DIAGRAMMES

C. LAIR

Éléments de théorie des esquisses. Section 1 : graphes à composition

Diagrammes, tome 45-46 (2001), p. 3-33

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2001__45-46__3_0>

© Université Paris 7, UER math., 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUMES 45 + 46 , 2001

ELEMENTS DE THEORIE DES ESQUISSES

SECTION 1 : GRAPHES A COMPOSITION

C. Lair

1. Introduction.

Ce texte est le premier d'une série [voir (E.T.E.n.)] où seront exposés quelques éléments de la *théorie des esquisses*.

Nous présentons, ici, les premiers rudiments de la *théorie des graphes à composition*.

Introduits initialement par C. Ehresmann [voir (C.A.S.T.)], sous le nom de "graphes multiplicatifs" [i.e. dans une acception un peu plus particulière que celle considérée ici], nous les regardons avant tout, pour ce qui nous concerne, comme les *supports* des *esquisses* [voir (E.T.S.A.) ou (E.T.E.3.)], i.e. de ces "graphes à composition munis de cônes distingués" qui sont autant de représentations diagrammatiques des théories logiques du 1er ordre ou encore des spécifications informatiques.

On trouvera en (P.T.G.M.) une étude certainement plus exhaustive sur bien des points [ne concernant que les graphes multiplicatifs, mais qu'il est facile d'adapter aux présents graphes à composition].

Formellement [§2], les graphes à composition sont des structures plus faibles que celles de catégories. Tout comme elles, ils sont constitués d'objets [que nous préfèrons appeler *points*] et de flèches ... mais deux flèches consécutives *n'y sont pas nécessairement composables*. Ainsi, en particulier, les graphes orientés sont des graphes à composition où *rien* [de ce qui est consécutif] n'est composable, tandis que les catégories sont des graphes à composition où [notamment] *tout* [ce qui est consécutif] est composable.

Alors, comme dans le cas plus particulier des catégories, les *foncteurs* entre graphes à composition ne sont pas autre chose que des homomorphismes entre ces structures, tandis que les *transformations ["les plus"] naturelles* entre foncteurs [d'un graphe à composition vers un autre] sont des comparaisons entre ces foncteurs, définies par des familles de carrés dont il convient de stipuler, *au préalable*, qu'ils sont à côtés [consécutifs] *composables* puis qu'ils sont évidemment commutatifs ...

Un foncteur y compris d'une catégorie [a fortiori d'un graphe à composition] vers une autre a tout naturellement pour image "ensembliste" un graphe à composition qui *n'est pas*, en général, une catégorie mais qui engendre, lorsqu'on le "sature par composition", une sous-catégorie de la catégorie "contexte", i.e. co-domaine, de ce foncteur.

Plus généralement et plus structurellement encore, i.e. "hors" de tout tel "contexte", en considérant [§3] les classes d'équivalence [modulo les égalités éventuelles de composés] de *chemins* [i.e. de familles] de flèches consécutives d'un quelconque graphe à composition, on voit qu'il engendre toujours une *catégorie de classes de chemins*. Et, ce, de sorte que tout foncteur de ce graphe à composition vers une quelconque catégorie "contexte" factorise de manière unique par cette catégorie de classes chemins.

Ainsi, les graphes à composition apparaissent comme autant de *présentations de catégories par générateurs* [leurs flèches] *et relations* [les équations résultant de la composition - partielle - des flèches]. En s'autorisant à n'utiliser que des graphes à composition d'une certaine *taille*, conditionnée par un *univers* [i.e. un ensemble d'ensembles stable pour les opérations ensemblistes "usuelles" - à défaut de pouvoir considérer, sans paradoxe, "l'ensemble de tous les ensembles"], il apparaît [§4] que le foncteur d'oubli de la catégorie des catégories, de cette taille, vers la catégorie des graphes à composition, de cette taille, admet, évidemment, un adjoint à gauche.

Ce travail résulte d'une collaboration avec D. Duval : on pourra en trouver une version initiale intégrée à (C.O.G.R.).

---

2. Graphes à composition, foncteurs et transformations naturelles.

2.1. Graphes à composition.

2.1.a. Un *graphe à composition* $\mathcal{G}$ est constitué par :

- la donnée d'un ensemble *d'objets* ou de *points* :

$$\mathtt{Pt}(\mathcal{G}),$$

- la donnée d'un ensemble de *flèches* :

$$\mathtt{Fl}(\mathcal{G}),$$

- la donnée d'un ensemble de *flèches identités* :

$$\mathtt{FlId}(\mathcal{G}) \subseteq \mathtt{Fl}(\mathcal{G}),$$

- la donnée d'un ensemble de *couples [de flèches] composables* :

$$\mathtt{CComp}(\mathcal{G}) \subseteq \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \times \mathtt{Fl}(\mathcal{G}),$$

- la donnée d'une application *sélection des domaines* :

$$\mathtt{SelDom}(\mathcal{G}) : \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \to \mathtt{Pt}(\mathcal{G})$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour toute flèche g de $\mathcal{G}$, on note plus simplement :

$$\mathtt{SelDom}(\mathcal{G})(g) = \mathtt{Dom}(g)\,],$$

- la donnée d'une application *sélection des codomaines* :

$$\mathtt{SelCodom}(\mathcal{G}) : \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \to \mathtt{Pt}(\mathcal{G})$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour toute flèche g de $\mathcal{G}$, on note plus simplement :

$$\mathtt{SelCodom}(\mathcal{G})(g) = \mathtt{Codom}(g)\,],$$

- la donnée d'une application *composition* :

$$\mathtt{Comp}(\mathcal{G}) : \mathtt{CComp}(\mathcal{G}) \to \mathtt{Fl}(\mathcal{G})$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour tout couple composable (g_1, g_2) de $\mathcal{G}$, on note plus simplement :

$$\mathrm{Comp}(\mathcal{G})(g_1, g_2) = g_2 \bullet g_1 ,$$

à moins qu'un symbole de composition autre que le " $\bullet$ ", mais plus usuel dans certains cas particuliers, ne soit utilisé],

et, ce, de sorte que :

- pour toute flèche identité g de $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Codom}(g) ,$$

si bien qu'on dispose d'une application *sélection des points [pour les flèches identités]* :

$$\mathrm{SelPoint}(\mathcal{G}) : \mathrm{FlId}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Pt}(\mathcal{G})$$

$$=$$

$$\mathrm{FlId}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Fl}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathrm{SelDom}(\mathcal{G})} \mathrm{Pt}(\mathcal{G})$$

$$=$$

$$\mathrm{FlId}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Fl}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathrm{SelCoDom}(\mathcal{G})} \mathrm{Pt}(\mathcal{G})$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour toute flèche identité g de $\mathcal{G}$, on note plus simplement :

$$\mathrm{SelPoint}(\mathcal{G})(g) = \mathrm{Point}(g)],$$

- pour tout couple composable (g_1, g_2) de $\mathcal{G}$, on a successivement :

$$\mathrm{Codom}(g_1) = \mathrm{Dom}(g_2) ,$$

$$\mathrm{Dom}(g_2 \bullet g_1) = \mathrm{Dom}(g_1) ,$$

$$\mathrm{Codom}(g_2 \bullet g_1) = \mathrm{Codom}(g_2) .$$

Dans ces conditions, si G_1 et G_2 sont deux points de $\mathcal{G}$ et si g est une flèche de $\mathcal{G}$ telle que :

$$\mathrm{Dom}(g) = G_1$$

et :

$$\mathrm{Codom}(g) = G_2 ,$$

on écrit :

$$g : G_1 \to_{\mathcal{G}} G_2$$

[et même, le plus souvent, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté :

$$g : G_1 \to G_2].$$

De même, si G_1 et G_2 sont deux points de $\mathcal{G}$, on note, indifféremment :

$$(\mathtt{Hom}(\mathcal{G}))(G_1,G_2)$$
$$=$$
$$\mathtt{Hom}_{\mathcal{G}}(G_1,G_2)$$
$$=$$
$$\mathcal{G}(G_1,G_2)$$
$$=$$
$$\{\, g \in \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \mid g : G_1 \to G_2 \,\}\,.$$

