DIAGRAMMES

C. LAIR

Éléments de théorie des esquisses. Section 2 : systèmes tensoriels et systèmes enrichis de graphes à composition

Diagrammes, tome 47-48 (2002), p. 3-34

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2002__47-48__3_0>

© Université Paris 7, UER math., 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUMES 47 + 48 , 2002

ELEMENTS DE THEORIE DES ESQUISSES

SECTION 2 :
SYSTEMES TENSORIELS
ET
SYSTEMES ENRICHIS
DE
GRAPHES A COMPOSITION

C. Lair

1. Introduction.

Ce texte est le deuxième d'une série [voir (E.T.E.n.)] où seront exposés quelques éléments de la *théorie des esquisses*. Nous y reprenons systématiquement la terminologie et les notations de (E.T.E.1.).

Nous présentons, ici, quelques rudiments supplémentaires de la *théorie des graphes à composition* : ceux concernant divers de leurs produits tensoriels ainsi que divers de leurs enrichissements..

La catégorie des graphes à composition peut être munie de *nombreuses* structures de *catégories multiplicatives* [voir (C.A.M.U.)] ou *monoïdales* [voir (C.L.C.A.)], associées à autant de types de *produits tensoriels* différents entre graphes à composition, et *enrichies* de bi-fermetures ou même de fermetures [voir (C.L.C.A.)], associées à autant de types de *transformations "plus ou moins" naturelles* entre foncteurs : on peut trouver en (P.T.G.M.) une classification complète de ces types de produits tensoriels et de transformations, considérés *isolément* les uns des autres.

En nous limitant [pour faire plus simple et plus court] à *trois* seulement de ces types de produits tensoriels [le *creux*, le *plein* et le *produit cartésien*] et de transformations "les plus naturelles", mais en les considérant cette fois non plus isolément mais *simultanément*, nous montrons [§2] que les graphes à composition [d'une taille donnée] s'organisent tous en un même *système tensoriel*, au sens de (S.T.S.E.) ou (P.T.E.A.), puis [§3] en un *système enrichi* associé, au sens de (S.T.S.E.).

De la sorte, sont précisés et structurés les différents modes concrets de composition, non seulement des foncteurs entre eux, mais aussi des foncteurs et des transformations ["les plus"] naturelles entre eux, ainsi que des transformations ["les plus"] naturelles entre elles et, ce, selon qu'ils et elles sont ou non à valeurs dans des graphes à composition généraux, des catégories ou des graphes orientés.

Ainsi, ces "systèmes" étant explicités, un certain nombre de constructions, ne serait-ce que celles de "lax-limites inductives", sont pleinement bien fondées.

Ce travail résulte d'une collaboration avec D. Duval : on pourra en trouver une version initiale intégrée à (C.O.G.R.).

---

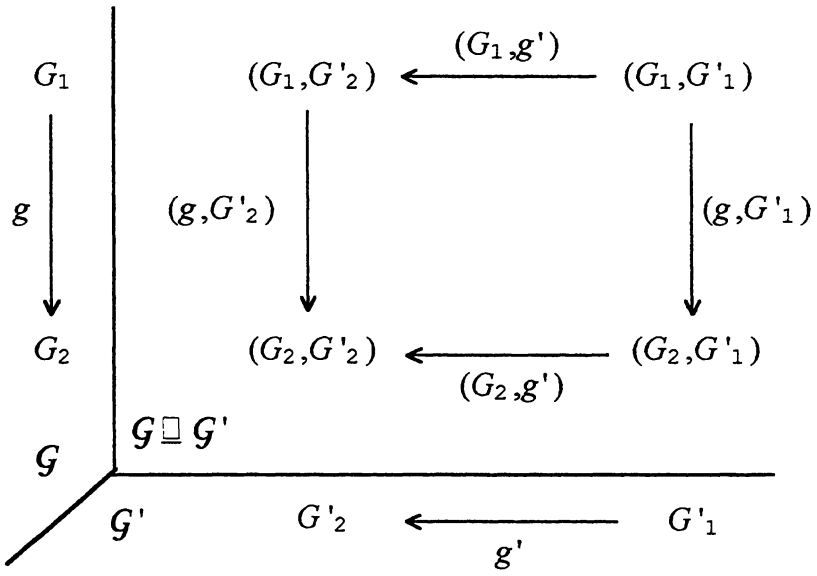
2. Systèmes tensoriels de graphes à composition.

2.1. Tensorisations de graphes à composition.

2.1.a. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, on désigne par :

$$\mathcal{G} \square \mathcal{G}'$$

le *graphe à composition produit tensoriel creux de* $\mathcal{G}$ *avec* $\mathcal{G}'$, i.e. le graphe à composition évidemment obtenu lorsqu'on impose, comme schématiquement représenté ci-dessous, que :



- ses points sont les (G,G'), où G est un point de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$,
- ses flèches sont :
  - les $(g,G') : (G_1,G') \to (G_2,G')$, où $g : G_1 \to G_2$ est une flèche de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$,

- les $(G,g'):(G,G'_1)\to(G,G'_2)$, où G est un point de $\mathcal{G}$ et $g':G'_1\to G'_2$ est une flèche de $\mathcal{G}'$,

- ses flèches identités sont :
  - les $(g,G'):(G,G')\to(G,G')$, où $g:G\to G$ est une flèche identité de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$,
  - les $(G,g'):(G,G')\to(G,G')$, où G est un point de $\mathcal{G}$ et $g':G'\to G'$ est une flèche identité de $\mathcal{G}'$,
- ses couples composables sont :
  - les $((g_1,G'),(g_2,G'))$, où (g_1,g_2) est un couple composable de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :

$$(g_2,G')\bullet(g_1,G')=(g_2\bullet g_1,G'),$$

  - les $((G,g'_1),(G,g'_2))$, où G est un point de $\mathcal{G}$ et (g'_1,g'_2) est un couple composable de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :

$$(G,g'_2)\bullet(G,g'_1)=(G,g'_2\bullet g'_1).$$

En particulier, si $\mathcal{G}=\mathcal{R}$ et $\mathcal{G}'=\mathcal{R}'$ sont deux graphes orientés, $\mathcal{R}\square\mathcal{R}'$ est évidemment un graphe orienté.

2.1.b. Si $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}'_1$, $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}'_2$ sont quatre graphes à composition et si $f:\mathcal{G}_1\to\mathcal{G}_2$ et $f':\mathcal{G}'_1\to\mathcal{G}'_2$ sont deux foncteurs, on désigne par :

$$f\square f':\mathcal{G}_1\square\mathcal{G}'_1\to\mathcal{G}_2\square\mathcal{G}'_2$$

le *foncteur produit tensoriel creux de f avec f'*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point G_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour tout point G'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :

$$(f\square f')(G_1,G'_1)=(f(G_1),f'(G'_1)),$$

- pour toute flèche g_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour tout point G'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :

