de sorte qu'on a, après identification :

$$\mathcal{G} = \mathtt{TrivAss}(\mathcal{G})\,].$$

Inversement, on identifie toute esquisse triviale $\mathbb{E}$ à son support [si bien qu'on a, après identification :

$$\mathbb{E} = \underline{\mathbb{E}}\,].$$

**3.1.c.** Si $\mathbf{X}$ est un ensemble de graphes à composition, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est $\mathbf{X}$-*projective* si :

- pour tout cône projectif $c$ distingué dans $\mathbb{E}$, on a :

$$\mathcal{X}(c) \in \mathbf{X} .$$

Plus précisément encore, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est *purement* $\mathbf{X}$-*projective* si

- l'ensemble de ses cônes inductifs distingués est vide, i.e. on a :

$$\mathtt{CIDist}(\mathbb{E}) = \varnothing,$$

- pour tout cône projectif $c$ distingué dans $\mathbb{E}$, on a :

$$\mathcal{X}(c) \in \mathbf{X},$$

autrement dit, si :

- $\mathbb{E}$ est une esquisse purement projective,
- $\mathbb{E}$ est une esquisse $\mathbf{X}$-projective.

En particulier [si $\mathbf{X} = \varnothing$], les esquisses $\varnothing$-projectives sont exactement les esquisses purement inductives, tandis que les esquisse purement $\varnothing$-projectives sont exactement les esquisses triviales.

Si $\mathbf{X}$ est un ensemble de graphes à composition, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est $\mathbf{X}$-*inductive* si :

- pour tout cône inductif $c$ distingué dans $\mathbb{E}$, on a :

$$\mathcal{X}(c) \in \mathbf{X}.$$

Plus précisément encore, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est *purement* $\mathbf{X}$-*inductive* si :

- l'ensemble de ses cônes projectifs distingués est vide, i.e. on a :

$$\mathtt{CPDist}(\mathbb{E}) = \varnothing,$$

- pour tout cône inductif $c$ distingué dans $\mathbb{E}$, on a :

$$\mathcal{X}(c) \in \mathbf{X},$$

autrement dit, si :

- $\mathbb{E}$ est une esquisse purement inductive,
- $\mathbb{E}$ est une esquisse $\mathbf{X}$-inductive.

En particulier [si $\mathbf{X} = \varnothing$], les esquisses $\varnothing$-inductives sont exactement les esquisses purement projectives, tandis que les esquisses purement $\varnothing$-inductives sont exactement les esquisses triviales.

Si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est une $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')$-*esquisse* si :

- pour tout cône projectif $c'$ distingué dans $\mathbb{E}$, on a :

$$\mathcal{X}(c') \in \mathbf{X}',$$

- pour tout cône inductif $c''$ distingué dans $\mathbb{E}$, on a :

$$\mathcal{X}(c'') \in \mathbf{X}'',$$

autrement dit, si :

- $\mathbb{E}$ est une esquisse $\mathbf{X}'$-projective,

- $\mathbf{E}$ est une esquisse $\mathbf{X}''$-inductive.

En particulier [si $\mathbf{X}'' = \varnothing$ ], les $(\mathbf{X}', \varnothing)$-esquisses sont exactement les esquisses purement $\mathbf{X}'$-projectives.

De même [si $\mathbf{X}' = \varnothing$ ], les $(\varnothing, \mathbf{X}'')$-esquisses sont exactement les esquisses purement $\mathbf{X}''$-inductives.

Enfin [si $\mathbf{X}' = \varnothing$ et $\mathbf{X}'' = \varnothing$ ], les $(\varnothing, \varnothing)$-esquisses sont exactement les esquisses triviales.

**3.1.d.** On dit qu'une esquisse $\mathbf{E}$ est *catégorique* si :

- le graphe à composition $\underline{\mathbf{E}}$ [support de $\mathbf{E}$ ] est une catégorie.

Plus particulièrement encore, on dit qu'une esquisse $\mathbf{P}$ est un *prototype* si :

- le graphe à composition $\underline{\mathbf{P}}$ [support de $\mathbf{P}$ ] est une catégorie,
- tous les cônes projectifs distingués dans $\mathbf{P}$ sont des cônes projectifs limites,
- tous les cônes inductifs distingués dans $\mathbf{P}$ sont des cônes inductifs limites,

Alors, on dit évidemment que :

- une esquisse purement projective qui est aussi un prototype est un *prototype purement projectif*,
- une esquisse purement inductive qui est aussi un prototype est un *prototype purement inductif*,
- une esquisse triviale qui est aussi un prototype est un *prototype trivial* [de sorte que les prototypes triviaux s'identifient aux catégories].

De même, si $\mathbf{X}$ est un ensemble de graphes à composition, on dit bien sûr que :

- une esquisse $\mathbf{X}$-projective qui est aussi un prototype est un *prototype* $\mathbf{X}$*-projectif*,
- une esquisse purement $\mathbf{X}$-projective qui est aussi un prototype est un *prototype purement* $\mathbf{X}$*-projectif*,
- une esquisse $\mathbf{X}$-inductive qui est aussi un prototype est un *prototype* $\mathbf{X}$*-inductif*,
- une esquisse purement $\mathbf{X}$-inductive qui est aussi un prototype est un *prototype purement* $\mathbf{X}$*-inductif*.

Enfin, si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition, on dit bien entendu, que :

- une $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')$-esquisse qui est aussi un prototype est un $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')$*-prototype*.

## 3.2. Propagateurs.

**3.2.a.** Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses, un *propagateur* $\rho : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *de* $\mathbb{E}$ *vers* $\mathbb{E}'$ est constitué par :

- la donnée d'un foncteur, appelé le *support* de $\rho$ :

$$\mathrm{Supp}(\rho) : \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E}')$$

[on note, plus simplement :

$$\underline{\rho} = \mathrm{Supp}(\rho) : \underline{\mathbb{E}} = \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E}') = \underline{\mathbb{E}}'],$$

et, ce, de sorte que :

- pour tout cône projectif $c'$, distingué dans $\mathbb{E}$, le cône projectif image $\underline{\rho}(c')$ est distingué dans $\mathbb{E}'$,
- pour tout cône inductif $c''$, distingué dans $\mathbb{E}$, le cône inductif image $\underline{\rho}(c'')$ est distingué dans $\mathbb{E}'$,

autrement dit, de sorte que :

- pour tout graphe à composition $\mathcal{X}'$, l'application :

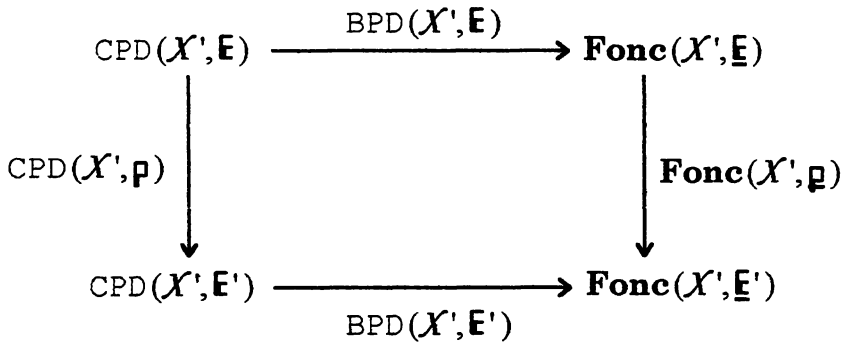
$$\mathrm{CP}(\mathcal{X}', \underline{\rho}) : \mathrm{CP}(\mathcal{X}', \underline{\mathbb{E}}) \to \mathrm{CP}(\mathcal{X}', \underline{\mathbb{E}}')$$

admet une restriction :

$$\mathrm{CPD}(\mathcal{X}', \rho) : \mathrm{CPD}(\mathcal{X}', \mathbb{E}) \to \mathrm{CPD}(\mathcal{X}', \mathbb{E}'),$$

si bien, évidemment, que les deux diagrammes [d'applications] ci-dessous commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CPD}(\mathcal{X}', \mathbb{E}) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{CP}(\mathcal{X}', \underline{\mathbb{E}}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{CPD}(\mathcal{X}', \rho)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{CP}(\mathcal{X}', \underline{\rho})} \\ \mathrm{CPD}(\mathcal{X}', \mathbb{E}') & \xrightarrow[\subseteq]{} & \mathrm{CP}(\mathcal{X}', \underline{\mathbb{E}}') \end{array}$$



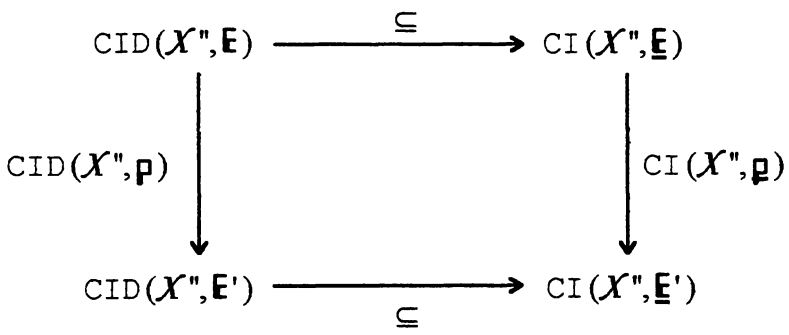

- pour tout graphe à composition $\mathcal{X}''$, l'application :

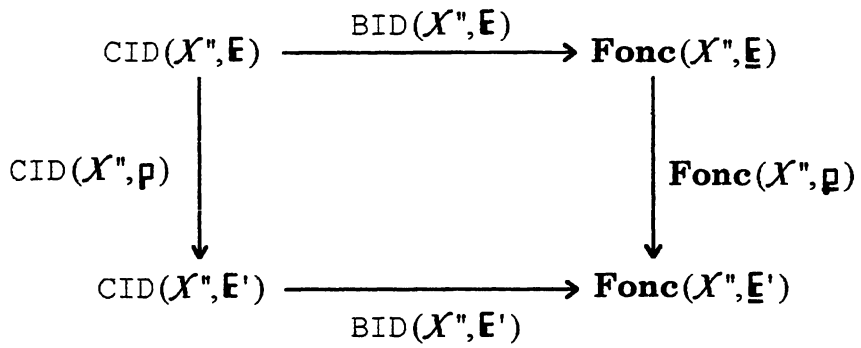
$$\mathrm{CI}(\mathcal{X}'',\mathfrak{p}) : \mathrm{CI}(\mathcal{X}'',\mathbb{E}) \to \mathrm{CI}(\mathcal{X}'',\mathbb{E}')$$

admet une restriction :

$$\mathrm{CID}(\mathcal{X}'',\mathfrak{p}) : \mathrm{CID}(\mathcal{X}'',\mathbb{E}) \to \mathrm{CID}(\mathcal{X}'',\mathbb{E}')$$

si bien, évidemment, que les deux diagrammes [d'applications] ci-dessous commutent :






