DIAGRAMMES

J. WOIRY

Structures de contact, extension du calcul des jets (1ère partie)

Diagrammes, tome 36 (1996), p. 15-114

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1996__36__15_0>

© Université Paris 7, UER math., 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 36 , 1996

STRUCTURES DE CONTACT, EXTENSION DU CALCUL DES JETS (1ère partie [1])

J. Woiry

RESUME. En 1953, lors du Colloque de Strasbourg, dans le but de fournir au Calcul Infinitésimal des moyens et des notations intrinsèques, deux réponses sont proposées : l'une - la Théorie des jets - est présentée par Charles Ehresmann, l'autre - la Théorie des Points Proches - est exposée par André Weil.

C'est cette même volonté d'algébriser le calcul différentiel qui m'a conduit, au travers des algèbres de contact, à une approche quelque peu différente. J'ai été ainsi amené à reformuler le calcul des jets indépendamment de toute structure infinitésimale. Si, accessoirement, au cours de ce cheminement, j'ai rencontré les algèbres locales et les points proches, c'est essentiellement dans l'esprit de la Théorie des Jets qu'est mené cet exposé.

Bon nombre de situations sont illustrées d'exemples issus de la Géométrie Différentielle, mais également tirés de domaines qui lui sont tout à fait étrangers. En cela, me semble-t-il, réside tout l'intérêt de cette étude.

ABSTRACT. With a view to bring Differential Calculus its own intrinsic ways and notations, two types of solutions were suggested at the Strasbourg Conference in 1953. On the one hand, Charles Ehresmann's Jets Theory and on the other, André Weil's Theory of Close Points.

The same endeavour to focus on differential calculus from an algebraical angle led me, through contact algebra, to make use of slightly different approach. This has meant the rephrasing of the jets theory out of any differential context. If I happened, in so doing, to touch on local algebras and close points, the spirit of the Jets Theory is nevertheless prevailing in this presentation.

Quite a number of points are illustrated with examples taken from Differential Geometry but also from radically different fields. In my opinion, it is this very aspect of things wich confers this study its relevance.

---

[1] La 2ème partie de ce travail sera publiée dans Diagrammes 37 (Paris, 1997).

A.M.S. Sub. Class : 18 F 99 , 18 F 15 , 58 A 99 , 58 A 20

INTRODUCTION

La notion de contact suggère l'idée de partage, celle d'une information, d'une communauté d'intérêts, de points de vue. D'où la première approche qui en est faite mathématiquement au travers du concept de relation d'équivalence.

Ceci établi, immédiatement survient la volonté de fonder une hiérarchie entre contacts, d'où l'idée d'un ordre voire d'un préordre. Finalement cette ambiguïté entre équivalence et ordre a été la première impression recueillie lors de cette étude, à tel point que j'ai eu à évoquer des notions telles que celle de préordre $\mathcal{R}$-compatible où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

L'idée de contact est omniprésente en mathématique. Deux nombres entiers sont en contact par leur p.g.c.d., deux courbes planes par leur tangente commune, deux fonctions numériques de variables réelles par leur développement limité commun jusqu'à un certain ordre en un point donné. Je cite ces situations élémentaires car, constatant une communauté de démarche dans les calculs, j'ai été amené au chapitre 1 à définir la structure d'algèbre de contact. C'est pour moi la pierre angulaire de l'édifice, pierre sur laquelle vont s'élaborer les concepts de jet, d'espace tangent, de connexion etc.

Fortement impressionné par l'enseignement de Charles Ehresmann, qui savait avec simplicité rendre clairs et évidents les concepts les plus abstraits, j'étais donc prédisposé à fonder de manière simple, sinon simpliste, le point de départ de ce travail.

Passée l'étude des algèbres de contact, m'est apparue la nécessité de construire de telles algèbres. La notion d'échelle de comparaison existe à propos des développements limités, c'est sans doute par ce biais que j'ai été amené à définir échelons puis échelonnements au chapitre 2, pour finalement envisager au chapitre 3 les liens qui peuvent exister entre ces deux notions. A ce propos on ne peut que constater, tant pour les algèbres de contact que pour les échelonnements, l'ambiguïté ordre-équivalence évoquée précédemment.

Au chapitre 4 c'est l'équivalence qui prévaut avec le calcul des jets. L'extension de ce calcul aux parties de C, (où C est une catégorie) m'a amené tout naturellement à définir des extensions d'ordre supérieur. C'est dans ce chapitre que j'établis un lien entre algèbre de contact et espèce de morphismes (espèce de morphismes signifiant pour Charles Ehresmann catégorie opérant sur une catégorie).

Or dès le début une algèbre de contact se présente de manière analogue, à ceci près que l'action de la catégorie d'opérateurs s'exerce partout sur C et non de manière « fibrée ».

Un point important est la refondation des espaces tangents comme espaces de jets de sections locales de la rétraction source, des espaces cotangents comme espaces de jets de sections locales de la rétraction but. A partir de là le matériel est en place pour décrire les différents types de contacts et développer les notions initiées par Charles Ehresmann dans le cadre de la géométrie différentielle. On examine au chapitre 5 sous quelles conditions les produits finis et les produits fibrés finis sont préservés par les différents foncteurs jets définis sur C et sur la catégorie des sections locales de α.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude de quelques exemples dont l'éventail évolue entre le « classique » et l' « inattendu ». Le « classique » concerne le calcul des jets développé par Charles Ehresmann en liaison avec l'algèbre de contact correspondante introduite dès le chapitre 1. La divisibilité sur $\mathbf{Z}$ permet d'introduire la notion de néoalgèbre de contact double, puis nous définissons diverses structures d'algèbre de contact double sur une algèbre locale, ce qui permet d'une part d'enrichir le calcul des jets et d'autre part d'autoriser la construction de multiples points proches au sens d'André Weil.

L' « inattendu » passe par la construction de la catégorie des chaînes contrôlées à laquelle est associé un ensemble de cribles. On définit alors sur cette catégorie deux structures de néoalgèbre de contact associées, pour l'une à un algorithme de « recherche » et pour l'autre à un algorithme de « suppression ».

Au chapitre 7, inspiré par une première note de Charles Ehresmann aux comptes rendus de l'Académie des sciences de 1951, reprise dans « Atti del IV congresso dell' Unione Matematica Italiana » en 1954, plus longuement développée dans « Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo groupes de Lie » en 1953, j'ai essayé de préciser sous quelles conditions il était possible de développer un « calcul différentiel » dans une algèbre de contact. Pour ce faire j'ai été conduit à définir les φ-transformations et leur groupoïde et montrer en quoi un calcul différentiel était tributaire de ce groupoïde et du choix d'une section admissible de $[\beta,\alpha]$. Avec les notations de Charles Ehresmann, il est alors possible de définir vitesse, covitesse, différentielle, dérivée tant pour les morphismes que pour les jets. Les relations obtenues apparaissent comme les fruits d'un jeu, jeu des notations mais aussi jeu des concepts.

Au chapitre 8 sont reprises les définitions de Charles Ehresmann concernant les notions d'élément de contact et d'élément d'enveloppe ainsi que la relation d'incidence. Après avoir défini ce qu'est une fibration, on dresse un bilan de toutes les fibrations pouvant être construites selon les différentes catégories rencontrées.

Le chapitre se termine sur la notion d'objet plongé, ce qui permet de définir entre objets plongés la relation « avoir même contact en un point ».

Le chapitre 9 est consacré pour une part importante à la construction de nouvelles algèbres de contact déduites de l'algèbre de contact initiale (k,Φ,C). En particulier pour la catégorie des applications d'un ensemble U vers la catégorie C (notée C^U) on définit les prolongements holonomes ou non holonomes et on étudie les rapports entre ces divers prolongements.

L'accent est ensuite porté sur la catégorie des sections locales de α puis sur la catégorie des sections locales de β (éventuellement pointées). On construit alors sur ces nouvelles catégories des structures d'algèbre de contact déduites de (k,Φ,C).

En particulier les φ-éléments de connexion sont présentés comme des morphismes particuliers de $J^{\varphi}C_b$ au chapitre 10.

Moyennant l'hypothèse de transitivité locale sur C, en un sens plus fort que celui utilisé habituellement, on montre qu'il existe sur l'ensemble des φ-éléments de connexion une espèce de structures où la catégorie d'opérateurs est la catégorie des jets de sections locales pointées de β. On définit également la différentielle absolue par rapport à un φ-élément de connexion ainsi que le groupoïde d'holonomie et le groupe d'holonomie attachés à un tel φ-élément de connexion.

1 ALGEBRE DE CONTACT

1.1 ACTION DE Φ SUR C

1.1.1 DEFINITIONS

Φ et C étant deux catégories telles que Φ opère sur C, on dit que (k,Φ,C) est une **ALGEBRE DE CONTACT** si et seulement si on vérifie :

(1) $\forall(\varphi,\varphi')\in\Phi*\Phi \quad \forall f\in C \quad (\varphi.\varphi')f=\varphi(\varphi' f)$,
(2) $\forall\varphi\in\Phi \quad \forall(f,f')\in C^2 \quad (f,f')\in C*C\Leftrightarrow(\varphi f,\varphi f')\in C*C$,
(3) $\forall\varphi\in\Phi \quad \forall(f,f')\in C*C \quad \varphi(f.f')=\varphi(\varphi f.\varphi f')$,

en posant $k(\varphi,f)=\varphi f$, k étant l'application $k:\Phi\times C\to C$.

φf est alors la **TRONCATURE DE TYPE** φ de f.

Noter qu'on n'impose pas que l'image de f sous l'action d'une unité de Φ soit encore f. On dira que φ est idempotent si et seulement si $\forall f\in C \quad \varphi(\varphi f)=\varphi f$, sans pour autant que $\varphi.\varphi$ soit défini. C_0 étant l'ensemble des unités de C, on notera α (resp. β) la rétraction source (resp. but) de C sur C_0. On désigne par $C*C$ l'ensemble de tous les couples de morphismes de C qui sont composables. Dans toute la suite, et en l'absence d'ambiguïté on notera C (resp. Φ) au lieu de C (resp. Φ).

Remarque

Dans la définition précédente on peut remplacer sans difficulté la catégorie d'opérateurs par un système multiplicatif, c'est à dire un ensemble muni d'une loi binaire partiellement définie. Nous parlerons alors de **NEOALGEBRE DE CONTACT** (c.f. 3.3).

1.1.2 EXEMPLES

1- C est une catégorie, Φ est le monoïde des endofoncteurs idempotents de C dont les restrictions aux unités de C sont injectives (afin de satisfaire au (2) de la définition).

2- C est le monoïde des applications de **R** dans **R** muni de la multiplication habituelle, Φ est le monoïde des parties de **R** muni de l'intersection. $\varphi f=\chi_\varphi.f$, χ_φ étant l'application caractéristique de φ dans **R**.

3- C est le monoïde des applications polynômes de **R** dans **R** muni de la multiplication habituelle, Φ est l'ensemble des entiers naturels muni de l'opération inf. P étant un polynôme réduit φP est la troncature de P au degré φ.

4- C est le magma associatif des applications polynômes de **R** dans **R** nulles en zéro muni de la composition des fonctions, Φ est le monoïde des entiers naturels non nuls muni de l'opération inf, φP est alors défini comme précédemment.

5- Soit a un réel et F(a) la base de filtre convergente vers a formée des ouverts de la forme $]b,a[\cup]a,c[$ avec $b < a < c$. Soit $\mathcal{F}(a)$ l'ensemble des fonctions définies sur un élément de F(a) et à valeurs dans **R**. On pose C=($\mathcal{F}(a)$, .), et soit Φ une partie non vide de $\mathcal{F}(a)$ totalement ordonnée par $(f \prec g) \Leftrightarrow (g = \circ(f) \vee g = f)$ et possédant un plus petit élément φ_0 , on définit sur Φ : $\varphi_i \wedge \varphi_j = \varphi_{\inf(i,j)}$, Φ devient alors une échelle de comparaison sur $\mathcal{F}(a)$, $\varphi_n f$ est alors l'unique fonction définie par $f - \varphi_n f = \circ(\varphi_n)$.

6- C=(**N***, .), Φ=(**N***,pgcd) et φf=pgcd(φ,f).

7- X étant un ensemble on pose C=($\mathcal{P}(X)$, $\cup$) et Φ=($\mathcal{P}(X)$, $\cap$) on a alors $\varphi f = \varphi \cap f$.

8-a- C est la catégorie des applications indéfiniment différentiables de la forme $f: A \to B$ où $A = \mathbf{R}^n$ et $B = \mathbf{R}^p$, n et p étant deux entiers naturels non nuls. On a Φ=(**N***, inf) qui opère sur C_p , catégorie des applications pointées de la forme $(f,a):(A,a) \to (B,b)$ où $f \in C$, $a \in A$ et $b = f(a)$.

Rappelons que si on a $(f,a):(A,a) \to (B,b)$ avec $b = f(a)$ et $(f',a'):(A',a') \to (B',b')$ avec $b' = f'(a')$ alors $(f',a').(f,a)$ est défini et égal à $(f'.f,a)$ si et seulement si $(A',a') = (B,b)$. On définit $\varphi(f,a) = (f_\varphi,a)$ où f_φ est la partie principale du développement de Taylor de f en a à l'ordre φ.

8-b- Soit C la catégorie des applications indéfiniment différentiables entre variétés indéfiniment différentiables. On considère comme précédemment la catégorie C_p des applications pointées associée à la catégorie C. On définit sur C_p la relation suivante :

$(f,a) \approx (f',a)$ si et seulement si il existe dans $A \cap A'$ un ouvert U contenant a (U étant un ouvert commun aux deux topologies définies respectivement sur la variété A et sur la variété A') tel que $f_{|U} = f'_{|U}$.

C'est une relation d'équivalence et la classe de (f,a) est notée $J^l(f,a)$ ou $J^l_a f$, c'est le jet local de f en a. En particulier si on identifie A et $Id_A : A \longrightarrow A$ et si $a \in A$, $J^l(Id_A,a)$ est alors nommé germe de variété en a et noté $\hat{a}$.

$(A,a) \approx (A',a)$ équivaut à dire qu'il existe un ouvert U (commun aux deux topologies) qui contient a et est lui même contenu dans $A \cap A'$. De tels jets locaux se composent de la manière suivante :

$$J^l(g,b).J^l(f,a) = J^l(g.f,a) \qquad \text{si et seulement si} \qquad \hat{b} = \hat{f}(a).$$

Cette composition permet de munir l'ensemble des jets locaux d'une structure de catégorie qu'on note $J^l C_p$.

Soit $\varphi \in \Phi$, φ opère sur les jets locaux de la manière suivante : $\varphi J^l(f,a) = J^l(f_\varphi,a)$ où f_φ est (moyennant le recours à un couple de cartes locales) la partie principale du développement de Taylor à l'ordre φ de f en a. On montre que cette définition est indépendante du choix des cartes locales.

On vérifie sans peine le point (1) de la définition. En supposant que $\varphi \wedge \varphi' = \varphi$ on a : $(\varphi \wedge \varphi')J^l(f,a) = \varphi J^l(f,a) = J^l(f_\varphi,a)$ puis $\varphi(\varphi' J^l(f,a)) = \varphi(J^l(f_{\varphi'},a)) = J^l(f_\varphi,a)$ où f_φ de la dernière égalité est déduit de $f_{\varphi'}$ par simple troncature.

Par ailleurs $J^l(g,b).J^l(f,a)$ est défini si et seulement si $\hat{b} = \hat{f}(a)$. Or $\varphi J^l(g,b).\varphi J^l(f,a)$ est défini si et seulement si $J^l(g_\varphi,b).J^l(f_\varphi,a)$ est défini. Comme $b = f_\varphi(a)$ on a donc $\hat{b} = \hat{f}_\varphi(a)$. Finalement $J^l(g,b).J^l(f,a)$ est défini si et seulement si $\varphi J^l(g,b).\varphi J^l(f,a)$ est défini, le point (2) de la définition se trouve alors satisfait.

En supposant qu'on ait $J^l(g,b).J^l(f,a) = J^l(g.f,a)$ on peut écrire :

$$\varphi(J^l(g,b).J^l(f,a)) = \varphi(J^l(g.f,a)) = J^l((g.f)_\varphi,a) \qquad \text{et}$$

$$\varphi(\varphi J^l(g,b).\varphi J^l(f,a)) = \varphi(J^l(g_\varphi,b).J^l(f_\varphi,a)) = \varphi(J^l(g_\varphi.f_\varphi,a)) = J^l((g_\varphi.f_\varphi)_\varphi,a).$$

Or la partie principale du développement de Taylor à l'ordre φ de $g.f$ se calcule directement, ce qui donne $(g.f)_\varphi$ ou bien s'obtient en exprimant $g_\varphi.f_\varphi$ puis en en prenant la troncature à l'ordre φ soit $(g_\varphi.f_\varphi)_\varphi$, ce qui, au final, produit le même résultat, d'où (3). Il résulte alors de ce qui précède que $\left(k,\Phi,J^l C_p\right)$ est une algèbre de contact où $k(\varphi,J^l(f,a)) = \varphi J^l(f,a) = J^l(f_\varphi,a)$.

9- Soit $C = \left(R\left[X_1,X_2,\ldots,X_n\right],\times\right)$, $\Phi = \left(\left\{\partial^{(n_i)_{i\in I}}_{(X_i)_{i\in I}}\right\},.\right)$, avec $I \subset \{1,2,3,\ldots,n\}$. La composition dans Φ est définie par $\partial^{n_i}_{X_i}.\partial^{n_j}_{X_j} = \partial^{n_i,n_j}_{X_i,X_j} = \partial^{n_j,n_i}_{X_j,X_i}$ si i différent de j, et $\partial^{m}_{X_i}.\partial^{p}_{X_i} = \partial^{\inf(m,p)}_{X_i}$ sinon. L'action de Φ est définie par $\partial^{n_i}_{X_i} P$ troncature de P à l'ordre n_i par rapport à X_i et $\partial^{n_i,n_j}_{X_i,X_j} P = \partial^{n_i}_{X_i}(\partial^{n_j}_{X_j} P)$ (P étant supposé réduit).

Au chapitre 6 nous développerons de manière plus conséquente d'autres exemples et en particulier le 8-b.

1.1.3 PROPOSITION

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact on a :

1- $\forall(e,e') \in C_0^2 \quad C(e,e')$ stable sous l'action de φ, $C(e,e')$ étant l'ensemble des morphismes de C de source e et de but e',

2- Les propositions suivantes sont équivalentes ;

(1) φ est idempotent,

(2) $\forall(f,g) \in C*C \quad \forall\varphi \in \Phi \quad \varphi(f.g) = \varphi(\varphi f.g)$,

(3) $\forall(f,g) \in C*C \quad \forall\varphi \in \Phi \quad \varphi(f.g) = \varphi(f.\varphi g)$,

(4) $\forall e \in C_0 \quad \varphi(\varphi e) = \varphi e$.

Δ 1- Soit $f \in C(e,e')$ et $f' \in C$ tel que $\varphi f' = \varphi f$ montrons qu'alors $f' \in C(e,e')$. En effet, si on pose $\alpha(f) = e$ alors on a :

$$\begin{aligned} (f,e) \in C*C &\Leftrightarrow (\varphi f, \varphi e) \in C*C && (\ 1.1.1\ (2)\ ) \\ &\Leftrightarrow (\varphi f', \varphi e) \in C*C && (\text{car } \varphi f' = \varphi f\ ) \\ &\Leftrightarrow (f', e) \in C*C && (\ 1.1.1\ (2)\ ) \end{aligned}$$

d'où $\alpha(f') = e$. On montre de même $\beta(\mathrm{f}') = \beta(\mathrm{f}) = \mathrm{e}'$.

2- Dès l'instant où $f.g$ est défini $\varphi f.g$ et $f.\varphi g$ sont définis (d'après 1-). Compte tenu de la remarque précédente on a $\varphi(\varphi f.g)=\varphi(\varphi(\varphi f).\varphi g)=\varphi(\varphi f.\varphi g)=\varphi(f.g)$. On a donc montré que (1) entraîne (2), qui implique (3) car $\varphi(f.\varphi g) = \varphi(\varphi f.\varphi g) = \varphi(f.g)$. De (3) on tire (4) car $\varphi(\varphi e) = \varphi(e.\varphi e) = \varphi(e.e) = \varphi e$. (4) entraîne (1), car si on pose $\alpha(f) = e$ on a $\varphi(\varphi f) = \varphi(\varphi f.e) = \varphi(\varphi(\varphi f).\varphi e) = \varphi(\varphi(\varphi f).\varphi(\varphi e)) = \varphi(\varphi f.\varphi e) = \varphi(f.e) = \varphi f$. Ce qui achève la démonstration. ∇

1.1.4 CONSEQUENCES

1- Si il existe $e \in C_0$ tel que $\varphi(\varphi e) = e$ alors on a :
$\forall(e',e'') \in C_0^2 \quad \forall f \in C(e,e') \cup C(e'',e) \quad \varphi(\varphi f) = \varphi f$.

2- Si φ préserve les unités de C (ce que nous écrirons $\varphi(C_0) \subset C_0$) alors on a : $\forall e \in C_0 \quad \varphi e = e$ et finalement $\varphi(C_0) = C_0$.

3- Si $\varphi(C_0) = C_0$ alors φ est idempotent.

4- Si φ est idempotent alors $\varphi(f_1.f_2.\ldots.f_n) = \varphi(\varphi f_1.\varphi f_2.\ldots.\varphi f_n)$.