$$(f\square f')(g_1,G'_1)=(f(g_1),f'(G'_1)),$$

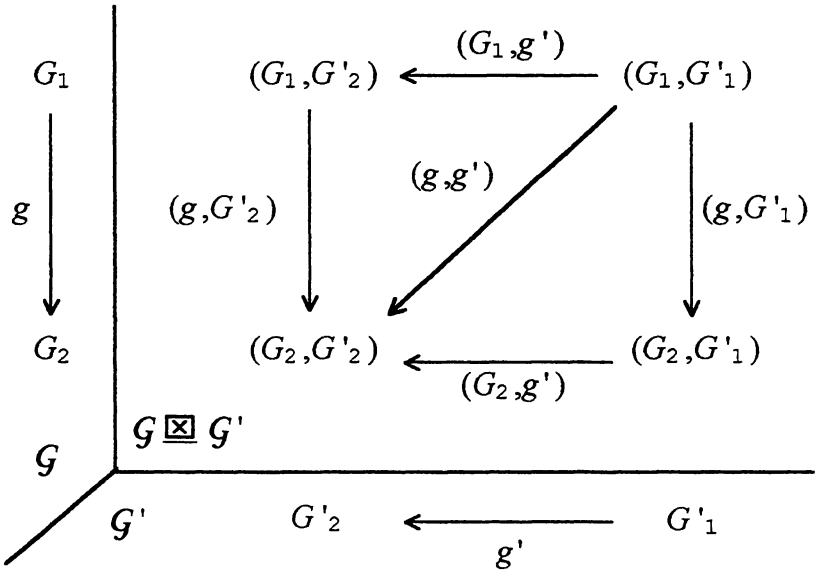
- pour tout point G_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour toute flèche g'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :

$$(f\square f')(G_1,g'_1)=(f(G_1),f'(g'_1)).$$

2.1.c. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, on désigne par :

$\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{G}'$

le *graphe à composition produit tensoriel plein de* $\mathcal{G}$ *avec* $\mathcal{G}'$, i.e. le graphe à composition évidemment obtenu lorsqu'on impose, comme schématiquement représenté ci-dessous, que :



- ses points sont les (G,G'), où G est un point de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$,
- ses flèches sont :
  - les $(g,G') : (G_1,G') \to (G_2,G')$, où $g : G_1 \to G_2$ est une flèche de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$,
  - les $(G,g') : (G,G'_1) \to (G,G'_2)$, où G est un point de $\mathcal{G}$ et $g' : G'_1 \to G'_2$ est une flèche de $\mathcal{G}'$,
  - les $(g,g') : (G_1,G'_1) \to (G_2,G'_2)$, où $g : G_1 \to G_2$ est une flèche de $\mathcal{G}$ et $g' : G'_1 \to G'_2$ est une flèche de $\mathcal{G}'$,
- ses flèches identités sont :
  - les $(g,G') : (G,G') \to (G,G')$, où $g : G \to G$ est une flèche identité de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$,
  - les $(G,g') : (G,G') \to (G,G')$, où G est un point de $\mathcal{G}$ et $g' : G' \to G'$ est une flèche identité de $\mathcal{G}'$,
  - les $(g,g') : (G,G') \to (G,G')$, où $g : G \to G$ est une flèche identité de $\mathcal{G}$ et $g' : G' \to G'$ est une flèche identité de $\mathcal{G}'$,

- ses couples composables sont :
  - les $((g_1,G'),(g_2,G'))$, où (g_1,g_2) est un couple composable de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :
$$(g_2,G')\cdot(g_1,G')=(g_2\cdot g_1,G'),$$
  - les $((G,g'_1),(G,g'_2))$, où G est un point de $\mathcal{G}$ et (g'_1,g'_2) est un couple composable de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :
$$(G,g'_2)\cdot(G,g'_1)=(G,g'_2\cdot g'_1),$$
  - les $((g,G'_1),(G_2,g'))$, où $g:G_1\to G_2$ est une flèche de $\mathcal{G}$ et $g':G'_1\to G'_2$ est une flèche de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :
$$(G_2,g')\cdot(g,G'_1)=(g,g'),$$
  - les $((G_1,g'),(g,G'_2))$, où $g:G_1\to G_2$ est une flèche de $\mathcal{G}$ et $g':G'_1\to G'_2$ est une flèche de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :
$$(g,G'_2)\cdot(G_1,g')=(g,g'),$$
  - les $((g_1,g'_1),(g_2,g'_2))$, où (g_1,g_2) est un couple composable de $\mathcal{G}$ et (g'_1,g'_2) est un couple composable de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :
$$(g_2,g'_2)\cdot(g_1,g'_1)=(g_2\cdot g_1,g'_2\cdot g'_1).$$

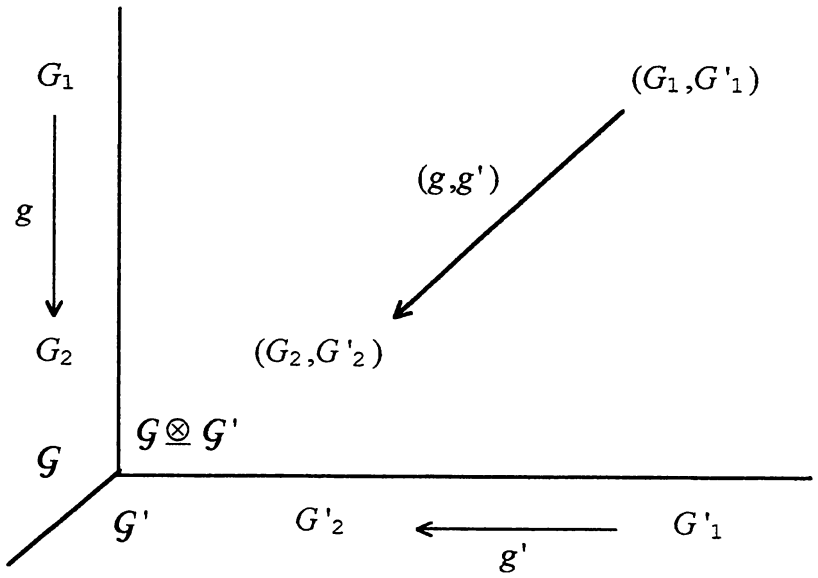
2.1.d. Si $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}'_1$ et $\mathcal{G}'_2$ sont quatre graphes à composition et si $f:\mathcal{G}_1\to\mathcal{G}_2$ et $f':\mathcal{G}'_1\to\mathcal{G}'_2$ sont deux foncteurs, on désigne par :
$$f\boxtimes f':\mathcal{G}_1\boxtimes\mathcal{G}'_1\to\mathcal{G}_2\boxtimes\mathcal{G}'_2$$
le *foncteur produit tensoriel plein de* f *avec* f', i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point G_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour tout point G'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :
$$(f\boxtimes f')(G_1,G'_1)=(f(G_1),f'(G'_1)),$$
- pour toute flèche g_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour tout point G'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :
$$(f\boxtimes f')(g_1,G'_1)=(f(g_1),f'(G'_1)),$$
- pour tout point G_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour toute flèche g'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :
$$(f\boxtimes f')(G_1,g'_1)=(f(G_1),f'(g'_1)),$$
- pour toute flèche g_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour toute flèche g'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :
$$(f\boxtimes f')(g_1,g'_1)=(f(g_1),f'(g'_1)).$$

2.1.e. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, on désigne indifféremment par :

$$\mathcal{G} \underline{\otimes} \mathcal{G}' = \mathcal{G} \times \mathcal{G}'$$

le *graphe à composition produit tensoriel cartésien*, ou encore *produit cartésien*, de $\mathcal{G}$ avec $\mathcal{G}'$, i.e. le graphe à composition évidemment obtenu lorsqu'on impose, comme représenté schématiquement ci-dessous, que :



- ses points sont les (G,G'), où G est un point de $\mathcal{G}$ et G' est un point de $\mathcal{G}'$,
- ses flèches sont les $(g,g') : (G_1,G'_1) \to (G_2,G'_2)$, où $g : G_1 \to G_2$ est une flèche de $\mathcal{G}$ et $g' : G'_1 \to G'_2$ est une flèche de $\mathcal{G}'$,
- ses flèches identités sont les $(g,g') : (G,G') \to (G,G')$, où $g : G \to G$ est une flèche identité de $\mathcal{G}$ et $g' : G' \to G'$ est une flèche identité de $\mathcal{G}'$,
- ses couples composables sont les $((g_1,g'_1),(g_2,g'_2))$, où (g_1,g_2) est un couple composable de $\mathcal{G}$ et (g'_1,g'_2) est un couple composable de $\mathcal{G}'$, auquel cas on a :

$$(g_2,g'_2) \bullet (g_1,g'_1) = (g_2 \bullet g_1, g'_2 \bullet g'_1).$$

En particulier, si $\mathcal{G} = C$ et $\mathcal{G}' = C'$ sont des catégories, il est facile de vérifier que $C \underline{\otimes} C' = C \times C'$ est une catégorie.