Alors, on note successivement :

- tout d'abord :

$$\mathrm{Pt}(\rho) = \mathrm{Pt}(\underline{\rho})$$

et, pour tout point $E$ de $\mathfrak{E}$ :

$$\rho(E) = \mathrm{Pt}(\rho)(E) = \mathrm{Pt}(\underline{\rho})(E) = \underline{\rho}(E),$$

- puis :

$$\mathrm{Fl}(\rho) = \mathrm{Fl}(\underline{\rho})$$

et, pour toute flèche $e$ de $\mathfrak{E}$ :

$$\rho(e) = \mathrm{Fl}(\rho)(e) = \mathrm{Fl}(\underline{\rho})(e) = \underline{\rho}(e),$$

- enfin :

$$\mathrm{FlId}(\rho) = \mathrm{FlId}(\underline{\rho}),$$
$$\mathrm{CCons}(\rho) = \mathrm{CCons}(\underline{\rho}),$$
$$\mathrm{CComp}(\rho) = \mathrm{CComp}(\underline{\rho}).$$

De même, on note :

- pour tout cône projectif $c'$, à valeurs dans $\mathfrak{E}$ [distingué ou non dans $\mathfrak{E}$] :

$$\rho(c') = \underline{\rho}(c')$$

et, pour tout graphe à composition $\mathcal{X}'$ :

$$\mathrm{CP}(\mathcal{X}', \rho) = \mathrm{CP}(\mathcal{X}', \underline{\rho}),$$

- pour tout cône inductif $c"$, à valeurs dans $\mathfrak{E}$ [distingué ou non dans $\mathfrak{E}$] :

$$\rho(c") = \underline{\rho}(c")$$

et, pour tout graphe à composition $\mathcal{X}"$ :

$$\mathrm{CI}(\mathcal{X}'',\rho)=\mathrm{CI}(\mathcal{X}'',\underline{\rho}).$$

**3.2.b.** Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, tout foncteur $f\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ s'identifie évidemment à son *propagateur trivial associé* :

$$\mathtt{TrivAss}(f):\mathtt{TrivAss}(\mathcal{G})\to\mathtt{TrivAss}(\mathcal{G}')$$

i.e. à l'unique propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mathtt{TrivAss}(f)}=f$,

de sorte qu'on a, après identifications :

$$f=\mathtt{TrivAss}(f)\colon \mathcal{G}=\mathtt{TrivAss}(\mathcal{G})\to\mathtt{TrivAss}(\mathcal{G}')=\mathcal{G}'.$$

Inversement, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses triviales, on identifie tout propagateur $\rho:\mathbf{E}\to\mathbf{E}'$ à son support, si bien qu'on a, après identifications :

$$\rho=\underline{\rho}:\mathbf{E}=\underline{\mathbf{E}}\to\underline{\mathbf{E}}'=\mathbf{E}'.$$

**3.2.c.** Si $\mathbf{E}$ est une esquisse, on note :

$$\mathtt{PropaInjCano}(\mathbf{E}):\mathtt{TrivAss}(\mathtt{Supp}(\mathbf{E}))\to\mathbf{E}$$

ou, plus simplement encore [après identification] :

$$\underline{\mathbf{E}}\subseteq\mathbf{E}=\mathtt{PropaInjCano}(\mathbf{E}):\mathtt{TrivAss}(\mathtt{Supp}(\mathbf{E}))=\underline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}$$

le *propagateur injection canonique associé à* $\mathbf{E}$, i.e. l'unique propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mathtt{PropaInjCano}(\mathbf{E})}=\mathtt{Id}(\mathtt{Supp}(\mathbf{E}))$,

c'est-à-dire :

- $\underline{\underline{\mathbf{E}}\subseteq\mathbf{E}}=\mathtt{Id}(\underline{\mathbf{E}})$.

**3.2.d.** Si $\mathbf{E},\mathbf{E}'$ et $\mathbf{E}''$ sont trois esquisses et si $\rho:\mathbf{E}\to\mathbf{E}'$ et $\rho':\mathbf{E}'\to\mathbf{E}''$ sont deux propagateurs, on désigne par :

$$\rho'\circ\rho:\mathbf{E}\to\mathbf{E}''$$

le *propagateur composé de* $\rho'$ *avec* $\rho$, i.e. le propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\underline{\rho'\circ\rho}=\underline{\rho}'\circ\underline{\rho}$.

**3.2.e.** Si $\mathbb{E}$ est une esquisse, on désigne par :

$$\mathtt{Id}(\mathbb{E}) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

le *propagateur identité en* $\mathbb{E}$, i.e. le propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mathtt{Id}(\mathbb{E})} = \mathtt{Id}(\underline{\mathbb{E}})$.

## 3.3. Métamorphoses naturelles.

**3.3.a.** Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses et si $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ sont deux propagateurs, une *métamorphose naturelle* $\mathbb{m} : \mathbb{p}_1 \Rightarrow \mathbb{p}_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ [ou plus simplement encore $\mathbb{m} : \mathbb{p}_1 \Rightarrow \mathbb{p}_2$ ] *de* $\mathbb{p}_1$ *vers* $\mathbb{p}_2$ est constituée par :

- la donnée d'une transformation naturelle, appelée le *support* de $\mathbb{m}$ :

$$\mathtt{Supp}(\mathbb{m}) : \mathtt{Supp}(\mathbb{p}_1) \Rightarrow \mathtt{Supp}(\mathbb{p}_2)$$

[on note, plus simplement :

$$\underline{\mathbb{m}} = \mathtt{Supp}(\mathbb{m}) : \underline{\mathbb{p}_1} = \mathtt{Supp}(\mathbb{p}_1) \Rightarrow \mathtt{Supp}(\mathbb{p}_2) = \underline{\mathbb{p}_2}\ ].$$

Alors, pour tout point $E$ de $\mathbb{E}$, on note :

$$\mathbb{m}(E) = \underline{\mathbb{m}}(E).$$

**3.3.b.** Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition et si $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ sont deux foncteurs, toute transformation naturelle $t : f_1 \Rightarrow f_2$ s'identifie évidemment à sa *métamorphose naturelle triviale associée* :

$$\mathtt{TrivAss}(t) : \mathtt{TrivAss}(f_1) \Rightarrow \mathtt{TrivAss}(f_2)$$

i.e. à l'unique métamorphose naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mathtt{TrivAss}(t)} = t$,

de sorte qu'on a, après identifications :

$$t = \mathtt{TrivAss}(t) : f_1 = \mathtt{TrivAss}(f_1) \Rightarrow \mathtt{TrivAss}(f_2) = f_2.$$

Inversement, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses triviales et si $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ sont deux propagateurs, on identifie toute métamorphose naturelle $\mathbb{m} : \mathbb{p}_1 \Rightarrow \mathbb{p}_2$ à son support, si bien qu'on a, après identifications :

$$\mathbb{m} = \underline{\mathbb{m}} : \mathbb{p}_1 = \underline{\mathbb{p}_1} \Rightarrow \underline{\mathbb{p}_2} = \mathbb{p}_2 : \mathbb{E} = \underline{\mathbb{E}} \to \underline{\mathbb{E}'} = \mathbb{E}'.$$

**3.3.c.** Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses, si $\rho_1, \rho_2, \rho_3 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ sont trois propagateurs et si $\mu_1 : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ et $\mu_2 : \rho_2 \Rightarrow \rho_3$ sont deux métamorphoses naturelles, on dit qu'elles sont *intérieurement consécutives* [elles le sont donc si, et seulement si, leurs transformations naturelles supports $\underline{\mu}_1 : \underline{\rho}_1 \Rightarrow \underline{\rho}_2$ et $\underline{\mu}_2 : \underline{\rho}_2 \Rightarrow \underline{\rho}_3$ sont intérieurement consécutives].

Dans ces conditions, on dit que $(\mu_1, \mu_2)$ est un *couple [de métamorphoses naturelles] intérieurement composable* si :

- le couple des transformations naturelles supports $(\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2)$ est intérieurement composable.

Alors, on note :

$$\mu_2 \bullet \mu_1 : \rho_1 \Rightarrow \rho_3 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$$

la *métamorphose naturelle composée intérieure de* $\mu_2$ *avec* $\mu_1$, i.e. la métamorphose naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mu_2 \bullet \mu_1} = \underline{\mu}_2 \bullet \underline{\mu}_1$.

En particulier, si $\mathbb{E}'$ est une esquisse catégorique, tout couple $(\mu_1, \mu_2)$ de métamorphoses naturelles intérieurement consécutives est intérieurement composable.

**3.3.d.** Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses et si $\rho : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est un propagateur, on dit qu'une métamorphose naturelle $\mu : \rho \Rightarrow \rho$ est *[intérieurement] identitaire* si :

- sa transformation naturelle support $\underline{\mu} : \underline{\rho} \Rightarrow \underline{\rho}$ est une transformation naturelle identitaire.

En particulier, si $\mathbb{E}'$ est une esquisse catégorique, on dispose de la *métamorphose naturelle identité en* $\rho$ :

$$\mathrm{Id}(\rho) : \rho \Rightarrow \rho : \mathbb{E} \to \mathbb{E}',$$

i.e. de l'unique métamorphose naturelle identitaire de $\rho$ vers $\rho$ évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mathrm{Id}(\rho)} = \mathrm{Id}(\underline{\rho})$.

**3.3.e.** Si $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ et $\mathbb{E}''$ sont trois esquisses, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ et $\rho' : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}''$ sont trois propagateurs et si $\mu : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle, on désigne par :

$$\rho' \circ \mu : \rho' \circ \rho_1 \Rightarrow \rho' \circ \rho_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}''$$

la *métamorphose naturelle composée extérieure de* $\rho'$ *avec* $\mu$, i.e. la métamorphose naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\underline{\rho' \circ \mu} = \underline{\rho'} \circ \underline{\mu}$.