Enfin, on désigne par :

$$\mathtt{CCons}(\mathcal{G}) = \{\, (g_1,g_2) \in \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \times \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \mid \mathtt{Codom}(g_1) = \mathtt{Dom}(g_2) \,\}$$

l'ensemble des *couples de flèches consécutives* de $\mathcal{G}$ [de sorte qu'on a :

$$\mathtt{CComp}(\mathcal{G}) \subseteq \mathtt{CCons}(\mathcal{G}) \subseteq \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \times \mathtt{Fl}(\mathcal{G})\,].$$

2.1.b. Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{Dual}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{\mathrm{op}}$$

le *graphe à composition dual de* $\mathcal{G}$, i.e. le graphe à composition évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathtt{Pt}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}) = \mathtt{Pt}(\mathcal{G})$,
- $\mathtt{Fl}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}) = \mathtt{Fl}(\mathcal{G})$,
- $\mathtt{FlId}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}) = \mathtt{FlId}(\mathcal{G})$,
- $\mathtt{CComp}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}) = \{\, (g_2,g_1) \mid (g_1,g_2) \in \mathtt{CComp}(\mathcal{G}) \,\}$,
- $\mathtt{SelDom}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}) = \mathtt{SelCodom}(\mathcal{G})$,
- $\mathtt{SelCodom}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}) = \mathtt{SelDom}(\mathcal{G})$,
- pour tout couple composable (g_2,g_1) de $\mathcal{G}^{\mathrm{op}}$, on a :

  $$\mathtt{Comp}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}})(g_2,g_1) = \mathtt{Comp}(\mathcal{G})(g_1,g_2)$$

  [alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

  $$\mathtt{Comp}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}})(g_2,g_1) = g_1 \bullet^{\mathrm{op}} g_2\,].$$

2.1.c. Une *catégorie* C est [i.e. s'identifie à] un graphe à composition tel que :

- l'application :

$$\mathtt{SelPoint}(C) : \mathtt{FlId}(C) \to \mathtt{Pt}(C)$$

est une bijection, de sorte qu'on dispose d'une application *sélection des identités* :

$$\mathtt{SelId}(C) : \mathtt{Pt}(C) \to \mathtt{Fl}(C)$$

$$=$$

$$\mathtt{Pt}(C) \xrightarrow{\mathtt{SelPt}(C)^{-1}} \mathtt{FlId}(C) \xrightarrow{\subseteq} \mathtt{Fl}(C),$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour tout point C de C, on note plus simplement :

$$\mathtt{SelId}(C)(C) = \mathtt{Id}(C)\,],$$

- tous les couples consécutifs sont des couples composables, i.e. on a :

$$\mathtt{CComp}(C) = \mathtt{CCons}(C),$$

- les identités sont des éléments neutres [locaux] pour la composition des flèches,
- la composition des flèches est associative.

De même, un *graphe orienté* $\mathcal{R}$ est [i.e. s'identifie à] un graphe à composition pour lequel :

- il n'y a pas de flèches identités, i.e. on a :

$$\mathtt{FlId}(\mathcal{R}) = \varnothing,$$

- il n'y a pas de couples composables, i.e. on a :

$$\mathtt{CComp}(\mathcal{R}) = \varnothing.$$

Pour l'essentiel, nous laisserons au lecteur le soin d'adapter les considérations générales de la suite à ces deux types particuliers de graphes à composition [1].

---

[1] Les graphes à composition formalisent, "le plus souplement possible" [i.e. très souplement !], la notion de "présentation de catégories". Parmi beaucoup d'autres "types particuliers" de graphes à composition [visant à formaliser eux aussi, mais moins souplement, la notion de "présentation de catégories"], signalons les deux suivants, assez couramment utilisés [le deuxième étant "historiquement" initiateur des autres - voir (C.A.S.T.)], que nous n'utiliserons pas dans la suite [pour faire court].

Tout d'abord, un *graphe compositif* $\mathcal{G}$ est un graphe à composition tel que :

- l'application :

$$\mathtt{SelPoint}(\mathcal{G}) : \mathtt{FlId}(\mathcal{G}) \to \mathtt{Pt}(\mathcal{G})$$

est injective, de sorte que sa restriction :

$$\mathtt{SelPointId}(\mathcal{G}) : \mathtt{FlId}(\mathcal{G}) \to \mathtt{PtId}(\mathcal{G})$$

2.2. Foncteurs.

2.2.a. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, un *foncteur* $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ *de* $\mathcal{G}$ *vers* $\mathcal{G}'$ est constitué par :

- la donnée d'une application :

$$\mathtt{Pt}(f) : \mathtt{Pt}(\mathcal{G}) \to \mathtt{Pt}(\mathcal{G}')$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour tout point G de $\mathcal{G}$, on note plus simplement :

$$\mathtt{Pt}(f)(G) = f(G)\,],$$

- la donnée d'une application :

$$\mathtt{Fl}(f) : \mathtt{Fl}(\mathcal{G}) \to \mathtt{Fl}(\mathcal{G}')$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour toute flèche g de $\mathcal{G}$, on note plus simplement :

$$\mathtt{Fl}(f)(g) = f(g)\,],$$

et, ce, de sorte que :

à son image, appelée l'*ensemble des points à identités de* $\mathcal{G}$:

$$\mathtt{PtId}(\mathcal{G})$$

est une bijection et qu'on dispose donc d'une application *sélection des identités [en les points à identités]* :

$$\mathtt{SelId}(\mathcal{G}) : \mathtt{PtId}(\mathcal{G}) \to \mathtt{Fl}(\mathcal{G})$$

$$=$$

$$\mathtt{PtId}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathtt{SelPtId}(\mathcal{G})^{-1}} \mathtt{FlId}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\subseteq} \mathtt{Fl}(\mathcal{G}),$$

[s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, pour tout point à identité G de $\mathcal{G}$, on note encore :

$$\mathtt{SelId}(\mathcal{G})(G) = \mathtt{Id}(G)\,].$$

Ensuite, un *graphe multiplicatif* $\mathcal{G}$ est un graphe compositif où tous les points sont des points à identités et où les flèches identités sont des éléments neutres "locaux" (pour la composition des flèches), i.e. tel que :

- $\mathtt{PtId}(\mathcal{G}) = \mathtt{Pt}(\mathcal{G})$,

- pour tous points G et G' de $\mathcal{G}$ et pour toute flèche $g : G \to G'$ de $\mathcal{G}$, les couples $(\mathtt{Id}(G), g)$ et $(g, \mathtt{Id}(g))$ sont composables et on a :

$$g \bullet \mathtt{Id}(G) = g = \mathtt{Id}(G') \bullet g.$$

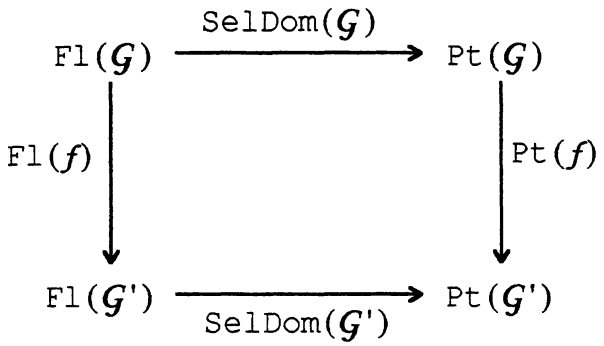
[ainsi, les catégories sont les graphes mutliplicatifs où tous les couples de flèches consécutives sont composables et où la composition est associative].