5- Si φ opère fonctoriellement alors φ est idempotent au sens de 1.1.1.

Δ Si $\alpha(f)=e$ on a :

$\varphi(\varphi f)=\varphi(\varphi f.e)=\varphi(\varphi(\varphi f).\varphi e)=\varphi(\varphi(\varphi f).\varphi(\varphi e))=\varphi(\varphi f.\varphi e)=\varphi(f.e)=\varphi f$,

d'où le résultat annoncé en 1-. De $\varphi(C_0)\subset C_0$ on déduit $\varphi e=e$ car φe est une boucle de source et but e ainsi qu'une unité, d'où $\varphi(C_0)=C_0$. Si $\varphi(C_0)=C_0$ alors $\forall e\in C_0 \quad \varphi(\varphi e)=\varphi e$ et donc on a $\forall f\in C \quad \varphi(\varphi f)=\varphi f$. 4- et 5- se démontrent sans difficulté . ∇

1.2 ORDRES

1.2.1 PROPOSITION

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact, si φ est idempotent on définit la relation : $(f\ \varphi\ g)\Leftrightarrow(f=\varphi g\vee f=g)$ qui est un ordre sur C.

Δ La réflexivité est immédiate. Examinons la transitivité.

$(f\ \varphi\ g\wedge g\ \varphi\ h)\Leftrightarrow(f=\varphi g\vee f=g)\wedge(g=\varphi h\vee g=h)$ en distribuant, ceci équivaut à : $(f=\varphi g\wedge g=\varphi h)\vee(f=\varphi g\wedge g=h)\vee(f=g\wedge g=\varphi h)\vee(f=g\wedge g=h)$,

d'où l'on déduit $f=\varphi g=\varphi(\varphi h)=\varphi h$ ou $f=\varphi g=\varphi h$ ou $f=g=\varphi h$ ou $f=g=h$. Finalement on obtient $f=\varphi h$ ou $f=h$ ce qui équivaut à $f\ \varphi\ h$.

Examinons l'antisymétrie $(f\ \varphi\ g\wedge f\ \varphi\ g)\Leftrightarrow(f=\varphi g\vee f=g)\wedge(g=\varphi f\vee g=f)$, or de $f=\varphi g$ et $g=\varphi f$ on déduit : $f=\varphi g=\varphi(\varphi f)=\varphi f=g$. Dans tous les autres cas on a de manière évidente $f=g$. ∇

Remarques

φ étant idempotent on a :

1- $\forall f\in C \quad \varphi f\ \varphi\ f$,

2- $\forall(f,g)\in C^2 \quad (f\ \varphi\ g)\Rightarrow(\varphi f=\varphi g)$,

3- φ est alors un opérateur de fermeture.

1.2.2 PROPOSITION

Si Φ est un demi-groupe abélien où tout élément est idempotent alors la relation suivante $(f\prec g)\Leftrightarrow(\exists\varphi\in\Phi \quad f=\varphi g\ \vee\ f=g)$ définit sur C une relation d'ordre.

Δ La réflexivité est immédiate.

Examinons la transitivité.

Soit $(f \prec g \wedge g \prec h) \Leftrightarrow ((f = \varphi g \vee f = g) \wedge (g = \psi h \vee g = h))$ ce qui équivaut à $(f = \varphi g \wedge g = \psi h) \vee (f = \varphi g \wedge g = h) \vee (f = g \wedge g = \psi h) \vee (f = g \wedge g = h)$, ce qui implique $f = \varphi g = \varphi(\psi h) = (\varphi.\psi)h$ (car Φ est un demi-groupe) ou $f = \varphi g = \varphi h$ ou $f = g = \psi h$ ou $f = g = h$ d'où $f \prec h$.

Examinons l'antisymétrie.

$(f \prec g \wedge g \prec f) \Leftrightarrow ((f = \varphi g \vee f = g) \wedge (g = \psi f \vee g = f))$ ce qui équivaut à :

$(f = g) \vee (f = \varphi g \wedge g = \psi f)$, ce qui entraîne :

$f = \varphi g = (\varphi.\psi)f = (\varphi.\psi.\varphi)g = (\psi.\varphi.\varphi)g = (\psi.\varphi)g = \psi f = g$ d'où le résultat. ∇

Remarques

1- $\forall f \in C \; \forall \varphi \in \Phi \; \varphi f \prec f$.

2- $(\varphi \prec \psi) \Leftrightarrow ((\exists \eta \in \Phi \;\; \varphi = \eta.\psi) \vee \varphi = \psi))$ définit un ordre sur Φ.

3- En conséquence de 2- on a :

$$\forall (f,g) \in C^2 \;\; \forall (\varphi,\psi) \in \Phi^2 \;\; (f \prec g \wedge \varphi \prec \psi) \Rightarrow (\varphi f \prec \psi g)$$

4- Compte tenu de la proposition 1.1.3, f et g ne sont comparables que si on a $\alpha(f) = \alpha(g)$ et $\beta(f) = \beta(g)$.

Δ 2- Réflexivité et transitivité étant évidentes, examinons l'antisymétrie. $(\varphi = \eta.\psi \vee \varphi = \psi) \wedge (\psi = \eta'.\varphi \vee \psi = \varphi)$ implique $(\varphi = \eta.\psi \wedge \psi = \eta'.\varphi) \vee (\varphi = \psi)$.

De $(\varphi = \eta.\psi \wedge \psi = \eta'.\varphi)$ on déduit $\varphi = \eta.\eta'.\varphi$ puis :

$\psi = \eta'.\varphi = \eta'.\eta.\psi = \eta.\eta'.\psi = \eta.\eta'.\eta'.\varphi = \eta.\eta'.\varphi = \varphi$, d'où le résultat.

3- De $(f \prec g) \Leftrightarrow (f = \nu g \vee f = g)$ et $(\varphi \prec \psi) \Leftrightarrow (\varphi = \eta.\psi \vee \varphi = \psi)$ on tire :

$(f \prec g \wedge \varphi \prec \psi)$

$\Leftrightarrow ((f = \nu g \wedge \varphi = \eta.\psi) \vee (f = \nu g \wedge \varphi = \psi) \vee (f = g \wedge \varphi = \eta.\psi) \vee (f = g \wedge \varphi = \psi)$

d'où l'on déduit successivement :

$\varphi f = (\varphi.\nu)g = (\eta.\psi.\nu)g = (\eta.\nu)(\psi g)$, ou

$\varphi f = (\varphi.\nu)g = (\psi.\nu)g = \nu(\psi g)$, ou

$\varphi f = \varphi g = (\eta.\psi)g = \eta(\psi g)$, ou

$\varphi f = \varphi g = \psi g$ d'où le résultat. ∇

1.3 ALGEBRE DE CONTACT COMPLETE

1.3.1 DEFINITIONS

1- (k,Φ,C) est une **ALGEBRE DE CONTACT IDEMPOTENTE** si et seulement si c'est une algèbre de contact qui vérifie : $\forall \varphi \in \Phi \; \forall f \in C \; \varphi(\varphi f) = \varphi f$, ce qu'on peut encore écrire $\forall \varphi \in \Phi \;\; k(\varphi,.) \circ k(\varphi,.) = k(\varphi, k(\varphi,.)) = k(\varphi,.)$.

2- (k,Φ,C) est une **ALGEBRE DE CONTACT ABELIENNE** si et seulement si c'est une algèbre de contact qui vérifie : $\forall(\varphi,\varphi') \in \Phi^2 \ \forall f \in C \ \varphi(\varphi' f) = \varphi'(\varphi f)$, ce qu'on peut encore écrire $\forall(\varphi,\varphi') \in \Phi^2 \ k(\varphi,k(\varphi',.)) = k(\varphi',k(\varphi,.))$. Peu importe que $\varphi.\varphi'$ ou $\varphi'.\varphi$ soient définis ou non.

Noter que si Φ est un demi-groupe idempotent alors (k,Φ,C) est une algèbre de contact idempotente, et que si Φ est un demi-groupe abélien alors (k,Φ,C) est une algèbre de contact abélienne.

1.3.2 CONSTRUCTION DE L'ALGEBRE COMPLETE

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact, à tout φ de Φ on associe l'application $k(\varphi,.):C \to C$ qu'on notera plus simplement φ.

Dans le cas où $(\varphi,\varphi') \in \Phi * \Phi$ on a $k(\varphi.\varphi',.) = k(\varphi,k(\varphi',.)) = k(\varphi,.) \circ k(\varphi',.)$ (on pourra donc identifier $\varphi.\varphi'$ à $\varphi \circ \varphi'$) sinon on peut toujours considérer $\varphi \circ \varphi'$ mais alors, à quelles conditions vérifiera-t-on (2) et (3) de la définition 1.1.1. ? Sachant bien entendu que $k(\varphi,.)$ et $k(\varphi',.)$ vérifient ces mêmes conditions (2) et (3).

Si $(f,f') \in C * C$ on a de manière équivalente $(\varphi' f,\varphi' f') \in C * C$ puis $(\varphi(\varphi'(f)),\varphi(\varphi'(f')) \in C * C$, car φ et φ' vérifient (2) d'où $\varphi \circ \varphi'$ vérifie (2).

On a $\varphi(\varphi'(f.g)) = \varphi(\varphi'(\varphi' f.\varphi' g))$, il est alors indispensable pour poursuivre de supposer $\varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi$. Dans cette hypothèse on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi')(f.g) &= \varphi(\varphi'(\varphi' f.\varphi' g)) \\ &= \varphi'(\varphi(\varphi' f.\varphi' g)) \\ &= \varphi'(\varphi(\varphi(\varphi' f).\varphi(\varphi' g))) \\ &= (\varphi \circ \varphi')((\varphi \circ \varphi')(f).(\varphi \circ \varphi')(g))\end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION - DEFINITION (Algèbre de contact complète)

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact abélienne, et si $\overline{\Phi}$ est le monoïde librement engendré pour la composition des applications par les applications de la forme $k(\varphi,.)$ où $\varphi \in \Phi$, d'unité Id_C alors ; $(\overline{k},\overline{\Phi},C)$ est encore une algèbre de contact abélienne dite **ALGEBRE de CONTACT COMPLETE** associée à (k,Φ,C) (ou complétée de (k,Φ,C)), où $\overline{k}$ est l'application $\overline{k}:\overline{\Phi} \times C \to C$ définie par $\overline{k}(\overline{\varphi},f) = \overline{\varphi}(f)$.

Remarques

1- Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact abélienne et idempotente alors il en est de même pour $(\bar{k},\bar{\Phi},C)$.

2- Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact complète on vérifie alors :

$\forall(\varphi,\varphi') \in \Phi^2$ $((\forall f \in C\ \varphi f = \varphi' f) \Leftrightarrow (\varphi = \varphi'))$.

3- Dire que (k,Φ,C) est une algèbre de contact complète signifie désormais que Φ est un monoïde car dans ce cas on a $(k,\Phi,C) = (\bar{k},\bar{\Phi},C)$. Donc dans le cas d'une algèbre de contact abélienne, par complétion on est ramené systématiquement à l'action d'un monoïde abélien .

1.4 MORPHISMES D'ALGEBRES DE CONTACT

1.4.1 DEFINITION

Soient (k,Φ,C), (k',Φ',C') deux algèbres de contact, $P:\Phi \to \Phi'$ et $F:C \to C'$ deux foncteurs. $P \times F$ est un morphisme d'algèbres de contact si et seulement si P et F vérifient $F \circ k = k' \circ (P \times F)$. Noter que plus généralement P pourrait n'être qu'un morphisme entre systèmes multiplicatifs.

La composition suivante $(P \times F) \circ (P' \times F') = (P \circ P' \times F \circ F')$ permet de munir l'ensemble des morphismes d'algèbres de contact d'une structure de catégorie notée ***Act***. La source de $P \times F$ est alors $Id_\Phi \times Id_C$ et le but $Id_{\Phi'} \times Id_{C'}$, qu'on identifie respectivement à $\Phi \times C$ et $\Phi' \times C'$.

1.4.2 PROPOSITION

Si $P \times F:(k,\Phi,C) \to (k',\Phi',C')$ est un morphisme d'algèbres de contact tel que $P_{|\Phi_0}$ et $F_{|C_0}$ soient deux applications injectives alors $\left(k'_{|P(\Phi)\times F(C)}, P(\Phi), F(C)\right)$ est une algèbre de contact, c'est une sous-algèbre de contact de (k',Φ',C'). Compte tenu de la remarque 1.1.1 on pourrait se dispenser de l'hypothèse $P_{|\Phi_0}$ injective.

Δ $P_{|\Phi_0}$ et $F_{|C_0}$ étant deux applications injectives, on est alors assuré que $P(\Phi)$ et $F(C)$ sont deux sous-catégories respectivement de Φ' et C', autrement dit si $(P(\varphi), P(\varphi')) \in \Phi' * \Phi'$ alors $(\varphi,\varphi') \in \Phi * \Phi$ et $P(\varphi).P(\varphi') = P(\varphi.\varphi')$.

De même si $(F(f),F(g)) \in C'*C'$ alors $(f,g) \in C*C$ et $F(f).F(g) = F(f.g)$.
Ceci étant acquis, vérifions que les conditions de la définition 1.1.1 sont satisfaites.
$\forall \varphi \in \Phi \ \forall f \in C \quad k'(P(\varphi),F(f)) = F(k(\varphi,f)) = P(\varphi)F(f) = F(\varphi f) \in F(C)$. Ce qui montre que le résultat ne dépend que de $P(\varphi)$ et de $F(f)$.

$\forall (P(\varphi),P(\varphi')) \in P(\Phi)*P(\Phi) \quad \forall (F(f),F(g)) \in F(C)*F(C)$ on a :

$$\begin{aligned}
(P(\varphi).P(\varphi'))F(f) &= P(\varphi.\varphi')F(f) && (P(\Phi) \text{ sous-catégorie})\\
&= (F \circ k)(\varphi.\varphi',f) && (\text{définition 1.4.1})\\
&= F((\varphi.\varphi')f)\\
&= F(\varphi(\varphi' f)) && (\text{définition 1.1.1})\\
&= (F \circ k)(\varphi,k(\varphi',f))\\
&= (k' \circ (P \times F))(\varphi,k(\varphi',f)) && (\text{définition 1.4.1})\\
&= k'(P(\varphi),(F \circ k)(\varphi',f))\\
&= k'(P(\varphi),k'(P(\varphi'),F(f)))\\
&= P(\varphi)(P(\varphi')F(f)) && \text{d'où (1).}
\end{aligned}$$

$(F(f),F(g)) \in C'*C' \Leftrightarrow \big(P(\varphi)F(f),P(\varphi)F(g)\big) \in C'*C'$ (dans (k',Φ',C')) d'où (2).

$$\begin{aligned}
P(\varphi)(F(f).F(g)) &= P(\varphi)F(f.g) && (F(C) \text{ sous-catégorie})\\
&= k'(P(\varphi),F(f.g)) && (\text{action de } \Phi')\\
&= (k'(P \times F))(\varphi,f.g)\\
&= (F \circ k)(\varphi,f.g) && (\text{définition 1.4.1})\\
&= F(\varphi(f.g))\\
&= F(\varphi(\varphi f.\varphi g)) && (\text{définition 1.1.1})\\
&= (F \circ k)(\varphi,\varphi f.\varphi g)\\
&= (k' \circ (P \times F))(\varphi,\varphi f.\varphi g) && (\text{définition 1.4.1})\\
&= k'(P(\varphi),F(\varphi f.\varphi g))\\
&= k'(P(\varphi),F(\varphi f).F(\varphi g)) && (F \text{ foncteur})
\end{aligned}$$

et finalement on a :

$$\begin{aligned}
P(\varphi)(F(f).F(g)) &= k'(P(\varphi),(P(\varphi)F(f)).(P(\varphi)F(g))) && (\text{action de } \Phi')\\
&= P(\varphi)((P(\varphi)F(f)).(P(\varphi)F(g))) && \text{d'où (3). } \nabla
\end{aligned}$$

1.5 PRODUITS

Notons Φ^0 la sous-catégorie de Φ formée des morphismes préservant toutes les unités de C.

1.5.1 DEFINITION

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact telle que C soit à produits choisis de deux unités, soit $\varphi \in \Phi$, on dit que φ est **REGULIER** si et seulement si on vérifie :

(1) $\varphi \in \Phi^0$, et

(2) Pour tout composé de la forme $p.f$ ou $g.q$ où p et q sont des projections choisies on a :

$$\varphi(p.f) = p.\varphi f \quad \text{et} \quad \varphi(g.q) = \varphi g.q \ .$$

Ceci revient à dire que p est une φ-constante à gauche et q une φ-constante à droite (c.f. 1.7).

Il faut noter que l'appartenance de φ à Φ^0 entraîne $\varphi(e \times e') = e \times e' = \varphi e \times \varphi e'$. Dès l'instant où Φ est un monoïde et (k,Φ,C) une algèbre de contact complète, l'ensemble des morphismes réguliers est non vide car il contient au moins Id_C . On montre alors que l'ensemble des morphismes réguliers de Φ forme une sous-catégorie notée Φ^r de Φ^0 .

1.5.2 CONSEQUENCES

Toujours avec les mêmes notations, si φ est régulier on a :

1- $\varphi p = p$ et $\varphi q = q$,

2- $\varphi\Delta_e = \Delta_e$, où Δ_e est le morphisme diagonal $e \times e \xleftarrow{\Delta_e} e$,

3- $\varphi(f \times g) = \varphi f \times \varphi g$,

4- $\varphi[f,g] = [\varphi f, \varphi g]$.

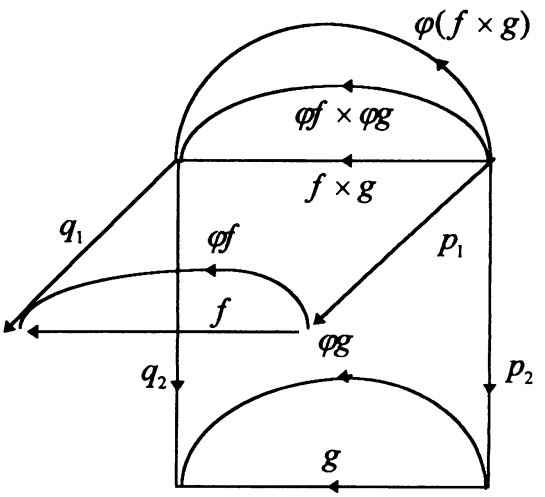
Δ 1- Si $f = \alpha(p)$ on a alors $p.f = p.\alpha(p) = p$, et d'aprés 1.5.1 il vient $\varphi p = \varphi(p.\alpha(p)) = p.\alpha(p) = p$. On montre de même $\varphi q = q$.

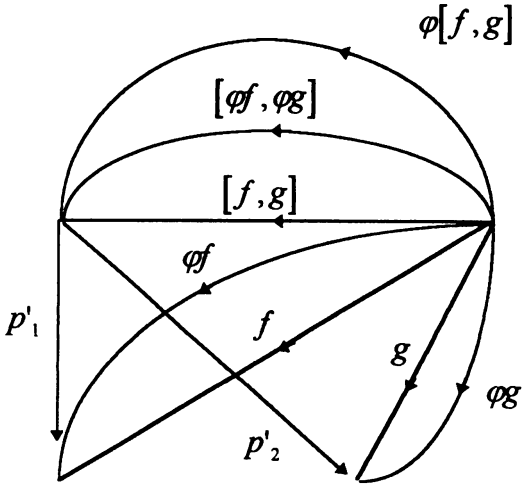
2- Δ_e est l'unique morphisme de C qui vérifie pour $i \in \{1,2\}$ $p_i.\Delta_e = e$. Or si $f = \Delta_e$ on a (définition) $\varphi(p_i.\Delta_e) = p_i.\varphi\Delta_e = \varphi e = e$ d'où par unicité $\varphi\Delta_e = \Delta_e$.

Pour établir 3- et 4- on considérera les diagrammes de la page 15.

3- $\varphi f \times \varphi g$ est l'unique morphisme de C vérifiant $q_1.(\varphi f \times \varphi g) = \varphi f.p_1$ et $q_2.(\varphi f \times \varphi g) = \varphi g.p_2$, or on a $q_1.(f \times g) = f.p_1$ puis $\varphi(q_1.(f \times g)) = \varphi(f.p_1)$ d'où l'on tire $q_1.\varphi(f \times g) = \varphi f.p_1$. On montre de même $q_2.\varphi(f \times g) = \varphi g.p_2$. En raison de l'unicité on a donc $\varphi(f \times g) = (\varphi f \times \varphi g)$.

4- $[\varphi f, \varphi g]$ est l'unique morphisme de C vérifiant $p'_1.[\varphi f, \varphi g] = \varphi f$ et $p'_2.[\varphi f, \varphi g] = \varphi g$. Or $p'_1.\varphi[f,g] = \varphi(p'_1.[f,g]) = \varphi f$. On montre de même $p'_2.\varphi[f,g] = \varphi g$. En raison de l'unicité on a donc $\varphi[f,g] = [\varphi f, \varphi g]$. ∇





1.6 PRODUITS FIBRES

Comme au paragraphe 1.5, il est question d'énoncer des conditions « minimales » satisfaites par certains éléments de Φ dans leur action sur C afin d'être en mesure, au paragraphe 5.2, de s'assurer de l'existence de produits fibrés dans les différentes catégories de jets.