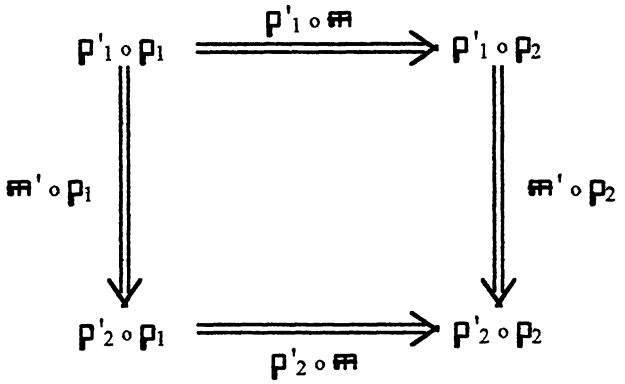
De même, si $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ et $\mathbb{E}''$ sont trois esquisses, si $\rho : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ et $\rho'_1, \rho'_2 : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}''$ sont trois propagateurs et si $\mu' : \rho'_1 \Rightarrow \rho'_2$ est une métamorphose naturelle, on désigne par :

$$\mu' \circ \rho : \rho'_1 \circ \rho \Rightarrow \rho'_2 \circ \rho : \mathbb{E} \to \mathbb{E}''$$

la *métamorphose naturelle composée extérieure de* $\mu'$ *avec* $\rho$, i.e. la métamorphose naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mu' \circ \rho} = \underline{\mu'} \circ \underline{\rho}$.

**3.3.f.** Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses, si $\mathbb{E}''$ est une esquisse catégorique [a fortiori, si c'est un prototype], si $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ et $\rho'_1, \rho'_2 : \mathbb{E}' \Rightarrow \mathbb{E}''$ sont quatre propagateurs et si $\mu : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ et $\mu' : \rho'_1 \Rightarrow \rho'_2$ sont deux métamorphoses naturelles, il est facile de vérifier [puisque $\underline{\mathbb{E}}''$ est une catégorie] que le diagramme [de métamorphoses naturelles] ci-dessous commute [puisque le diagramme des supports commute] :




Alors, sa diagonale :

$$\mu' \circ \mu : \rho'_1 \circ \rho_1 \Rightarrow \rho'_2 \circ \rho_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}''$$

définit et s'appelle la *métamorphose naturelle composée extérieure de* $\mu'$ *avec* $\mu$.

# 4. Prototypes engendrés.

## 4.1. Esquisses catégoriques de classes de chemins engendrées.

**4.1.a.** Si $\mathbf{E}$ est une esquisse, on désigne par :

$$\mathtt{ClChem}(\mathbf{E})$$

l'*esquisse catégorique des classes de chemins de* $\mathbf{E}$, i.e. l'esquisse catégorique évidemmment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mathtt{ClChem}(\mathbf{E})} = \mathtt{Clch}(\underline{\mathbf{E}})$,
- $\mathtt{CPDist}(\mathtt{ClChem}(\mathbf{E})) = \{(\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{Clch}(\underline{\mathbf{E}}))(c')/c' \in \mathtt{CPDist}(\mathbf{E})\}$,
- $\mathtt{CIDist}(\mathtt{ClChem}(\mathbf{E})) = \{(\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{Clch}(\underline{\mathbf{E}}))(c'')/c'' \in \mathtt{CIDist}(\mathbf{E})\}$.

Alors, on note :

$$\mathbf{E} \mid \mathtt{ClChem}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \to \mathtt{ClChem}(\mathbf{E})$$

le *propagateur passage aux classes [des chemins de longueur* 1 *]*, i.e. le propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\underline{\mathbf{E} \mid \mathtt{ClChem}(\mathbf{E})} = \underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{Clch}(\underline{\mathbf{E}})$.

En particulier, si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition et si $\mathbf{E}$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse, il est clair que $\mathtt{ClChem}(\mathbf{E})$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse catégorique.

De même, si $\mathbf{E}$ est une esquisse catégorique, il est clair que le propagateur $\mathbf{E} \mid \mathtt{ClChem}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \to \mathtt{ClChem}(\mathbf{E})$ est un isomorphisme, qui permet donc d'identifier $\mathtt{ClChem}(\mathbf{E})$ à $\mathbf{E}$.

**4.1.b.** On vérifie immédiatement, compte tenu de la PROPOSITION 2 de (E.T.E.1.) que :

PROPOSITION 1. *Si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse, si* $\mathbf{E}'$ *est une esquisse catégorique [a fortiori, si c'est un prototype] et si* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *est un propagateur, alors il existe un unique propagateur :*

$$\mathtt{ExtClChem}(\rho):\mathtt{ClChem}(\mathbb{E})\to\mathbb{E}'$$

*étendant* $\rho$ *à* $\mathtt{ClChem}(\mathbb{E})$, *i.e. tel que :*

$$\rho=\mathtt{ExtClChem}(\rho)\circ\big(\mathbb{E}\mid\mathtt{ClChem}(\mathbb{E})\big).$$

*De même, si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse, si* $\mathbb{E}'$ *est une esquisse catégorique [a fortiori, si c'est un prototype], si* $\rho_1,\rho_2:\mathbb{E}\to\mathbb{E}'$ *sont deux propagateurs et si* $\mu:\rho_1\Rightarrow\rho_2$ *est une métamorphose naturelle, alors il existe une unique métamorphose naturelle :*

$$\begin{array}{c}\mathtt{ExtClChem}(\mu)\\ \vdots\\ \mathtt{ExtClChem}(\rho_1)\\ \Downarrow\\ \mathtt{ExtClChem}(\rho_2)\\ \vdots\\ \mathtt{ClChem}(\mathbb{E})\\ \downarrow\\ \mathbb{E}'\end{array}$$

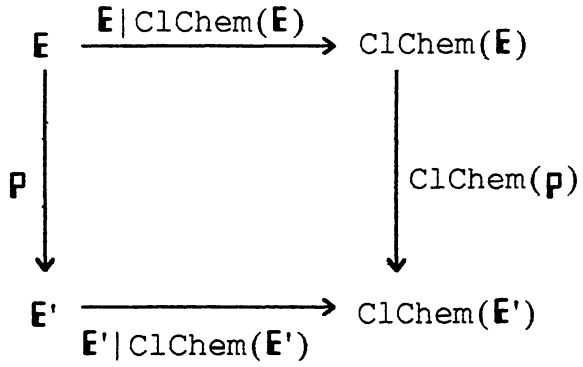
*étendant* $\mu$ *à* $\mathtt{ClChem}(\mathbb{E})$, *i.e. telle que :*

$$\mu=\mathtt{ExtClChem}(\mu)\circ\big(\mathbb{E}\mid\mathtt{ClChem}(\mathbb{E})\big).$$

**4.1.c.** De la PROPOSITION 1 précédente résulte immédiatement que, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses et si $\rho:\mathbb{E}\to\mathbb{E}'$ est un propagateur, on dispose d'un unique propagateur [étendant $\rho$ tant à $\mathtt{ClChem}(\mathbb{E})$ qu'à $\mathtt{ClChem}(\mathbb{E}')$] :

$$\begin{array}{c}\mathtt{ClChem}(\rho)\\ =\\ \mathtt{ExtClChem}\big((\mathbb{E}'\mid\mathtt{ClChem}(\mathbb{E}'))\circ\rho\big)\\ \vdots\\ \mathtt{ClChem}(\mathbb{E})\\ \downarrow\\ \mathtt{ClChem}(\mathbb{E}')\end{array}$$

rendant commutatif le diagrammes [de propagateurs] ci-dessous :




De même, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ sont deux propagateurs et si $\mu : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle, on dispose d'une unique métamorphose naturelle [étendant $\mu$ tant à $\mathrm{ClChem}(\mathbf{E})$ qu'à $\mathrm{ClChem}(\mathbf{E}')$] :

$$\mathrm{ClChem}(\mu)$$

$$=$$

$$\mathrm{ExtClChem}\big((\mathbf{E}'|\mathrm{ClChem}(\mathbf{E}'))\circ\mu\big)$$

$$:$$

$$\mathrm{ClChem}(\rho_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{ClChem}(\rho_2)$$

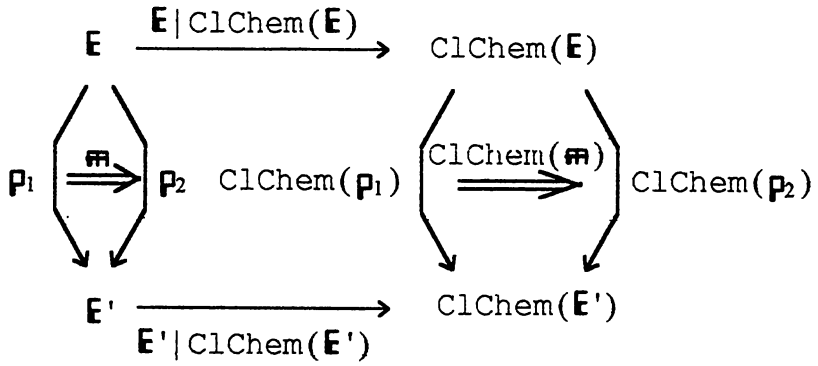
$$:$$

$$\mathrm{ClChem}(\mathbf{E})$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{ClChem}(\mathbf{E}')$$

rendant commutatif le diagramme [de propagateurs et métamorphoses naturelles] ci-dessous :




## 4.2. Esquisses catégoriques à factorisations distinguées engendrées.

**4.2.a.** Si $\mathbf{E}$ est une esquisse catégorique, on désigne par :

$$\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$$

le *graphe à composition à factorisations distinguées engendré par* $\mathbf{E}$, i.e. le graphe à composition évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- il contient le support $\underline{\mathbf{E}}$ de $\mathbf{E}$,
- pour tout cône projectif $c'$, à valeurs dans $\underline{\mathbf{E}}$ et distingué dans $\mathbf{E}$, et pour tout cône projectif $c'_1$, à valeurs dans $\underline{\mathbf{E}}$ [non nécessairement distingué dans $\mathbf{E}$], de même indexation $\mathcal{X}(c'_1)=\mathcal{X}(c')$ et de même base que $c'$ [mais non nexessairement distingué dans $\mathbf{E}$], il contient une flèche supplémentaire [i.e. supposée ne pas appartenir à $\mathbf{E}$] de *factorisation projective distinguée de* $c'_1$ *vers* $c'$ :

  $$\mathtt{FactProjDist}(c'_1,c'):c'_1{}^{\times}\to c'^{\times}$$

  i.e. telle que :