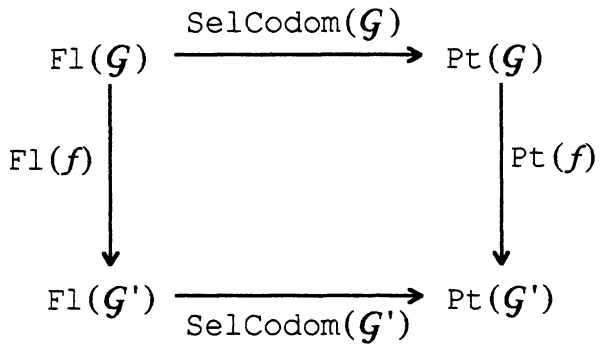
- pour toute flèche g de $\mathcal{G}$, on a successivement :

$$f(\mathrm{Dom}(g)) = \mathrm{Dom}(f(g)),$$

$$f(\mathrm{Codom}(g)) = \mathrm{Codom}(f(g)),$$

autrement dit les diagrammes [d'applications] ci-dessous commutent :





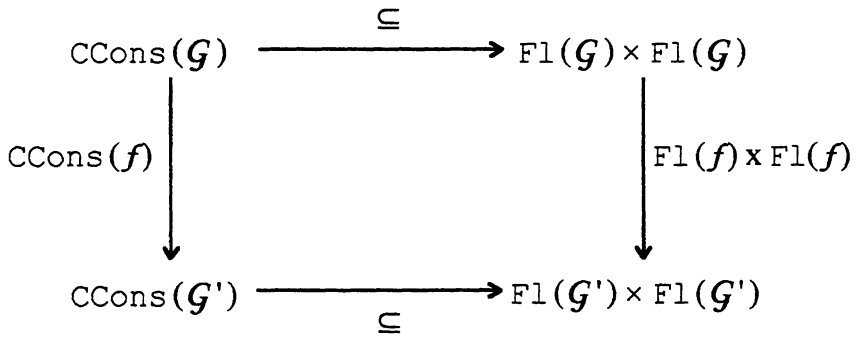
d'où il résulte que l'application :

$$\mathrm{Fl}(f) \times \mathrm{Fl}(f) : \mathrm{Fl}(\mathcal{G}) \times \mathrm{Fl}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Fl}(\mathcal{G}') \times \mathrm{Fl}(\mathcal{G}')$$

admet une restriction :

$$\mathrm{CCons}(f) : \mathrm{CCons}(\mathcal{G}) \to \mathrm{CCons}(\mathcal{G}'),$$

et donc que le diagramme [d'applications] ci-dessous commute :



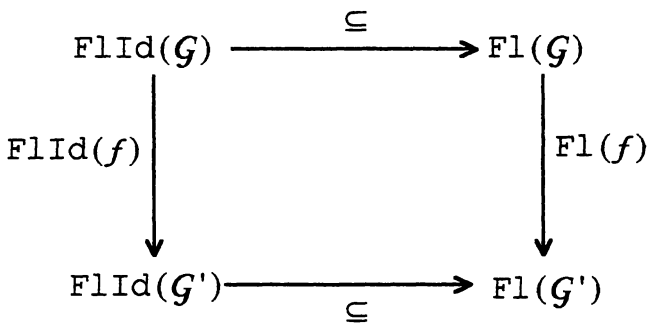
- pour toute flèche identité g de $\mathcal{G}$, la flèche $f(g)$ est une flèche identité de $\mathcal{G}'$, autrement dit l'application :

$$\mathtt{Fl}(f):\mathtt{Fl}(\mathcal{G})\to\mathtt{Fl}(\mathcal{G}')$$

admet une restriction :

$$\mathtt{FlId}(f):\mathtt{FlId}(\mathcal{G})\to\mathtt{FlId}(\mathcal{G}')$$

et donc le diagramme [d'applications] ci-dessous commute :



- pour tout couple composable (g_1,g_2) de $\mathcal{G}$, le couple $(f(g_1),f(g_2))$ est un couple composable de $\mathcal{G}'$ et on a :

$$f(g_2\bullet g_1)=f(g_2)\bullet f(g_1),$$

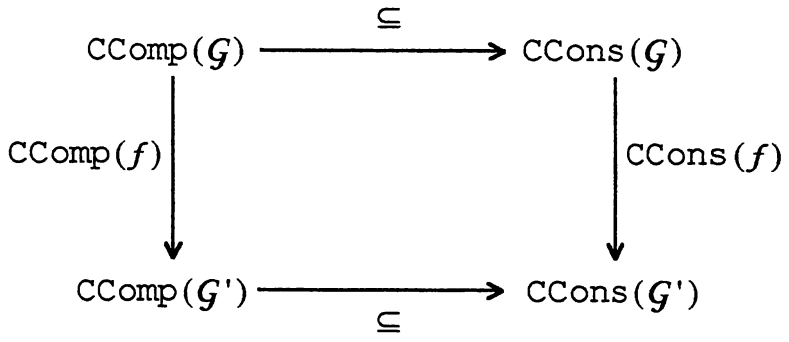
autrement dit l'application :

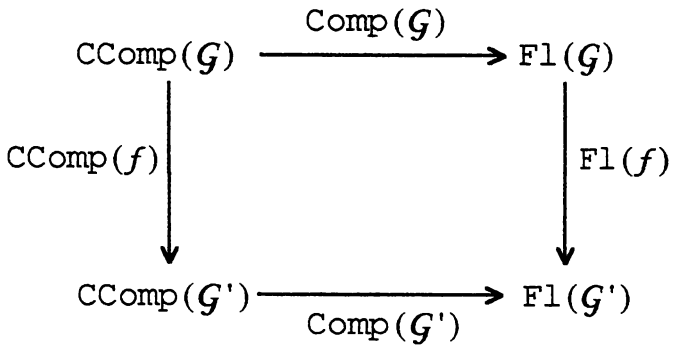
$$\mathtt{CCons}(f):\mathtt{CCons}(\mathcal{G})\to\mathtt{CCons}(\mathcal{G}')$$

admet une restriction :

$$\mathtt{CComp}(f):\mathtt{CComp}(\mathcal{G})\to\mathtt{CComp}(\mathcal{G}')$$

et les diagrammes [d'applications] ci-dessous commutent :





2.2.b. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition et si $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est un foncteur, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{Dual}(f) = f^{\mathrm{op}} : \mathcal{G}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}'^{\mathrm{op}}$$

le *foncteur dual de* f, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathtt{Pt}(f^{\mathrm{op}}) = \mathtt{Pt}(f)$,
- $\mathtt{Fl}(f^{\mathrm{op}}) = \mathtt{Fl}(f)$.

2.2.c. Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont trois graphes à composition et si $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f' : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$ sont deux foncteurs, on désigne par :

$$f' \circ f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}''$$

le *foncteur composé de* f' *avec* f, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathtt{Pt}(f' \circ f) = \mathtt{Pt}(f') \circ \mathtt{Pt}(f)$,
- $\mathtt{Fl}(f' \circ f) = \mathtt{Fl}(f') \circ \mathtt{Fl}(f)$.