1.6.1 DEFINITION

(k, Φ, C) étant une algèbre de contact et $\varphi \in \Phi$, on dit que φ est **CARTESIEN** si et seulement si on vérifie :

(1) $\varphi \in \Phi^0$, et
(2) f et g étant deux morphismes de C tels que $\varphi f \vee \varphi g$ existe dans C on a :

$$\forall (t,t') \in C^2 \ (\varphi(f.t) = \varphi(g.t') \ \Rightarrow \ \varphi f.\varphi t = \varphi g.\varphi t').$$

Dans le cas où Φ est un monoïde, l'ensemble des morphismes de Φ qui sont cartésiens est non vide pour la même raison déjà invoquée en 1.5.1.

1.6.2 PROPOSITION

L'ensemble des morphismes cartésiens de Φ forme un sous-système multiplicatif de Φ^0 notée Φ^c .

Δ Soient φ et φ' éléments de Φ^c tels que $\varphi'.\varphi$ soit défini. Il est clair (Φ^0 étant une sous-catégorie de Φ) que $\varphi'.\varphi \in \Phi^0$.

$\varphi'.\varphi$ étant défini dans Φ, rien ne permet d'affirmer que $\varphi'.\varphi$ satisfait (2) de 1.6.1, c'est la raison pour laquelle on ne peut parler que d'une structure de système multiplicatif pour Φ^c. ∇

Les conditions (1) et (2) de 1.6.1 nous apparaissent comme les conditions minimales requises afin de pouvoir (c.f. chapitre 5) être capable de construire de nouveaux produits fibrés dans la catégorie des jets. En particulier (2) permet (quand φ est cartésien) de « récupérer » la commutativité au niveau des morphismes soumis à l'action de φ , commutativité indispensable pour construire de nouveaux produits fibrés.

1.7 INVARIANTS ET CONSTANTES

1.7.1 DEFINITIONS

(k, Φ, C) étant une algèbre de contact.

1-f est un **φ-INVARIANT** si et seulement si $\varphi f = f$.

2-f est un **INVARIANT** si et seulement si pour tout φ de Φ, f est un φ-invariant.

3- g (resp. f) est une **φ-CONSTANTE A DROITE** (resp. à gauche) si et seulement si pour tout h de C, tels que $h.g$ soit défini (resp. $f.h$ défini), on a $\varphi(h.g) = \varphi h.g$ (resp. $\varphi(f.h) = f.\varphi h$).

4- g (resp. f) est une **CONSTANTE A DROITE** (resp. à gauche) si et seulement si pour tout φ de Φ c'est une φ-constante à droite (resp.à gauche).

5-f est une **CONSTANTE** si et seulement si c'est une constante à droite et à gauche.

Dans ce qui suit les numéros renvoient aux exemples cités en 1.1.2 .

1.7.2 EXEMPLES

1- Toute unité de C est un φ-invariant ainsi qu'un invariant, tous les morphismes de $\varphi(C)$ sont des φ-constantes, toute unité de C est une constante.

2- Les applications nulles en dehors de φ sont des φ-invariants, le seul invariant est la fonction nulle, toute application est une φ-constante ainsi qu'une constante.

3- Les φ-invariants sont les applications de degré inférieur à φ, les invariants sont les applications constantes, qui sont de plus les φ-constantes et les constantes.

4- Les φ-invariants sont les applications de degré inférieur à φ, les invariants sont les applications $x \mapsto ax$ avec $a \neq 0$, qui sont de plus les φ-constantes et les constantes.

5- Si a=0 et si l'échelle de comparaison est l'échelle habituelle des fonctions monômes on est renvoyé à l'exemple 3-.

6- Les φ-invariants sont les diviseurs de φ, 1 est l'unique invariant ainsi que l'unique φ-constante et l'unique constante.

7- Les seuls φ-invariants sont les sous-ensembles de φ , l'ensemble vide est l'unique invariant, l'unique φ-constante, l'unique constante.

8- Si on considère plus particulièrement les applications de **R** dans **R**, alors les φ-constantes sont les applications polynômes de degré inférieur à φ, les invariants, les φ-constantes, les constantes sont les applications affines.

On démontre sans difficulté les propriétés suivantes.

1.7.3 PROPRIETES

1- Si $\varphi.\varphi'$ est défini, si f est un φ-invariant et un φ'-invariant alors f est un $\varphi.\varphi'$-invariant.

2- Si φ préserve les unités de C, si f est une φ-constante alors f est un φ-invariant.

3- Si $\varphi.\varphi'$ est défini, si f est une φ-constante et une φ'-constante alors f est une $\varphi.\varphi'$-constante.

4- Si f et g sont deux φ-constantes et si $f.g$ est défini alors $f.g$ est une φ-constante, il en résulte que les φ-constantes forment une sous-catégorie de C.

2 ECHELONNEMENT

2.1 ECHELON SUR C

Nous avons vu dans le paragraphe 1.2 que moyennant certaines conditions sur Φ il était possible de définir un ordre sur C.

Inversement si on se donne un ordre sur C et en admettant que pour cet ordre f et f' soient comparables ainsi que g et g', en supposant de plus que $f.g$ et $f'.g'$ soient définis, en général rien ne permet d'affirmer que $f.g$ et $f'.g'$ soient comparables. C'est la raison pour laquelle nous introduisons la définition suivante.

2.1.1 DEFINITION

$[r,R]$ est un **ECHELON sur C** si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites.

(1) R est une partie non vide de C, r est un ordre sur C,

(2) $\forall (f,g) \in C^2$ (f,g comparables) $\Rightarrow (\alpha(f)=\alpha(g)) \wedge (\beta(f)=\beta(g))$,

(3) En notant $f\ r\ g$ quand f est inférieur à g pour l'ordre r on vérifie : pour tout $(f,g) \in C*C$ et pour tout $(f',g') \in C*C$ si on a $(f\ r\ f') \wedge (g\ r\ g')$, alors on en déduit : $\exists ! m \in R\ \ (m\ r\ f.g) \wedge (m\ r\ f'.g')$.

Remarques

1- Si $f=f'$ et $g=g'=\alpha(f)$ l'unique m ne dépend que de r, R et f ce qui permet de définir l'application dite sous-jacente à $[r,R]$ notée $\rho : C \to R$ définie par $f \mapsto \rho(f)=m$.

Cependant pour deux échelons distincts $[r,R]$ et $[r',R]$ d'applications sous-jacentes ρ et ρ', il est possible d'avoir $\rho=\rho'$ comme nous le verrons ultérieurement au paragraphe 2.2.2.

2- Il résulte de la définition précédente : $f \in R \Leftrightarrow \rho(f)=f$.

3- $[r,R]$ est entièrement déterminé par r et $R=\rho(C)$. Dans toute la suite $[r,R]$ d'application sous-jacente ρ sera identifié à $[r,\rho(C)]$.

2.1.2 EXEMPLES

1- On considère le demi-groupe abélien C=(**N***,×) et $q \in C$, on pose :

$$(x \ q \ y) \Leftrightarrow (x = \text{pgcd}(q,y) \vee x = y).$$

D'après 1.2.1 la relation ainsi définie est une relation d'ordre.

Soit R=Q l'ensemble des diviseurs premiers de q appartenant à C. Q est bien entendu non vide ce qui satisfait (1) de 2.1.1, (2) étant triviale, voyons (3). Supposons qu'on ait $x \ q \ x'$ et $y \ q \ y'$ et montrons qu'il existe un unique m tel que $m \ q \ xy$ et $m \ q \ x'y'$.

Si on prend pour m le plus grand diviseur commun de xy et de q, il est alors facile de montrer que m vérifie les conditions précédentes. $[q,Q]$ est alors un échelon dont l'application sous-jacente est celle qui à tout x de C associe le plus grand diviseur commun de x et de q .

2- C est la catégorie des applications pointées dérivables réelles à variable réelle où $(g,y).(f,x)$ est défini et égal à $(g \circ f, x)$ si et seulement si $y = f(x)$. A est la sous-catégorie de C formée des applications affines pointées. On définit la relation suivante sur C :

$$(f,x) \prec (g,y) \text{ si et seulement si}$$
$$(x = y) \wedge ((f \text{ est l'approximation affine de } g \text{ en } x) \vee (f = g)).$$

Remarquons que cela entraîne $f(x) = g(x)$ et $f'(x) = g'(x)$. La relation précédente est une relation d'ordre. Supposons que l'on ait $(f,x) \prec (\bar{f},x)$, $(g,y) \prec (\bar{g},y)$ et $y = f(x)$. Il est alors aisé de montrer que l'unique $(m,x) \in A$ vérifiant $(m,x) \prec (g \circ f, x)$ et $(m,x) \prec (\bar{g} \circ \bar{f}, x)$ est tel que $\forall t \in R \ \ m(t) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)'(x)(t - x)$, ce qui fait de $[\prec, A]$ un échelon sur C.

Notons dès maintenant que ces deux exemples s'inscrivent dans le cadre de la proposition 3.1.1 qui a pour but d'associer à chaque φ de l'algèbre de contact (k,Φ,C) un échelon convenablement défini.

2.1.3 PROPOSITION

$[r,R]$ étant un échelon sur C d'application sous-jacente ρ on a les résultats suivants :

(1) $\forall f \in R \ \forall g \in C \ \ (f \ r \ g) \Rightarrow (f = \rho(g))$.

(2) R est l'ensemble des morphismes de C invariants par ρ on a donc :

$$\forall f \in C \ \ \rho(\rho(f)) = \rho(f).$$

(3) $\forall (f,g) \in C^2 \ \ (f \ r \ g) \Rightarrow (\rho(f) = \rho(g))$.

De là on déduit que deux éléments distincts de R ne peuvent être comparables.

(4) $\forall (f,g) \in C*C \ \ \rho(f.g) = \rho(\rho(f).\rho(g))$

Δ (1) résulte de la définition même.

On déduit (2) de la définition et de (1).

Par définition $\rho(f)\ r\ f$ et donc $(\rho(f)\ r\ f)\wedge(f\ r\ g)\Rightarrow(\rho(f)\ r\ g)$ et d'après (1) on tire $\rho(\rho(f))=\rho(f)=\rho(g)$, ce qui prouve (3).

Par conséquent si $f\in R$ et $g\in R$ sont tels que $f\ r\ g$ alors $\rho(f)=\rho(g)$, mais sachant que $\rho(f)=f$ et $\rho(g)=g$ on a donc $f=g$.

Finalement si deux éléments de R sont comparables alors ils ne peuvent être que confondus.

On a par définition $\rho(f)\ r\ f$ et $\rho(g)\ r\ g$ d'où l'on déduit que $\rho(f)$ et f ont même source et même but ainsi que $\rho(g)$ et g. Il en résulte que, $f.g$ étant défini, $\rho(f).\rho(g)$ est également défini. Il existe donc un unique $m\in R$ tel que $m\ r\ \rho(f).\rho(g)$ et $m\ r\ f.g$. D'après (3) ci-dessus on a donc les égalités $\rho(m)=\rho(\rho(f).\rho(g))$ et $\rho(m)=\rho(f.g)$ d'où le résultat (4) annoncé. ∇

2.1.4 **PROPOSITION** (échelons ordonnés)

La relation suivante, définie entre deux échelons sur C, est une relation d'ordre.

$$([r,R]\prec[s,S])\Leftrightarrow((R\subset S)\wedge(\forall(f,g)\in C^2\ (f\ r\ g)\Rightarrow(f\ s\ g))).$$

Δ Réflexivité et transitivité sont immédiates. De $([r,R]\prec[s,S])\wedge([s,S]\prec[r,R])$ on déduit $\forall(f,g)\in C^2\ (f\ r\ g)\Rightarrow(f\ s\ g)\Rightarrow(f\ r\ g)$ ainsi que $R\subset S\subset R$ d'où l'on tire $\forall(f,g)\in C^2\ (f\ r\ g)\Leftrightarrow(f\ s\ g)$ et $R=S$ ce qui achève la démonstration. ∇

2.1.5 **THEOREME** (composition des échelons)

$[r,R]$ et $[s,S]$ étant deux échelons sur C (d'applications sous-jacentes ρ et σ) sont dits composables si et seulement si $\rho\sigma=\sigma\rho$ (en posant $\rho\circ\sigma=\rho\sigma$). Dans ce cas on vérifie $R\cap S\neq\varnothing$.

Dans le cas où ces deux échelons sont composables on pose :

$[r,R]\bullet[s,S]=[t,T]$ avec $(f\ t\ g)\Leftrightarrow(((f\ r\ \sigma(g))\wedge(f\ s\ \rho(g)))\vee(f=g))$ et $T=R\cap S=(\rho\sigma)(C)=\rho(C)\cap\sigma(C)$. L'application sous-jacente de $[t,T]$ est notée τ et vérifie $\tau=\rho\sigma$.

On définit ainsi une composition non partout définie qui cependant est associative et commutative.

Δ Comme $[r,R]$ et $[s,S]$ sont composables on sait que $T=R\cap S\neq\varnothing$.

Il faut également établir que t est un ordre sur C. La réflexivité est évidente. Examinons la transitivité. De $(f\ t\ g)\wedge(g\ t\ h)$ on déduit facilement $(((f\ r\ \sigma(g))\wedge(f\ s\ \rho(g)))\vee(f=g))$ et $(((g\ r\ \sigma(h))\wedge(g\ s\ \rho(h)))\vee(g=h))$, d'où l'on déduit successivement :

$(f\ r\ \sigma(g))\wedge(f\ s\ \rho(g))\wedge(g\ r\ \sigma(h))\wedge(g\ s\ \rho(h))$, ou
$(f\ r\ \sigma(g))\wedge(f\ s\ \rho(g))\wedge(g=h)$, ou
$(f=g)\wedge(g\ r\ \sigma(h))\wedge(g\ s\ \rho(h))$, ou
$f=g=h$.

Dans les trois derniers cas on conclut de manière évidente à $f\ t\ h$. Dans le premier cas, de $g\ r\ \sigma(h)$ on tire $\rho(g)=(\rho\sigma)(h)=(\sigma\rho)(h)$ puis $\rho(g)\ s\ \rho(h)$; de plus nous avons $f\ s\ \rho(g)$ d'où $f\ s\ \rho(h)$. Par un raisonnement analogue on aurait $f\ r\ \sigma(h)$.

On peut désormais conclure par $f\ t\ h$ dans tous les cas, ce qui établit la transitivité de t.

Voyons l'antisymétrie. De $(f\ t\ g)\wedge(g\ t\ f)$ on tire $f=g$ ou $(f\ r\ \sigma(g))\wedge(f\ s\ \rho(g))\wedge(g\ r\ \sigma(f))\wedge(g\ s\ \rho(f))$. Or $(f\ r\ \sigma(g))\wedge(f\ s\ \rho(g))$ implique $\rho(f)=(\rho\sigma)(g)$ et $\sigma(f)=(\sigma\rho)(g)$ ce qui montre que $\rho(f)=\sigma(f)$. On montre de même $\rho(g)=\sigma(g)$. De ces derniers résultats on tire $f\ r\ \sigma(g)$, $\sigma(g)=\rho(g)$, $\rho(g)\ r\ g$ d'où $f\ r\ g$ de même on voit que $g\ r\ \sigma(f)$, $\sigma(f)=\rho(f)$, $\rho(f)\ r\ f$ d'où $g\ r\ f$, finalement par antisymétrie de r on a $f=g$.

Montrons que si f et g sont comparables pour t alors (mis à part le cas évident où $f=g$) ils ont même source et même but ; g et $\sigma(g)$ ont même source et même but, $\sigma(g)$ et f ont même source et même but donc f a même source et même but que g.

$f.g$ et $f'.g'$ étant définis, $f\ t\ f'$ équivaut à $f=f'$ ou $(f\ r\ \sigma(f'))\wedge(f\ s\ \rho(f'))$ d'où l'on déduit $(\rho(f)=(\rho\sigma)(f'))\wedge(\sigma(f)=(\sigma\rho)(f')=(\rho\sigma)(f'))$ ou $f=f'$. De même de $g\ t\ g'$ on tire $(\rho(g)=(\rho\sigma)(g'))\wedge(\sigma(g)=(\sigma\rho)(g')=(\rho\sigma)(g'))$ ou $g=g'$.

Si $f=f'$ et $g=g'$ on a $(\sigma\rho)(f.g)=(\sigma\rho)(f'.g')$.

Si on a $\rho(f)=(\rho\sigma)(f')=\sigma(f)$ et $g=g'$ alors on en déduit les égalités $(\sigma\rho)(f.g)=\sigma(\rho(\rho(f).\rho(g)))=\sigma(\rho((\rho\sigma)(f').\rho(g')))$, ce qui est encore égal à $\sigma(\rho(\sigma(f').g'))=(\sigma\rho)(\sigma(f').g')=(\rho\sigma)(\sigma(f').g')$, ce qu'on peut encore écrire $\rho(\sigma(\sigma(f').g'))=\rho(\sigma(f'.g'))=(\rho\sigma)(f'.g')=(\sigma\rho)(f'.g')$.

Dans le cas où l'on a $f=f'$ et $\rho(g)=(\rho\sigma)(g')=\sigma(g)$ on montre de même $(\sigma\rho)(f.g)=(\sigma\rho)(f'.g')$ ainsi que dans le cas où $\sigma(f)=\rho(f)=(\rho\sigma)(f')$ et $\sigma(g)=\rho(g)=(\rho\sigma)(g')$.

On pose $m=(\sigma\rho)(f.g)=(\sigma\rho)(f'.g')$ et on montre qu'on a $m\ t\ f.g$, $m\ t\ f'.g'$ et $m\in R\cap S$.

Il est clair que $(\sigma\rho)(f.g)\ s\ \rho(f.g)$ et $(\rho\sigma)(f.g)\ r\ \sigma(f.g)$ soit $m\ s\ \rho(f.g)$ et $m\ r\ \sigma(f.g)$ ce qui revient à $m\ t\ f.g$. De manière analogue on obtient $m\ t\ f'.g'$. De plus, de $m=(\rho\sigma)(f.g)$ on tire $m\in R$, de $m=(\sigma\rho)(f.g)$ on tire $m\in S$ d'où $m\in R\cap S$.

Reste à montrer l'unicité.

Supposons qu'il existe $m'\in R\cap S$ vérifiant $m'\ t\ f.g$ et $m'\ t\ f'.g'$ alors on aura $m'=(\sigma\rho)(f.g)$ ou $m'=f.g$, comme $\rho(m')=m'$ et $\sigma(m')=m'$ on tire $(\sigma\rho)(m')=\sigma(m')=m'$ d'où l'on déduit dans tous les cas $m'=(\sigma\rho)(f.g)$ ce qui achève d'établir l'unicité de m.

Il ne reste plus qu'à montrer $(\rho\sigma)(C)=\rho(C)\cap\sigma(C)$.

Soit $f\in(\rho\sigma)(C)=(\sigma\rho)(C)$ alors $f\in\rho(C)\wedge f\in\sigma(C)$ donc $f\in\rho(C)\cap\sigma(C)$ ce qui implique $f\in T$ d'où $(\sigma\rho)(C)\subset T$. Soit $f\in T=\rho(C)\cap\sigma(C)$ alors $f=\rho(f')=\sigma(f'')$ puis $\rho(f)=(\rho\rho)(f')=\rho(f')=f$ ainsi que $\sigma(f)=(\sigma\sigma)(f'')=\sigma(f'')=f$ d'où l'on tire $f=\sigma(f)=(\sigma\rho)(f)$ et $f\in(\sigma\rho)(C)$, finalement $T\subset(\sigma\rho)(C)$.

En conclusion : $T=R\cap S=\rho(C)\cap\sigma(C)=(\sigma\rho)(C)=(\rho\sigma)(C)$, et l'unique élément de $R\cap S$ inférieur à f est naturellement $(\sigma\rho)(f)$ d'où l'application sous-jacente τ de $[t,T]$ définie par $\tau=\sigma\rho=\rho\sigma$.

Par définition cette composition est commutative. Il est clair que dans l'hypothèse où les composés qui suivent, c'est à dire : $[r,R]\bullet[s,S]$, $([r,R]\bullet[s,S])\bullet[t,T]$, $[s,S]\bullet[t,T]$ et $[r,R]\bullet([s,S]\bullet[t,T])$ sont définis, il en résulte alors l'égalité suivante :

$$[r,R]\bullet([s,S]\bullet[t,T])=([r,R]\bullet[s,S])\bullet[t,T].\ \nabla$$

2.2 ECHELONNEMENT SUR *C*

2.2.1 DEFINITIONS

On appelle **ECHELONNEMENT sur *C*** tout ensemble non vide d'échelons sur C.
Si de plus l' échelonnement est tel que pour tout échelon $[r,R]$ et $[s,S]$ on a :

$$[r,R]\prec[s,S]\quad\text{ou}\quad[s,S]\prec[r,R]\ ,$$

on dira que c'est une **ECHELLE sur *C***.

2.2.2 PROPOSITION

$[r,R]$ et $[r',R']$ sont deux échelons sur C d'applications sous-jacentes ρ et ρ'. On a.

1- La relation définie par : $[r,R] \approx [r',R'] \Leftrightarrow \rho = \rho'$ est une relation d'équivalence.

2- Si $[r,R] \approx [r',R']$ alors $R = R'$ et $\forall f \in R \; \forall g \in C (f \; r \; g \Leftrightarrow f \; r' \; g)$.

Bien noter qu'ici f est un élément de R !

3- Si $R=R'$ et $\forall (f,g) \in C^2 \; (f \; r \; g \Rightarrow f \; r' \; g)$ alors $[r,R] \approx [r',R']$.