  - pour tout point $X'$ de $\mathcal{X}(c')$, le couple :

    $$(\mathtt{FactProjDist}(c'_1,c'),c'^{\times}(X'))$$

    est composable dans $\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$ et on a :

    $$c'^{<}(X')\bullet\mathtt{FactProjDist}(c'_1,c')=c'_1{}^{<}(X'),$$

- pour tout cône inductif $c"$, à valeurs dans $\underline{\mathbf{E}}$ et distingué dans $\mathbf{E}$, et pour tout cône inductif $c"_1$, à valeurs dans $\underline{\mathbf{E}}$, de même indexation $\mathcal{X}(c"_1)=\mathcal{X}(c")$ et de même base que $c"$, il contient une flèche supplémentaire [i.e. supposée ne pas appartenir à $\mathbf{E}$] de *factorisation inductive distinguée de $c"$ vers $c"_1$* :

$$\mathtt{FactIndDist}(c",c"_1):c"^{+}\to c"_1{}^{+}$$

i.e. telle que :

- pour tout point $X"$ de $\mathcal{X}(c")$, le couple :

$$(c"^{+}(X"),\mathtt{FactIndDist}(c",c"_1))$$

est composable dans $\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$ et on a :

$$\mathtt{FactIndDist}(c",c"_1)\bullet c"^{>}(X")=c"_1{}^{>}(X").$$

Alors, on note :

$$\underline{\mathbf{E}}\subseteq\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E}):\underline{\mathbf{E}}\to\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$$

le foncteur injection canonique.

**4.2.b.** Si $\mathbf{E}$ est une esquisse catégorique, on désigne par :

$$\mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E})=\mathtt{Clch}(\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E}))$$

la *catégorie à factorisations distinguées engendrée par* $\mathbf{E}$, i.e. la catégorie des classes de chemins engendrée par le graphe à composition $\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$.

Alors, on note :

$$\underline{\mathbf{E}}\,|\,\mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E}):\underline{\mathbf{E}}\to\mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E})$$

le *foncteur passage aux classes des [seules] flèches de* $\mathbf{E}$, i.e. le foncteur composé du foncteur injection canonique :

$$\underline{\mathbf{E}}\subseteq\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$$

$$\vdots$$

$$\underline{\mathbf{E}}$$

$$\downarrow$$

$$\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$$

avec le foncteur *passage aux classes [de tous les chemins de longueur 1 ]* :

$$\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})\,|\,\mathtt{Clch}(\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E}))$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})$$

$$\downarrow$$

$$\mathtt{Clch}(\mathtt{GrCompFactDist}(\mathbf{E})) = \mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E}).$$

**4.2.c.** Si $\mathbf{E}$ est une esquisse catégorique, on désigne par :

$$\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})$$

l'*esquisse catégorique à factorisations distinguées engendrée par* $\mathbf{E}$, i.e. l'esquisse catégorique évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- son support est la catégorie à factorisations distinguées engendrée par $\mathbf{E}$, i.e.

$$\underline{\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})} = \mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E}),$$

- ses cônes projectifs distingués sont les images des cônes projectifs distingués de $\mathbf{E}$ par le foncteur passage aux classes $\underline{\mathbf{E}} \,|\, \mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E})$, i.e. :

$$\mathtt{CPDist}(\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E}))$$

$$=$$

$$\{ (\underline{\mathbf{E}} \,|\, \mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E}))(c') \,|\, c' \in \mathtt{CPDist}(\mathbf{E}) \},$$

- ses cônes inductifs distingués sont les images des cônes inductifs distingués de $\mathbf{E}$ par le foncteur passage aux classes $\underline{\mathbf{E}} \,|\, \mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E})$, i.e. :

$$\mathtt{CIDist}(\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E}))$$

$$=$$

$$\{ (\underline{\mathbf{E}} \,|\, \mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E}))(c'') \,|\, c'' \in \mathtt{CIDist}(\mathbf{E}) \}.$$

Alors, on note :

$$\mathbf{E} \,|\, \mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \to \mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})$$

le *propagateur passage aux classes des [seules] flèches de* $\mathbf{E}$, i.e. le propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- son support est le foncteur passage aux classes des flèches de $\mathbf{E}$, i.e. :

$$\underline{\mathbf{E} \,|\, \mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})}$$

$$=$$

$$\underline{\mathbf{E}} \,|\, \mathtt{CatFactDist}(\mathbf{E})$$

$$=$$

$$\underline{\mathbf{E}} \,|\, \underline{\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})}.$$

En particulier, si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition et si $\mathbf{E}$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse catégorique, il est clair que $\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse catégorique.

**4.2.d.** On vérifie sans difficulté que :

PROPOSITION 2. *Si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse catégorique, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype et si* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$ *est un propagateur, alors il existe un unique propagateur :*

$$\mathtt{ExtEsqCatFactDist}(\rho) : \mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E}) \to \mathbf{P}$$

*étendant* $\rho$ *à* $\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})$, *i.e. tel que :*

$$\rho = \mathtt{ExtEsqCatFactDist}(\rho) \circ (\mathbf{E} \mid \mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})).$$

*De même, si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse catégorique, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype, si* $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$ *sont deux propagateurs et si* $\mu : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ *est une métamorphose naturelle, alors il existe une unique métamorphose naturelle :*

$$\begin{array}{c} \mathtt{ExtEsqCatFactDist}(\mu) \\ \vdots \\ \mathtt{ExtEsqCatFactDist}(\rho_1) \\ \Downarrow \\ \mathtt{ExtEsqCatFactDist}(\rho_2) \\ \vdots \\ \mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E}) \\ \downarrow \\ \mathbf{P} \end{array}$$

*étendant* $\mu$ *à* $\mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})$, *i.e. telle que :*

$$\mu = \mathtt{ExtEsqCatFactDist}(\mu) \circ (\mathbf{E} \mid \mathtt{EsqCatFactDist}(\mathbf{E})).$$

**4.2.e.** Nous laissons au lecteur le soin de définir les "esquisses catégoriques à factorisations distinguées" quelconques [i.e. non nécessairement engendrées par une esquisse catégorique] puis, dès lors, celui de constater que la PROPOSITION 2 précédente est tout aussi valable lorsqu'on y remplace le prototype $\mathbf{P}$ par une telle

"esquisse catégorique à factorisations distinguées" quelconque [mais ce point de vue - évidemment tout à fait "naturel" - ne sera pas explicitement utilisé dans la suite].

## 4.3. Esquisses catégoriques à factorisations identifiées engendrées.

**4.3.a.** Si $\mathbb{E}$ est une esquisse catégorique, on désigne par :

$$\texttt{RelFactIdent}(\mathbb{E})$$

la *relation identifiant les factorisations dans* $\mathbb{E}$, i.e. la relation telle que :

- pour tout cône projectif $c'$, à valeurs dans $\underline{\mathbb{E}}$ et distingué dans $\mathbb{E}$, pour tout point $E'$ de $\mathbb{E}$ et pour toutes flèches $f'_1, f'_2 : E' \to c'^{\times}$ vérifiant :
  - pour tout point $X'$ de $\mathcal{X}(c')$, on a $c'^{<}(X') \bullet f'_1 = c'^{<}(X') \bullet f'_2$,

  alors, on a :

$$f'_1 \ \texttt{RelFactIdent}(\mathbb{E})\ f'_2,$$

- pour tout cône inductif $c''$, à valeurs dans $\underline{\mathbb{E}}$ et distingué dans $\mathbb{E}$, pour tout point $E''$ de $\mathbb{E}$ et pour toutes flèches $f''_1, f''_2 : c''^{+} \to E''$ vérifiant :
  - pour tout point $X''$ de $\mathcal{X}(c'')$, on a $f''_1 \bullet c''^{>}(X'') = f''_2 \bullet c''^{>}(X'')$,

  alors, on a :

$$f''_1 \ \texttt{RelFactIdent}(\mathbb{E})\ f''_2.$$

Dans ces conditions, on note :

$$\texttt{CongrFactIdent}(\mathbb{E})$$

la *congruence identifiant les factorisations dans* $\mathbb{E}$, i.e. la relation d'équivalence, compatible avec la structure de catégorie, engendrée par $\texttt{RelFactIdent}(\mathbb{E})$ [et il est facile de constater qu'elle n'identifie donc que des flèches ayant même domaine et même codomaine].

**4.3.b.** Si $\mathbb{E}$ est une esquisse catégorique, on désigne par :

$$\texttt{CatFactIdent}(\mathbb{E})$$

la *catégorie à factorisations identifiées engendrée par* $\mathbb{E}$, i.e. la catégorie quotient [strict] $\underline{\mathbb{E}}/\texttt{CongrFactIdent}(\mathbb{E})$ de la catégorie $\underline{\mathbb{E}}$ par la congruence $\texttt{CongrFactIdent}(\mathbb{E})$.

Alors, on note :

$$\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E}) : \underline{\mathbf{E}} \to \left(\underline{\mathbf{E}} / \mathtt{CongrFactIdent}(\mathbf{E})\right) = \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E})$$

le foncteur passage aux classes de congruence.

**4.3.c.** Si $\mathbf{E}$ est une esquisse catégorique, on désigne par :

$$\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})$$

l'*esquisse catégorique à factorisations identifiées engendrée par* $\mathbf{E}$, i.e. l'esquisse catégorique évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- son support est la catégorie à factorisations identifiées engendrée par $\mathbf{E}$, i.e.

$$\underline{\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})} = \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E}),$$

- ses cônes projectifs distingués sont les images des cônes projectifs distingués de $\mathbf{E}$ par le foncteur passage aux classes $\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E})$, i.e. :

$$\mathtt{CPDist}(\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E}))$$

$$=$$

$$\left\{ (\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E}))(c') \,\middle|\, c' \in \mathtt{CPDist}(\mathbf{E}) \right\},$$

- ses cônes inductifs distingués sont les images des cônes inductifs distingués de $\mathbf{E}$ par le foncteur passage aux classes $\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E})$, i.e. :

$$\mathtt{CIDist}(\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E}))$$

$$=$$

$$\left\{ (\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E}))(c'') \,\middle|\, c'' \in \mathtt{CIDist}(\mathbf{E}) \right\}.$$

Alors, on note :

$$\mathbf{E} \mid \mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \to \mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})$$

le *propagateur passage aux classes des [seules] flèches de* $\mathbf{E}$, i.e. le propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- son support est le foncteur passage aux classes des flèches de $\mathbf{E}$, i.e. :

$$\underline{\mathbf{E} \mid \mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})}$$

$$=$$

$$\underline{\mathbf{E}} \mid \mathtt{CatFactIdent}(\mathbf{E})$$

$$=$$

$$\underline{\mathbf{E}} \mid \underline{\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})}.$$

En particulier, si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition et si $\mathbf{E}$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse catégorique, il est clair que $\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse catégorique.