2.1.f. Si $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}'_1$ et $\mathcal{G}'_2$ sont quatre graphes à composition et si $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ et $f' : \mathcal{G}'_1 \to \mathcal{G}'_2$ sont deux foncteurs, on désigne indifféremment par :

$$f \underline{\otimes} f' : \mathcal{G}_1 \underline{\otimes} \mathcal{G}'_1 \to \mathcal{G}_2 \underline{\otimes} \mathcal{G}'_2$$

$$=$$

$$f \times f' : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}'_1 \to \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}'_2$$

le *foncteur produit tensoriel cartésien*, ou *produit cartésien*, *de* f *avec* f', i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point G_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour tout point G'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :

$$(f \underline{\otimes} f')(G_1, G'_1) = (f \times f')(G_1, G'_1) = (f(G_1), f'(G'_1)),$$

- pour toute flèche g_1 de $\mathcal{G}_1$ et pour toute flèche g'_1 de $\mathcal{G}'_1$, on a :

$$(f \underline{\otimes} f')(g_1, g'_1) = (f \times f')(g_1, g'_1) = (f(g_1), f'(g'_1)).$$

2.2. Systèmes tensoriels de graphes orientés, de graphes à composition et de catégories.

2.2.a. On désigne indifféremment par :

$$\mathtt{GrOrCano}(1) = \mathbf{1}_{\varnothing}$$

le *graphe orienté canoniquement associé à l'entier* $1 = \{0\}$, i.e. le graphe orienté ayant pour seul point 0 et n'ayant aucune flèche.

De même, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{CatCano}(1) = \mathbf{1}$$

la *catégorie canoniquement associée à l'entier* $1 = \{0\}$, i.e. la catégorie ayant pour seul point $0 = \varnothing$ et pour seule flèche :

$$\mathtt{Id}(0) = (0,0) : 0 \to 0.$$

Enfin, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{CatCano}(2) = \mathbf{2}$$

la *catégorie canoniquement associée à l'entier* $2 = \{0,1\}$, i.e. la catégorie ayant pour seuls points 0 et 1 et pour seules flèches :

$$(0,1) : 0 \to 1,$$

$$\mathtt{Id}(0) = (0,0) : 0 \to 0,$$

$$\mathtt{Id}(1) = (1,1) : 1 \to 1.$$

On note :

$$\mathbf{1} \subseteq \mathbf{2} : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$$

le foncteur injection canonique [envoyant 0 sur 0].

De même, on note :

$$1 \angle 2 : 1 \to 2$$

le foncteur injectif envoyant 0 sur 1 .

Enfin, on note :

$$2 \mid 1 : 2 \to 1$$

l'unique foncteur de 2 vers 1 .

2.2.b. Si **U** est un univers, on désigne par :

$$- \square_{\mathbf{U}} - : \mathcal{G}rComp_{\mathbf{U}} \times \mathcal{G}rComp_{\mathbf{U}} \to \mathcal{G}rComp_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "produit tensoriel creux des graphes à composition* **U***-petits"*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, on a :

$$(- \square_{\mathbf{U}} -)(\mathcal{G},\mathcal{G}') = \mathcal{G} \square \mathcal{G}' ,$$

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}'_1$ et $\mathcal{G}'_2$ et pour tous foncteurs f: $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ et f' : $\mathcal{G}'_1 \to \mathcal{G}'_2$, on a :

$$(- \square_{\mathbf{U}} -)(f,f') = f \square f' .$$

Alors, on note :

$$- \underline{\square}_{\mathbf{U}} - : \mathcal{G}rOr_{\mathbf{U}} \times \mathcal{G}rOr_{\mathbf{U}} \to \mathcal{G}rOr_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "produit tensoriel creux des graphes orientés* **U***-petits"*, i.e. le foncteur restriction du précédent.

2.2.c. Si **U** est un univers, on désigne par :

$$- \boxtimes_{\mathbf{U}} - : \mathcal{G}rComp_{\mathbf{U}} \times \mathcal{G}rComp_{\mathbf{U}} \to \mathcal{G}rComp_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "produit tensoriel plein des graphes à composition* **U***-petits"*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, on a :

$$(- \boxtimes_{\mathbf{U}} -)(\mathcal{G},\mathcal{G}') = \mathcal{G} \boxtimes \mathcal{G}' ,$$

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}'_1$ et $\mathcal{G}'_2$ et pour tous foncteurs f: $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ et f' : $\mathcal{G}'_1 \to \mathcal{G}'_2$, on a :

$$(-\boxtimes_{\mathbf{U}}-)(f,f') = f \boxtimes f' .$$

Alors, on note :

$$-\boxtimes|_{\mathbf{U}}- : \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "produit tensoriel plein des graphes à composition* **U***-petits aves les catégories* **U***-petites"*, i.e. le foncteur restriction du précédent.

2.2.d. Si **U** est un univers, on désigne par :

$$-|\otimes|_{\mathbf{U}}- : \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "produit tensoriel cartésien des catégories* **U***-petites"*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toutes catégories **U**-petites C et C', on a :

$$(-|\otimes|_{\mathbf{U}}-)(C,C') = C \otimes C' ,$$

- pour toutes catégories **U**-petites C_1 et C_2, C'_1 et C'_2 et pour tous foncteurs $f : C_1 \to C_2$ et $f' : C'_1 \to C'_2$, on a :

$$(-|\otimes|_{\mathbf{U}}-)(f,f') = f \otimes f' .$$

2.2.e. Si **U** est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{SysTensGrCompPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$$

le *système tensoriel des graphes à composition* **U***-petits*, i.e. le *1*-système tensoriel catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $(\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})_{\texttt{Id(0)}} = \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$,
- $-\otimes_{\texttt{Id(0)},\texttt{Id(0)}}- = -\square_{\mathbf{U}}- : \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$,

Précisément, il est facile de vérifier [en reprenant la terminologie de (S.T.S.E.)] que :

- $\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$ est associatif en $(\texttt{Id(0)},\texttt{Id(0)},\texttt{Id(0)})$,
- $\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$ admet $1_{\varnothing}$ pour unité à gauche de $\texttt{Id(0)}$,
- $\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$ admet $1_{\varnothing}$ pour unité à droite de $\texttt{Id(0)}$.

En particulier, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{SysTensGrOrPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}}$$

le *système tensoriel des graphes orientés* **U**-*petits*, i.e. le *1*-système tensoriel catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu ["par restriction" du précédent], lorsqu'on impose que :

- $(\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id(0)}} = \mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}}$,
- $\text{-} \otimes_{\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)}} \text{-} = \text{-} \boxed{\square}_{\mathbf{U}} \text{-} : \mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}}$.