4- Si $[r,R] \bullet [s,S]$ est défini on note $\overline{[r,R]}$ la classe d'équivalence de $[r,R]$, on a alors $\overline{[r,R]} \bullet \overline{[s,S]} = \overline{[t,T]}$ (avec $[r,R] \bullet [s,S] = [t,T]$) indépendamment des représentants choisis, et $\overline{[r,R]}$ est encore un échelon sur C.

Δ 1- L'équivalence est évidente.

2- $[r,R] \approx [r',R'] \Leftrightarrow \rho = \rho' \Rightarrow \rho(C) = \rho'(C) \Leftrightarrow R = R'$. De plus on peut écrire : $\forall f \in R = R' \; \forall g \in C \; (f \; r \; g \Leftrightarrow f = \rho(f) = \rho(g) \Leftrightarrow f = \rho'(f) = \rho'(g) \Leftrightarrow f \; r' \; g)$ ce qui achève la preuve de 2-.

3- Soient $R = R'$ et $\forall (f,g) \in C^2 \; (f \; r \; g \Rightarrow f \; r' \; g)$. Pour tout f de C on a $\rho(f) \; r \; f$ ce qui entraîne $\rho(f) \; r' \; f$ d'après l'hypothèse. Or $\rho(f) \in R'$ (car $R = R'$) et $\rho(f)$ est alors l'unique élément de R' tel que $\rho(f) \; r' \; f$, on a donc $\rho(f) = \rho'(f)$ ce qui entraîne $[r,R] \approx [r',R] = [r',R']$.

4- Montrons que la définition est indépendante des représentants choisis. Soient $[r',R'] \approx [r,R]$ et $[s',S'] \approx [s,S]$, et supposons que $[r,R] \bullet [s,S]$ soit défini et égal à $[t,T]$. $[r,R] \bullet [s,S]$ défini signifie que $\rho\sigma = \sigma\rho$, soit encore $\rho'\sigma' = \sigma'\rho'$ et donc que $[r',R'] \bullet [s',S']$ est défini. On pose $[r',R'] \bullet [s',S'] = [t',T']$. Par définition de la composition $[t',T']$ a pour application sous-jacente $\rho'\sigma' = \rho\sigma$, soit la même que celle de $[t,T]$. on a donc $[t',T'] \approx [t,T]$.

Montrons que $\overline{[r,R]}$ est encore un échelon sur C. Soit $[r',R'] \approx [r,R]$, on a alors $\rho' = \rho$ et $R' = R$, de plus $f \; r' \; g$ entraîne $\alpha(f) = \alpha(g)$ et $\beta(f) = \beta(g)$ car $[r',R']$ est un échelon sur C ; donc quel que soit le choix des représentants f et g, ces représentants auront même origine et même extrémité. Soient $f \; r' \; f'$ et $g \; r' \; g'$ et supposons $f.g$ ainsi que $f'.g'$ définis, alors on sait qu'il existe un unique m dans R tel que $m \; r \; f.g$ et $m \; r \; f'.g'$, d'où l'on déduit (d'après 2-) $m \; r' \; f.g$ et $m \; r' \; f'.g'$. Il en résulte que m ne dépend pas des représentants choisis. ∇

2.2.3 DEFINITIONS

1- Il résulte de la proposition 2.2.2 que si $\mathcal{E}$ est un échelonnement sur C alors $\mathcal{E} / \approx$ est encore un échelonnement sur C. C'est **l'ECHELONNEMENT REDUIT de $\mathcal{E}$**.

2- $\mathcal{E}$ étant un échelonnement sur C, on considère $\mathcal{E}'$ l'échelonnement formé de tous les échelons de $\mathcal{E}$ et de ceux qui s'écrivent comme composés d'un nombre fini d'échelons de $\mathcal{E}$ pour la composition des échelons notée « • ». On construit $\mathcal{E}'/\approx$ qui est **l'ECHELONNEMENT COMPLET associé à $\mathcal{E}$** (ou complété de $\mathcal{E}$).

Remarques

1- Pour un échelonnement réduit, la relation de préordre définie en 2.1.4 devient une relation d'ordre compte tenu du 3- de la proposition 2.2.2.

2- Un cas intéressant est celui où l'ordre r est lié à ρ (application sous-jacente de l'échelon $[r,R]$ défini sur C) par la relation suivante :

$$(f\ r\ g) \Leftrightarrow (f = \rho(g) \vee f = g)$$

Le fait qu'on puisse définir ainsi un ordre tient à l'idempotence de ρ (2.1.3), la preuve complète étant analogue à celle de la proposition 1.2.1. Dans ce cas précis on a le résultat suivant : $[r,R] \approx [s,S] \Leftrightarrow r = s \wedge R = S$.

L'égalité $r = s$ devant être regardée comme égalité de deux applications. En effet l'ordre r peut être décrit par : $r : C \times C \to \{0,1\}$ avec $r(f,g) = 1$ si $f\ r\ g$ et $r(f,g) = 0$ sinon.

Toujours dans ce cas précis on peut poser $\overline{[r,R]} = (r,R)$. Montrons donc le résultat annoncé ci-dessus.

Δ De $[r,R] \approx [s,S]$ on déduit $R=S$ (2.2.2 2-) et $\rho = \sigma$ (définition de l'équivalence). Or si $\rho = \sigma$ il est clair qu'on a $\forall (f,g) \in C^2$ $f\ r\ g \Leftrightarrow f\ s\ g$ et par suite $r=s$. Si $R=S$ et $r=s$ alors $\forall (f,g) \in C^2$ $f\ r\ g \Rightarrow f\ s\ g$ et d'après 2.2.3 3- on conclut $[r,R] \approx [s,S]$. ∇

3- Si un échelonnement est tel que pour tout échelon, ordre et application sous-jacente sont liés comme précédemment alors cet échelonnement est réduit.

Un cas particulièrement important d'échelonnement que nous aurons à envisager au paragraphe 3 est celui de l'échelonnement abélien dont nous donnons la définition ci-dessous.

2.2.4 ECHELONNEMENT ABELIEN

Soit $\mathcal{E}$ un échelonnement sur C, soit $[r,R] \in \mathcal{E}$ d'application sous-jacente ρ, soit $[s,S] \in \mathcal{E}$ d'application sous-jacente σ.

$\mathcal{E}$ est un **ECHELONNEMENT ABELIEN** si et seulement si :

$$\forall [r,R] \in \mathcal{E} \ \forall [s,S] \in \mathcal{E} \ \ \rho\sigma = \sigma\rho .$$

Remarques

1- Il résulte de cette définition que si $[r,R]$ et $[s,S]$ sont composables, on ne suppose pas pour autant que ce composé soit encore dans $\mathcal{E}$.

2- Si $\mathcal{E}$ est abélien, $\overline{\mathcal{E}}$ qui est le complété de $\mathcal{E}$ est encore abélien. Sur $\overline{\mathcal{E}}$ la composition notée « • » devient une loi de composition interne qui munit $\overline{\mathcal{E}} \cup \{\overline{[=,C]}\}$ d'une structure de monoïde abélien, l'unité étant alors $\overline{[=,C]}$ d'application sous-jacente Id_C. Car il est clair que $\forall [r,R] \in \mathcal{E} \quad [r,R] \bullet [=,C] = [=,C] \bullet [r,R] \approx [r,R]$.

2.3 MORPHISMES

Contrairement aux algèbres de contact, les catégories de morphismes envisageables sont ici de trois espèces différentes :

- morphismes d'échelons
- morphismes d'échelonnements
- morphismes d'échelles.

Ce sont donc ces trois types de morphismes que nous allons définir.

2.3.1 MORPHISME D'ECHELONS

Soient $[r,R]$ et $[r',R']$ deux échelons respectivement sur C et C' d'applications sous-jacentes respectives ρ et ρ'.

Soit F un foncteur de C sur C'.

F est un morphisme de $[r,R]$ sur $[r',R']$ (ce qu'on note $F:[r,R] \to [r',R']$) si et seulement si $F \circ \rho = \rho' \circ F$.

2.3.2 PROPOSITION

1- Avec les notations de 2.3.1, si F est un morphisme d'échelons tel que $F_{|C_0}$ soit une application injective alors $[r', F(R)]$ est un échelon sur la sous-catégorie $F(C)$ de C', d'application sous-jacente $\rho'_{|F(C)}$.

2- Si $F:[r,R]\to[r',R']$ et $G:[s,S]\to[s',S']$ sont deux morphismes d'échelons, on dit que $G\circ F$ est défini si et seulement si $G\circ F$ est défini comme composé de deux foncteurs et $[r',R']\approx[s,S]$. On convient alors d'identifier classe d'équivalence et représentant de cette même classe. Avec les hypothèses précédentes $G\circ F$ est alors un morphisme d'échelons, et cette composition confère à l'ensemble des morphismes d'échelons une structure de catégorie notée $\mathcal{Ech}$.

3- (Extension aux morphismes de la composition entre échelons)

Soient $F:[r,R]\to[r',R']$ et $G:[s,S]\to[s',S']$ deux morphismes d'échelons tels que les applications sous-jacentes soient (dans l'ordre où les échelons sont introduits) $\rho,\rho',\sigma,\sigma'$. Nous dirons que les morphismes d'échelons F et G sont composables si et seulement si $G\circ F = F\circ G$ (composition des foncteurs), $F\circ\sigma = \sigma\circ F$ et $G\circ\rho' = \rho'\circ G$.

Dans le cas où F et G sont composables, on note ce composé $G\bullet F$ qui est alors tel que $G\bullet F = F\bullet G = G\circ F = F\circ G$.

Si on pose $[r,R]\bullet[s,S]=[t,T]$ et $[r',R']\bullet[s',S']=[t',T']$ alors $G\bullet F:[t,T]\to[t',T']$ est un morphisme d'échelons.

Δ 1- $F_{|C_0}$ étant injective, nous avons vu en 1.4.2 que *F(C)* est une sous-catégorie de *C'*. Si $R\neq\varnothing$, il est clair que $F(R)$ est non vide. Si *f'* et *g'* sont deux morphismes de $F(C)\subset C'$ comparables pour r' alors ils ont même source et même but, $[r',R']$ étant un échelon sur *C'*. Soient f', f'_1, g', g'_1 quatre morphismes de $F(C)$ tels que l'on ait $f'\ r'\ f'_1$, $g'\ r'\ g'_1$, $f'.g'$ et $f'_1.g'_1$ définis. $[r',R']$ étant un échelon sur C' , il existe alors un unique $m'\in R'$ tel que $m'\ r'\ f'.g'$ et $m'\ r'\ f'_1.g'_1$, on en déduit alors $m'=\rho'(f'.g')=\rho'(f'_1.g'_1)$ (proposition 2.1.3 (1)). Comme f', f'_1, g', g'_1 appartiennent à $F(C)$ il existe donc f, f_1, g, g_1 dans C tels que $f'=F(f)$, $f'_1=F(f_1)$, $g'=F(g)$ et $g'_1=F(g_1)$.

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} m' &= \rho'(f'.g') \\ &= \rho'(F(f).F(g)) \\ &= \rho'(F(f.g)) && (F(C) \text{ étant une sous-catégorie}) \\ &= (\rho'\circ F)(f.g) \\ &= (F\circ\rho)(f.g) && (F \text{ étant un morphisme d'échelons}) \\ &= F(\rho(f.g)). \end{aligned}$$

Or $\rho(f.g) \in R$ d'où $m' = F(\rho(f.g)) \in F(R)$, ce qui achève de montrer que $[r', F(R)]$ est un échelon sur $F(C)$ d'application sous-jacente ρ'.

2- F et G étant deux foncteurs composables, $G \circ F$ est alors défini. Montrons que c'est un morphisme d'échelons si $[r', R'] \approx [s, S]$. On a :

$$\begin{aligned}
(G \circ F) \circ \rho &= G \circ (F \circ \rho) \\
&= G \circ (\rho' \circ F) && (F \text{ étant un morphisme d'échelons}) \\
&= G \circ (\sigma \circ F) && ([r', R'] \approx [s, S]) \\
&= (G \circ \sigma) \circ F \\
&= (\sigma' \circ G) \circ F && (G \text{ étant un morphisme d'échelons}) \\
&= \sigma' \circ (G \circ F)
\end{aligned}$$

La composition des morphismes d'échelons est évidemment associative. Si $F:[r, R] \to [r', R']$ est un tel morphisme, $Id_C : [r, R] \to [r, R]$ et $Id_{C'} : [r', R'] \to [r', R']$ sont alors respectivement (en tant que morphismes d'échelons), l'unique unité à droite et l'unique unité à gauche de F, d'où la structure de catégorie annoncée.

3- On a :

$$\begin{aligned}
(G \bullet F) \circ (\rho \circ \sigma) &= G \circ F \circ \rho \circ \sigma \\
&= G \circ \rho' \circ F \circ \sigma && (F \text{ morphisme}) \\
&= \rho' \circ G \circ F \circ \sigma && (\text{hypothèse}) \\
&= \rho' \circ G \circ \sigma \circ F && (\text{hypothèse}) \\
&= \rho' \circ \sigma' \circ G \circ F && (G \text{ morphisme}) \\
&= (\rho' \circ \sigma') \circ (G \bullet F)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ∇

2.3.3 MORPHISME D'ECHELONNEMENTS

Soient $\mathcal{E}$ un échelonnement sur C et $\mathcal{E}'$ un échelonnement sur C', on dit que l'application F: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme d'échelonnements si et seulement si

(1) $\forall [r, R] \in \mathcal{E}$ $F:[r, R] \to F([r, R])$ est un morphisme d'échelons, et

(2) $\forall [r, R] \in \mathcal{E}$ $\forall [s, S] \in \mathcal{E}'$ si $[r, R] \bullet [s, S]$ est défini, alors $F([r, R]) \bullet F([s, S])$ est défini et égal à $F([r, R] \bullet [s, S])$.

2.3.4 PROPOSITION

1- Avec les notations précédentes, si F: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme d'échelonnements alors $F(\mathcal{E})$ est un échelonnement sur C'.

2- Si F: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et G: $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ sont deux morphismes d'échelonnements alors $G \circ F$ est un morphisme d'échelonnements. Les morphismes d'échelonnements forment alors pour la composition précédente une catégorie notée $\mathcal{E}\mathcal{ch}$.

Δ 1- $\mathcal{E}$ étant un ensemble non vide d'échelons sur C, il est clair que $F(\mathcal{E})$ est un ensemble non vide d'échelons sur C'.

2- Soit $[r,R] \in \mathcal{E}$, posons $F([r,R]) = [r',R'] \in \mathcal{E}'$. On a par hypothèse $F:[r,R] \to [r',R']$ et $G:[r',R'] \to G([r',R']) = (G \circ F)([r,R])$ qui sont deux morphismes d'échelons évidemment composables au sens de 2.3.2 , il en résulte que $G \circ F$ est un morphisme d'échelons.

F et G étant deux morphismes d'échelonnements, si $[r,R] \bullet [s,S]$ est défini on a alors $F([r,R]) \bullet F([s,S])$ défini et égal à $F([r,R] \bullet [s,S])$, puis $(G \circ F)([r,R]) \bullet (G \circ F)([s,S])$ défini et égal à :

$$G(F([r,R])) \bullet G(F([s,S])) = G(F([r,R] \bullet [s,S])) = (G \circ F)([r,R] \bullet [s,S]) .$$

Ce qui achève de montrer que $G \circ F$ est un morphisme d'échelonnements. L'associativité étant évidente. Si F est un morphisme d'échelonnements, il a pour unité à droite Id_C : $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et pour unité à gauche $Id_{C'}$: $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$ d'où la structure de catégorie annoncée. ∇

2.3.5 MORPHISME D'ECHELLES

Soient $\mathcal{E}$ une échelle sur C et $\mathcal{E}'$ une échelle sur C'. F est un morphisme d'échelles de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ si et seulement si:

(1) F: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme d'échelonnements, et
(2) $\forall [r,R] \in \mathcal{E}\ \forall [s,S] \in \mathcal{E}\quad [r,R] \prec [s,S] \Rightarrow F([r,R]) \prec F([s,S])$.

On démontre sans difficulté le résultat suivant.

2.3.6 PROPOSITION

1- Avec les notations précédentes, si F: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme d'échelles, $F(\mathcal{E})$ est une échelle sur C'.

2- Si F: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et G: $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ sont deux morphismes d'échelles alors $G \circ F$ est un morphisme d'échelles et cette composition confère à l'ensemble des morphismes d'échelles une structure de catégorie notée $\mathcal{Ecl}$.

3 EQUIVALENCE DES POINTS DE VUE

Dans ce chapitre nous allons préciser les liens existant entre algèbre de contact et échelonnement, autrement dit, quel échelonnement associer à une algèbre de contact donnée ? Et réciproquement, quelle algèbre de contact associer à un échelonnement donné ? La proposition qui suit donne un premier élément de réponse.

3.1 ECHELONNEMENT ASSOCIE A UNE ALGEBRE DE CONTACT

3.1.1 PROPOSITION

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact sur C et $\varphi \in \Phi$ idempotent pour la structure d'algèbre de contact. Alors $[\varphi,\varphi(C)]$ est un échelon sur C d'application sous-jacente $k(\varphi,.)$ où φ est l'ordre défini en 1.2.1.

Δ $\varphi(C)$ est évidemment une partie non vide de C . Si f et g sont comparables pour l'ordre défini par φ en 1.2.1 alors f et g ont même source et même but d'après la proposition 1.1.3 (stabilité de $C(e,e')$). Supposons qu'on ait $f\ \varphi\ f'$, $g\ \varphi\ g'$ et $f.g$, $f'.g'$ définis alors $\varphi f'.\varphi g'$, $\varphi f'.g'$, $f'.\varphi g'$ sont définis et on a : $\varphi(f.g)\ \varphi\ f.g$.

Par ailleurs supposons que l'on ait $(f\ \varphi\ f')\wedge(g\ \varphi\ g')$ alors ceci équivaut à $(f=f'\wedge g=\varphi g')\vee(f=f'\wedge g=g')\vee(f=\varphi f'\wedge g=\varphi g')\vee(f=\varphi f'\wedge g=g')$, d'où l'on déduit successivement : $f.g=f'.\varphi g'$, $f.g=f'.g'$, $f.g=\varphi f'.\varphi g'$, $f.g=\varphi f'.g'$ puis $\varphi(f.g)=\varphi(f'.g')$ (proposition 1.1.3) d'où $\varphi(f.g)\ \varphi\ f'.g'$. On a donc $\varphi(f.g)\in\varphi(C)$ qui vérifie $\varphi(f.g)\ \varphi\ f.g$ et $\varphi(f.g)\ \varphi\ f'.g'$. Supposons qu'il existe $h\in\varphi(C)$ vérifiant $h\ \varphi\ f.g$ et $h\ \varphi\ f'.g'$, on a alors $\varphi h=\varphi(f.g)$ (proposition 1.2.1 , remarque 2-) or $h\in\varphi(C)$ donc $h=\varphi h=\varphi(f.g)$ d'où l'unicité. ∇

3.1.2. PROPOSITION

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact complète et idempotente. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des échelons sur C de la forme $[\varphi,\varphi(C)]$. L'application $F:(\Phi,.)\to(\mathcal{E},\bullet)$ définie par $F(\varphi)=[\varphi,\varphi(C)]$ est alors un isomorphisme de monoïdes abéliens.

Les notations utilisées ici sont en accord avec celles utilisées dans la remarque 2- du paragraphe 2.2.3, compte tenu de la spécificité de l'ordre et de l'application sous-jacente associée.

Δ Par construction F est surjective. De plus on a ici $[\varphi,\varphi(C)]=\overline{[\varphi,\varphi(C)]}$, ce qu'on note $(\varphi,\varphi(C))$. Il résulte de là que F est injective. En effet $F(\varphi)=F(\psi)$ entraîne $[\varphi,\varphi(C)]=[\psi,\psi(C)]$, soit $\varphi=\psi$. De plus, quelque soit $\varphi\in\Phi$ et quelque soit $\psi\in\Psi$, $[\varphi,\varphi(C)]\bullet[\psi,\psi(C)]$ est défini car l'algèbre de contact est abélienne. Si on pose $[\varphi,\varphi(C)]\bullet[\psi,\psi(C)]=[t,T]$, dont l'application sous-jacente est notée τ, on a $\tau=k(\varphi,.)\circ k(\psi,.)=\varphi\psi$ car par hypothèse l'algèbre est complète. On a donc $[\varphi,\varphi(C)]\bullet[\psi,\psi(C)]\approx[\varphi\psi,T]$. Or $T=(\varphi\psi)(C)=\varphi(C)\cap\psi(C)$ d'où l'égalité qui s'en suit $(\varphi,\varphi(C))\bullet(\psi,\psi(C))=(\varphi\psi,(\varphi\psi)(C))$, ce qui achève de montrer que c'est un isomorphisme. ∇

3.2 ALGEBRE DE CONTACT ASSOCIEE A UN ECHELONNEMENT

3.2.1 PROPOSITION

$\mathcal{E}$ étant un échelonnement complet sur C. A tout échelon $[r,R]=\overline{[r,R]}$ (car $\mathcal{E}$ est complet) on associe son application sous-jacente ρ. Soit Φ l'ensemble de toutes ces applications sous-jacentes, si de plus $\mathcal{E}$ est abélien alors $G:\left(\mathcal{E}\cup\{[=,C]\},\bullet\right)\to(\Phi,\circ)$, définie par $G([r,R])=\rho$, est un isomorphisme de monoïdes abéliens.