**4.3.d.** On vérifie sans difficulté que :

PROPOSITION 3. *Si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse catégorique, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype et si* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$ *est un propagateur, alors il existe un unique propagateur :*

$$\mathtt{ExtEsqCatFactIdent}(\rho) : \mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E}) \to \mathbf{P}$$

*étendant* $\rho$ *à* $\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})$, *i.e. tel que :*

$$\rho = \mathtt{ExtEsqCatFactIdent}(\rho) \circ (\mathbf{E} \mid \mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})).$$

*De même, si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse catégorique, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype, si* $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$ *sont deux propagateurs et si* $\mu : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ *est une métamorphose naturelle, alors il existe une unique métamorphose naturelle :*

$$\begin{array}{c} \mathtt{ExtEsqCatFactIdent}(\mu) \\ \vdots \\ \mathtt{ExtEsqCatFactIdent}(\rho_1) \\ \Downarrow \\ \mathtt{ExtEsqCatFactIdent}(\rho_2) \\ \vdots \\ \mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E}) \\ \downarrow \\ \mathbf{P} \end{array}$$

*étendant* $\mu$ *à* $\mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})$, *i.e. telle que :*

$$\mu = \mathtt{ExtEsqCatFactIdent}(\mu) \circ (\mathbf{E} \mid \mathtt{EsqCatFactIdent}(\mathbf{E})).$$

**4.3.e.** Nous laissons au lecteur le soin de définir les "esquisses catégoriques à factorisations identifiées" [i.e. à unicité de factorisation] quelconques [i.e. non nécessairement engendrées par une esquisse catégorique] puis, dès lors, celui de constater que la PROPOSITION 3 précédente est tout aussi valable lorsqu'on y remplace le prototype $\mathbf{P}$ par une telle "esquisse catégorique à factorisations identifiées" quelconque [mais ce point de vue - évidemment tout à fait "naturel" - ne sera pas explicitement utilisé dans la suite].

## 4.4. Agrégations d'esquisses catégoriques.

**4.4.a.** Si $(\mathbf{S},\leq)$ est un ensemble totalement ordonné, on dit que $F=\big((\mathbb{E}_S)_{S\in\mathbf{S}},(\mathbb{p}_{S,S'})_{S\in\mathbf{S},S'\in\mathbf{S},S\leq S'}\big)$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-*famille d'esquisses catégoriques et propagateurs* si :

- pour tout $S\in\mathbf{S}$, $\mathbb{E}_S$ est une esquisse catégorique,
- pour tous $S\in\mathbf{S}$ et $S'\in\mathbf{S}$ tels que $S\leq S'$, $\mathbb{p}_{S,S'}:\mathbb{E}_S\to\mathbb{E}_{S'}$ est un propagateur,
- pour tout $S\in\mathbf{S}$, on a :

$$\mathbb{p}_{S,S}=\mathtt{Id}(\mathbb{E}_S):\mathbb{E}_S\to\mathbb{E}_S,$$

- pour tous $S\in\mathbf{S}$, $S'\in\mathbf{S}$ et $S''\in\mathbf{S}$ tels que $S\leq S'\leq S''$, on a :

$$\mathbb{p}_{S,S''}=\mathbb{p}_{S',S''}\circ\mathbb{p}_{S,S'}.$$

**4.4.b.** Si $(\mathbf{S},\leq)$ est un ensemble totalement ordonné *infini* et si $F=\big((\mathbb{E}_S)_{S\in\mathbf{S}},(\mathbb{p}_{S,S'})_{S\in\mathbf{S},S'\in\mathbf{S},S\leq S'}\big)$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs, on désigne par :

$$\mathtt{CatAgreg}(F)$$

la catégorie *[obtenue par] agrégation de* $F$, i.e. la catégorie évidemment obtenue [car $(\mathbf{S},\leq)$ est un ensemble ordonné "finiment filtrant"] lorsqu'on impose que :

- ses points sont les classes d'équivalence $\overline{(E,S)}$ où :
  - $S\in\mathbf{S}$ et $E$ est un point de $\mathbb{E}_S$,

  étant entendu qu'on a :

$$\overline{(E,S)}=\overline{(E',S')}$$

  si :

  - il existe $S''\in\mathbf{S}$ tel que :

$$S\leq S'',$$

$$S'\leq S'',$$

$$\mathbb{p}_{S,S''}(E)=\mathbb{p}_{S',S''}(E'),$$

- ses flèches sont les classes d'équivalence $\overline{(e,S)}:\overline{(E_1,S)}\to\overline{(E_2,S)}$ où :
  - $S\in\mathbf{S}$ et $e:E_1\to E_2$ est une flèche de $\mathbb{E}_S$,

  étant entendu qu'on a :

$$\overline{(e,S)}=\overline{(e',S')}$$

si :

- il existe $S'' \in \mathbf{S}$ tel que :

$$S \leq S'',$$

$$S' \leq S'',$$

$$\rho_{S,S''}(e) = \rho_{S',S''}(e').$$

Alors, pour tout $S \in \mathbf{S}$, on note :

$$\underline{\mathbf{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F) : \underline{\mathbf{E}}_S \to \mathtt{CatAgreg}(F)$$

le *foncteur passage aux classes [en $S$]*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $E$ de $\mathbf{E}_S$, on a :

$$\left(\underline{\mathbf{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F)\right)(E) = \overline{(E,S)},$$

- pour toute flèche $e$ de $\mathbf{E}_S$, on a :

$$\left(\underline{\mathbf{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F)\right)(e) = \overline{(e,S)}.$$

**4.4.c.** Si $(\mathbf{S},\leq)$ est un ensemble totalement ordonné *infini* et si $F = \left((\mathbf{E}_S)_{S \in \mathbf{S}}, (\rho_{S,S'})_{S \in \mathbf{S}, S' \in \mathbf{S}, S \leq S'}\right)$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs, on désigne par :

$$\mathtt{EsqCatAgreg}(F)$$

l'*esquisse catégorique [obtenue par] agrégation de* $F$, i.e. l'esquisse catégorique évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- son support est la catégorie agrégation de $F$, i.e. :

$$\underline{\mathtt{EsqCatAgreg}(F)} = \mathtt{CatAgreg}(F),$$

- ses cônes projectifs distingués sont les images des cônes projectifs distingués des différentes $\mathbf{E}_S$ par les foncteurs passsage aux classes $\underline{\mathbf{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F)$, i.e. :

$$\mathtt{CPDist}(\mathtt{EsqCatAgreg}(F))$$

$$=$$

$$\left\{ \left(\underline{\mathbf{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F)\right)(c') \,\middle|\, S \in \mathbf{S} \text{ et } c' \in \mathtt{CPDist}(\mathbf{E}_S) \right\},$$

- ses cônes inductifs distingués sont les images des cônes inductifs distingués des différentes $\mathbf{E}_S$ par les foncteurs passsage aux classes $\underline{\mathbf{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F)$, i.e. :

$$\mathtt{CIDist}(\mathtt{EsqCatAgreg}(F))$$

$$=$$

$$\left\{ \left(\underline{\mathbf{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F)\right)(c'') \,\middle|\, S \in \mathbf{S} \text{ et } c'' \in \mathtt{CIDist}(\mathbf{E}_S) \right\}.$$

Alors, pour tout $S \in \mathbf{S}$, on note :

$$\mathbb{E}_S \mid \mathtt{EsqCatAgreg}(F) : \mathbb{E}_S \to \mathtt{EsqCatAgreg}(F)$$

le *propagateur passage aux classes [en $S$]*, i.e. le propagateur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- son support est le foncteur passage aux classes [en $S$], i.e. :

$$\underline{\mathbb{E}_S \mid \mathtt{EsqCatAgreg}(F)} = \underline{\mathbb{E}}_S \mid \mathtt{CatAgreg}(F).$$

Et, dans ces conditions, il est facile de constater que :

- pour tout $S \in \mathbf{S}$ et tout $S' \in \mathbf{S}$ tels que $S \leq S'$, on a :

$$\left(\mathbb{E}_{S'} \mid \mathtt{EsqCatAgreg}(F)\right) \circ \mathbb{p}_{S,S'} = \mathbb{E}_S \mid \mathtt{EsqCatAgreg}(F).$$

En particulier, si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition et si $F$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-famille de $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisses catégoriques et propagateurs [i.e. si $\mathbb{E}_S$ est, pour tout $S \in \mathbf{S}$, une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse catégorique], il est clair que $\mathtt{EsqCatAgreg}(F)$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse catégorique.