Et, précisément, on déduit de ce qui précède [en reprenant la terminologie de (S.T.S.E.)] que :

- $\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}}$ est associatif en $(\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)})$,
- $\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}}$ admet $1_{\varnothing}$ pour unité à gauche de $\mathtt{Id(0)}$,
- $\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}}$ admet $1_{\varnothing}$ pour unité à droite de $\mathtt{Id(0)}$.

Alors, on dispose évidemment d'un *1*-morphisme tensoriel catégorique, au sens de (S.T.S.E.), "injection canonique" :

$$\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} : \mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}.$$

2.2.f. Si **U** est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{SysTensCatPetites}(\mathbf{U}) = \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$$

le *système tensoriel des catégories* **U**-*petites*, i.e. le *1*-système tensoriel catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $(\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id(0)}} = \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$,
- $\text{-} \otimes_{\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)}} \text{-} = \text{-} \boxed{\otimes}_{\mathbf{U}} \text{-} : \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$.

Précisément, il est facile de vérifier [en reprenant la terminologie de (S.T.S.E.)] que :

- $\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$ est associatif en $(\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)})$,
- $\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$ admet 1 pour unité à gauche de $\mathtt{Id(0)}$,
- $\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$ admet 1 pour unité à droite de $\mathtt{Id(0)}$.

Alors, on dispose évidemment d'un *1*-morphisme tensoriel catégorique, au sens de (S.T.S.E.), "injection canonique" :

$$\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} : \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}.$$

2.2.g. Si **U** est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{SysTensGrCompCatPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$$

le *système tensoriel des graphes à composition* **U**-*petits et des catégories* **U**-*petites*, i.e. le *2*-système tensoriel quasi-catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $(\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id(0)}} = \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$,
- $(\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id(1)}} = \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$,
- $(\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{(0,1)}} = \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$,
- $-\otimes_{\mathtt{Id(0),Id(0)}}- = -\square_{\mathbf{U}}- : \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$,
- $-\otimes_{\mathtt{Id(0),(0,1)}} = -\underline{\boxtimes}_{\mathbf{U}}- : \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$,
- $-\otimes_{\mathtt{(0,1),Id(1)}} = -\underline{\boxtimes}\vert_{\mathbf{U}}- : \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$,
- $-\otimes_{\mathtt{Id(1),Id(1)}} = -\underline{\otimes}\vert_{\mathbf{U}}- : \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \times \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \to \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$.

Précisément, il est facile de vérifier [en reprenant la terminologie de (S.T.S.E.)] que :

- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ est associatif en $(\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)})$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ est quasi-associatif de gauche à droite en $(\mathtt{Id(0)},\mathtt{Id(0)},\mathtt{(0,1)})$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ est associatif en $(\mathtt{Id(0)},\mathtt{(0,1)},\mathtt{Id(1)})$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ est quasi-associatif de gauche à droite en $((\mathtt{0,1}),\mathtt{Id(1)},\mathtt{Id(1)})$ [en utilisant "suffisamment des flèches identités" des catégories facteurs des produits tensoriels concernés],
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ est associatif en $(\mathtt{Id(1)},\mathtt{Id(1)},\mathtt{Id(1)})$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ admet $1_{\varnothing}$ pour unité à gauche de $\mathtt{Id(0)}$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ admet $1_{\varnothing}$ pour unité à droite de $\mathtt{Id(0)}$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ admet $1_{\varnothing}$ pour unité à gauche de $\mathtt{(0,1)}$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ admet 1 pour quasi-unité à droite de $\mathtt{(0,1)}$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ admet 1 pour unité à gauche de $\mathtt{Id(1)}$,
- $\mathcal{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$ admet 1 pour unité à droite de $\mathtt{Id(1)}$.

Alors, on dispose évidemment [moyennant un "changement d'indexation" - comme défini en (S.T.S.E.)] d'un *2*-morphisme tensoriel quasi-catégorique, au sens de (S.T.S.E.), "injection canonique" :

$$\mathcal{GrCompCat}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathcal{U}} : \mathcal{GrCompCat}_{\mathcal{U}} \to (\mathcal{GrComp}_{\mathcal{U}})_{2|1}$$

et on voit, bien entendu [moyennant d'autres "changements d'indexations" - comme définis en (S.T.S.E.)], que :

$$(\mathcal{GrCompCat}_{\mathcal{U}})_{1\subseteq 2} = \mathcal{GrComp}_{\mathcal{U}}$$

et que :

$$(\mathcal{GrCompCat}_{\mathcal{U}})_{1\lhd 2} = \mathcal{Cat}_{\mathcal{U}} .$$

---

3. Systèmes enrichis de graphes à composition.

3.1. Exponentiation de graphes à composition.

3.1.a. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{EnsFonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}') = \mathbf{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$$

l'*ensemble des foncteurs allant de* $\mathcal{G}$ *vers* $\mathcal{G}'$.

Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont trois graphes à composition et si $f' : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$ est un foncteur, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{EnsFonc}(\mathcal{G},f') = \mathbf{Fonc}(\mathcal{G},f') : \mathbf{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \to \mathbf{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}'')$$

l'*application "composition à gauche avec* f' *"*, i.e. l'application évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout foncteur $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, on a :

$$\mathbf{Fonc}(\mathcal{G},f')(f) = f' \circ f.$$

De même, si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont trois graphes à composition et si $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est un foncteur, on désigne indifféremment par :

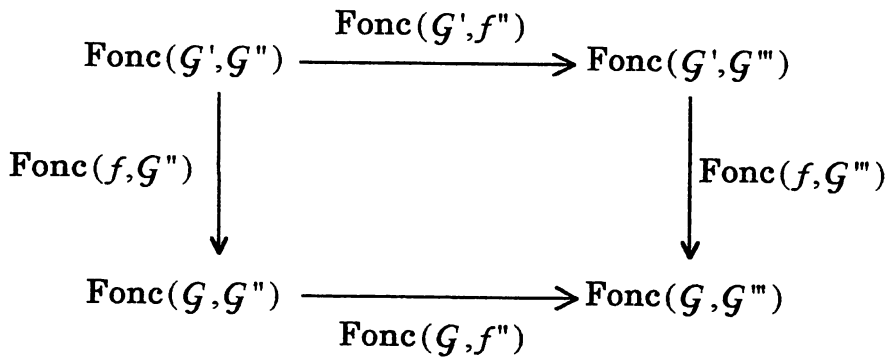
$$\mathtt{EnsFonc}(f,\mathcal{G}'') = \mathbf{Fonc}(f,\mathcal{G}'') : \mathbf{Fonc}(\mathcal{G}',\mathcal{G}'') \to \mathbf{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}'')$$

l'*application "composition à droite avec* f*"*, i.e. l'application évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout foncteur $f' : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$, on a :

$$\mathbf{Fonc}(f,\mathcal{G}'')(f') = f' \circ f.$$

Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$ et $\mathcal{G}'''$ sont quatre graphes à composition et si $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f'' : \mathcal{G}'' \to \mathcal{G}'''$ sont deux foncteurs, il est facile de vérifier que le carré [d'applications] ci-dessous commute :



où la diagonale définit donc l'application :

$$\mathtt{EnsFonc}(f,f") = \mathbf{Fonc}(f,f") : \mathbf{Fonc}(\mathcal{G}',\mathcal{G}") \to \mathbf{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}'").$$

3.1.b. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{GrCompFonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}') = \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$$

le *graphe à composition des foncteurs allant de* $\mathcal{G}$ *vers* $\mathcal{G}'$ [ou *graphe à composition exponentiation de* $\mathcal{G}'$ *par* $\mathcal{G}$], i.e. le graphe à composition évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- ses points sont les foncteurs de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{G}'$,
- ses flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs,
- ses flèches identités sont les transformations naturelles identitaires entre ces foncteurs,
- sa loi de composition est la composition intérieure [des couples - de transformations naturelles entre ces foncteurs - intérieurement composables].