Δ Par construction G est surjective, si $G([r,R])=G([r',R'])$ alors $\rho=\rho'$ et donc $[r,R]\approx[r',R']$, mais ici $\mathcal{E}$ étant complet $[r,R]=[r',R']$ d'où G injective. Si on pose $[r,R]\bullet[s,S]=[t,T]$, $\tau=\rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho$ on a alors :

$G([r,R]\bullet[s,S])=G([t,T])=\rho\circ\sigma=G([r,R])\bullet G([s,S])$, d'où le résultat annoncé. ∇

3.3 CONCLUSIONS

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact. On a donc, d'aprés ce qui précède, deux cas :

(1)- si $[r,R]$ est d'application sous-jacente ρ,

$[r,R]\mapsto\rho\mapsto[\rho,\rho(C)]$ avec $\rho=F([r,R])$ et $[\rho,\rho(C)]=G(\rho)$ de plus l'ordre ρ est défini par $(f\ \rho\ g)\Leftrightarrow(f=\rho(g)\ \vee\ f=g)$,

(2)- si $\varphi \in \Phi$,

$\varphi \mapsto [\varphi, \varphi(C)] \mapsto \varphi$ avec $[\varphi, \varphi(C)] = F(\varphi)$ et $\varphi = G([\varphi, \varphi(C)])$.

Dans le cas (1) $\forall f \in R \; \forall g \in C \;\; f \; r \; g \Leftrightarrow f \; \rho \; g$ et si $f \notin R$ on ne peut conclure. Néanmoins $[r, R]$ et $[\rho, \rho(C)]$ ayant même application sous-jacente ρ, on a donc $[r, R] \approx [\rho, \rho(C)]$. Ce qui entraîne (dans le cas d'un échelonnement complet) que G et F sont inverses l'un de l'autre. Autrement dit, si on prend en compte les compositions définies sur l'échelonnement et sur Φ, on a équivalence des points de vue entre algèbre de contact complète abélienne et échelonnement complet abélien.

Plus généralement, $\mathcal{E}$ étant un échelonnement quelconque réduit et Φ l'ensemble de ses applications sous-jacentes, si on considère l'application $G: \mathcal{E} \to \Phi$ définie par $\overline{[r, R]} = [r, R] \mapsto \rho$, et si on pose $G([r', R']) = \rho'$, on dira que $\rho \circ \rho'$ est défini si et seulement si $[r, R] \bullet [r', R']$ est défini et est dans $\mathcal{E}$. Dans ce cas on a alors $\rho \circ \rho' = \rho' \circ \rho$ de plus $\mathcal{E}$ et Φ sont deux graphes multiplicatifs. G devient alors un néofoncteur inversible dont l'inverse est encore F ($\mathcal{E}$ étant réduit).

Pour reprendre la terminologie de Charles Ehresmann, les remarques précédentes conduisent à la notion de **NEOALGEBRE DE CONTACT** où à la catégorie Φ est substitué le graphe multiplicatif Φ ; les axiomes (1) (2) et (3) de la définition 1.1.1 étant encore satisfaits.

4 CALCUL DES JETS

4.1 JETS DE TYPE φ

4.1.1 DEFINITION

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact et soit $\varphi \in \Phi$. La relation suivante (qui dépend du choix de φ) définie par : $(f \approx f') \Leftrightarrow (\varphi f = \varphi f')$ est une relation d'équivalence sur C et la classe de f est notée $J^{\varphi} f$; c'est le **JET DE TYPE φ DE f.**

4.1.2 PROPOSITION

Avec les notations précédentes, si on pose $\forall (f,g) \in C*C \; J^{\varphi} f . J^{\varphi} g = J^{\varphi}(f.g)$, $C/\approx$ est alors une catégorie notée $J^{\varphi}C$ et $J^{\varphi}: C \to J^{\varphi}C$ est un foncteur.

Δ La composition précédente entre jets est indépendante des représentants choisis. En effet si $f' \in J^{\varphi} f$ et $g' \in J^{\varphi} g$, on a $\varphi f' = \varphi f$ et $\varphi g' = \varphi g$, il en résulte $\varphi(f.g) = \varphi(\varphi f . \varphi g) = \varphi(\varphi f' . \varphi g') = \varphi(f'.g')$ d'où $f'.g' \in J^{\varphi}(f.g)$. Si on note α^{φ} et β^{φ} les rétractions source et but de $J^{\varphi}(C)$ on a $\alpha^{\varphi}(J^{\varphi} f) = J^{\varphi}\alpha(f)$ et $\beta^{\varphi}(J^{\varphi} f) = J^{\varphi}\beta(f)$. Par ailleurs si on a $J^{\varphi} e = J^{\varphi} e'$, on en déduit $\varphi e = \varphi e'$ puis $e = e'$ (en raison de 1.1.3 1-), ce qui prouve que $J^{\varphi}{}_{|C_0}$ est injectif et achève la démonstration. ∇

4.1.3 EXEMPLES

Dans ce qui suit les numéros renvoient aux exemples cités en 1.1.2 comme exemples d'algèbres de contact.

1- $J^{\varphi} f = \varphi^{-1}(\{\varphi f\})$.

2- $J^{\varphi} f = \{g \in C / \chi_{\varphi} . f = \chi_{\varphi} . g\}$.

3- $J^{\varphi} P = \{Q \in C / \text{ordre}(P - Q) > \varphi\}$.

4- $J^{\varphi} P = \{Q \in C / \text{ordre}(P - Q) > \varphi\}$.

5- $J^{\varphi_n} f = \{g \in C / f - \varphi_n f = g - \varphi_n g = \circ(\varphi_n)\}$.

6- Si φ est premier on montre que $J^{\varphi}\varphi$ est l'ensemble des multiples de φ, plus généralement on montre $J^{\varphi} n = (\varphi \wedge n).\{k \in N^* / q \wedge k = 1\}$ où q est défini par $\varphi = (\varphi \wedge n).q$ et $a \wedge b = \text{pgcd}(a,b)$.

7- $J^{\varphi}f = \{g \in \mathcal{P}(X) / f \subset g\}$.

8- $J^{\varphi}(J^{l}(f,x)) = J^{\varphi}_{x}f$ est le jet infinitésimal d'ordre φ de f en x, tel qu'il a été défini par Charles Ehresmann.

4.1.4 PROPOSITION

Pour tout f de C, pour tout φ , φ' de Φ tels que $\varphi.'\varphi$ soit défini on a :

1- $J^{\varphi}f \subset J^{\varphi'\varphi}f$,

2- si on note Φ_{γ} la sous-catégorie des inversibles de Φ et si $\varphi' \in \Phi_{\gamma}$ alors $J^{\varphi}f = J^{\varphi'\varphi}f$,

3- si φ est idempotent $J^{\varphi}\varphi f = J^{\varphi}f$,

4- si $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$ alors $J^{\varphi}f \cup J^{\varphi'}f \subset J^{\varphi\varphi'}f$,

5- $J^{\varphi'.\varphi}f = (k(\varphi,.))^{-1}\left(J^{\varphi'}\varphi f\right)$.

Δ 1- Pour tout f' de C on a : $f' \in J^{\varphi}f \Leftrightarrow \varphi f' = \varphi f$

$\Rightarrow \varphi'(\varphi f') = \varphi'(\varphi f)$

$\Rightarrow (\varphi'.\varphi)f' = (\varphi'.\varphi)f$

$\Leftrightarrow f' \in J^{\varphi'\varphi}f$,

d'où $J^{\varphi}f \subset J^{\varphi'\varphi}f$.

2- Pour tout f' de C on a : $f' \in J^{\varphi}f \Leftrightarrow \varphi f' = \varphi f$

$\Leftrightarrow \varphi'(\varphi f') = \varphi'(\varphi f)$

$\Leftrightarrow (\varphi'.\varphi)f' = (\varphi'.\varphi)f$

$\Leftrightarrow f' \in J^{\varphi'\varphi}f$,

d'où $J^{\varphi}f = J^{\varphi'\varphi}f$.

3- Pour tout f' de C on a : $f' \in J^{\varphi}\varphi f \Leftrightarrow \varphi f' = \varphi(\varphi f)$

$\Leftrightarrow \varphi f' = \varphi f$

$\Leftrightarrow f' \in J^{\varphi}f$, d'où $J^{\varphi}\varphi f = J^{\varphi}f$.

4- Pour tout f' de C : $f' \in J^{\varphi}f \cup J^{\varphi'}f \Leftrightarrow \varphi f' = \varphi f \vee \varphi' f' = \varphi' f$

$\Rightarrow \varphi'(\varphi f') = \varphi'(\varphi f) \vee \varphi(\varphi' f') = \varphi(\varphi' f)$

$\Leftrightarrow (\varphi'\varphi)f' = (\varphi'\varphi)f \vee (\varphi\varphi')f' = (\varphi\varphi')f$

$\Leftrightarrow (\varphi'\varphi)f' = (\varphi'\varphi)f$ (car $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$)

$\Leftrightarrow f' \in J^{\varphi'\varphi}f$,

d'où $J^{\varphi}f \cup J^{\varphi'}f \subset J^{\varphi\varphi'}f$.

5- Pour tout f' de C on a : $f' \in J^{\varphi' \varphi} f \Leftrightarrow (\varphi'.\varphi) f' = (\varphi'.\varphi) f$

$\Leftrightarrow \varphi f' \in J^{\varphi'} \varphi f$

$\Leftrightarrow f' \in (k(\varphi,.))^{-1} \left(J^{\varphi'} \varphi f \right)$,

d'où $J^{\varphi' \varphi} f = (k(\varphi,.))^{-1} \left(J^{\varphi'} \varphi f \right)$. ∇

Il y a plusieurs façons d'étendre la composition des jets. Soit en définissant deux actions de C sur $J^{\Phi} C = \bigcup_{\varphi \in \Phi} J^{\varphi} C$ (l'une à droite, l'autre à gauche), soit en étendant aux parties de C la composition définie entre morphismes de C. Ce sont ces deux points de vue que nous allons développer.

4.2 EXTENSIONS

4.2.1 ACTION DE *C*

On définit deux actions de C sur $J^{\Phi} C$:

1- à gauche, $C \times J^{\Phi} C \to J^{\Phi} C$ définie par $(g, J^{\varphi} f) \mapsto g.J^{\varphi} f = J^{\varphi}(g.f)$ si et seulement si $(g, f) \in C * C$,

2- à droite, $(J^{\Phi} C) \times C \to J^{\Phi} C$ définie par $(J^{\varphi} g, f) \mapsto (J^{\varphi} g).f = J^{\varphi}(g.f)$ si et seulement si $(g, f) \in C * C$.

On remarque que les notations utilisées n'introduisent aucune distinction entre composition dans C et composition dans $J^{\Phi} C$, l'abus de notation étant en l'occurrence sans conséquences.

4.2.2 EXTENSION AUX PARTIES

A et B étant deux parties non vides de C, on étend aux parties de C la composition entre morphismes de C en posant :

$$A \bullet B = \left\{ f \in C / \exists (a,b) \in A \times B \text{ tel que } \alpha(a) = \beta(b) \text{ et } f = a.b \right\}.$$

Si on note $A * B$ l'ensemble des couples composables de $A \times B$, $A \bullet B$ est non vide si et seulement si $A * B$ est non vide.

En particulier si $(f.g) \in C * C$ on pose $(J^{\varphi} f) \bullet \{g\} = (J^{\varphi} f) \bullet g$ et $\{f\} \bullet J^{\varphi} g = f \bullet J^{\varphi} g$. Ces dernières définitions sont à distinguer des actions de C sur $J^{\Phi} C$.

La même distinction est à opérer entre $J^{\varphi}f.J^{\varphi}g$ et $J^{\varphi}f \bullet J^{\varphi}g$ car on a seulement $J^{\varphi}f \bullet J^{\varphi}g \subset J^{\varphi}(f.g)$, par contre on a $J^{\varphi}f.J^{\varphi}g = Sat\left(J^{\varphi}f \bullet J^{\varphi}g\right) = \bigcup_{h \in J^{\varphi}f \bullet J^{\varphi}g} J^{\varphi}h$.

PROPOSITION

On a les résultats suivants :

1- si $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$ et $(f.g) \in C*C$, $J^{\varphi}f \bullet J^{\varphi'}g \subset J^{\varphi\,\varphi'}(f.g)$,
2- si $g \in C_{\gamma}$ et $(f.g) \in C*C$, $(J^{\varphi}f) \bullet g = J^{\varphi}(f.g)$,
3- si $f \in C_{\gamma}$ et $(f.g) \in C*C$, $f \bullet J^{\varphi}g = J^{\varphi}(f.g)$.

Δ 1- Pour tout h de $J^{\varphi}f \bullet J^{\varphi'}g$ on a $h = f'.g'$ avec $\varphi f' = \varphi f$ et $\varphi' g' = \varphi' g$ d'où les relations qui suivent :

$$\begin{aligned}(\varphi.\varphi')h &= (\varphi.\varphi')(f'.g') \\ &= (\varphi.\varphi')\left((\varphi.\varphi')f'.(\varphi.\varphi')g'\right) \\ &= (\varphi.\varphi')\left((\varphi'.\varphi)f'.(\varphi.\varphi')g'\right) \\ &= (\varphi.\varphi')\left((\varphi'(\varphi f').(\varphi(\varphi' g'))\right) \\ &= (\varphi.\varphi')\left((\varphi'(\varphi f).(\varphi(\varphi' g))\right) \\ &= (\varphi.\varphi')\left((\varphi.\varphi')f.(\varphi.\varphi')g\right) \\ &= (\varphi.\varphi')(f.g),\end{aligned}$$

d'où $J^{\varphi}f \bullet J^{\varphi'}g \subset J^{\varphi\,\varphi'}(f.g)$.

2- L'hypothèse se traduit par $h \in J^{\varphi}f \bullet g \Leftrightarrow h = f'.g$ (avec $\varphi f' = \varphi f$) d'où l'on tire $\varphi h = \varphi(\varphi f'.\varphi g) = \varphi(\varphi f.\varphi g) = \varphi(f.g)$ ce qui signifie $h \in J^{\varphi}(f.g)$. D'où la conclusion $(J^{\varphi}f) \bullet g \subset J^{\varphi}(f.g)$. On peut désormais écrire en remplaçant dans cette dernière relation f par $f.g$ et g par g^{-1} :

$$\begin{aligned}&\left(J^{\varphi}(f.g)\right) \bullet g^{-1} \subset J^{\varphi}((f.g).g^{-1}) = J^{\varphi}(f.(g.g^{-1})) = J^{\varphi}f \\ &\Rightarrow \left(J^{\varphi}(f.g)\right) \bullet g^{-1} \subset J^{\varphi}f \\ &\Rightarrow \left((J^{\varphi}(f.g)) \bullet g^{-1}\right) \bullet g \subset (J^{\varphi}f) \bullet g \\ &\Rightarrow \left(J^{\varphi}(f.g)\right) \bullet (g^{-1} \bullet g) \subset \left(J^{\varphi}f\right) \bullet g \\ &\Leftrightarrow J^{\varphi}(f.g) \subset (J^{\varphi}f) \bullet g.\end{aligned}$$

Ce dernier résultat joint au premier permet de conclure à l'égalité :

$$(J^{\varphi}f) \bullet g = J^{\varphi}(f.g).$$

3- Ce point se démontre de manière analogue à 2-. ∇

4.2.3 JETS D'UNE PARTIE DE C

Soit A une partie non vide de C. On pose :

$$J^{\varphi}A = \{h \in C / \exists a \in A \ \varphi h = \varphi a\} = \bigcup_{a \in A} J^{\varphi}a = Sat\, A,$$

$$\text{et} \quad \varphi(A) = k(\varphi,.)(A) = \{f \in C / \exists a \in A \ f = \varphi a\}.$$

En particulier on peut donner ainsi une signification à $J^{\varphi'}(J^{\varphi}f)$. On énonce les résultats suivants.

PROPOSITION

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact, pour tout φ, φ' de Φ et pour tout $f \in C$, dans l'hypothèse où tous les composés sont définis, on a :

1- $J^{\varphi}(J^{\varphi}f) = J^{\varphi}f$, (noter que φ n'est pas nécessairement idempotent)
2- si $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$, $J^{\varphi'}(J^{\varphi}f) \subset J^{\varphi'\varphi}f$,
3- si φ est idempotent, et A une partie non vide de C $J^{\varphi}(\varphi(A)) = J^{\varphi}A$,
4- si φ' est idempotent, $J^{\varphi\varphi'}f \subset J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi'f))$,
5- si $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$ et φ' est idempotent $J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi'f)) = J^{\varphi\varphi'}(\varphi'f)$,
6- si $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$ et si φ , φ' sont idempotents $J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi'f)) = J^{\varphi\varphi'}f$,
7- si $f \in \varphi(C) \cap \varphi'(C)$, $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$ et φ et φ' sont idempotents alors
$J^{\varphi\varphi'}f = J^{\varphi}(J^{\varphi'}f)$.

Δ 1- On a $J^{\varphi}(J^{\varphi}f) = Sat(J^{\varphi}f) = J^{\varphi}f$ en raison de la définition même du saturé.

2- Pour tout $h \in J^{\varphi'}(J^{\varphi}f)$ on a $\varphi'h = \varphi'f'$ avec $f' \in J^{\varphi}f$. On en déduit donc $(\varphi.\varphi')h = (\varphi.\varphi')f' = (\varphi'.\varphi)f' = \varphi'(\varphi f') = \varphi'(\varphi f) = (\varphi'.\varphi)f$ d'où $h \in J^{\varphi'\varphi}f$, puis l'inclusion $J^{\varphi'}(J^{\varphi}f) \subset J^{\varphi'\varphi}f$.

3- On a $J^{\varphi}A = \bigcup_{a \in A} J^{\varphi}a = \bigcup_{a \in A} J^{\varphi}(\varphi a) = \bigcup_{b \in \varphi(A)} J^{\varphi}b = J^{\varphi}\varphi(A)$, car φ étant idempotent on a (4.1.4 3-) $J^{\varphi}\varphi f = J^{\varphi}f$. On pose ensuite $b = \varphi a$ d'où le résultat.

4- Pour tout $h \in J^{\varphi\varphi'}f$ on a :

$$(\varphi.\varphi')h = (\varphi.\varphi')f \Leftrightarrow \varphi(\varphi'h) = \varphi(\varphi'f) \Leftrightarrow \varphi'h \in J^{\varphi}(\varphi'f), \qquad \text{or}$$

$\varphi'(\varphi'h) = \varphi'h$ donc $h \in J^{\varphi'}(\varphi'h)$, d'où $h \in J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi'f))$ puis $J^{\varphi\varphi'}f \subset J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi'f))$.

5- De 2- on tire $J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi' f)) \subset J^{\varphi'\varphi}(\varphi' f)$, de 4-, de l'idempotence de φ' et de $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$ on tire $J^{\varphi'\varphi}(\varphi' f) \subset J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi' f))$ d'où l'égalité.

6- De 5- on déduit $J^{\varphi'}(J^{\varphi}(\varphi' f)) = J^{\varphi\varphi'}(\varphi' f)$. On montre ensuite $J^{\varphi\varphi'}(\varphi' f) = J^{\varphi\varphi'} f$ (ce qui se déduit sans difficulté de $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$ et de l'idempotence).

7- Se démontre sans difficulté à l'aide des résultats précédents. ∇

4.3 EXTENSIONS D'ORDRE SUPERIEUR DE (k,Φ,C)

4.3.1 EXTENSION D'ORDRE 1

(k,Φ,C) étant un algèbre de contact, nous allons examiner la possibilité de construire une néoalgèbre de contact sur $\mathcal{P}(C)$ où $J^{(1)}\Phi$ sera le graphe multiplicatif opèrant sur $\mathcal{P}(C)$ muni de sa structure de monoïde (pour la composition notée « $\bullet$ ») d'unité C_0.

Pour tout $\varphi \in \Phi$ on a le foncteur $J^{\varphi} : C \to J^{\varphi}C$. On notera encore J^{φ} l'application $J^{\varphi} : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C)$ définie en 4.2.3. Du fait de la composition des applications on a $\forall(\varphi,\varphi') \in \Phi^2 \ \forall A \in \mathcal{P}(C) \ (J^{\varphi} \circ J^{\varphi'})(A) = J^{\varphi}(J^{\varphi'}(A))$, en particulier $J^{\varphi}(\varnothing) = \varnothing$. La condition (1) de 1.1.1 est donc satisfaite. $\mathcal{P}(C)$ étant un monoïde, la condition (2) de 1.1.1 est évidemment satisfaite.

Pour tout $\varphi \in \Phi$, pour tout A et pour tout B de $\mathcal{P}(C)$ montrons qu'on a $J^{\varphi}(A \bullet B) = J^{\varphi}((J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B))$.

Δ Supposons $A \bullet B \neq \varnothing$. Pour tout $h' \in J^{\varphi}(A \bullet B)$ on a $\varphi h' = \varphi(a.b) = \varphi(\varphi a.\varphi b)$ avec $(a,b) \in A * B$. Soit $a' \in J^{\varphi}a$ et $b' \in J^{\varphi}b$, on a donc $\varphi a' = \varphi a$ et $\varphi b' = \varphi b$, or $J^{\varphi}a \subset J^{\varphi}A$ et $J^{\varphi}b \subset J^{\varphi}B$. Comme de plus on a $a'.b' \in (J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B)$ et $\varphi h' = \varphi(\varphi a'.\varphi b') = \varphi(a'.b')$ on en déduit alors $h' \in J^{\varphi}((J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B))$ puis finalement $J^{\varphi}(A \bullet B) \subset J^{\varphi}((J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B))$.