**4.4.d.** Si $(\mathbf{S},\leq)$ est un ensemble totalement ordonné infini, si $F = \left((\mathbb{E}_S)_{S \in \mathbf{S}}, (\mathbb{p}_{S,S'})_{S \in \mathbf{S}, S' \in \mathbf{S}, S \leq S'}\right)$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs et si $\mathbb{P}$ est un prototype, on dit que $Q = (\mathbb{q}_S : \mathbb{E}_S \to \mathbb{P})_{S \in \mathbf{S}}$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-*famille inductive de propagateurs de $F$ vers $\mathbb{P}$* si :

- pour tout $S \in \mathbf{S}$, $\mathbb{q}_S : \mathbb{E}_S \to \mathbb{P}$ est un propagateur,
- pour tout $S \in \mathbf{S}$ et tout $S' \in \mathbf{S}$ tels que $S \leq S'$, on a :

$$\mathbb{q}_{S'} \circ \mathbb{p}_{S,S'} = \mathbb{q}_S.$$

De même, si $(\mathbf{S},\leq)$ est un ensemble totalement ordonné infini, si $F = \left((\mathbb{E}_S)_{S \in \mathbf{S}}, (\mathbb{p}_{S,S'})_{S \in \mathbf{S}, S' \in \mathbf{S}, S \leq S'}\right)$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs, si $\mathbb{P}$ est un prototype, si $Q = (\mathbb{q}_S : \mathbb{E}_S \to \mathbb{P})_{S \in \mathbf{S}}$ et $Q' = (\mathbb{q}'_S : \mathbb{E}_S \to \mathbb{P})_{S \in \mathbf{S}}$ sont deux $(\mathbf{S},\leq)$-familles inductives de propagateurs de $F$ vers $\mathbb{P}$, on dit que $N = (\mathbb{a}_S : \mathbb{q}_S \Rightarrow \mathbb{q}'_S)_{S \in \mathbf{S}}$ est une $(\mathbf{S},\leq)$-*famille inductive de métamorphoses naturelles de $Q$ vers $Q'$* si :

- pour tout $S \in \mathbf{S}$, $\mathbb{a}_S : \mathbb{q}_S \Rightarrow \mathbb{q}'_S : \mathbb{E}_S \to \mathbb{P}$ est une métamorphose naturelle,
- pour tout $S \in \mathbf{S}$ et tout $S' \in \mathbf{S}$ tels que $S \leq S'$, on a :

$$\mathbb{a}_{S'} \circ \mathbb{p}_{S,S'} = \mathbb{a}_S.$$

Dans ces conditions, on vérifie sans difficulté que :

PROPOSITION 4. *Si* $(\mathbf{S},\leq)$ *est un ensemble totalement ordonné infini, si* $F=\big((\mathbf{E}_S)_{S\in\mathbf{S}},(\mathbf{p}_{S,S'})_{S\in\mathbf{S},S'\in\mathbf{S},S\leq S'}\big)$ *est une* $(\mathbf{S},\leq)$*-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype et si* $Q=(\mathbf{q}_S:\mathbf{E}_S\to\mathbf{P})_{S\in\mathbf{S}}$ *est une* $(\mathbf{S},\leq)$*-famille inductive de propagateurs de* $F$ *vers* $\mathbf{P}$*, alors il existe un unique propagateur :*

$$\mathtt{FactInd}(F,Q):\mathtt{EsqCatAgreg}(F)\to\mathbf{P},$$

*de factorisation inductive de* $Q$ *par agrégation de* $F$*, i.e. tel que :*

- *pour tout* $S\in\mathbf{S}$*, on a :*

$$\big(\mathtt{FactInd}(F,Q)\big)\circ\big(\mathbf{E}_S\,|\,\mathtt{EsqCatAgreg}(F)\big)=\mathbf{q}_S.$$

*De même, si* $(\mathbf{S},\leq)$ *est un ensemble totalement ordonné infini, si* $F=\big((\mathbf{E}_S)_{S\in\mathbf{S}},(\mathbf{p}_{S,S'})_{S\in\mathbf{S},S'\in\mathbf{S},S\leq S'}\big)$ *est une* $(\mathbf{S},\leq)$*-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype, si* $Q=(\mathbf{q}_S:\mathbf{E}_S\to\mathbf{P})_{S\in\mathbf{S}}$ *et* $Q'=(\mathbf{q}'_S:\mathbf{E}_S\to\mathbf{P})_{S\in\mathbf{S}}$ *sont deux* $(\mathbf{S},\leq)$*-familles inductives de propagateurs de* $F$ *vers* $\mathbf{P}$ *et si* $N=(\mathbf{a}_S:\mathbf{q}_S\Rightarrow\mathbf{q}'_{S'})_{S\in\mathbf{S}}$ *est une* $(\mathbf{S},\leq)$*-famille inductive de métamorphoses naturelles de* $Q$ *vers* $Q'$ *alors il existe une unique métamorphose naturelle :*

$$\begin{array}{c}\mathtt{FactInd}(F,N)\\ \vdots\\ \mathtt{FactInd}(F,Q)\\ \Downarrow\\ \mathtt{FactInd}(F,Q')\\ \vdots\\ \mathtt{EsqCatAgreg}(F)\\ \downarrow\\ \mathbf{P}\end{array}$$

*i.e. telle que :*

- *pour tout* $S\in\mathbf{S}$*, on a :*

$$\big(\mathtt{FactInd}(F,N)\big)\circ\big(\mathbf{E}_S\,|\,\mathtt{EsqCatAgreg}(F)\big)=\mathbf{a}_S.$$

## 4.5. Prototypes engendrés.

**4.5.a.** Si $\mathbf{T}$ est un ensemble, on note :

$$\mathtt{Card}(\mathbf{T})$$

son cardinal.

**4.5.b.** Si $w$ est un ordinal régulier, on dit qu'un graphe à composition $\mathcal{G}$ est *$w$-petit*, si :

- $\mathtt{Card}(\mathtt{Pt}(\mathcal{G})) < w$,
- $\mathtt{Card}(\mathtt{Fl}(\mathcal{G})) < w$.

**4.5.c.** Si $\mathbb{E}$ est une esquisse, on note :

$$\mathtt{OrdREg}(\mathbb{E})$$

ou, plus suggestivement encore :

$$w(\mathbb{E}) = \mathtt{OrdREg}(\mathbb{E})$$

le plus petit ordinal régulier tel que :

- les indexations de tous les cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}$ sont des graphes à composition $w(\mathbb{E})$-petits,
- les indexations de tous les cônes inductifs distingués de $\mathbb{E}$ sont des graphes à composition $w(\mathbb{E})$-petits.

**4.5.d.** Si $\mathbb{E}$ est une esquisse, on désigne par :

$$\mathtt{FamResEsqCat}(\mathbb{E})$$

$$=$$

$$\left((\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w'))_{w' \leq w(\mathbb{E})}, (\mathtt{Propa}(\mathbb{E}, w', w''))_{w' \leq w'' \leq w(\mathbb{E})}\right)$$

la *famille résolvante [d'esquisses catégoriques et propagateurs] associée à* $\mathbb{E}$, i.e. la $(w(\mathbb{E}) + 1)$-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs évidemment obtenue [par induction transfinie] lorsque :

- on impose que :

$$\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, 0) = \mathtt{ClChem}(\mathbb{E}),$$

- si $w'''$ est un ordinal tel que $w''' < w(\mathbb{E})$ et si la $(w''' + 1)$-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs :

$$\left(\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w')\right)_{w'\leq w'''},\left(\mathtt{Propa}(\mathbb{E},w',w'')\right)_{w'\leq w''\leq w'''}\right)$$

est définie, alors :

- on impose que :

$$\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w'''+1)$$
$$=$$
$$\mathtt{EsqCatFactIdent}\left(\mathtt{EsqCatFactDist}\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\right)\right)$$

[c'est donc une esquisse catégorique],

- on impose que le propagateur :

$$\mathtt{Propa}(\mathbb{E},w''',w'''+1)$$
$$:$$
$$\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')$$
$$\downarrow$$
$$\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w'''+1)$$

est le composé du propagateur :

$$\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\,|\,\mathtt{EsqCatFactDist}\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\right)$$
$$:$$
$$\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')$$
$$\downarrow$$
$$\mathtt{EsqCatFactDist}\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\right)$$

avec le propagateur :

$$\mathtt{EsqCatFactDist}\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\right)$$
$$|$$
$$\mathtt{EsqCatFactIdent}\left(\mathtt{EsqCatFactDist}\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\right)\right)$$
$$:$$
$$\mathtt{EsqCatFactDist}\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\right)$$
$$\downarrow$$
$$\mathtt{EsqCatFactIdent}\left(\mathtt{EsqCatFactDist}\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w''')\right)\right)$$

- si $w'''$ est un ordinal *limite* [par conséquent, infini] tel que $w''' \leq w(\mathbb{E})$ et si la $w'''$-famille d'esquisses catégoriques et propagateurs :

$$\left(\left(\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E},w')\right)_{w'<w'''},\left(\mathtt{Propa}(\mathbb{E},w',w'')\right)_{w'\leq w''<w'''}\right)$$

est définie, alors :

- on impose que :

$$\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w''') = \mathtt{EsqCatAgreg}\left((\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w'))_{w' < w'''}, (\mathtt{Propa}(\mathbb{E}, w', w''))_{w' \leq w'' < w'''}\right)$$

- pour tout ordinal $w' < w'''$, on impose que :

$$\mathtt{Propa}(\mathbb{E}, w', w''') = \begin{array}{c} \mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w') \\ \downarrow \\ \mathtt{EsqCatAgreg}\left((\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w'))_{w' < w'''}, (\mathtt{Propa}(\mathbb{E}, w', w''))_{w' \leq w'' < w'''}\right) \\ \vdots \\ \mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w') \\ \downarrow \\ \mathtt{EsqCatAgreg}\left((\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w'))_{w' < w'''}, (\mathtt{Propa}(\mathbb{E}, w', w''))_{w' \leq w'' < w'''}\right) \end{array} = \mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w''').$$

**4.5.e.** Si $\mathbb{E}$ est une esquisse, il est clair [par construction] que la "dernière" esquisse catégorique $\mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w(\mathbb{E}))$ de sa famille résolvante est un prototype. On l'appelle le *prototype engendré par* $\mathbb{E}$ et on note, plus suggestivement :

$$\mathtt{ProtoEng}(\mathbb{E}) = \mathtt{EsqCat}(\mathbb{E}, w(\mathbb{E})),$$

Alors, on désigne par :

$$\mathbb{E} \mid \mathtt{ProtoEng}(\mathbb{E}) : \mathbb{E} \to \mathtt{ProtoEng}(\mathbb{E})$$

le *propagateur canonique de* $\mathbb{E}$ *vers son prototype engendré*, i.e. le composé du propagateur :

$$\begin{array}{c} \mathbb{E} \mid \mathtt{ClChem}(\mathbb{E}) \\ \vdots \\ \mathbb{E} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\mathtt{ClChem}(\mathbf{E})$$

avec le propagateur :

$$\mathtt{Propa}(\mathbf{E}, 0, \omega(\mathbf{E}))$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{ClChem}(\mathbf{E}) = \mathtt{EsqCat}(\mathbf{E}, 0)$$

$$\downarrow$$

$$\mathtt{EsqCat}(\mathbf{E}, \omega(\mathbf{E}) = \mathtt{ProtoEng}(\mathbf{E}).$$

En particulier, si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition et si $\mathbf{E}$ est une $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')$-esquisse catégorique, il est clair que $\mathtt{ProtoEng}(\mathbf{E})$ est un $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')$-prototype.