2.2.d. Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on désigne par :

$$\mathtt{Id}(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

le *foncteur identité en* $\mathcal{G}$, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathtt{Pt}(\mathtt{Id}(\mathcal{G})) = \mathtt{Id}(\mathtt{Pt}(\mathcal{G}))$,
- $\mathtt{Fl}(\mathtt{Id}(\mathcal{G})) = \mathtt{Id}(\mathtt{Fl}(\mathcal{G}))$.

2.3. Transformations naturelles.

2.3.a. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition et si $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ sont deux foncteurs, une *transformation naturelle* $t : f_1 \Rightarrow f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ [ou plus simplement encore $t : f_1 \Rightarrow f_2$] *de* f_1 *vers* f_2 est constituée par :

- la donnée d'une famille de flèches de $\mathcal{G}'$:

$$\mathtt{Fam}(t) = (\mathtt{Fam}(t)(G) : f_1(G) \to f_2(G))_{G \in \mathtt{Pt}(\mathcal{G})}$$

[alors, pour tout point G de $\mathcal{G}$, on note plus simplement :

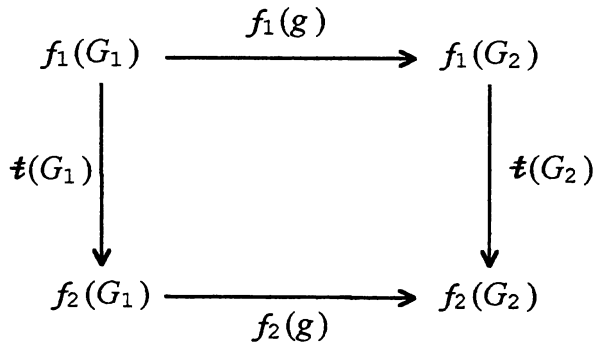
$$\mathtt{Fam}(t)(G) = t(G)]$$

et, ce, de sorte que :

- pour toute flèche $g : G_1 \to G_2$ de $\mathcal{G}$, les couples $(t(G_1), f_2(g))$ et $(f_1(g), t(G_2))$ sont des couples composables de $\mathcal{G}'$ et on a :

$$t(G_2) \cdot f_1(g) = f_2(g) \cdot t(G_1),$$

autrement dit, le diagramme [de $\mathcal{G}'$] ci-dessous commute :



2.3.b. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, si $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ sont deux foncteurs et si $t : f_1 \Rightarrow f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est une transformation naturelle, on désigne indifféremment par :

$$\mathrm{Dual}(t) = t^{\mathrm{op}} : f_2{}^{\mathrm{op}} \Rightarrow f_1{}^{\mathrm{op}} : \mathcal{G}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}'^{\mathrm{op}}$$

la *transformation naturelle duale de* t, i.e. la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

$$t^{\mathrm{op}}(G) = t(G) .$$

2.3.c. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, si $f_1, f_2, f_3 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ sont trois foncteurs et si $t_1 : f_1 \Rightarrow f_2$ et $t_2 : f_2 \Rightarrow f_3$ sont deux transformations naturelles, on dit qu'elles sont *intérieurement consécutives* [i.e. consécutives comme le sont, pour tout point G de $\mathcal{G}$, les flèches $t_1(G)$ et $t_2(G)$ "à l'intérieur" de $\mathcal{G}'$].

Alors, on dit que (t_1, t_2) est un *couple [de transformations naturelles] intérieurement composable* [i.e. composable comme on compose les flèches "à l'intérieur" de $\mathcal{G}'$] si :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, le couple $(t_1(G), t_2(G))$ est un couple composable de $\mathcal{G}'$,
- pour toute flèche $g : G_1 \to G_2$ de $\mathcal{G}$, les couples $(f_1(g), t_2(G_2) \bullet t_1(G_2))$ et $(t_2(G_1) \bullet t_1(G_1), f_3(g))$ sont des couples composables de $\mathcal{G}'$ et de composés égaux, i.e. tels que :

$$\left(\tau_2(G_2)\bullet\tau_1(G_2)\right)\bullet f_1(g)=f_3(g)\bullet\left(\tau_2(G_1)\bullet\tau_1(G_1)\right),$$

de sorte qu'on dispose, alors, de la *transformation naturelle composée intérieure de* τ_2 *avec* τ_1 :

$$\tau_2\bullet\tau_1 : f_1 \Rightarrow f_3 : \mathcal{G}\to\mathcal{G}',$$

i.e. de la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

$$(\tau_2\bullet\tau_1)(G)=\tau_2(G)\bullet\tau_1(G).$$

En particulier, si $\mathcal{G}'=C'$ est une catégorie, tout couple (τ_1,τ_2) de transformations naturelles intérieurement consécutives est intérieurement composable [puisque, pour tout point G de $\mathcal{G}$, le couple $(\tau_1(G),\tau_2(G))$ est un couple composable de C' et puisque la composition des flèches de C' est associative].

2.3.d. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition et si $f\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ est un foncteur, on dit qu'une transformation naturelle $\tau : f\Rightarrow f$ est une *transformation naturelle [intérieurement] identitaire* si :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, la flèche $\tau(G) : f(G)\to f(G)$ est une flèche identité ["à l'intérieur"] de $\mathcal{G}'$.

En particulier, si $\mathcal{G}'=C'$ est une catégorie, on dispose de la *transformation naturelle identité en* f:

$$\mathtt{Id}(f) : f\Rightarrow f\colon \mathcal{G}\to C',$$

i.e. de l'unique transformation naturelle identitaire de f vers f évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathtt{Id}(f)(G)=\mathtt{Id}(f(G)).$$

2.3.e. Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont trois graphes à composition, si $f_1, f_2 : \mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ et $f' : \mathcal{G}'\to\mathcal{G}''$ sont trois foncteurs et si $\tau : f_1\Rightarrow f_2$ est une transformation naturelle, on désigne par :

$$f'\circ\tau : f'\circ f_1\Rightarrow f'\circ f_2 : \mathcal{G}\to\mathcal{G}''$$

la *transformation naturelle composée extérieure de* f' *avec* $\mathfrak{t}$, i.e. la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

$$(f' \circ \mathfrak{t})(G) = f'(\mathfrak{t}(G)) .$$

Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont trois graphes à composition, si $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f'_1, f'_2 : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$ sont trois foncteurs et si $\mathfrak{t}' : f'_1 \Rightarrow f'_2$ est une transformation naturelle, on désigne par :

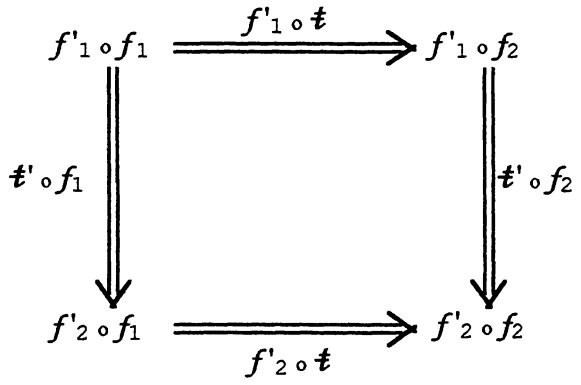
$$\mathfrak{t}' \circ f : f'_1 \circ f \Rightarrow f'_2 \circ f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}''$$

la *transformation naturelle composée extérieure de* $\mathfrak{t}'$ *avec* f, i.e. la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

$$(\mathfrak{t}' \circ f)(G) = \mathfrak{t}'(f(G)) .$$

2.3.f. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, si C'' est une catégorie, si $f_1, f_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et $f'_1, f'_2 : \mathcal{G}' \Rightarrow C''$ sont quatre foncteurs et si $\mathfrak{t} : f_1 \Rightarrow f_2$ et $\mathfrak{t}' : f'_1 \Rightarrow f'_2$ sont deux transformations naturelles, il est facile de vérifier [puisque C'' est une catégorie] que, dans le diagramme [de transformations naturelles] ci-dessous, les couples de transformations naturelles intérieurement consécutives sont intérieurement composables et qu'alors les transformations naturelles composées intérieures sont égales [i.e que ce diagramme "commute"] :