Pour tout $h' \in J^{\varphi}((J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B))$ on a $\varphi h' = \varphi h$ avec $h \in (J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B)$, soit encore $h = a'.b'$ avec $a' \in J^{\varphi}a$ et $b' \in J^{\varphi}b$. $a'.b'$ étant défini, a' et $:b'$ appartenant respectivement à $J^{\varphi}A$ et $J^{\varphi}B$, il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tel que $a' \in J^{\varphi}a$ et $b' \in J^{\varphi}b$ avec $\varphi a' = \varphi a$ et $\varphi b' = \varphi b$. Par suite on a les égalités $\varphi h' = \varphi(a'.b') = \varphi(\varphi a'.\varphi b') = \varphi(\varphi a.\varphi b) = \varphi(a.b)$, de $a.b \in A \bullet B$ et $\varphi h' = \varphi(a.b)$ on tire $h' \in J^{\varphi}(a.b) \subset J^{\varphi}(A \bullet B)$ d'où $J^{\varphi}((J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B)) \subset J^{\varphi}(A \bullet B)$ puis le résultat annoncé.

Si $A \bullet B = \varnothing$, cela signifie que $A * B = (A \times B) \cap (C * C) = \varnothing$ ce qui revient à dire que pour tout (a,b) de $A \times B$ $a.b$ est non défini. En raison de 1.1.1 (2) et par contraposition $\varphi a.\varphi b$ est alors non défini et donc $(J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B) = \varnothing$. Dans ce cas on a encore $J^{\varphi}(A \bullet B) = J^{\varphi}((J^{\varphi}A) \bullet (J^{\varphi}B))$. ∇

Dans la définition de $J^{(1)}\Phi$ il importe de considérer des composés tels que $J^{\varphi} \circ J^{\varphi'} = J^{\psi}$ où φ, φ', ψ appartiennent à Φ, ou des composés tels que $J^{\varphi} \circ J^{\varphi'} = J^{\varphi'} \circ J^{\varphi}$. Dans les deux cas les points (1) et (2) de 1.1.1 sont acquis. Dans le premier cas le point (3) est évidemment satisfait, dans le second cas on a essentiellement en raison de la commutativité de $J^{\varphi} \circ J^{\varphi'}$:

$$\begin{aligned}
(J^{\varphi} \circ J^{\varphi'})(A \bullet B) &= J^{\varphi}(J^{\varphi'}(A \bullet B)) \\
&= J^{\varphi}(J^{\varphi'}(J^{\varphi'}A \bullet J^{\varphi'}B)) \\
&= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(J^{\varphi'}A \bullet J^{\varphi'}B)) \\
&= J^{\varphi'}(J^{\varphi}((J^{\varphi}(J^{\varphi'}A)) \bullet (J^{\varphi}(J^{\varphi'}B)))) \\
&= (J^{\varphi'} \circ J^{\varphi})((J^{\varphi} \circ J^{\varphi'})(A) \bullet (J^{\varphi} \circ J^{\varphi'})(B)) \\
&= (J^{\varphi} \circ J^{\varphi'})((J^{\varphi} \circ J^{\varphi'})(A) \bullet (J^{\varphi} \circ J^{\varphi'})(B))
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $J^{\varphi} \circ J^{\varphi'}$ vérifie encore (3) de 1.1.1 .

Il est à noter que nous avons déjà par deux fois constaté que la commutativité était indispensable ; dans le chapitre 1 au moment de la construction de l'algèbre de contact complète et au chapitre 2 pour la composition des échelons.

On peut s'interroger sur la nécessité de choisir l'algèbre de contact abélienne. Pour avoir un élément de réponse il suffit de considérer $A = \{a\}$ et de supposer $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$. Supposons de plus que $J^{\varphi}A = \{a, a'\}$ et $J^{\varphi'}A = \{a, a'', a'''\}$ alors on aura $J^{\varphi'}(J^{\varphi}A) = (J^{\varphi'}a) \cup (J^{\varphi'}a')$ et $J^{\varphi}(J^{\varphi'}A) = (J^{\varphi'}a) \cup (J^{\varphi'}a'') \cup (J^{\varphi'}a''')$. Rien n'impose que l'on ait $J^{\varphi}(J^{\varphi'}A) = J^{\varphi'}(J^{\varphi}A)$ même si on a $\varphi.\varphi' = \varphi'.\varphi$. Il n'est donc pas nécessaire de supposer l'algèbre (k, Φ, C) abélienne.

On considère donc $J^{(1)}\Phi$ engendré par toutes les applications de la forme J^{φ} où $\varphi \in \Phi$ satisfaisant l'une des deux conditions récurrentes suivantes.

1- $\forall F \in J^{(1)}\Phi \ \forall G \in J^{(1)}\Phi \ \ F \circ G \in J^{(1)}\Phi$ si $\exists \psi \in \Phi \ \ F \circ G = J^{\psi}$
2- $\forall F \in J^{(1)}\Phi \ \forall G \in J^{(1)}\Phi \ \ F \circ G \in J^{(1)}\Phi$ si $F \circ G = G \circ F$

$J^{(1)}\Phi$ devient alors un graphe multiplicatif ; on peut désormais énoncer le théorème.

THEOREME

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact, $J^{(1)}\Phi$ le graphe multiplicatif défini ci-dessus et $k':J^{(1)}\Phi\times\mathcal{P}(C)\to\mathcal{P}(C)$ l'application définie par $k'(F,A)=F(A)$ alors $(k',J^{(1)}\Phi,\mathcal{P}(C))$ est une néoalgèbre de contact idempotente.

Δ Quelque soit $A\in\mathcal{P}(C)$ on a évidemment $(F\circ G)(A)=F(G(A))$ d'où (1) de 1.1.1. Comme $(\mathcal{P}(C),\bullet)$ est un monoïde (2) de 1.1.1 est également vérifié. Quant à (3), deux cas ; ou bien $F\circ G=J^{\psi}$ et dans ce cas (3) est vérifié, ou bien $F\circ G=G\circ F$ et dans ce cas on montre facilement que $F\circ G$ vérifie (3) en reprenant l'argumentation développée plus haut pour $J^{\varphi}\circ J^{\varphi'}$. En ce qui concerne l'idempotence, il suffit de s'en assurer pour $J^{\varphi}\circ J^{\varphi'}$ quand $J^{\varphi}\circ J^{\varphi'}=J^{\varphi'}\circ J^{\varphi}$, ce qui ne présente aucune difficulté. ∇

Bien que (k,Φ,C) ne soit pas nécessairement idempotente $(k',J^{(1)}\Phi,\mathcal{P}(C))$ devient une néoalgèbre de contact idempotente.

En particulier si $A=\{f\}$ et $B=\{g\}$ et $f.g$ défini on a $J^{\varphi}(\{f\}\bullet\{g\})=J^{\varphi}\left(J^{\varphi}(\{f\})\bullet J^{\varphi}(\{g\})\right)$. Si on identifie $\{f\}\bullet\{g\}$ avec $f.g$ on a (attention aux compositions qui ici sont différentes) $J^{\varphi}(f.g)=J^{\varphi}(J^{\varphi}f\bullet J^{\varphi}g)$. Cependant on a toujours $J^{\varphi}(f.g)=(J^{\varphi}f).(J^{\varphi}g)=J^{\varphi}(J^{\varphi}f\bullet J^{\varphi}g)=Sat(J^{\varphi}f\bullet J^{\varphi}g)$.

4.3.2 EXTENSION D'ORDRE *n*

On peut désormais réitérer la construction précédente en posant :

$$k^{(0)}=k\ ,\ J^{(0)}\Phi=\Phi\ ,\ \mathcal{P}^{(0)}(C)=C\text{ ,puis }k^{(1)}=k'\text{ et }\mathcal{P}^{(1)}(C)=\mathcal{P}(C).$$

Dès lors pour tout entier $n\geq 1$ on pose :

$$J^{(n+1)}\Phi=J^{(1)}(J^{(n)}\Phi)\ ,\ \mathcal{P}^{(n+1)}(C)=\mathcal{P}(\mathcal{P}^{(n)}(C))\ ,$$

et l'application associée

$$k^{(n+1)}:J^{(n+1)}\Phi\times\mathcal{P}^{(n+1)}(C)\to\mathcal{P}^{(n+1)}(C).$$

On notera $\left(k^{(n)},J^{(n)}\Phi,\mathcal{P}^{(n)}(C)\right)=(k,\Phi,C)^{(n)}$

la néoalgèbre de contact qui est **L'EXTENSION D'ORDRE *n*** de l'algèbre de contact (k,Φ,C).

Nous verrons au chapitre 9 d'autres extensions déduites de l'algèbre de contact (k,Φ,C). En particulier ces extensions permettront de donner un sens aux notions de jets holonomes et de jets non holonomes.

4.4 ESPECE DE MORPHISMES ASSOCIEE

4.4.1 PROPOSITION

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact, on a les résultats suivants :

1- $\forall e \in C_0$ $J^\varphi e$ est une sous-catégorie de $C(e,e)$ (et donc de C) telle que si $f \in J^\varphi e$ est inversible alors $f^{-1} \in J^\varphi e$.

2- Si on note $J^\varphi C_0 = \bigcup_{e \in C_0} J^\varphi e$, π l'application $\pi : J^\varphi C_0 \to C_0$ définie par $g \mapsto \pi(g) = e$ si $g \in J^\varphi e$ et k' l'application :

$$k' : C_\gamma * J^\varphi C_0 \to J^\varphi C_0,$$

$$(f,g) \mapsto f.g.f^{-1} = k'(f,g) = fg$$

(où $C_\gamma * J^\varphi C_0$ est le produit fibré $\alpha \vee \pi$) définie par $(f,g) \mapsto f.g.f^{-1} = k'(f,g) = fg$.

On vérifiera que $f.g \in J^\varphi e'$ quand $g \in J^\varphi e$ et $f \in C(e,e')$; $\eta = (C_\gamma, J^\varphi C_0, k')$ est alors une espèce de morphismes à laquelle est associée la catégorie produit croisé $C_\gamma \times_{k'} J^\varphi C_0$ qui a pour morphimes les triplets de la forme (h,f,e) où $h \in J^\varphi \beta(f)$ et $\alpha(f) = e$. Les morphismes de ce type se composent comme suit :

$(h',f',e').(h,f,e) = (h'.f'h, f'.f, e)$, le composé étant défini si et seulement si $f'.f$ est défini.

Δ 1- Evidemment $J^\varphi e$ est non vide puisque $e \in J^\varphi e$, de plus on a $\forall (f,g) \in J^\varphi e \times J^\varphi e$ $f.g$ défini et donc $\varphi(f.g) = \varphi(\varphi f.\varphi g) = \varphi(\varphi e.\varphi e) = \varphi(e.e) = \varphi e$ d'où $f.g \in J^\varphi e$. Soit $f \in J^\varphi e$ inversible donc f^{-1} existe. On pose $\varphi(f).\varphi(f^{-1}) = c$ on peut alors en déduire :

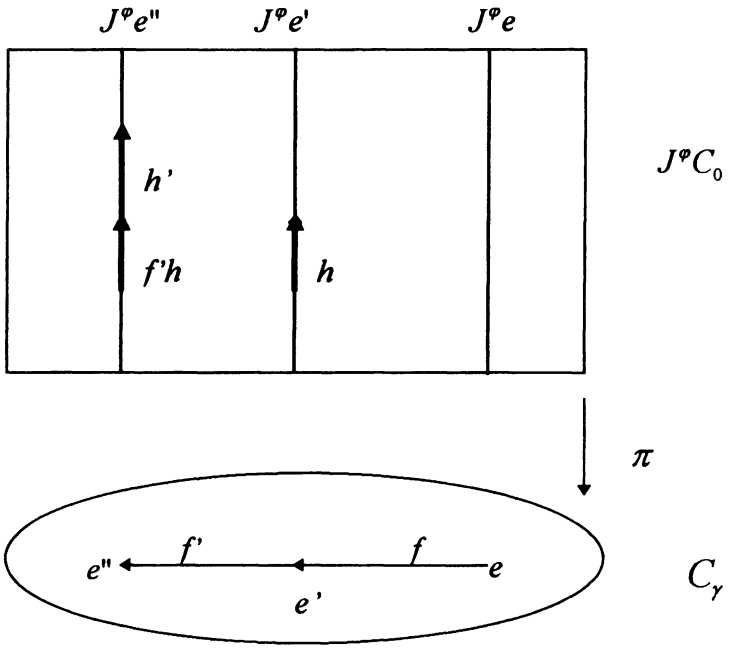
$$\begin{aligned} \varphi(f).\varphi(f^{-1}) = c &\Rightarrow \varphi(\varphi(f).\varphi(f^{-1})) = \varphi(c) \\ &\Rightarrow \varphi(f.f^{-1}) = \varphi c \\ &\Rightarrow \varphi e = \varphi c. \end{aligned}$$

Donc $c = \varphi(f).\varphi(f^{-1})$ appartient à $J^\varphi e$. Par ailleurs on a $\varphi(f) = \varphi(e)$; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \varphi(e).\varphi(f^{-1}) = c &\Rightarrow \varphi(\varphi(e).\varphi(f^{-1})) = \varphi(c) = \varphi e \\ &\Rightarrow \varphi(e.f^{-1}) = \varphi e \\ &\Rightarrow \varphi f^{-1} = \varphi e, \end{aligned}$$

et donc $f^{-1} \in J^\varphi e$.

2-



Dans le diagramme ci-dessus $\pi: J^\varphi C_0 \to C_0$ est une application surjective définie par $g \mapsto e$ si $g \in J^\varphi e$, on a donc $C_\gamma * J^\varphi C_0 = \alpha \vee \pi$, produit fibré de α et de π. On vérifie de plus que si $e \neq e'$ alors on a $J^\varphi e \cap J^\varphi e' = \varnothing$ et $J^\varphi C_0$ est une catégorie telle que deux morphismes sont composables si et seulement si ils appartiennent à la même fibre $\pi^{-1}(e) = J^\varphi e$ au dessus de e.

On vérifie sans peine les propriétés suivantes :

a) $\forall (f,g) \in C_\gamma * J^\varphi C_0 \quad \forall (f',f) \in C_\gamma * C_\gamma \quad (f',fg) \in C_\gamma * J^\varphi C_0 \quad (f'.f)g = f'(fg)$,

b) $\forall g \in J^\varphi C_0 \quad \exists! e \in C_0 \quad (e,g) \in C_\gamma * J^\varphi C_0$, $eg = g$,

c) $\forall (f,g) \in C_\gamma * J^\varphi C_0 \quad (f,g) \in C_\gamma * J^\varphi C_0 \Leftrightarrow (\alpha(f),g) \in C_\gamma * J^\varphi C_0$,

d) $\forall e \in C_0 \; \exists g \in J^\varphi C_0 \quad (e,g) \in C_\gamma * J^\varphi C_0$.

Par ailleurs on a :

$\varphi(f.g.f^{-1}) = \varphi((f.g).f^{-1}) = \varphi(\varphi(f.g).\varphi(f^{-1})) = \varphi(\varphi(\varphi f.\varphi g).\varphi(f^{-1}))$, puis

$\varphi(\varphi(\varphi f.\varphi g).\varphi(f^{-1})) = \varphi(\varphi(\varphi f.\varphi e).\varphi(f^{-1}))$, car $\varphi g = \varphi e$ ce qui permet d'écrire

$\varphi(\varphi(\varphi f.\varphi e).\varphi(f^{-1})) = \varphi(\varphi(f.e).\varphi(f^{-1})) = \varphi(\varphi f.\varphi(f^{-1})) = \varphi(f.f^{-1}) = \varphi e'$ et donc de conclure en disant que $fg = f.g.f^{-1} \in J^\varphi e'$. ∇

En 1- il a été établi que chaque fibre au dessus de e est une catégorie, reste à montrer que l'application $J^{\varphi}e \to J^{\varphi}e'$ définie par $g \mapsto f.g.f^{-1}$ est un foncteur (avec $f \in C(e,e')$) et que $f.g.f^{-1} \in J^{\varphi}e$. Pour tout g et g' de $J^{\varphi}e$ on a :

$f(g'.g) = f.(g'.g).f^{-1} = f.g'.g.f^{-1} = f.g'.f^{-1}.f.g.f^{-1} = (fg').(fg)$, ce qui prouve que $g \mapsto f.g.f^{-1}$ est un foncteur de $J^{\varphi}e$ vers $J^{\varphi}e'$. ∇

En particulier si C est un groupoïde on peut énoncer la proposition suivante.

4.4.2 PROPOSITION

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact sur le groupoïde C, si on note G_e le groupe en e (c'est à dire $C(e,e)$) alors $H_e^{\varphi} = J^{\varphi}e$ est un sous-groupe de G_e et si $f \in C(e,e')$ alors $J^{\varphi}f = f.H_e^{\varphi} = H_{e'}^{\varphi}.f$ et $\eta = (C\ , J^{\varphi}C_0, k')$ est encore une espèce de morphismes à laquelle est associée la catégorie produit croisé $C \times_{k'} J^{\varphi}C_0$.

Δ D'après 4.4.1 H_e^{φ} est une sous-catégorie de G_e. Pour tout $h \in H_e^{\varphi}$, h^{-1} existe car C est un groupoïde et $h^{-1} \in H_e^{\varphi}$. Finalement H_e^{φ} est un sous-groupe de G_e.

Si $\alpha(f) = e$ montrons qu'on a $J^{\varphi}f = f.H_e^{\varphi}$. Pour tout $f' \in J^{\varphi}f$ on a $\varphi f' = \varphi f$ or $f' = (f.f^{-1}).f' = f.(f^{-1}.f')$ avec $f^{-1}.f' \in G_e$. On peut donc écrire :

$\varphi(f^{-1}.f') = \varphi(\varphi(f^{-1}).\varphi f') = \varphi(\varphi(f^{-1}).\varphi f) = \varphi(f^{-1}.f) = \varphi e = e$. Il en résulte $f^{-1}.f' \in H_e^{\varphi}$ et $f' = f.(f^{-1}.f') \in f.H_e^{\varphi}$ et en conséquence $J^{\varphi}f \subset f.H_e^{\varphi}$.

Pour tout f' de $f.H_e^{\varphi}$ on a $f' = f.h$ avec $h \in H_e^{\varphi}$, et donc $\varphi f' = \varphi(f.h) = \varphi(\varphi f.\varphi h) = \varphi(\varphi f.\varphi e) = \varphi(f.e) = \varphi f$ finalement $\varphi f' = \varphi f$ d'où $f' \in J^{\varphi}f$, et en conséquence $f.H_e^{\varphi} \subset J^{\varphi}f$ puis $f.H_e^{\varphi} = J^{\varphi}f$. On démontrerait de même $J^{\varphi}f = H_{e'}^{\varphi}.f$. ∇

Remarques

1- Si $C(e,e') \neq \varnothing$, H_e^{φ} est isomorphe à $H_{e'}^{\varphi}$.

2- Pour tout f', f de $C(e,e')$ non vide , $J^{\varphi}f$ est en bijection avec $J^{\varphi}f'$.

3- Si C est un groupoïde transitif, $\forall (e,e') \in C_0^2$ H_e^{φ} est isomorphe à $H_{e'}^{\varphi}$. Le calcul des jets dans un tel groupoïde se ramène au calcul de H_e^{φ}.

4- $f^{-1}\ f' \in J^{\varphi}e \Leftrightarrow \varphi f = \varphi f'$.

Δ 1- Il suffit de considérer l'isomorphisme $F:H_e^\varphi \to H_{e'}^\varphi$ où $g \in C(e,e')$ défini par $g \mapsto f.g.f^{-1}$. 2- se déduit immédiatement de 1- et de $J^\varphi f = f.H_e^\varphi$. 3- découle directement des deux remarques précédentes.
4- De $f^{-1}.f' \in J^\varphi e$ on déduit $\varphi(f^{-1}.f') = \varphi e$, or $f.(f^{-1}.f') = (f.f^{-1}).f' = f'$ d'où

$$\begin{aligned} \varphi(f.(f^{-1}.f')) = \varphi f' &\Leftrightarrow \varphi(\varphi f.\varphi(f^{-1}.f')) = \varphi f' \\ &\Rightarrow \varphi(\varphi f.\varphi e) = \varphi f' \\ &\Leftrightarrow \varphi(f.e) = \varphi f' \\ &\Leftrightarrow \varphi f = \varphi f' \ . \end{aligned}$$

Inversement de $f^{-1}.f' = (f^{-1}.f').e$ on déduit

$$\begin{aligned} \varphi(f^{-1}.f') &= \varphi((f^{-1}.f').e) \\ &= \varphi(\varphi(f^{-1}.f').\varphi e) \\ &= \varphi(\varphi(\varphi(f^{-1}).\varphi f').\varphi e) \\ &= \varphi(\varphi(\varphi(f^{-1}).\varphi f).\varphi e) \qquad (\text{car } \varphi f = \varphi f') \\ &= \varphi(\varphi(f^{-1}.f).\varphi e) \\ &= \varphi(\varphi e.\varphi e) \\ &= \varphi(e.e) \\ &= \varphi e \qquad \text{d'où } f^{-1}.f' \in J^\varphi e \quad \nabla \end{aligned}$$

D'autre part si on se donne une espèce de structures, à quelles conditions peut-on associer à cette espèce de structures une algèbre de contact ? Le théorème suivant donne une réponse partielle à cette question puisque reste le problème général d'associer librement à une espèce de structures quelconque une (ou des) algèbre(s) de contact.