En particulier, si $\mathcal{G}' = \mathcal{C}'$ est une catégorie, le graphe à composition $\mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{C}')$ est évidemment une catégorie.

De même, si $\mathcal{G}' = \mathcal{R}'$ est un graphe orienté, le graphe à composition $\mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{R}')$ est évidemment un graphe orienté.

Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}"$ sont trois graphes à composition et si $f' : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}"$ est un foncteur, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{GrCompFonc}(\mathcal{G},f') = \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},f') : \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \to \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}")$$

le *foncteur "composition à gauche avec* f' *"*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout foncteur $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, on a :

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},f')(f) = f' \circ f,$$

- pour toute transformation naturelle $t : f_1 \Rightarrow f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, on a :

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},f')(t) = f' \circ t.$$

De même, si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont trois graphes à composition et si $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est un foncteur, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{GrCompFonc}(f,\mathcal{G}'') = \mathcal{F}onc(f,\mathcal{G}'') : \mathcal{F}onc(\mathcal{G}',\mathcal{G}'') \to \mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}'')$$

le *foncteur "composition à droite avec* f*"*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout foncteur $f' : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$, on a :

$$\mathcal{F}onc(f,\mathcal{G}'')(f') = f' \circ f,$$

- pour toute transformation naturelle $t' : f'_1 \Rightarrow f'_2 : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$, on a :

$$\mathcal{F}onc(f,\mathcal{G}'')(t') = t' \circ f.$$

Enfin, si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$ et $\mathcal{G}'''$ sont quatre graphes à composition et si $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f'' : \mathcal{G}'' \to \mathcal{G}'''$ sont deux foncteurs, il est facile de vérifier que le carré [de foncteurs] ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}onc(\mathcal{G}',\mathcal{G}'') & \xrightarrow{\mathcal{F}onc(\mathcal{G}',f'')} & \mathcal{F}onc(\mathcal{G}',\mathcal{G}''') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}onc(f,\mathcal{G}'')} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}onc(f,\mathcal{G}''')} \\
\mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}'') & \xrightarrow[\mathcal{F}onc(\mathcal{G},f'')]{} & \mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}''')
\end{array}$$

où la diagonale définit donc le foncteur :

$$\mathtt{GrCompFonc}(f,f'') = \mathcal{F}onc(f,f'') : \mathcal{F}onc(\mathcal{G}',\mathcal{G}'') \to \mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}''').$$

3.2. Systèmes enrichis de graphes orientés, de graphes à composition et de catégories.

3.2.a. Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont trois graphes à composition, on note :

$$— \underline{o}_{\square\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{G}''} —: \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \square \mathcal{Fonc}(\mathcal{G}',\mathcal{G}'') \to \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}'')$$

le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tous foncteurs $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f': \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$, on a :

$$(— \underline{o}_{\square\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{G}''} —)(f,f') = f' \circ f,$$

- pour tous foncteurs $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f' : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$ et pour toute transformation naturelle $t : f_1 \Rightarrow f_2$, on a :

$$(— \underline{o}_{\square\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{G}''} —)(t,f') = f' \circ t,$$

- pour tous foncteurs $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f'_1, f'_2 : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$ et pour toute transformation naturelle $t' : f'_1 \Rightarrow f'_2$, on a :

$$(— \underline{o}_{\square\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{G}''} —)(f,t') = t' \circ f.$$

De même, si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition [en particulier, si $\mathcal{G}'$ est une catégorie] et si $\mathcal{C}''$ est une catégorie, on note :

$$— \underline{o}_{\boxtimes\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{C}''} —: \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \boxtimes \mathcal{Fonc}(\mathcal{G}',\mathcal{C}'') \to \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{C}'')$$

le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tous foncteurs $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f': \mathcal{G}' \to \mathcal{C}''$, on a :

$$(— \underline{o}_{\boxtimes\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{C}''} —)(f,f') = f' \circ f,$$

- pour tous foncteurs $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f' : \mathcal{G}' \to \mathcal{C}''$ et pour toute transformation naturelle $t : f_1 \Rightarrow f_2$, on a :

$$(— \underline{o}_{\boxtimes\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{C}''} —)(t,f') = f' \circ t,$$

- pour tous foncteurs $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f'_1, f'_2 : \mathcal{G}' \to \mathcal{C}''$ et pour toute transformation naturelle $t' : f'_1 \Rightarrow f'_2$, on a :

$$(— \underline{o}_{\boxtimes\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{C}''} —)(f,t') = t' \circ f,$$

- pour tous foncteurs $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f'_1, f'_2 : \mathcal{G}' \to \mathcal{C}''$ et pour toutes transformations naturelles $t : f_1 \Rightarrow f_2$ et $t' : f'_1 \Rightarrow f'_2$, on a :

$$(— \underline{o}_{\boxtimes\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{C}''} —)(t,t') = t' \circ t.$$

Enfin, si C, C' et C'' sont trois catégories, on note :

$$— \underline{\circ}_{\otimes C,C',C''} — : \mathcal{F}onc(C,C') \underline{\otimes} \mathcal{F}onc(C',C'') \to \mathcal{F}onc(C,C'')$$

le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tous foncteurs $f: C \to C'$ et $f' : C' \to C''$, on a :

$$(— \underline{\circ}_{\otimes C,C',C''} —)(f,f') = f' \circ f,$$

- pour tous foncteurs $f_1, f_2 : C \to C'$ et $f'_1, f'_2 : C' \to C''$ et pour toutes transformations naturelles $t : f_1 \Rightarrow f_2$ et $t' : f'_1 \Rightarrow f'_2$, on a :

$$(— \underline{\circ}_{\otimes C,C',C''} —)(t,t') = t' \circ t.$$

3.2.b. Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on désigne par :

$$\mathtt{FoncUnit}(\mathcal{G}) : 1_{\varnothing} \to \mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G})$$

le *foncteur d'unitarité canonique associé au graphe à composition* $\mathcal{G}$, i.e. le foncteur qui envoie le point $\mathtt{0}$ sur le foncteur $\mathtt{Id}(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ [qui est bien un point du graphe à composition $\mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G})$].

Si C est une catégorie, on désigne par :

$$\mathtt{FoncUnitId}(C) : 1 \to \mathcal{F}onc(C,C)$$

le *foncteur d'unitarité identitaire canonique associé à la catégorie* C, i.e. le foncteur [de la catégorie 1 vers $\mathcal{F}onc(C,C)$ - qui est aussi une catégorie] qui envoie le point $\mathtt{0}$ sur le foncteur $\mathtt{Id}(C) : C \to C$ [et qui envoie donc la flèche $\mathtt{Id(0)}$ sur la transformation naturelle $\mathtt{Id(Id}(C)) : \mathtt{Id}(C) \Rightarrow \mathtt{Id}(C) : C \to C$ - qui est bien une flèche de $\mathcal{F}onc(C,C)$].