Alors, cette composée commune [i.e. la *diagonale* du carré commutatif ci-dessus] :

$$\mathfrak{t}' \circ \mathfrak{t} : f'_1 \circ f_1 \Rightarrow f'_2 \circ f_2 : G \to C'' .$$

s'appelle et définit la *transformation naturelle composée extérieure de* $\mathfrak{t}'$ *avec* $\mathfrak{t}$:

---

3. Catégories engendrées.

3.1. Catégories de chemins.

3.1.a. Si $\mathcal{R}$ est un graphe orienté, on désigne par :

$$\mathtt{Ch}(\mathcal{R})$$

la *catégorie des chemins engendrée par* $\mathcal{R}$, i.e. la catégorie évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les points de $\mathcal{R}$,
- ses flèches sont :
  - les *chemins de longueur nulle [en les points de* $\mathcal{R}$*]* , i.e. les :

    $$(R,R) : R \to R$$

    où R est un point de $\mathcal{R}$,
  - pour tout entier $m \geq 1$, les *chemins de longueur* m *[entre points de* $\mathcal{R}$*]*, i.e. les :

    $$(R_1, r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_m, R_{m+1}) : R_1 \to R_{m+1}$$

    où R_1 et R_{m+1} sont deux points de $\mathcal{R}$ et :

    $$r_1 : R_1 \to R_2 ,$$

    $$\ldots ,$$

    $$r_j : R_j \to R_{j+1} ,$$

    $$\ldots ,$$

    $$r_m : R_m \to R_{m+1}$$

    sont des flèches [consécutives] de $\mathcal{R}$,
- pour tout point R de $\mathtt{Ch}(\mathcal{R})$ [i.e. de $\mathcal{R}$] , on a :

  $$\mathtt{SelId}(\mathtt{Ch}(\mathcal{R}))(R) = (R,R) ,$$

- pour tous points R_1, R_2 et R_3 de $\mathfrak{R}$, pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, pour tout chemin de longueur m de $\mathfrak{R}$:

$$(R_1 = R_{1,1}, r_{1,1}, \ldots, r_{1,m}, R_{1,m+1} = R_2) : R_1 \to R_2$$

et pour tout chemin de longueur n de $\mathfrak{R}$:

$$(R_2 = R_{2,1}, r_{2,1}, \ldots, r_{2,n}, R_{2,n+1} = R_3) : R_2 \to R_3,$$

on a :

$$\mathrm{Comp}(\mathrm{Ch}(\mathfrak{R}))((R_1, r_{1,1}, \ldots, r_{1,m}, R_2), (R_2, r_{2,1}, \ldots, r_{2,n}, R_3))$$
$$=$$
$$(R_1, r_{1,1}, \ldots, r_{1,m}, r_{2,1}, \ldots, r_{2,n}, R_3) : R_1 \to R_3.$$

Dans ces conditions, on note :

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathrm{Ch}(\mathfrak{R}) : \mathfrak{R} \to \mathrm{Ch}(\mathfrak{R})$$

le foncteur injection "canonique", identifiant les flèches de $\mathfrak{R}$ à des chemins de longueur 1, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point R de $\mathfrak{R}$, on a :

$$(\mathfrak{R} \subseteq \mathrm{Ch}(\mathfrak{R}))(R) = R,$$

- pour tous points R_1 et R_2 de $\mathfrak{R}$ et toute flèche $r : R_1 \to R_2$ de $\mathfrak{R}$, on a :

$$(\mathfrak{R} \subseteq \mathrm{Ch}(\mathfrak{R}))(r) = (R_1, r, R_2).$$

3.1.b. Prouvons que :

PROPOSITION 1. *Si $\mathfrak{R}$ est un graphe orienté, si C est une catégorie et si $f : \mathfrak{R} \to C$ est un foncteur, il existe un unique foncteur :*

$$\mathrm{ProlCh}(f) : \mathrm{Ch}(\mathfrak{R}) \to C$$

prolongeant f à $\mathrm{Ch}(\mathfrak{R})$, i.e. tel que :

$$f = \mathrm{ProlCh}(f) \circ (\mathfrak{R} \subseteq \mathrm{Ch}(\mathfrak{R})).$$

De même, si $\mathfrak{R}$ est un graphe orienté, si C est une catégorie, si $f_1, f_2 : \mathfrak{R} \to C$ sont deux foncteurs et si $\mathfrak{t} : f_1 \Rightarrow f_2$ est une transformation naturelle, il existe une unique transformation naturelle :

$$\mathrm{ProlCh}(\mathfrak{t}) : \mathrm{ProlCh}(f_1) \Rightarrow \mathrm{ProlCh}(f_2) : \mathrm{Ch}(\mathfrak{R}) \to C$$

prolongeant $\mathfrak{t}$ à $\mathrm{Ch}(\mathfrak{R})$, i.e. telle que :

$$\mathfrak{t} = \mathtt{ProlCh}(\mathfrak{t}) \circ (\mathfrak{R} \subseteq \mathtt{Ch}(\mathfrak{R})).$$

PREUVE. Il est clair que :

$$\mathtt{ProlCh}(f) : \mathtt{Ch}(\mathfrak{R}) \to C$$

est le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point R de $\mathfrak{R}$, on a :

$$\mathtt{ProlCh}(f)(R) = f(R),$$

- pour tout point R de $\mathfrak{R}$, on a :

$$\mathtt{ProlCh}(f)(R,R) = \mathtt{Id}(f(R)),$$

- pour tout entier $m \geq 1$ et pour tout chemin de longueur m de $\mathfrak{R}$:

$$(R_1, r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_m, R_{m+1}) : R_1 \to R_{m+1},$$

on a :

$$\mathtt{ProlCh}(f)(R_1, r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_m, R_{m+1})$$

$$=$$

$$f(r_m) \bullet \ldots \bullet f(r_j) \bullet \ldots \bullet f(r_1).$$

De même, il est clair que :

$$\mathtt{ProlCh}(\mathfrak{t}) : \mathtt{ProlCh}(f_1) \Rightarrow \mathtt{ProlCh}(f_2) : \mathtt{Ch}(\mathfrak{R}) \to C$$

est la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point R de $\mathfrak{R}$, on a :

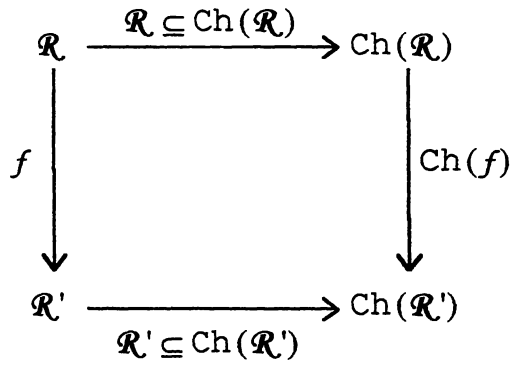
$$\mathtt{ProlCh}(\mathfrak{t})(R) = \mathfrak{t}(R).$$

FIN DE LA PREUVE.