4.4.3 THEOREME

Soit (C,E,k') une espèce de structures et $\pi:E \to C_0$ l'application surjective telle que $\forall e \in C_0$ $\pi^{-1}(e)$ soit un sous-groupe de G_e où tout élément est idempotent. Soit Φ l'ensemble de toutes les sections de π, c'est à dire l'ensemble des applications $\varphi:C_0 \to E$ définies pour tout $e \in C_0$ par $e \mapsto \varphi(e) \in \pi^{-1}(e)$ telles que $(\pi \circ \varphi)(e) = e$. On définit sur Φ la loi de composition suivante : $\Phi \times \Phi \to \Phi$ définie par $(\varphi',\varphi) \mapsto \varphi' * \varphi$ telle que $\varphi' * \varphi : C_0 \to E$ soit définie pour tout e par $(\varphi' * \varphi)(e) = \varphi'(e).\varphi(e)$. Il s'en suit que $\varphi' * \varphi$ est encore une section de π. Par ailleurs on définit l'application $k.\Phi \times C \to C$ telle que $\forall (\varphi,f) \in \Phi \times C$ $k(\varphi,f) = \varphi(e').f.\varphi(e)^{-1}$ où $f \in C(e,e')$. (k,Φ,C) est alors une algèbre de contact idempotente sur C qui de plus préserve les unités de C.

Δ Il résulte immédiatement des hypothèses que pour tout $e \in C_0$ et pour tout $\varphi \in \Phi$ on a :

$$k(\varphi,e) = \varphi(e).e.\varphi(e)^{-1} = e,$$
$$k(\varphi,\varphi(e)) = \varphi(e).\varphi(e).\varphi(e)^{-1} = \varphi(e),$$
$$k(\varphi,\varphi(e)^{-1}) = \varphi(e).\varphi(e)^{-1}.\varphi(e)^{-1} = \varphi(e)^{-1}.$$

Par ailleurs si $f \in C(e,e')$ et $g \in C(e',e'')$ on a :

$$\begin{aligned} k(\varphi,g.f) &= \varphi(e'').g.f.\varphi(e)^{-1} \\ &= \varphi(e'').g.\varphi(e')^{-1}.\varphi(e').f.\varphi(e)^{-1} \\ &= k(\varphi,g).k(\varphi,f). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $k(\varphi,.)$ est un endofoncteur de C.

Examinons maintenant l'idempotence d'un tel foncteur.

$$\begin{aligned} k(\varphi,k(\varphi,f)) &= k(\varphi,\varphi(e').f.\varphi(e)^{-1}) \\ &= k(\varphi,\varphi(e')).k(\varphi,f).k(\varphi,\varphi(e)^{-1}) \\ &= \varphi(e').\varphi(e').f.\varphi(e)^{-1}.\varphi(e)^{-1} \\ &= \varphi(e').f.\varphi(e)^{-1} \quad (\pi^{-1}(e),\pi^{-1}(e') \text{ étant formés d'idempotents}) \\ &= k(\varphi,f). \text{ Ce qui établit l'idempotence de } k(\varphi,.). \end{aligned}$$

Examinons le point (1) de la définition 1.1.1,

$$\begin{aligned} k(\varphi'*\varphi,f) &= \varphi'(e').\varphi(e').f.(\varphi'(e).\varphi(e))^{-1} \\ &= \varphi'(e').\varphi(e').f.\varphi(e)^{-1}.\varphi'(e)^{-1} \\ &= \varphi'(e').k(\varphi,f).\varphi'(e)^{-1} \\ &= k(\varphi',k(\varphi,f)). \end{aligned}$$

Pour terminer il suffit de vérifier que $f.f'$ est défini si et seulement si $k(\varphi,f).k(\varphi,f')$ est défini, ce qui est immédiat, ceci achève la démonstration. ∇

Ce théorème nous donne donc (en dehors des échelons) une autre possibilité de définir des algèbres de contact sur une catégorie C. L'accent est mis ici sur le lien qui existe entre sections de π et algèbre de contact, ce qui n'est pas tout à fait fortuit comme on s'en doute.

4.5 FONCTEURS $T^{\varphi}_{e_0}$

4.5.1 DEFINITIONS

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact et $e_0 \in C_0$ telle que C soit une catégorie e_0-**TRANSITIVE**, c'est à dire $\forall e \in C_0 \ C(e_0,e) \neq \varnothing$. Pour tout $e \in C_0$, on pose $T^{\varphi}_{e_0}e = \{X \in J^{\varphi}C / X = J^{\varphi}f \text{ avec } f \in C(e_0,e)\}$, ce qu'on peut encore noter $J^{\varphi}(e_0,e)$ et si $g \in C(e,e')$ on définit l'application $T^{\varphi}_{e_0}g : T^{\varphi}_{e_0}e \to T^{\varphi}_{e_0}e'$ par $J^{\varphi}f \mapsto J^{\varphi}(g.f)$.

$T^{\varphi}_{e_0}e$ est l'**OBJET** (e_0,φ)**-TANGENT** à e,
$T^{\varphi}_{e_0}g$ est le **MORPHISME** (e_0,φ)**-TANGENT** à g.

Tout au long de ce paragraphe C est supposée e_0-transitive. On énonce les résultats suivants.

4.5.2 PROPOSITION

Si on note $T^{\varphi}_{e_0}C$ l'ensemble des morphismes (e_0,φ)-tangents à un morphisme de C, $T^{\varphi}_{e_0}C$ est naturellement muni d'une structure de catégorie, et de ce fait $T^{\varphi}_{e_0} : C \to T^{\varphi}_{e_0}C$ devient un foncteur qui vérifie pour tout e, e', e_0 de C_0 et pour tout $\varphi \in \Phi$ la propriété suivante :

$$T^{\varphi}_{e_0}e \cap T^{\varphi}_{e_0}e' \neq \varnothing \Rightarrow e = e'.$$

Remarquons de plus que $T^{\varphi}_{e_0}e \cap T^{\varphi}_{e_1}e \neq \varnothing \Rightarrow e_0 = e_1$.

Δ h et g étant deux morphismes de C tels que $h.g$ soit défini, si $\alpha(g) = e$ alors pour tout $J^{\varphi}f$ de $T^{\varphi}_{e_0}e$ on a :

$$\begin{aligned}
\left(T^{\varphi}_{e_0}(h.g)\right)(J^{\varphi}f) &= J^{\varphi}((h.g).f) \\
&= J^{\varphi}h.J^{\varphi}g\ J^{\varphi}f \\
&= J^{\varphi}h.J^{\varphi}(g.f) \\
&= \left(T^{\varphi}_{e_0}h\right)(J^{\varphi}(g.f)) \\
&= \left(T^{\varphi}_{e_0}h\right)\left(\left(T^{\varphi}_{e_0}g\right)(J^{\varphi}f)\right) \\
&= \left(\left(T^{\varphi}_{e_0}h\right)\circ\left(T^{\varphi}_{e_0}g\right)\right)(J^{\varphi}f).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $T^{\varphi}_{e_0}$ est un foncteur. $T^{\varphi}_{e_0}C$ a pour rétraction source $\alpha^{\varphi}_{e_0}$ définie par $\alpha^{\varphi}_{e_0}(T^{\varphi}_{e_0}g) = T^{\varphi}_{e_0}\alpha(g)$ et pour rétraction but $\beta^{\varphi}_{e_0}$ définie par $\beta^{\varphi}_{e_0}(T^{\varphi}_{e_0}g) = T^{\varphi}_{e_0}\beta(g)$. Le reste s'établit grâce au 1- de la proposition 1.1.3 . ∇

Il est clair que tout ce qui précède a pour seul but de présenter la notion d'espace tangent, notion bien connue dans le cas des applications différentiables pointées entre variétés différentiables pointées, et dont nous allons donner une présentation élargie dans le paragraphe suivant.

Dans le cas classique e_0 est le germe de $Id_{\mathbf{R}}$ en zéro et donc noté $(\overset{\wedge}{\mathbf{R}},0)$. Le choix de e_0 commande alors le type de fibré tangent auquel on s'intéresse.

4.5.3 FONCTEURS $T^{\varphi}_{e_0}$ SUR C_s

Si A et B sont deux parties non vides de C_0, supposons qu'on puisse définir l'application $F: A \to C(A,B)$ qui à chaque objet a de A associe un morphisme de C dont la source est a et le but est dans B avec $B = \beta(F(A))$. F est alors une section locale de la rétraction source α.

Si $F: A \to C(A,A')$ et $G: B \to C(B,B')$ sont deux sections locales de α, on définit le composé de G par F de la manière suivante ; $G^{\circ}F: A \to C(A,B')$ et $G^{\circ}F$ est défini si et seulement si $A' = B$. Dans ce cas on a pour tout a de A $(G^{\circ}F)(a) = G(\beta(F(a)))._{F(a)}$.

Il est clair que cette composition (quand les composés sont définis) est associative et confère à l'ensemble des sections locales de α une structure de catégorie notée C_s. Les rétractions source et but sont respectivement notées α_s et β_s et sont définies pour $F: A \to C(A,B)$ par $\alpha_s(F) = i_A$ et $\beta_s(F) = i_B$, où on a $i_A: A \to C(A,A)$ définie par $a \mapsto i_A(a) = a$.

Dans toute la suite on considère $T^{\varphi}_{e_0}A = \bigcup_{a \in A} T^{\varphi}_{e_0}a$ l'espace (e_0,φ)-tangent à A et $T^{\varphi}_{e_0}F$ l'application (e_0,φ)-tangente à F définie par :

$$T^{\varphi}_{e_0}F: T^{\varphi}_{e_0}A \to T^{\varphi}_{e_0}B$$
$$X \mapsto F(a)._X = J^{\varphi}(F(a)._f)$$

où $X = J^{\varphi}f$, $f \in C(e_0,a)$, $a \in A$, $F: A \to C(A,B)$.

PROPOSITION

Soit $F:A\to C(A,B)$ et $G:B\to C(B,B')$, $G\circ F$ est donc définie et telle que $T^{\varphi}_{e_0}(G\circ F)=(T^{\varphi}_{e_0}G)\circ(T^{\varphi}_{e_0}F)$. Ceci nous permet d'affirmer que $T^{\varphi}_{e_0}C_s=\bigcup_{F\in C_s}\{T^{\varphi}_{e_0}F\}$ est une catégorie et $T^{\varphi}_{e_0}:C_s\to T^{\varphi}_{e_0}C_s$ devient un foncteur. $T^{\varphi}_{e_0}C_s$ a pour rétractions source et but respectivement $\alpha^{\varphi}_{e_0,s}$ et $\beta^{\varphi}_{e_0,s}$ définies par $\alpha^{\varphi}_{e_0,s}(T^{\varphi}_{e_0}F)=T^{\varphi}_{e_0}A=T^{\varphi}_{e_0}i_A$ et $\beta^{\varphi}_{e_0,s}(T^{\varphi}_{e_0}F)=T^{\varphi}_{e_0}B=T^{\varphi}_{e_0}i_B$.

Δ Soit $X=J^{\varphi}f$ où $f\in C(e_0,a)$ et $a\in A$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\left(T^{\varphi}_{e_0}(G\circ F)\right)(X) &= J^{\varphi}((G\circ F)(a).f)\\
&= J^{\varphi}(G(b).F(a).f) \qquad \text{(avec } b=\beta(F(a))\text{)}\\
&= J^{\varphi}(G(b).(F(a).f))\\
&= \left(T^{\varphi}_{e_0}G\right)(J^{\varphi}(F(a).f))\\
&= \left(T^{\varphi}_{e_0}G\right)\left(\left(T^{\varphi}_{e_0}F\right)(J^{\varphi}f)\right)\\
&= \left(T^{\varphi}_{e_0}G\right)\left(\left(T^{\varphi}_{e_0}F\right)(X)\right)\\
&= \left(\left(T^{\varphi}_{e_0}G\right)\circ\left(T^{\varphi}_{e_0}F\right)\right)(X).
\end{aligned}$$

Ceci prouve donc $T^{\varphi}_{e_0}(G\circ F)=(T^{\varphi}_{e_0}G)\circ(T^{\varphi}_{e_0}F)$ quand $G\circ F$ est définie. Par ailleurs si $T^{\varphi}_{e_0}A=T^{\varphi}_{e_0}B$ on déduit facilement $A=B$, ce qui prouve que $T^{\varphi}_{e_0|(C_s)_0}$ est injectif et achève la démonstration. ∇

On peut définir de manière tout à fait duale :

- $T^{\varphi^*}_{e_0}e=\{X\in J^{\varphi}C\,/\,X=J^{\varphi}f,\ f\in C(e,e_0)\}$ l'objet (e_0,φ)-cotangent à e,
- $T^{\varphi^*}_{e_0}g:T^{\varphi^*}_{e_0}e'\to T^{\varphi^*}_{e_0}e$ le morphisme (e_0,φ)-cotangent à $g\in C(e,e')$ défini par $J^{\varphi}f\mapsto J^{\varphi}(f.g)$,

- $T^{\varphi^*}_{e_0}A=\bigcup_{a\in A}T^{\varphi^*}_{e_0}a$, l'espace (e_0,φ)-cotangent à A,
- $T^{\varphi^*}_{e_0}F:T^{\varphi^*}_{e_0}A\to T^{\varphi^*}_{e_0}B$, l'application (e_0,φ)-cotangente à F définie par $X=J^{\varphi}f\mapsto J^{\varphi}(f.F(a))$, avec $f\in C(a,e_0)$ et $F:A\to C(B,A)$ qui est alors une section locale de β. De telles sections locales forment une catégorie qu'on peut noter C_b (b comme but).

5 PRODUITS ET PRODUITS FIBRES

5.1 PRODUITS SUR LES ESPACES DE JETS

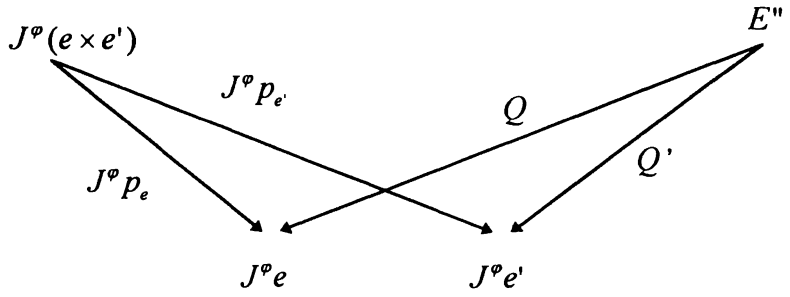
Dans ce paragraphe on examine dans quelle mesure les produits finis peuvent être préservés par les foncteurs J^φ et $T^\varphi_{e_0}$.

Nous rappelons que φ régulier signifie (c.f. 1.5.1) que φ préserve les unités et que pour tout composé de la forme $p.f$ ou $g.q$ où p et q sont des projections choisies on a : $\varphi(p.f) = p.\varphi f$ et $\varphi(g.q) = \varphi g.q$.

5.1.1 PROPOSITION

Si C est à produits choisis de deux unités, si φ est régulier et si $e \times e'$ est un produit choisi alors $J^\varphi(e \times e')$ est un produit dans $J^\varphi C$. On posera donc $J^\varphi(e \times e') = J^\varphi e \times J^\varphi e'$.

Δ Dans $J^\varphi C$ on considère le diagamme suivant.

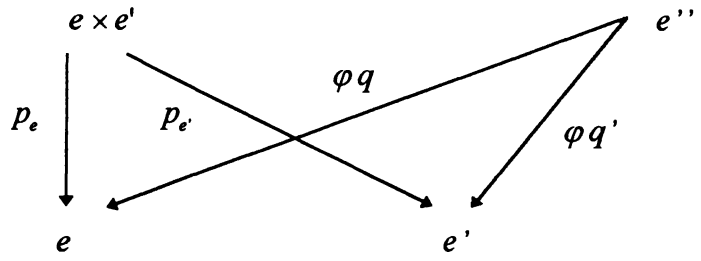


Du fait que J^φ est un foncteur surjectif, il existe q, q', e'' dans C tels que $Q = J^\varphi q$, $Q' = J^\varphi q'$ et $E'' = J^\varphi e''$.

Il faut noter que l'égalité $E'' = J^\varphi e''$ signifie ici que $J^\varphi e'' = J^\varphi \alpha(q)$ puis $\varphi e'' = \varphi \alpha(q)$ et finalement $e'' = \alpha(q)$ car $\varphi \in \Phi^0$.

Soit $\varpi : J^\varphi C \to C$ l'application définie par $J^\varphi f \mapsto \varpi(J^\varphi f) = \varphi f$. L'image $\varpi(J^\varphi f)$ ne dépend pas du représentant choisi, ϖ apparaît ainsi comme une section de J^φ.

Par ϖ le diagramme précédent (en tenant compte de 1.5.2, φ étant régulier) devient.



$e \times e'$ étant un produit, il existe alors un unique $h \in C(e'', e \times e')$ tel que $\varpi(Q) = \varphi q = p_e . h$ et $\varpi(Q') = \varphi q' = p_{e'} . h$, d'où l'on tire $J^\varphi(\varpi(Q)) = J^\varphi(p_e . h) = J^\varphi p_e . J^\varphi h$. Par ailleurs on a $J^\varphi(\varpi(Q)) = J^\varphi \varphi q = J^\varphi q = Q$ car φ est idempotent (c.f. 4.1.4). On a donc trouvé $J^\varphi h \in J^\varphi C$ tel que $Q = J^\varphi p_e . J^\varphi h$ et $Q' = J^\varphi p_{e'} . J^\varphi h$. Montrons qu'un tel $J^\varphi h$ est unique.

Supposons qu'il existe $J^\varphi h'$ tel que $Q = J^\varphi p_e . J^\varphi h'$, alors on a :
$\varpi(Q) = \varpi(J^\varphi p_e . J^\varphi h') = \varpi(J^\varphi(p_e . h')) = \varphi(p_e . h') = p_e . \varphi h'$ car $\varphi \in \Phi^r$ et donc $\varphi q = p_e . \varphi h'$, de même on a $\varphi q' = p_{e'} . \varphi h'$. $e \times e'$ étant un produit, on sait qu'il n'existe qu'un seul h tel que $\varphi q = p_e . h$ et $\varphi q' = p_{e'} . h$ d'où $h = \varphi h'$. On en déduit $\varphi h = \varphi h'$ (φ étant idempotent) et donc $J^\varphi h = J^\varphi h'$, ce qui achève de prouver que $J^\varphi(e \times e')$ est un produit dans $J^\varphi C$. ∇

Remarque

Au travers de la proposition précédente nous venons d'établir que le bon candidat au rôle de produit dans $J^\varphi C$ était (moyennant certaines hypothèses sur φ) $J^\varphi(e \times e')$. Si on regarde $J^\varphi e \times J^\varphi e'$ comme étant un produit calculé point par point dans $\mathcal{E}ns$ et défini par $J^\varphi e \times J^\varphi e' = \bigcup_{s \in J^\varphi e, s' \in J^\varphi e'} (s \times s')$ il est alors possible de plonger $J^\varphi e \times J^\varphi e'$ dans $J^\varphi(e \times e')$. Ceci est une conséquence de 1.5.2 3-, car nous avons pour tout $s \times s'$ de $J^\varphi e \times J^\varphi e'$:

$$\begin{aligned} \varphi(s \times s') &= \varphi s \times \varphi s' \\ &= \varphi e \times \varphi e' \qquad (\text{car } s \in J^\varphi e \text{ et } s' \in J^\varphi e') \\ &= \varphi(e \times e') . \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $s \times s' \in J^{\varphi}(e \times e')$. Si on regarde $J^{\varphi}e \times J^{\varphi}e'$ comme produit dans $J^{\varphi}C$, la confusion est lourde de conséquences puisque nous n'avons que l'inclusion $J^{\varphi}e \times J^{\varphi}e' \subset J^{\varphi}(e \times e')$; toutefois $J^{\varphi}e \times J^{\varphi}e'$ détermine sans ambiguïté $J^{\varphi}e \times J^{\varphi}e'$. Dans la suite on réserve le symbole « × » pour le produit cartésien.

5.1.2 COROLLAIRE

Avec les hypothèses énoncées en 5.1.1 on déduit immédiatement :

1- $J^{\varphi}p_e = p_{J^{\varphi}e}.K$, avec $J^{\varphi}(e \times e') \xrightarrow{K} J^{\varphi}e \times J^{\varphi}e'$ isomorphisme,

2- $J^{\varphi}\Delta_e = K'.\Delta_{J^{\varphi}e}$, avec $J^{\varphi}e \times J^{\varphi}e \xrightarrow{K'} J^{\varphi}(e \times e)$ isomorphisme,

3- $J^{\varphi}f \times J^{\varphi}g = H.(J^{\varphi}(f \times g)).H'$, avec $J^{\varphi}(\beta(f) \times \beta(g)) \xrightarrow{H} J^{\varphi}\beta(f) \times J^{\varphi}\beta(g)$ et $J^{\varphi}\alpha(f) \times J^{\varphi}\alpha(g) \xrightarrow{H'} J^{\varphi}(\alpha(f) \times \alpha(g))$, H et H' étant deux isomorphismes,

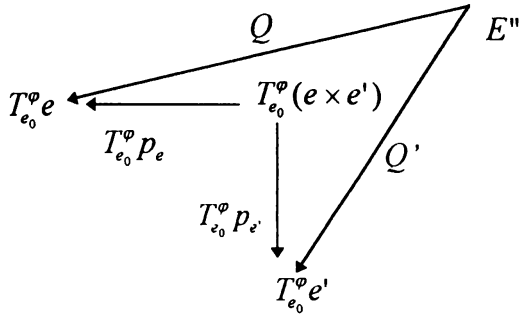
4- $\left[J^{\varphi}f, J^{\varphi}g\right] = H.\left(J^{\varphi}[f,g]\right)$, avec $J^{\varphi}(\beta(f) \times \beta(g)) \xrightarrow{H} J^{\varphi}\beta(f) \times J^{\varphi}\beta(g)$ isomorphisme.