3.2.c. Si **U** est un univers, on désigne par $\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}}$ le *système enrichi des graphes à composition* **U**-*petits*, i.e. le 1-système $\mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_0 = \mathtt{Pt}(\mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}})$ est l'ensemble des graphes à composition **U**-petits,
- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, on a :

$$(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id(0)}}(\mathcal{G},\mathcal{G}') = \mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}'),$$

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, on a :

$$\texttt{CompLoc}\,(\mathbf{GrComp}\,\mathbf{U},(\mathcal{G},\texttt{Id}(0),\mathcal{G}',\texttt{Id}(0),\mathcal{G}''))$$

$$=$$

$$\text{—}\ \underline{\circ}_{\square}\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{G}''\ \text{—}$$

$$:$$

$$(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_{\texttt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}')\otimes_{\texttt{Id}(0),\texttt{Id}(0)}(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_{\texttt{Id}(0)}(\mathcal{G}',\mathcal{G}'')$$

$$=$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}')\,\square\,\mathcal{F}onc(\mathcal{G}',\mathcal{G}'')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_{\texttt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}'')$$

et pour lequel :

- pour tout graphe à composition **U**-petit $\mathcal{G}$, on a :

$$\texttt{FlUnit}\,(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}},(0,\mathcal{G}))$$

$$=$$

$$\texttt{FoncUnit}\,(\mathcal{G})$$

$$:$$

$$\texttt{PtQUnit}\,(\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}},0)$$

$$=$$

$$1_{\varnothing}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G})$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_{\texttt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G})$$

autrement dit, la famille :

$$(\texttt{FoncUnit}\,(\mathcal{G}) : 1_{\varnothing} \to \mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}))_{\mathcal{G}\in\texttt{Pt}(\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})}$$

est la famille des flèches d'unitarité,

- on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})^*{}_0 \cong \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}},$$

de la catégorie $(\mathbf{GrComp}_U)^*_0$ [compagnon en 0 - au sens de (S.T.S.E.) - du système enrichi $\mathbf{GrComp}_U$] vers la catégorie $\mathcal{GrComp}_U$ [des graphes à composition U-petits].

En particulier, on désigne par $\mathbf{GrOr}_U$ le *système enrichi des graphes orientés U-petits*, i.e. le *1*-système $\mathcal{GrOr}_U$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu [par "restriction" du précédent] lorsqu'on impose que :

- $(\mathbf{GrOr}_U)_0 = \mathtt{Pt}(\mathcal{GrOr}_U)$ est l'ensemble des graphes orientés U-petits,
- pour tous graphes orientés U-petits $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a :

$$(\mathbf{GrOr}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}') = \mathcal{Fonc}(\mathcal{R},\mathcal{R}'),$$

- pour tous graphes orientés U-petits $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$, on a :

$$\mathtt{CompLoc}(\mathbf{GrOr}_U,(\mathcal{R},\mathtt{Id}(0),\mathcal{R}',\mathtt{Id}(0),\mathcal{R}''))$$
$$=$$
$$\text{—}\ \underline{0}_{\square\mathcal{R},\mathcal{R}',\mathcal{R}''}\ \text{—}$$
$$:$$
$$(\mathbf{GrOr}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}') \otimes_{\mathtt{Id}(0),\mathtt{Id}(0)} (\mathbf{GrOr}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R}',\mathcal{R}'')$$
$$=$$
$$\mathcal{Fonc}(\mathcal{R},\mathcal{R}') \square \mathcal{Fonc}(\mathcal{R}',\mathcal{R}'')$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{Fonc}(\mathcal{R},\mathcal{R}'')$$
$$=$$
$$(\mathbf{GrOr}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}'')$$

et pour lequel :

- pour tout graphe orienté U-petit $\mathcal{R}$, on a :

$$\mathtt{FlUnit}(\mathbf{GrOr}_U,(0,\mathcal{R}))$$
$$=$$
$$\mathtt{FoncUnit}(\mathcal{R})$$
$$:$$
$$\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{GrOr}_U,0)$$
$$=$$
$$1_\varnothing$$
$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{R},\mathcal{R})$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrOr}_U)_{\mathrm{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}),$$

autrement dit, la famille :

$$\big(\mathrm{FoncUnit}(\mathcal{R}) : 1_{\varnothing} \to \mathcal{F}onc(\mathcal{R},\mathcal{R})\big)_{\mathcal{R}\in \mathrm{Pt}(\mathcal{G}r\mathcal{O}r_U)}$$

est la famille des flèches d'unitarité,

- on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$(\mathbf{GrOr}_U)^*_0 \cong \mathcal{G}r\mathcal{O}r_U,$$

de la catégorie $(\mathbf{GrOr}_U)^*_0$ [compagnon en 0 - au sens de (S.T.S.E.) - du système enrichi $\mathbf{GrOr}_U$] vers la catégorie $\mathcal{G}r\mathcal{O}r_U$ [des graphes orientés U-petits].

Alors [moyennant un "changement d'enrichissement" - comme défini en (S.T.S.E.)], on dispose évidemment d'un *1*-morphisme $\mathcal{G}r\mathcal{C}omp_U$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), "injection canonique" :

$$\mathbf{GrOr}_U \subseteq \mathbf{GrComp}_U : \big(_{(\mathcal{G}r\mathcal{O}r_U \subseteq \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_U)}\mathbf{GrOr}_U\big) \to \mathbf{GrComp}_U .$$

3.2.d. Si **U** est un univers, on désigne par $\mathbf{Cat}_U$ le *système enrichi des catégories* **U**-*petites*, i.e. le *1*-système $\mathcal{C}at_U$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $(\mathbf{Cat}_U)_0 = \mathrm{Pt}(\mathcal{C}at_U)$ est l'ensemble des catégories **U**-petites,
- pour toutes catégories **U**-petites $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on a :

$$(\mathbf{Cat}_U)_{\mathrm{Id}(0)}(\mathcal{C},\mathcal{C}') = \mathcal{F}onc(\mathcal{C},\mathcal{C}'),$$

- pour toutes catégories **U**-petites $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, on a :

$$\mathrm{CompLoc}\big(\mathbf{Cat}_U,(\mathcal{C},\mathrm{Id}(0),\mathcal{C}',\mathrm{Id}(0),\mathcal{C}'')\big)$$

$$=$$

$$— \underline{\otimes}_{\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''} —$$

$$:$$

$$(\mathbf{Cat}_U)_{\mathrm{Id}(0)}(\mathcal{C},\mathcal{C}') \otimes_{\mathrm{Id}(0),\mathrm{Id}(0)} (\mathbf{Cat}_U)_{\mathrm{Id}(0)}(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')$$

$$=$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{C},\mathcal{C}') \underline{\otimes} \mathcal{F}onc(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(C,C'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{Cat}_U)_{\mathrm{Id}(0)}(C,C'')$$

et pour lequel :

- pour toute catégorie **U**-petite C, on a :

$$\mathrm{FlUnit}\left(\mathbf{Cat}_U,(0,C)\right)$$

$$=$$

$$\mathrm{FoncUnitId}(C)$$

$$:$$

$$\mathrm{PtQUnit}\left(\mathcal{C}at_U,0\right)$$

$$=$$

$$1$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(C,C)$$

$$=$$

$$(\mathbf{Cat}_U)_{\mathrm{Id}(0)}(C,C),$$

autrement dit, la famille :

$$\left(\mathrm{FoncUnitId}(C) : 1 \to \mathcal{F}onc(C,C)\right)_{C \in \mathrm{Pt}(\mathcal{C}at_U)}$$

est la famille des flèches d'unitarité,

- on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$(\mathbf{Cat}_U)^*_0 \cong \mathcal{C}at_U,$$

de la catégorie $(\mathbf{Cat}_U)^*_0$ [compagnon en 0 - au sens de (S.T.S.E.) - du système enrichi $\mathbf{Cat}_U$] vers la catégorie $\mathcal{C}at_U$ [des catégories **U**-petites].