**4.5.f.** Compte tenu de la PROPOSITION 1, de la PROPOSITION 2, de la PROPOSITION 3 et de la PROPOSITION 4, on vérifie sans difficulté que :

PROPOSITION 5. *Si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype et si* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$ *est un propagateur, alors il existe un unique propagateur :*

$$\mathtt{ExtProtoEng}(\rho) : \mathtt{ProtoEng}(\mathbf{E}) \to \mathbf{P}$$

*étendant* $\rho$ *à* $\mathtt{ProtoEng}(\mathbf{E})$, *i.e. tel que :*

$$\rho = \mathtt{ExtProtoEng}(\rho) \circ (\mathbf{E} \mid \mathtt{ProtoEng}(\mathbf{E})).$$

*De même, si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype, si* $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$ *sont deux propagateurs et si* $\mu : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ *est une métamorphose naturelle, alors il existe une unique métamorphose naturelle :*

$$\mathtt{ExtProtoEng}(\mu)$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{ExtProtoEng}(\rho_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathtt{ExtProtoEng}(\rho_2)$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{ProtoEng}(\mathbf{E})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{P}$$

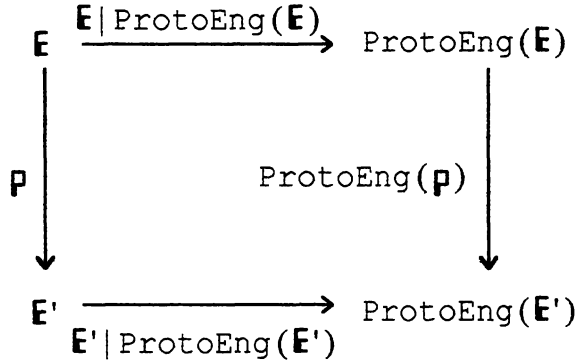
*étendant* $\mu$ *à* $\mathtt{ProtoEng}(\mathbf{E})$, *i.e. telle que :*

$$\mu = \mathrm{ExtProtoEng}(\mu) \circ (\mathbb{E} \mid \mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E})).$$

**4.5.g.** De la PROPOSITION 5, résulte immédiatement que, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses et si $\rho : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est un propagateur, on dispose d'un unique propagateur [étendant $\rho$ tant à $\mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E})$ qu'à $\mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E}')$] :

$$\mathrm{ProtoEng}(\rho) : \mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E}) \to \mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E}')$$

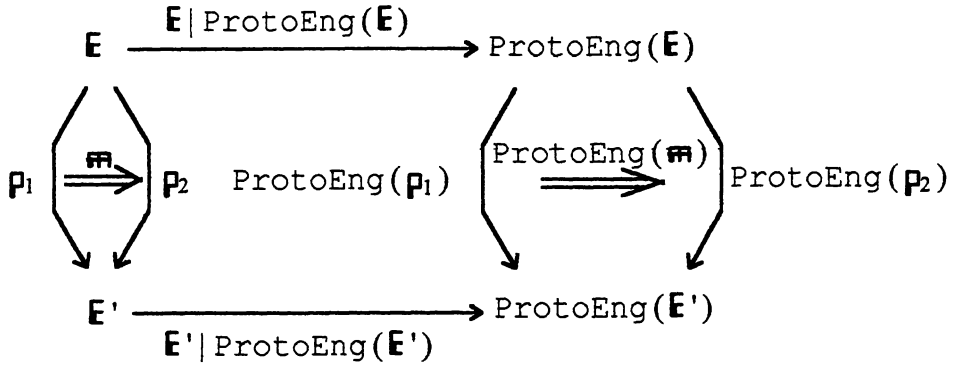
rendant commutatif le diagramme [de propagateurs] ci-dessous :




De même, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ sont deux propagateurs et si $\mu : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle, on dispose d'une unique métamorphose naturelle [étendant $\mu$ tant à $\mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E})$ qu'à $\mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E}')$] :

$$\begin{array}{c} \mathrm{ProtoEng}(\mu) \\ \vdots \\ \mathrm{ProtoEng}(\rho_1) \\ \Downarrow \\ \mathrm{ProtoEng}(\rho_2) \\ \vdots \\ \mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E}) \\ \downarrow \\ \mathrm{ProtoEng}(\mathbb{E}') \end{array}$$

rendant commutatif le diagramme [de propagateurs et métamorphoses naturelles] ci-dessous :


E
E | ProtoEng(E)
ProtoEng(E)
ρ1
π
ρ2
ProtoEng(ρ1)
ProtoEng(π)
ProtoEng(ρ2)
E'
ProtoEng(E')
E' | ProtoEng(E')

---

# 5. Catégories d'esquisses.

## 5.1. Petitesse.

**5.1.a.** Si **U** est un univers, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est *localement* **U**-*petite* si :

- son support $\underline{\mathbb{E}}$ est un graphe à composition localement **U**-petit,
- l'indexation de chacun de ses cônes projectifs distingués est un graphe à composition **U**-petit,
- l'indexation de chacun de ses cônes inductifs distingués est un graphe à composition **U**-petit.

Si tel est le cas et si $\mathbb{E}=\mathbb{P}$ est un prototype, on dit évidemment qu'il s'agit d'un *prototype localement* **U**-*petit*.

**5.1.b.** Si **U** est un univers, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est **U**-*petite* si :

- son support $\underline{\mathbb{E}}$ est un graphe à composition **U**-petit,
- l'ensemble $\mathtt{CPDist}(\mathbb{E})$ de ses cônes projectifs distingués est un ensemble **U**-petit,
- l'ensemble $\mathtt{CIDist}(\mathbb{E})$ de ses cônes inductifs distingués est un ensemble **U**-petit,
- l'indexation de chacun de ses cônes projectifs distingués est un graphe à composition **U**-petit,
- l'indexation de chacun de ses cônes inductifs distingués est un graphe à composition **U**-petit.

Si tel est le cas et si $\mathbb{E}=\mathbb{P}$ est un prototype, on dit évidemment qu'il s'agit d'un *prototype* **U**-*petit*.

## 5.2. Catégories d'esquisses U-petites.

**5.2.a.** Si **U** est un univers, on note indifféremment :

$$\texttt{CatEsqPetites}(\mathbf{U}) = \mathcal{Esq}_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des esquisses* **U**-*petites*, i.e. la catégorie canoniquement obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les esquisses **U**-petites,
- ses flèches sont les propagateurs entre ces esquisses **U**-petites.

De même, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{CatEsqCatPetites}(\mathbf{U}) = \mathcal{EsqCat}_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des esquisses catégoriques* **U**-*petites*, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Esq}_{\mathbf{U}}$ dont les points sont les esquisses catégoriques **U**-petites, et on note :

$$\mathcal{EsqCat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{Esq}_{\mathbf{U}} : \mathcal{EsqCat}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{Esq}_{\mathbf{U}}$$

le foncteur injection canonique.

Enfin, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{CatProtoPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{Proto}_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des prototypes* **U**-*petits*, i.e. la sous-catégorie pleine tant de $\mathcal{EsqCat}_{\mathbf{U}}$ que de $\mathcal{Esq}_{\mathbf{U}}$ dont les points sont les prototypes **U**-petits, et on note :

$$\mathcal{Proto}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{EsqCat}_{\mathbf{U}} : \mathcal{Proto}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{EsqCat}_{\mathbf{U}}$$

et :

$$\mathcal{Proto}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{Esq}_{\mathbf{U}} : \mathcal{Proto}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{Esq}_{\mathbf{U}}$$

les foncteurs injections canoniques.

**5.2.b.** Si **U** est un univers et si **X'** et **X"** sont deux ensembles de graphes à composition, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{CatEsqPetites}(\mathbf{U},\mathbf{X}',\mathbf{X}'') = (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{Esq}_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des* $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-*esquisses* **U**-*petites*, i.e la catégorie canoniquement obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisses **U**-petites,
- ses flèches sont les propagateurs entre ces $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisses **U**-petites.

De même, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{CatEsqCatPetites}(\mathbf{U},\mathbf{X}',\mathbf{X}'') = (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des* $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$*-esquisses catégoriques* $\mathbf{U}$*-petites*, i.e. la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-$\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}$ dont les points sont les $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisses catégoriques $\mathbf{U}$-petites, et on note :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} \subseteq (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}$$

le foncteur injection canonique.

Enfin, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{CatProtoPetits}(\mathbf{U},\mathbf{X}',\mathbf{X}'') = (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des* $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$*-prototypes* $\mathbf{U}$*-petits*, i.e. la sous-catégorie pleine tant de $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-$\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$ que de $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-$\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}$ dont les points sont les $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-prototypes $\mathbf{U}$-petits, et on note :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \subseteq (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$$

et :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \subseteq (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}$$

les foncteurs injections canoniques.

**5.2.c.** Si $\mathbf{U}$ est un univers et si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition, la catégorie $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-$\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}$ est évidemment une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}$.

On note :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} \to \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}$$

le foncteur injection canonique.

De même, la catégorie $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-$\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$ est évidemment une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$.

On note :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} \to \mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$$

le foncteur injection canonique.

Enfin, la catégorie $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-$\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}}$ est évidemment une sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}}$.

On note :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \to \mathcal{P}roto_{\mathbf{U}}$$

le foncteur injection canonique.