3.1.c. De la PROPOSITION 1 précédente résulte immédiatement que, si $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ sont deux graphes orientés et si $f: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ est un foncteur, on dispose d'un unique foncteur [prolongeant f tant à $\mathtt{Ch}(\mathfrak{R})$ qu'à $\mathtt{Ch}(\mathfrak{R}')$] :

$$\mathtt{Ch}(f) = \mathtt{ProlCh}\big((\mathfrak{R}' \subseteq \mathtt{Ch}(\mathfrak{R}')) \circ f\big) : \mathtt{Ch}(\mathfrak{R}) \to \mathtt{Ch}(\mathfrak{R}')$$

rendant commutatif le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :



De même, si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux graphes orientés, si $f_1, f_2 : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ sont deux foncteurs et si $\mathfrak{t} : f_1 \Rightarrow f_2$ est une transformation naturelle, on dispose d'une unique transformation naturelle [prolongeant $\mathfrak{t}$ tant à $\mathrm{Ch}(\mathcal{R})$ qu'à $\mathrm{Ch}(\mathcal{R}')$] :

$$\mathrm{Ch}(\mathfrak{t})$$

$$=$$

$$\mathrm{ProlCh}((\mathcal{R}' \subseteq \mathrm{Ch}(\mathcal{R}')) \circ \mathfrak{t})$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Ch}(f_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Ch}(f_2)$$

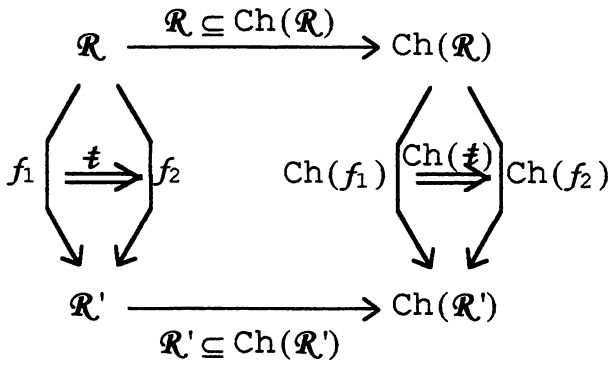
$$\vdots$$

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{R})$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{R}')$$

rendant commutatif le diagramme [de foncteurs et transformations naturelles] ci-dessous :



3.2. Catégories de classes de chemins.

3.2.a. Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on désigne :

$$\mathtt{GrOrSupp}(\mathcal{G})$$

son *graphe orienté support*, i.e. le graphe orienté évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathtt{Pt}(\mathtt{GrOrSupp}(\mathcal{G})) = \mathtt{Pt}(\mathcal{G})$,
- $\mathtt{Fl}(\mathtt{GrOrSupp}(\mathcal{G})) = \mathtt{Fl}(\mathcal{G})$,
- $\mathtt{SelDom}(\mathtt{GrOrSupp}(\mathcal{G})) = \mathtt{SelDom}(\mathcal{G})$,
- $\mathtt{SelCodom}(\mathtt{GrOrSupp}(\mathcal{G})) = \mathtt{SelCodom}(\mathcal{G})$.

3.2.b. Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on note :

$$\mathtt{Ch}(\mathcal{G}) = \mathtt{Ch}(\mathtt{GrOrSupp}(\mathcal{G}))$$

la *catégorie des chemins engendrée par* $\mathcal{G}$, i.e. la catégorie des chemins du graphe orienté sous-jacent à $\mathcal{G}$.

Alors, on désigne par :

$$\mathtt{RelCompCh}(\mathcal{G})$$

la *relation de composition sur* $\mathtt{Ch}(\mathcal{G})$, i.e. la relation sur l'ensemble $\mathtt{Fl}(\mathtt{Ch}(\mathcal{G}))$ évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$ et pour toute flèche identité $g : G \to G$ de $\mathcal{G}$, on a :

$$(G, g, G)\ (\mathtt{RelCompCh}(\mathcal{G}))\ (G, G),$$

- pour tous points G_1, G_2 et G_3 de $\mathcal{G}$ et pour tout couple composable $(g_1 : G_1 \to G_2, g_2 : G_2 \to G_3)$ de $\mathcal{G}$, on a :

$$(G_1, g_2 \bullet g_1, G_3)\ \mathtt{RelCompCh}(\mathcal{G})\ (G_1, g_1, g_2\, G_3).$$

Enfin, on désigne par :

$$\mathtt{CongrCompCh}(\mathcal{G})$$

la *congruence de composition sur* $\mathtt{Ch}(\mathcal{G})$, i.e la relation d'équivalence sur $\mathtt{Fl}(\mathtt{Ch}(\mathcal{G}))$, compatible avec la composition [des chemins] et engendrée par la relation $\mathtt{RelCompCh}(\mathcal{G})$.

3.2.c. Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on note :

$$\mathtt{ClCh}(\mathcal{G}) = \mathtt{Ch}(\mathcal{G}) / \mathtt{CongrCompCh}(\mathcal{G})$$

la *catégorie des classes de chemins engendrée par* $\mathcal{G}$, i.e. la catégorie quotient de $\mathtt{Ch}(\mathcal{G})$ par la congruence de composition $\mathtt{CongrCompCh}(\mathcal{G})$ sur $\mathtt{Ch}\ (G\ )$ [pour laquelle on a donc, notamment :

$$\mathtt{Pt}\big(\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})\big)$$

$$=$$

$$\mathtt{Pt}\big(\mathtt{Ch}(\mathcal{G}) / \mathtt{CongrCompCh}(\mathcal{G})\big)$$

$$=$$

$$\mathtt{Pt}(\mathtt{Ch}(\mathcal{G}) = \mathtt{Pt}(\mathcal{G}),$$

et :

$$\mathtt{Fl}\big(\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})\big)$$

$$=$$

$$\mathtt{Fl}\big(\mathtt{Ch}(\mathcal{G}) / \mathtt{CongrCompCh}(\mathcal{G})\big)$$

$$=$$

$$\mathtt{Fl}(\mathtt{Ch}(\mathcal{G})) / \mathtt{CongrCompCh}(\mathcal{G})\ ].$$

Dans ces conditions, on dispose évidemment du *foncteur passage aux classes [des chemins de longueur* 1 *]* :

$$\mathcal{G} \mid \mathtt{ClCh}(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \to \mathtt{ClCh}(\mathcal{G}).$$

En particulier, si $\mathcal{G}=C$ est une catégorie, il est clair que le foncteur $C|\mathtt{ClCh}(C):C\to\mathtt{ClCh}(C)$ est un isomorphisme, qui permet donc d'identifier $\mathtt{ClCh}(C)$ à C.