Alors [moyennant un "changement d'enrichissement" - comme défini en (S.T.S.E.)], on dispose évidemment d'un 1-morphisme $\mathcal{G}r\mathcal{C}omp_U$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), "injection canonique" :

$$\mathbf{Cat}_U \subseteq \mathbf{GrComp}_U : \left((\mathcal{C}at_U \subseteq \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_U)\, \mathbf{Cat}_U \right) \to \mathbf{GrComp}_U .$$

3.2.e. Si **U** est un univers, on désigne par $\mathbf{GrCompCat}_U$ le *système enrichi des graphes à composition* **U***-petits et des catégories* **U***-petites*, i.e. le *2-*

système $\mathcal{GrCompCat}_U$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $(\mathbf{GrCompCat}_U)_0 = \mathtt{Pt}(\mathcal{GrComp}_U)$ est l'ensemble des graphes à composition **U**-petits,
- $(\mathbf{GrCompCat}_U)_1 = \mathtt{Pt}(\mathcal{Cat}_U)$ est l'ensemble des catégories **U**-petites,
- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, on a :

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}') = \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}'),$$

- pour tout graphe à composition **U**-petit $\mathcal{G}$ et pour toute catégorie **U**-petite C', on a :

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{(0,1)}(\mathcal{G},C') = \mathcal{Fonc}(\mathcal{G},C'),$$

- pour toutes catégories **U**-petites C et C', on a :

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(1)}(C,C') = \mathcal{Fonc}(C,C'),$$

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, on a :

$$\mathtt{CompLoc}\left(\mathbf{GrCompCat}_U,(\mathcal{G},\mathtt{Id}(0),\mathcal{G}',\mathtt{Id}(0),\mathcal{G}'')\right)$$

$$=$$

$$\text{—}\ \underline{\mathbf{o}}_{\square}\,\mathcal{G},\mathcal{G}',\mathcal{G}''\ \text{—}$$

$$:$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \otimes_{\mathtt{Id}(0),\mathtt{Id}(0)} (\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G}',\mathcal{G}'')$$

$$=$$

$$\mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \sqsupseteq \mathcal{Fonc}(\mathcal{G}',\mathcal{G}'')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}''),$$

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ et pour toute catégorie **U**-petite C'', on a :

$$\mathtt{CompLoc}\left(\mathbf{GrCompCat}_U,(\mathcal{G},\mathtt{Id}(0),\mathcal{G}',(0,1),C'')\right)$$

$$=$$

$$\text{—}\ \underline{\mathbf{o}}_{\boxtimes}\,\mathcal{G},\mathcal{G}',C''\ \text{—}$$

$$:$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \otimes_{\mathtt{Id}(0),(0,1)} (\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{(0,1)}(\mathcal{G}',C'')$$

$$=$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G}') \underline{\boxtimes} \mathcal{F}onc(\mathcal{G}',C'')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},C'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{(0,1)}(\mathcal{G},C''),$$

- pour tout graphe à composition **U**-petit $\mathcal{G}$ et pour toutes catégories **U**-petites C' et C'', on a :

$$\mathtt{CompLoc}\left(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}},(\mathcal{G},(0,1),C',\mathtt{Id}(1),C'')\right)$$

$$=$$

$$— \underline{0}_{\boxtimes} \mathcal{G}, C', C'' —$$

$$:$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{(0,1)}(\mathcal{G},C') \otimes_{(0,1),\mathtt{Id}(1)} (\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id}(1)}(C',C'')$$

$$=$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},C') \underline{\boxtimes} \mathcal{F}onc(C',C'')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},C'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{(0,1)}(\mathcal{G},C''),$$

- pour toutes catégories **U**-petites C, C' et C'', on a :

$$\mathtt{CompLoc}\left(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}},(C,\mathtt{Id}(1),C',\mathtt{Id}(1),C'')\right)$$

$$=$$

$$— \underline{0}_{\otimes} C, C', C'' —$$

$$:$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id}(1)}(C,C') \otimes_{\mathtt{Id}(1),\mathtt{Id}(1)} (\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id}(1)}(C',C'')$$

$$=$$

$$\mathcal{F}onc(C,C') \underline{\otimes} \mathcal{F}onc(C',C'')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(C,C'')$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(1)}(C,C'')\,,$$

et pour lequel :

- pour tout graphe à composition U-petit $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathtt{FlUnit}\,(\mathbf{GrCompCat}_U,(0,\mathcal{G}))$$

$$=$$

$$\mathtt{FoncUnit}\,(\mathcal{G})$$

$$:$$

$$\mathtt{PtQUnit}\,(\mathcal{G}rCompCat_U,0)$$

$$=$$

$$1_\varnothing$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(\mathcal{G},\mathcal{G})$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G})\,,$$

- pour toute catégorie U-petite C, on a :

$$\mathtt{FlUnit}\,(\mathbf{GrCompCat}_U,(1,C))$$

$$=$$

$$\mathtt{FoncUnitId}(C)$$

$$:$$

$$\mathtt{PtQUnit}\,(\mathcal{G}rCompCat_U,1)$$

$$=$$

$$1$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}onc(C,C)$$

$$=$$

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)_{\mathtt{Id}(1)}(C,C)\,,$$

- on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$(\mathbf{GrCompCat}_U)^*{}_0 \cong \mathcal{G}rComp_U\,,$$

de la catégorie $(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})^*_0$ [compagnon en 0 - au sens de (S.T.S.E.) - du système enrichi $\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$] vers la catégorie $\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$ [des graphes à composition **U**-petits],

- on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})^*_1 \cong \mathcal{Cat}_{\mathbf{U}},$$

de la catégorie $(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})^*_1$ [compagnon en 1 - au sens de (S.T.S.E.) - du système enrichi $\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}}$] vers la catégorie $\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$ [des catégories **U**-petites].

Alors [moyennant un "changement d'indexation" - comme défini en (S.T.S.E.)], on dispose évidemment d'un *2*-morphisme $(\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})_{2|1}$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), "injection canonique" :

$$\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}} : \mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}} \to (\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_{2|1},$$

et on voit, bien entendu [moyennant d'autres changements d'indexations], que :

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{1 \subseteq 2} = \mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}}$$

et que :

$$(\mathbf{GrCompCat}_{\mathbf{U}})_{1|2} = \mathbf{Cat}_{\mathbf{U}}.$$

3.2.f. Si **U** est un univers, on note indifféremment :

$$\texttt{MorEnrichChPetits}(\mathbf{U})$$

$$=$$

$$\mathbf{ch}_{\mathbf{U}}(-)$$

$$:$$

$$\left((\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})\, \mathbf{GrOr}_{\mathbf{U}} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\left((\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})\, \mathbf{Cat}_{\mathbf{U}} \right)$$

le *morphisme enrichi "chemins" relatif à la* **U***-petitesse*, i.e. le *1*-morphisme $\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour ce qui concerne sa coordonnée [comme définie en (S.T.S.E.)] en 0, on a :

$$(\mathbf{ch}_{\mathbf{U}}(-))_0$$

$$=$$

$$\mathtt{Pt}\,(\boldsymbol{ch}_{\mathbf{U}}(\text{-}))$$

$$:$$

$$\big(\,(\,\mathcal{GrOr}_{\mathfrak{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathfrak{U}}\,)\,\mathbf{GrOr}_{\mathbf{U}}\,\big)_0$$

$$=$$

$$\mathtt{Pt}\,(\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}})$$

$$\downarrow$$

$$\mathtt{Pt}\,(\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}})$$

$$=$$

$$\big(\,(\,\mathcal{Cat}_{\mathfrak{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathfrak{U}}\,)\,\mathbf{Cat}_{\mathbf{U}}\,\big)_0\,,$$