## 5.3. Adjonctions.

**5.3.a.** Si $\mathbf{U}$ est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{FoncClChemPetits}(\mathbf{U}) = \mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-) : \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} \to \mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "classes de chemins", pour les esquisses, relatif à la* $\mathbf{U}$*-petitesse*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute esquisse $\mathbf{U}$-petite $\mathbb{E}$, on a :

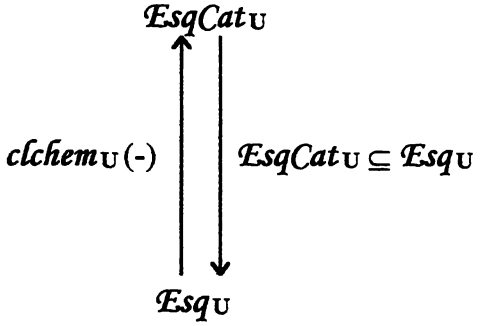
$$\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-)(\mathbb{E}) = \texttt{ClChem}(\mathbb{E}),$$

  [puisque, si $\mathbb{E}$ est une esquisse $\mathbf{U}$-petite, il est clair que $\texttt{ClChem}(\mathbb{E})$ est une esquisse catégorique qui est $\mathbf{U}$-petite],

- pour toutes esquisses $\mathbf{U}$-petites $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ et pour tout propagateur $\mathbb{p} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, on a :

$$\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-)(\mathbb{p}) = \texttt{ClChem}(\mathbb{p}).$$

De la PROPOSITION 1 il résulte évidemment que, dans le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :




le foncteur :

$$\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-) : \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} \to \mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}}$$

est un adjoint à gauche du foncteur :

$$\mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} : \mathcal{E}sqCat_{\mathbf{U}} \to \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}.$$

**5.3.b.** Si $\mathbf{U}$ est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{FoncProtoEngPetits}(\mathbf{U}) = \textit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-) : \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} \to \mathcal{P}roto_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "prototype engendré", pour les esquisses, relatif à la* **U**-*petitesse*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute esquisse **U**-petite $\mathbb{E}$, on a :

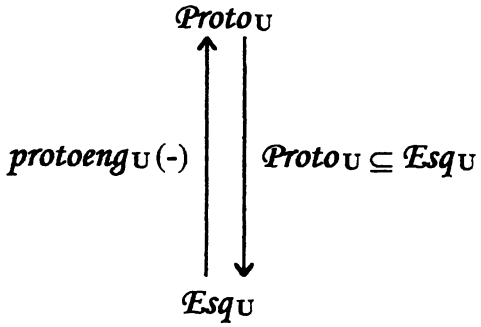
$$\textit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-)(\mathbb{E}) = \texttt{ProtoEng}(\mathbb{E}),$$

  [puisque, si $\mathbb{E}$ est une esquisse **U**-petite, il est aisé de vérifier que $\texttt{ProtoEng}(\mathbb{E})$ est un prototype qui est **U**-petit],

- pour toutes esquisses **U**-petites $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ et pour tout propagateur $\rho : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, on a :

$$\textit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-)(\rho) = \texttt{ProtoEng}(\rho).$$

De la PROPOSITION 5 il résulte évidemment que, dans le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :




le foncteur :

$$\textit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-) : \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} \to \mathcal{P}roto_{\mathbf{U}}$$

est un adjoint à gauche du foncteur :

$$\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} : \mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \to \mathcal{E}sq_{\mathbf{U}}.$$

**5.3.c.** Si $\mathbf{U}$ est un univers et si $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont deux ensembles de graphes à composition, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{FoncClChemPetits}(\mathbf{U},\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-)$$

$$:$$

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{Esq}_{\mathbf{U}}$$

$$\downarrow$$

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{EsqCat}_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "classes de chemins", pour les* $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$*-esquisses, relatif à la* **U***-petitesse*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute esquisse **U**-petite $\mathbb{E}$, on a :

  $$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-)(\mathbb{E}) = \mathtt{ClChem}(\mathbb{E}),$$

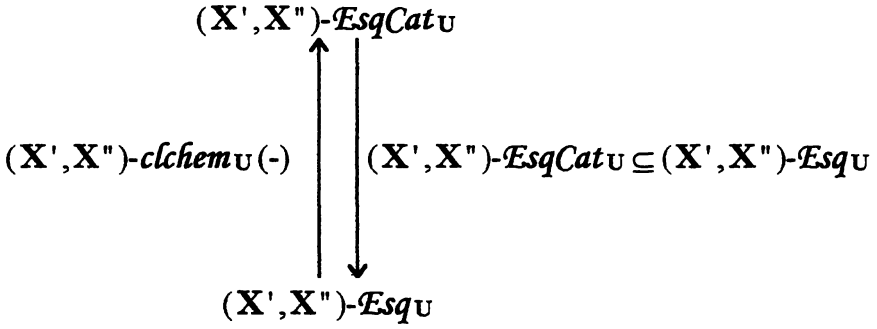
  [puisque, si $\mathbb{E}$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse **U**-petite, alors $\mathtt{ClChem}(\mathbb{E})$ est encore une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse, catégorique, et qui est **U**-petite],

- pour toutes $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisses **U**-petites $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ et pour tout propagateur $\mathbb{p} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, on a :

  $$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-)(\mathbb{p}) = \mathtt{ClChem}(\mathbb{p}).$$

Ainsi, le foncteur $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-) : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{Esq}_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{EsqCat}_{\mathbf{U}}$ est une restriction du foncteur $\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-) : \mathit{Esq}_{\mathbf{U}} \to \mathit{EsqCat}_{\mathbf{U}}$.

De la PROPOSITION 1, ou encore par resriction de l'adjonction du point **a.** précédent, il résulte évidemment que, dans le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :




le foncteur :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{clchem}_{\mathbf{U}}(-) : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{Esq}_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{EsqCat}_{\mathbf{U}}$$

est un adjoint à gauche du foncteur :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{EsqCat}_{\mathbf{U}} \subseteq (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{Esq}_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{EsqCat}_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{Esq}_{\mathbf{U}}.$$

**5.3.d.** Si $\mathbf{U}$ est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{FoncProtoEngPetits}(\mathbf{U},\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-)$$

$$:$$

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}\mathit{sq}_{\mathbf{U}}$$

$$\downarrow$$

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}\mathit{roto}_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "prototype engendré", pour les* $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$*-esquisses, relatif à la* $\mathbf{U}$*-petitesse*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse $\mathbf{U}$-petite $\mathbb{E}$, on a :

  $$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-)(\mathbb{E}) = \texttt{ProtoEng}(\mathbb{E}),$$

  [puisque, si $\mathbb{E}$ est une $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-esquisse $\mathbf{U}$-petite, alors $\texttt{ProtoEng}(\mathbb{E})$ est encore un $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')$-prototype et qui est $\mathbf{U}$-petit],

- pour toutes esquisses $\mathbf{U}$-petites $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ et pour tout propagateur $\mathbb{p} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, on a :

  $$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-)(\mathbb{p}) = \texttt{ProtoEng}(\mathbb{p}).$$

Ainsi, le foncteur $(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-) : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}\mathit{sq}_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}\mathit{roto}_{\mathbf{U}}$ est une restriction du foncteur $\mathit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-) : \mathcal{E}\mathit{sq}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{P}\mathit{roto}_{\mathbf{U}}$.

De la PROPOSITION 5, ou encore par resriction de l'adjonction du point **b.** précédent, il résulte évidemment que, dans le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}\mathit{roto}_{\mathbf{U}} & \\ & \uparrow \quad \| & \\ (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-) & \| & (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}\mathit{roto}_{\mathbf{U}} \subseteq (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}\mathit{sq}_{\mathbf{U}} \\ & \| \quad \downarrow & \\ & (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}\mathit{sq}_{\mathbf{U}} & \end{array}$$

le foncteur :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathit{protoeng}_{\mathbf{U}}(-) : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}\mathit{sq}_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}\mathit{roto}_{\mathbf{U}}$$

est un adjoint à gauche du foncteur :

$$(\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \subseteq (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} : (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\text{-}\mathcal{P}roto_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{X}',\mathbf{X}'')\mathcal{E}sq_{\mathbf{U}} .$$

---

# 6. Bibliographie.


(C.O.G.R.) **D. Duval et C. Lair**, Sketches and Specifications : Reference Manual, Second Part : Projective Sketches, Rapport de Recherche du L.A.C.O., Limoges, 2000 [http://www.unilim.fr/laco/rapports].

(E.T.E.1.) **C. Lair**, Elément de Théorie des Esquisses, Section 1 : Graphes à Composition, Diagrammes 45+46, Paris, 2001.

(E.T.E.2.) **C. Lair**, Eléments de Théorie des Esquisses, Section 2 : Systèmes Tensoriels et Systèmes Enrichis de Graphes à Composition, Diagrammes 47+48, Paris, 2002.

(E.T.E.n.) **C. Lair**, Eléments de Théorie des Esquisses, Sections 1, 2, 3, 4 et suivantes, parues et à paraître dans Diagrammes.

(E.T.S.A.) **C. Ehresmann**, Esquisses et Types des Structures Algébriques, Bull. Instit. Polit. XIV, Iasi, 1968.

(E.T.S.C.) **C. Ehresmann**, Introduction to the Theory of Structured Categories, Techn. Rep. 10, Univ. of Kansas, Lawrence, 1966.

(L.D.T.E.) **L. Coppey et C. Lair**, Leçons de Théorie des Esquisses (I) et (II), Diagrammes 12, Paris, 1984 et Diagrammes 19, Paris, 1988.

(S.F.A.T.) **F. W. Lawvere**, Some Algebraic Problems in the Context of Functorial Semantics of Algebraic Theories, Lecture Notes in Math. 61, Springer, 1968.

# 7. Table.

**1. Introduction.** 3

**2. Cônes projectifs et cônes inductifs, cônes projectifs limites et cônes inductifs limites.** 5
2.1. Cônes projectifs et cônes inductifs. 5
2.2. Cônes projectifs et cônes inductifs limites. 12

**3. Esquisses, propagateurs et métamorphoses naturelles.** 16
3.1. Esquisses. 16
3.2. Propagateurs. 22
3.3. Métamorphoses naturelles. 26

**4. Prototypes engendrés.** 29
4.1. Esquisses catégoriques de classes de chemins engendrées. 29
4.2. Esquisses catégoriques à factorisations distinguées engendrées. 32
4.3. Esquisses catégoriques à factorisations identifiées engendrées. 36
4.4. Agrégations d'esquisses catégoriques. 39
4.5. Prototypes engendrés. 42

**5. Catégories d'esquisses.** 49
5.1. Petitesse. 49
5.2. Catégories d'esquisses U-petites. 50
5.3. Adjonctions. 52

**6. Bibliographie.** 57

**7. Table.** 58

**UNIVERSITE PARIS 7**
**U.F.R. de Mathématiques**
**Case 7012**
**2, place JUSSIEU**
**75251 PARIS CEDEX 05**
**FRANCE**

**lairchrist@aol.com**