3.2.d. Prouvons que :

PROPOSITION 2. *Si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, si C est une catégorie et si $f:\mathcal{G}\to C$ est un foncteur, il existe un unique foncteur :*

$$\mathtt{ExtClCh}(f):\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})\to C$$

étendant f à $\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})$, i.e. tel que :

$$f=\mathtt{ExtClCh}(f)\circ(\mathcal{G}|\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})).$$

De même, si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, si C est une catégorie, si $f_1,f_2:\mathcal{G}\to C$ sont deux foncteurs et si $t:f_1\Rightarrow f_2$ est une transformation naturelle, il existe une unique transformation naturelle :

$$\mathtt{ExtClCh}(t):\mathtt{ExtClCh}(f_1)\Rightarrow\mathtt{ExtClCh}(f_2):\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})\to C$$

étendant t à $\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})$, i.e. telle que :

$$t=\mathtt{ExtClCh}(t)\circ(\mathcal{G}|\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})).$$

PREUVE. Il est clair que :

$$\mathtt{ExtClCh}(f):\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})\to C$$

est le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathtt{ExtClCh}(f)(G)=f(G),$$

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

$$\mathtt{ExtClCh}(f)(\overline{(G,G)})=\mathtt{Id}(f(G))$$

[en désignant par $\overline{(G,G)}$ la classe d'équivalence du chemin (G,G), modulo la congruence de composition `CongrCompCh (G )` sur `Ch (G )`],

- pour tout entier $m\geq 1$ et pour tout chemin de longueur m de $\mathcal{G}$:

$$(G_1,g_1,\ldots,g_j,\ldots,g_m,G_{m+1}):G_1\to G_{m+1}$$

on a :

$$\mathtt{ExtClCh}(f)(\overline{(G_1,g_1,\ldots,g_m,G_{m+1})})=f(g_m)\bullet\ldots\bullet f(g_j)\bullet\ldots\bullet f(g_1)$$

[en désignant par $\overline{(G_1,g_1,\ldots,g_m,G_{m+1})}$ la classe d'équivalence du chemin $(G_1,g_1,\ldots,g_j,\ldots,g_m,G_{m+1})$, modulo la congruence de composition CongrCompCh (G) sur Ch (G)].

De même, il est clair que :

$$\texttt{ExtClCh}(\mathfrak{t}):\texttt{ExtClCh}(f_1)\Rightarrow\texttt{ExtClCh}(f_2):\texttt{ClCh}(\mathcal{G})\to\mathcal{C}$$

est la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point G de $\mathcal{G}$, on a :

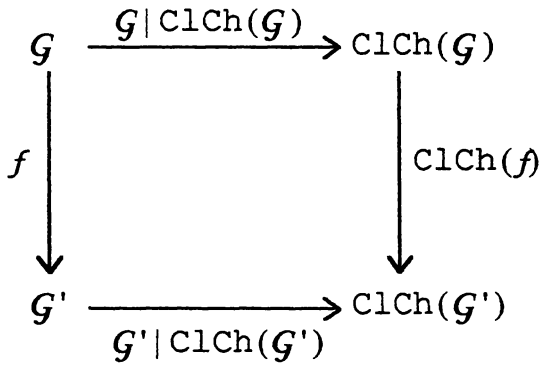
$$\texttt{ExtClCh}(\mathfrak{t})(G)=\mathfrak{t}(G).$$

FIN DE LA PREUVE.

3.2.e. De la PROPOSITION 2 précédente résulte immédiatement que, si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition et si f: $\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ est un foncteur, on dispose d'un unique foncteur [étendant f tant à $\texttt{ClCh}(\mathcal{G})$ qu'à $\texttt{ClCh}(\mathcal{G}')$] :

$$\texttt{ClCh}(f)=\texttt{ExtClCh}\big((\mathcal{G}'\,|\,\texttt{ClCh}(\mathcal{G}'))\circ f\big):\texttt{ClCh}(\mathcal{G})\to\texttt{ClCh}(\mathcal{G}')$$

rendant commutatif le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :



De même, si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux graphes à composition, si $f_1, f_2 : \mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ sont deux foncteurs et si $\mathfrak{t}:f_1\Rightarrow f_2$ est une transformation naturelle, on dispose d'une unique transformation naturelle [étendant $\mathfrak{t}$ tant à $\texttt{ClCh}(\mathcal{G})$ qu'à $\texttt{ClCh}(\mathcal{G}')$] :

$$\texttt{ClCh}(\mathfrak{t})$$

=

$$\mathtt{ExtClCh}\big((\mathcal{G}'|\mathtt{ClCh}(\mathcal{G}'))\circ t\big)$$

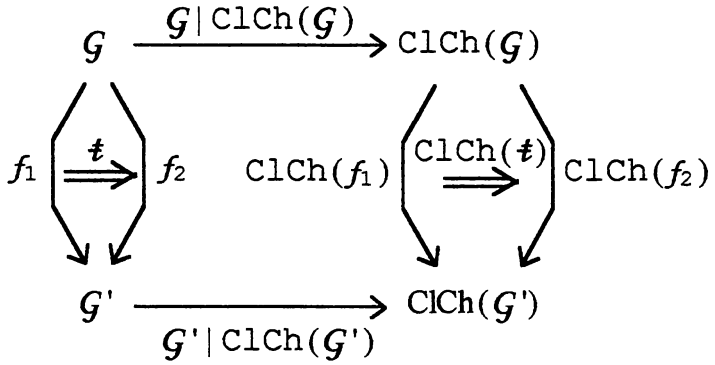
$$\vdots$$

$$\mathtt{ClCh}(f_1)\Rightarrow\mathtt{ClCh}(f_2)$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{ClCh}(\mathcal{G})\to\mathtt{ClCh}(\mathcal{G}')$$

rendant commutatif le diagramme [de foncteurs et transformations naturelles] ci-dessous :



---

4. Catégories de graphes à composition.

4.1. Petitesse.

4.1.a. Un *univers* $\mathbf{U}$ est un ensemble (d'ensembles) tel que [2] :

- l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels appartient à $\mathbf{U}$,
- si $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sont deux ensembles appartenant à $\mathbf{U}$, alors leur produit cartésien $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ appartient à $\mathbf{U}$,
- si $\mathbf{Y}$ est un ensemble appartenant à $\mathbf{U}$ et si $(\mathbf{X}_y)_{y \in \mathbf{Y}}$ est une famille d'ensembles qui appartiennent à $\mathbf{U}$, alors la réunion $\bigcup_{y \in \mathbf{Y}} \mathbf{X}_y$ appartient à $\mathbf{U}$,
- si $\mathbf{X}$ est un ensemble appartenant à $\mathbf{U}$ et si $\mathbf{X}'$ est une partie de $\mathbf{X}$, alors $\mathbf{X}'$ appartient à $\mathbf{U}$,
- si $\mathbf{X}$ est un ensemble appartenant à $\mathbf{U}$, alors l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ de ses parties appartient à $\mathbf{U}$.

4.1.b. Si $\mathbf{U}$ est un univers et si $\mathbf{X}$ est un ensemble, on dit que $\mathbf{X}$ est un *ensemble* $\mathbf{U}$*-petit* si :

- $\mathbf{X}$ appartient à $\mathbf{U}$.

4.1.c. Si $\mathbf{U}$ est un univers et si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on dit que $\mathcal{G}$ est un *graphe à composition localement* $\mathbf{U}$*-petit* si :

---

[2] On raisonne dans un modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix et axiome des univers ["il existe au moins un univers"].

- pour tous points G_1 et G_2 de $\mathcal{G}$, l'ensemble $\mathtt{Hom}_{\mathcal{G}}(G_1,G_2)$ est un ensemble **U**-petit.

Si tel est le cas et si $\mathcal{G}=\mathcal{C}$ est une catégorie, on dit évidemment qu'il s'agit d'une *catégorie localement* **U**-*petite*.

De même, si $\mathcal{G}=\mathcal{R}$ est un graphe orienté, on dit bien entendu qu'il s'agit d'un *graphe orienté localement* **U**-*petit*.