- pour tous graphes orientés **U**-petits $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, le foncteur :

$$\big(\mathbf{ch}_{\mathbf{U}}(\text{-})\big)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}')$$

$$:$$

$$\big(\,(\,\mathcal{GrOr}_{\mathfrak{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathfrak{U}}\,)\,\mathbf{GrOr}_{\mathbf{U}}\,\big)_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}')$$

$$=$$

$$\mathcal{Fonc}(\mathcal{R},\mathcal{R}')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{Fonc}\big(\mathtt{Ch}\,(\mathcal{R}),\mathtt{Ch}\,(\mathcal{R}')\big)$$

$$=$$

$$\big(\,(\,\mathcal{Cat}_{\mathfrak{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathfrak{U}}\,)\,\mathbf{Cat}_{\mathbf{U}}\,\big)_{\mathtt{Id}(0)}\big(\mathtt{Ch}\,(\mathcal{R}),\mathtt{Ch}\,(\mathcal{R}')\big) =$$

est le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

- pour tout foncteur $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, on a :

$$\big((\mathbf{ch}_{\mathbf{U}}(\text{-}))_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}')\big)(f) = \mathtt{Ch}\,(f)\,,$$

- pour tous foncteurs $f_1, f_2 : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ et pour toute transformation naturelle $t : f_1 \Rightarrow f_2$, on a :

$$\big((\mathbf{ch}_{\mathbf{U}}(\text{-}))_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{R},\mathcal{R}')\big)(t) = \mathtt{Ch}\,(t)\,.$$

De la sorte, il est clair que [en ce qui concerne le foncteur compagnon en 0 comme défini en (S.T.S.E) - de $\mathbf{ch}_{\mathbf{U}}(\text{-})$] on a :

$$\mathbf{ch}_{\mathbf{U}}(\text{-})^*{}_0$$

$$=$$

$$ch_{\mathbf{U}}(\text{-})$$

$$:$$

$$\left(\left(\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \right) \mathbf{GrOr}_{\mathbf{U}} \right)^*{}_0$$

$$=$$

$$\mathcal{GrOr}_{\mathbf{U}}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}}$$

$$=$$

$$\left(\left(\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \right) \mathbf{Cat}_{\mathbf{U}} \right)^*{}_0$$

[et que l'adjonction de (E.T.E.1.), § 4.2.d, est "compagnon en 0 " d'une "*1*-adjonction $\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$-enrichie" que nous laissons au lecteur le soin de préciser].

3.2.g. Si **U** est un univers, on note indifféremment :

$$\texttt{MorEnrichClChPetits}(\mathbf{U})$$

$$=$$

$$\mathbf{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-})$$

$$:$$

$$\left(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\left(\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}} \right) \mathbf{Cat}_{\mathbf{U}} \right)$$

le *morphisme enrichi "classes de chemins" relatif à la* **U***-petitesse*, i.e. le *1*-morphisme $\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}}$-enrichi catégorique, au sens de (S.T.S.E.), évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour ce qui concerne sa coordonnée en 0 , on a :

$$\left(\mathbf{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-})\right)_0$$

$$=$$

$$\texttt{Pt}\,(\mathcal{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-}))$$

$$:$$

$$\left(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}} \right)_0$$

$$=$$

$$\mathtt{Pt}(\mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})$$

$$\downarrow$$

$$\mathtt{Pt}(\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}})$$

$$=$$

$$(_{(\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})}\mathbf{Cat}_{\mathbf{U}})_0\,,$$

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, le foncteur :

$$(\mathbf{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-}))_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$$

$$:$$

$$(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$$

$$=$$

$$\mathcal{Fonc}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{Fonc}(\mathtt{ClCh}(\mathcal{G}),\mathtt{ClCh}(\mathcal{G}'))$$

$$=$$

$$(_{(\mathcal{Cat}_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathbf{U}})}\mathbf{Cat}_{\mathbf{U}})_{\mathtt{Id}(0)}$$

est le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

- pour tout foncteur $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, on a :

$$((\mathbf{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-}))_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}'))(f) = \mathtt{ClCh}(f)\,,$$

- pour tous foncteurs $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et pour toute transformation naturelle $t : f_1 \Rightarrow f_2$, on a :

$$((\mathbf{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-}))_{\mathtt{Id}(0)}(\mathcal{G},\mathcal{G}'))(t) = \mathtt{ClCh}(t)\,.$$

De la sorte, il est clair que [en ce qui concerne le foncteur compagnon en 0 comme défini en (S.T.S.E) - de $\mathbf{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-})$] on a : :

$$\mathbf{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-})^*{}_0$$

$$=$$

$$\mathcal{clch}_{\mathbf{U}}(\text{-})$$

$$:$$

$$(\mathbf{GrComp}_{\mathbf{U}})^*{}_0$$

$$=$$

$$\mathcal{GrComp}_U$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{Cat}_U$$

$$=$$

$$\left(\left(\mathcal{Cat}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{GrComp}_{\mathcal{U}} \right) \mathbf{Cat}_U \right)^*_0$$

[et que l'adjonction de (E.T.E.1.), § 4.2.e, est "compagnon en 0 " d'une "*1*-adjonction $\mathcal{GrComp}_U$-enrichie" que nous laissons au lecteur le soin de préciser].

---

4. Bibliographie

(C.A.M.U.) **J. Bénabou**, Catégories avec multiplication, C.R.A.S. Paris 256, pp. 1887-1990, Paris, 1963.

(C.L.C.A.) **B. J. Day et G. M. Kelly**, Enriched functor categories, in Rep. of the Midwest Category Sem. III, Ed. by S. Mac Lane, Lect. Notes in Math. 106, Springer Verlag, 1969.

(C.O.G.R.) **D. Duval et C. Lair**, Sketches and specifications : Reference manual, First Part : Compositive Graphs, Rapport de Recherche du L.A.C.O., Limoges, 2000 (http://www.unilim.fr/laco/rapports).

(E.T.E.1.) **C. Lair**, Eléments de Théorie des Esquisses, Section 1 : Graphes à Composition, Diagrammes 45+46, Paris, 2001.

(E.T.E.n.) **C. Lair**, Eléments de Théorie des Esquisses, Sections 1, 2 , 3 et suivantes, à paraître dans Diagrammes.

(P.T.E.A.) **A. Silga**, Sur les produits tensoriels extérieurs de structures algébriques, Diagrammes 14, Paris, 1985.

(P.T.G.M.) **L. Coppey**, Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris, 1980.

(S.T.S.E.) **C. Lair**, Systèmes tensoriels et systèmes enrichis, Diagrammes 43 + 44, Paris, 2000.

5. Table.

1. Introduction. 3

2. Systèmes tensoriels de graphes à composition. 5
2.1. Tensorisations de graphes à composition. 5
2.2. Systèmes tensoriels de graphes orientés, de graphes à composition et de catégories. 10

3. Systèmes enrichis de graphes à composition. 16
3.1. Exponentiation de graphes à composition. 16
3.2. Systèmes enrichis de graphes orientés, de graphes à composition et de catégories. 19

4. Bibliographie 33

5. Table. 34

UNIVERSITE PARIS 7
U.F.R. de Mathématiques
Case 7012
2, place JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05
FRANCE

lairchrist@aol.com