4.1.d. Si **U** est un univers et si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition, on dit que $\mathcal{G}$ est un *graphe à composition* **U**-*petit* si :

- $\mathtt{Pt}(\mathcal{G})$ est un ensemble **U**-petit,
- $\mathtt{Fl}(\mathcal{G})$ est un ensemble **U**-petit,

[de sorte que, nécessairement, les ensembles $\mathtt{FlId}(\mathcal{G})$ et $\mathtt{CComp}(\mathcal{G})$ sont aussi **U**-petits].

Si tel est le cas et si $\mathcal{G}=\mathcal{C}$ est une catégorie, on dit évidemment qu'il s'agit d'une *catégorie* **U**-*petite*.

De même, si $\mathcal{G}=\mathcal{R}$ est un graphe orienté, on dit bien entendu qu'il s'agit d'un *graphe orienté* **U**-*petit*.

4.2. La catégorie des graphes à composition U-petits.

4.2.a. Si **U** est un univers, on note indifféremment :

$$\mathtt{CatEnsPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{E}ns_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des ensembles* **U**-*petits*, i.e. la catégorie canoniquement obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les ensembles **U**-petits,
- ses flèches sont les applications entre ces ensembles **U**-petits.

4.2.b. Si **U** est un univers, on note indifféremment :

$$\mathtt{CatGrCompPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des graphes à composition* **U**-*petits*, i.e. la catégorie canoniquement obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les graphes à composition **U**-petits,
- ses flèches sont les foncteurs entre ces graphes à composition **U**-petits.

De même, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{CatCatPetites}(\mathbf{U}) = \mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des catégories* **U**-*petites*, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$ dont les points sont les catégories **U**-petites, et on note :

$$\mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}} : \mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \to \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$$

le foncteur injection canonique.

Enfin, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{CatGrOrPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{G}r\mathcal{O}r_{\mathbf{U}}$$

la *catégorie des graphes orientés* **U**-*petits*, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$ dont les points sont les graphes orientés **U**-petits, et on note :

$$\mathcal{G}r\mathcal{O}r_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}} : \mathcal{G}r\mathcal{O}r_{\mathbf{U}} \to \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$$

le foncteur injection canonique.

4.3. Adjonctions.

4.3.a. Si **U** est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{FoncChPetits}(\mathbf{U}) = \mathcal{C}h_{\mathbf{U}}(\text{-}) : \mathcal{G}r\mathcal{O}r_{\mathbf{U}} \to \mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "chemins" relatif à la* **U**-*petitesse*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout graphe orienté **U**-petit $\mathcal{R}$, on a :

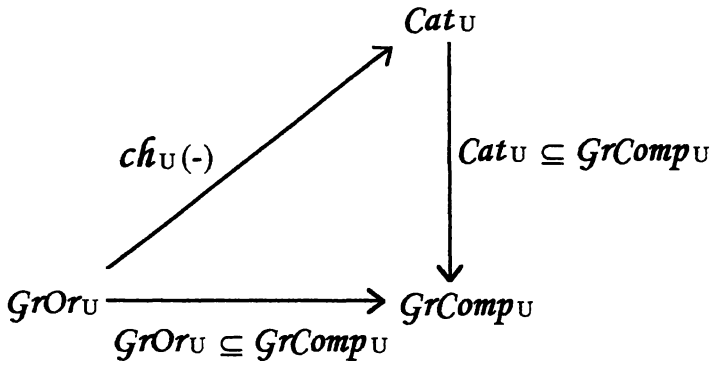
$$\mathcal{C}h_{\mathbf{U}}(\text{-})(\mathcal{R}) = \texttt{Ch}(\mathcal{R})$$

[puisque, si $\mathcal{R}$ est un graphe orienté **U**-petit, il est clair que $\texttt{Ch}(\mathcal{R})$ est une catégorie **U**-petite],

- pour tous graphes orientés **U**-petits $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et pour tout foncteur $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, on a :

$$\mathcal{C}h_{\mathbf{U}}(\text{-})(f) = \texttt{Ch}(f).$$

De la PROPOSITION 1 il résulte évidemment que, dans le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :



le foncteur $ch_{\mathbf{U}}(\text{-}) : \mathcal{G}r\mathcal{O}r_{\mathbf{U}} \to \mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ est un ($\mathcal{G}r\mathcal{O}r_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$)-adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \subseteq \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}} : \mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \to \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}}$.

4.3.b. Si **U** est un univers, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{FoncClChPetits}(\mathbf{U}) = clch_{\mathbf{U}}(\text{-}) : \mathcal{G}r\mathcal{C}omp_{\mathbf{U}} \to \mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$$

le *foncteur "classes de chemins" relatif à la* **U**-*petitesse*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout graphe à composition **U**-petit $\mathcal{G}$, on a :

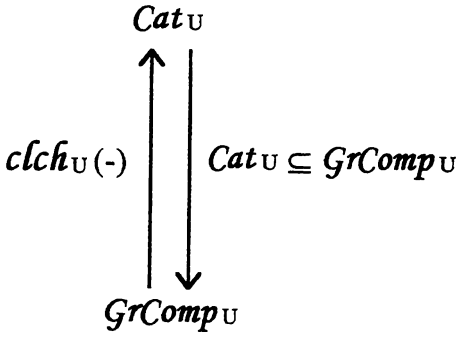
$$clch_{\mathbf{U}}(\text{-})(\mathcal{G}) = \texttt{ClCh}(\mathcal{G})$$

  [puisque, si $\mathcal{G}$ est un graphe à composition **U**-petit, il est clair que $\texttt{ClCh}(\mathcal{G})$ est une catégorie **U**-petite],

- pour tous graphes à composition **U**-petits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ et pour tout foncteur $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, on a :

$$clch_{\mathbf{U}}(\text{-})(f) = \texttt{ClCh}(f) .$$

De la PROPOSITION 2 il résulte évidemment que, dans le diagramme [de foncteurs] ci-dessous :



le foncteur $clch_U(-) : GrComp_U \to Cat_U$ est un adjoint à gauche du foncteur $Cat_U \subseteq GrComp_U : Cat_U \to GrComp_U$.

---

5. Bibliographie

(C.A.S.T.) **C. Ehresmann**, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

(C.O.G.R.) **D. Duval et C. Lair**, Sketches and specifications : Reference manual, First Part : Compositive Graphs, Rapport de Recherche du L.A.C.O., Limoges, 2000 (http://www.unilim.fr/laco/rapports).

(E.T.E.3.) **C. Lair**, Eléments de Théorie des Esquisses, Section 3 : Esquisses, à paraître dans Diagrammes.

(E.T.E.n.) **C. Lair**, Eléments de Théorie des Esquisses, Sections 1, 2 , 3 et suivantes, à paraître dans Diagrammes.

(E.T.S.A.) **C. Ehresmann**, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Instit. Polit. XIV, Iasi, 1968.

(P.T.G.M.) **L. Coppey**, Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris, 1980.

6. Table.

1. Introduction. 3

2. Graphes à composition, foncteurs et transformations naturelles. 5
2.1. Graphes à composition. 5
2.2. Foncteurs. 9
2.3. Transformations naturelles. 13

3. Catégories engendrées. 18
3.1. Catégories de chemins. 18
3.2. Catégories de classes de chemins. 22

4. Catégories de graphes à composition. 27
4.1. Petitesse. 27
4.2. La catégorie des graphes à composition U-petits. 28
4.3. Adjonctions. 29

5. Bibliographie 32

6. Table. 33

UNIVERSITE PARIS 7
U.F.R. de Mathématiques
Case 7012
2, place JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05
FRANCE

lairchrist@aol.com