En ayant $J^{\varphi}f = J^{\varphi}g$ on est naturellement assuré d'avoir $\varphi f = \varphi g$, ce qui n'est plus tout à fait le cas dans ce qui suit pour les foncteurs $T^{\varphi}_{e_0}$, d'où la nécessité de formuler une hypothèse supplémentaire pour chacune des deux propositions suivantes.

5.1.3 PROPOSITION

Si C est e_0-transitive et à produits choisis de deux unités, si φ est régulier et tel qu'on ait $\forall (f,g) \in C^2 \; T^{\varphi}_{e_0}f = T^{\varphi}_{e_0}g \Rightarrow \varphi f = \varphi g$, si $e \times e'$ est un produit choisi alors $T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')$ est un produit dans $T^{\varphi}_{e_0}C$. On posera donc $T^{\varphi}_{e_0}(e \times e') = T^{\varphi}_{e_0}e \times T^{\varphi}_{e_0}e'$.

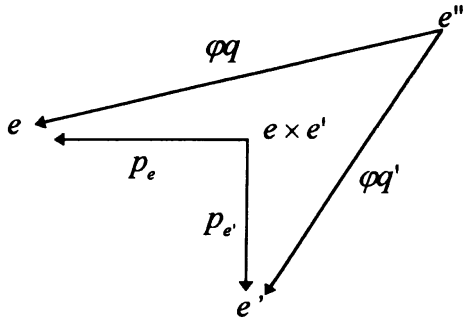
Δ Noter qu'on a toujours $\varphi f = \varphi g \Leftrightarrow J^{\varphi}f = J^{\varphi}g \Rightarrow T^{\varphi}_{e_0}f = T^{\varphi}_{e_0}g$. En effet pour tout X de $T^{\varphi}_{e_0}\alpha(f)$ on pose $X = J^{\varphi}h$ et on a $(T^{\varphi}_{e_0}f)(X) = J^{\varphi}(f.h) = J^{\varphi}f.J^{\varphi}h$ puis $J^{\varphi}f.J^{\varphi}h = J^{\varphi}g.J^{\varphi}h = (T^{\varphi}_{e_0}g)(X)$. Dans $T^{\varphi}_{e_0}C$ on considère le diagramme suivant.



Du fait que $T^{\varphi}_{e_0}$ est un foncteur surjectif, il existe q, q', e'' dans C tels que $Q = T^{\varphi}_{e_0}q$, $Q' = T^{\varphi}_{e_0}q'$ et $E'' = T^{\varphi}_{e_0}e''$.

Dire que $T^{\varphi}_{e_0}e''$ est une unité dans $T^{\varphi}_{e_0}C$ signifie que $E'' = T^{\varphi}_{e_0}e'' = T^{\varphi}_{e_0}\alpha(q)$ et par suite on a $e'' = \varphi e'' = \varphi\alpha(q) = \alpha(q)$. Ce qui prouve qu'ici encore on a $e'' = \alpha(q)$ car $\varphi \in \Phi^0$.

Soit $\Pi : T^{\varphi}_{e_0}C \to C$ l'application définie par $T^{\varphi}_{e_0}f \mapsto \Pi(T^{\varphi}_{e_0}f) = \varphi f$. Avec les hypothèses précédentes on a $T^{\varphi}_{e_0}f = T^{\varphi}_{e_0}g \Leftrightarrow \varphi f = \varphi g \Leftrightarrow \Pi(T^{\varphi}_{e_0}f) = \Pi(T^{\varphi}_{e_0}g)$, en particulier $\Pi(T^{\varphi}_{e_0}e) = e$. Par Π le diagramme précédent (φ étant régulier on a $\Pi(T^{\varphi}_{e_0}p_e) = \varphi p_e = p_e$) devient :

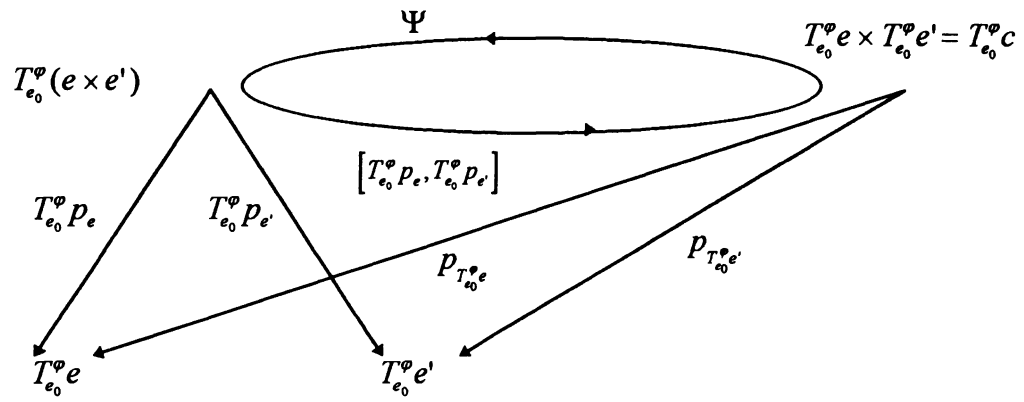


$e \times e'$ étant un produit, il existe un unique $h \in C(e'', e \times e')$ tel que $\Pi(Q) = p_e.h$ et $\Pi(Q') = p_{e'}.h$, d'où $T^{\varphi}_{e_0}(\Pi(Q) = T^{\varphi}_{e_0}(p_e.h) = T^{\varphi}_{e_0}p_e \circ T^{\varphi}_{e_0}h$ et $T^{\varphi}_{e_0}(\Pi(Q')) = T^{\varphi}_{e_0}p_{e'} \circ T^{\varphi}_{e_0}h$.

Avec $Q = T^{\varphi}_{e_0}q$ on a $\Pi(Q) = \varphi q$ et on vérifie que pour tout X de $T^{\varphi}_{e_0}e_0$ on a également $T^{\varphi}_{e_0}(\Pi(Q))(X) = (T^{\varphi}_{e_0}(\varphi q))(X) = J^{\varphi}(\varphi q.h)$ puis $J^{\varphi}(\varphi q.h) = J^{\varphi}\varphi q.J^{\varphi}h = J^{\varphi}q.J^{\varphi}h = (T^{\varphi}_{e_0}q)(J^{\varphi}h) = Q(X)$. On a donc $T^{\varphi}_{e_0}(\Pi(Q)) = Q$ et finalement $Q = T^{\varphi}_{e_0}p_e \circ T^{\varphi}_{e_0}h$, $Q' = T^{\varphi}_{e_0}p_{e'} \circ T^{\varphi}_{e_0}h$.

Montrons qu'un tel $T^{\varphi}_{e_0}h$ est unique. Supposons qu'il existe $T^{\varphi}_{e_0}h'$ tel que $Q = T^{\varphi}_{e_0}p_e \circ T^{\varphi}_{e_0}h'$ et $Q' = T^{\varphi}_{e_0}p_{e'} \circ T^{\varphi}_{e_0}h'$, on a alors $T^{\varphi}_{e_0}q = T^{\varphi}_{e_0}(p_e.h')$, $T^{\varphi}_{e_0}q' = T^{\varphi}_{e_0}(p_{e'}.h')$. Soit encore, en prenant l'image par Π, $\varphi q = \varphi(p_e.h') = p_e.\varphi h'$ et $\varphi q' = \varphi(p_{e'}.h') = p_{e'}.\varphi h'$, car φ est régulier. Pour les mêmes raisons déjà invoquées en 5.1.1 on a $h = \varphi h'$ et donc $\varphi h = \varphi h'$ puis $J^{\varphi}h = J^{\varphi}h'$ et finalement $T^{\varphi}_{e_0}h = T^{\varphi}_{e_0}h'$. On en déduit donc que $T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')$ est un produit. On pourrait, comme précédemment, faire une remarque analogue à celle que nous avons faite en 5.1.1

Précisons cet isomorphisme en considérant le diagramme suivant.



$T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')$ a pour éléments les jets Z du type $J^{\varphi}h$ avec $h \in C(e_0, e \times e')$. Soit Ψ l'application $\Psi : T^{\varphi}_{e_0}e \times T^{\varphi}_{e_0}e' \to T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')$, définie par $Z \mapsto J^{\varphi}(f,g)$ où $f = \varpi(p_{T^{\varphi}_{e_0}e}(Z))$ et $g = \varpi(p_{T^{\varphi}_{e_0}e'}(Z))$, ici $f \in C(e_0, e)$ et $g \in C(e_0, e')$. ϖ est l'application $\varpi : J^{\varphi}C \to C$ définie par $J^{\varphi}f \mapsto \varphi f$.

Nous allons montrer que Ψ vérifie $\Psi \circ \left[T^{\varphi}_{e_0}p_e, T^{\varphi}_{e_0}p_{e'}\right] = T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')$ et $\left[T^{\varphi}_{e_0}p_e, T^{\varphi}_{e_0}p_{e'}\right] \circ \Psi = T^{\varphi}_{e_0}e \times T^{\varphi}_{e_0}e'$, où $T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')$ est identifié à $Id_{T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')}$ et $T^{\varphi}_{e_0}e \times T^{\varphi}_{e_0}e'$ est identifié à $Id_{T^{\varphi}_{e_0}e \times T^{\varphi}_{e_0}e'}$.

Soit $J^{\varphi}h \in T^{\varphi}_{e_0}(e \times e')$ avec $h \in C(e_0, e \times e')$ et $h = (f,g) = (p_e.h, p_{e'}.h)$. On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
\left(\Psi \circ \left[T^{\varphi}_{e_0}p_e, T^{\varphi}_{e_0}p_{e'}\right]\right)(J^{\varphi}h) &= \left(\Psi \circ \left[T^{\varphi}_{e_0}p_e, T^{\varphi}_{e_0}p_{e'}\right]\right)(J^{\varphi}(f,g)) \\
&= \Psi(J^{\varphi}(p_e(f,g)), J^{\varphi}(p_{e'}(f,g))) \\
&= \Psi(J^{\varphi}f, J^{\varphi}g) \\
&= J^{\varphi}\left[\varpi(p_{T^{\varphi}_{e_0}e}((J^{\varphi}f, J^{\varphi}g))), \varpi(p_{T^{\varphi}_{e_0}e'}((J^{\varphi}f, J^{\varphi}g)))\right] \\
&= J^{\varphi}\left[\varpi(J^{\varphi}f), \varpi(J^{\varphi}g)\right] \\
&= J^{\varphi}(\varphi f, \varphi g) \\
&= J^{\varphi}(\varphi(f,g)) \qquad \text{(c.f. 1.5.2 4-}\varphi\text{ étant régulier)} \\
&= J^{\varphi}(f,g) \qquad \text{(car } \varphi \text{ idempotent)} \\
&= J^{\varphi}h.
\end{aligned}
$$

De même pour $Z \in T^{\varphi}_{e_0} e \times T^{\varphi}_{e_0} e'$ on aura :

$$\begin{aligned}
\left(\left[T^{\varphi}_{e_0} p_e, T^{\varphi}_{e_0} p_{e'}\right] \circ \Psi\right)(Z) &= \left[T^{\varphi}_{e_0} p_e, T^{\varphi}_{e_0} p_{e'}\right](\Psi(Z)) \\
&= \left[T^{\varphi}_{e_0} p_e, T^{\varphi}_{e_0} p_{e'}\right](J^{\varphi}(f,g)) \\
&= (J^{\varphi}(p_e.(f,g)), J^{\varphi}(p_{e'}.(f,g))) \\
&= (J^{\varphi} f, J^{\varphi} g) \\
&= \left[J^{\varphi}(\varpi(p_{T^{\varphi}_{e_0} e}(Z))), J^{\varphi}(\varpi(p_{T^{\varphi}_{e_0} e'}(Z)))\right] \\
&= \left[p_{T^{\varphi}_{e_0} e}(Z), p_{T^{\varphi}_{e_0} e'}(Z)\right],
\end{aligned}$$

(car $J^{\varphi}(\varpi(J^{\varphi} k)) = J^{\varphi}(\varphi k) = J^{\varphi} k$ donc $J^{\varphi}(\varpi(p_{T^{\varphi}_{e_0} e}(Z))) = p_{T^{\varphi}_{e_0} e}(Z)$; $p_{T^{\varphi}_{e_0} e}(Z)$ étant un jet).

Poursuivons le calcul,

$$\begin{aligned}
\left[p_{T^{\varphi}_{e_0} e}(Z), p_{T^{\varphi}_{e_0} e'}(Z)\right] &= \left[p_{T^{\varphi}_{e_0} e}, p_{T^{\varphi}_{e_0} e'}\right](Z) \\
&= Z
\end{aligned}$$

(car $\left[p_{T^{\varphi}_{e_0} e}, p_{T^{\varphi}_{e_0} e'}\right] = Id_{T^{\varphi}_{e_0} e \times T^{\varphi}_{e_0} e'}$; en raison du fait que $T^{\varphi}_{e_0} e \times T^{\varphi}_{e_0} e'$ est un produit, on a unicité).

On en déduit donc que $\Psi = \left[T^{\varphi}_{e_0} p_e, T^{\varphi}_{e_0} p_{e'}\right]^{-1}$. ∇

5.1.4 PRODUITS DANS C_s

Jusqu'à maintenant les produits définis sur chaque catégorie image l'étaient de manière naturelle. Dans le cas de C_s , il en va différemment ; une première fois en ce qui concerne la composition des morphismes, une seconde fois pour y définir la notion de produit. C'est ce second point que nous allons développer.

Soit $F \in C_s$. Comme morphisme de C_s nous noterons $A \xrightarrow{F} B$, avec $\alpha_s(F) = A$ et $\beta_s(F) = B$ mais comme application nous noterons $F : A \to C(A,B)$.

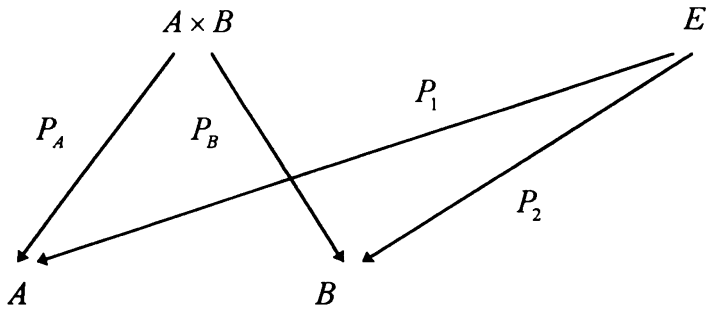
A et B étant deux parties non vides de C, on définit $A \times B$ en posant :

$$A \times B = \bigcup_{a \in A, b \in B} \{a \times b\}.$$

En supposant que pour tout a de A et pour tout b de B, $a \times b$ existe et soit un produit choisi, $A \times B$ est alors une partie non vide de C_0. Il faut noter que $A \times B$ n'est en aucun cas le produit cartésien de A par B. $A \times B$ peut être regardé comme l'extension aux parties du produit défini dans C.

Montrons que c'est un produit dans C_s. On définit $P_A : A \times B \to C(A \times B, A)$ par $a \times b \mapsto P_A(a \times b)$ où $P_A(a \times b)$ est la projection choisie définie par $a \times b \xrightarrow{P_A(a \times b) = p_a} a$. P_A ainsi défini est de toute évidence une section locale de α et donc on a $P_A \in C_s$, avec $\alpha_s(P_A) = A \times B$ et $\beta_s(P_A) = A$ d'où la notation $A \times B \xrightarrow{P_A} A$. On définit de manière analogue $A \times B \xrightarrow{P_B} B$.

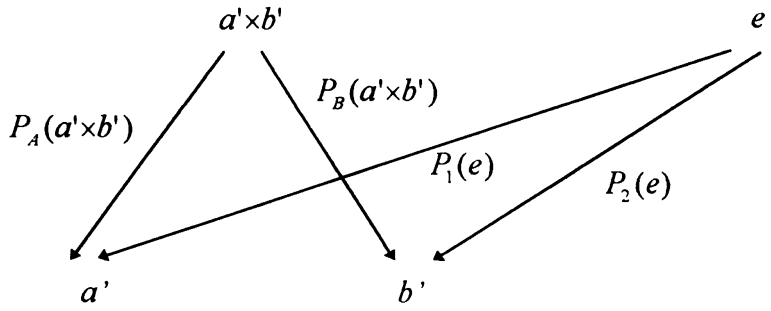
On considère dans C_s le diagramme suivant.



Il faut montrer qu'il existe un unique $K \in C_s(E, A \times B)$ tel que $P_1 = P_A \circ K$ et $P_2 = P_B \circ K$. Pour tout $e \in E$ on a :

$$P_1 : E \to C(E, A) \qquad \text{et} \qquad P_2 : E \to C(E, B)$$
$$e \mapsto (e \xrightarrow{P_1(e)} \beta(P_1(e)) = a') \qquad e \mapsto (e \xrightarrow{P_2(e)} \beta(P_2(e)) = b').$$

On a donc dans C.



Comme $a'\times b'$ est un produit dans C, il existe donc un unique $k \in C(e,a'\times b')$ tel que $P_1(e) = P_A(a'\times b').k$ et $P_2(e) = P_B(a'\times b').k$. Cet unique k dépend évidemment du choix de e, ceci permet donc de définir $K:E \to C(E, A\times B)$ par $e \mapsto K(e) = (e \xrightarrow{k} a'\times b')$. L'unicité de K résulte de l'unicité de $e \xrightarrow{k} a'\times b'$ pour chaque e.

On a donc pour tout e de E :

$$\begin{aligned}(P_A \circ K)(e) &= (P_A(\beta(K(e))).K(e)\\ &= (P_A(a'\times b')).K(e)\\ &= P_1(e).\end{aligned}$$

On a finalement $P_A \circ K = P_1$. On montre de même $P_B \circ K = P_2$. Il résulte de tout ceci que $A\times B$ est un produit dans C_s que nous qualifierons désormais de « produit choisi ». Nous pouvons énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION

Si C est e_0-transitive, si C_s est à produits choisis de deux, si φ est régulier et tel qu'on ait :
$\forall (F,G) \in C_s^2 \left(T_{e_0}^{\varphi}F = T_{e_0}^{\varphi}G\right) \Rightarrow \left(\alpha_{e_0,s}^{\varphi}(F) = \alpha_{e_0,s}^{\varphi}(G)\ \forall e \in \alpha_{e_0,s}^{\varphi}(F)\ \varphi F(e) = \varphi G(e)\right)$,
si $A\times B$ est un produit choisi alors $T_{e_0}^{\varphi}(A\times B)$ est un produit dans $T_{e_0}^{\varphi}C_s$. On posera donc $T_{e_0}^{\varphi}(A\times B) = T_{e_0}^{\varphi}A \times T_{e_0}^{\varphi}B$.

Δ Noter que, comme en 5.1.3, on a toujours :

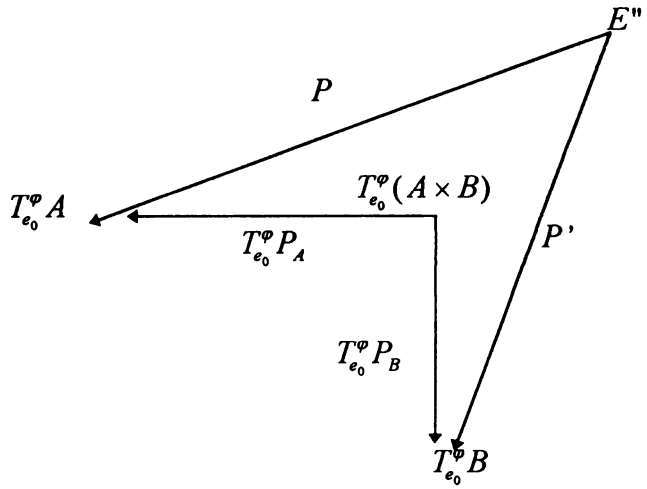
$$\left(\forall e \in \alpha_{e_0,s}^{\varphi}(F) = E\ \varphi F(e) = \varphi G(e)\right) \Rightarrow \left(T_{e_0}^{\varphi}F = T_{e_0}^{\varphi}G\right).$$

En effet $\forall X \in T_{e_0}^{\varphi}E$ on pose $X = J^{\varphi}h$ avec $h \in C(e_0,e)$ et $e \in E$, il en résulte :

$$\begin{aligned}(T_{e_0}^{\varphi}F)(X) &= J^{\varphi}(F(e).h)\\ &= J^{\varphi}(F(e)).J^{\varphi}h\\ &= J^{\varphi}(G(e)).J^{\varphi}h\\ &= J^{\varphi}(G(e).h)\\ &= (T_{e_0}^{\varphi}G)(X),\end{aligned}$$

d'où $T_{e_0}^{\varphi}F = T_{e_0}^{\varphi}G$.

Dans $T^{\varphi}_{e_0}C_s$ on considère le diagramme suivant.



On définit l'application $\Pi_s : T^{\varphi}_{e_0}C_s \to C_s$ par $T^{\varphi}_{e_0}F \mapsto \Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}F)$ où $F \in C_s(A,B)$. $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}F) : A \to C(A,B)$ est l'application définie par $a \mapsto \varphi F(a) \in C(a, \beta(F(a)))$, les hypothèses énoncées permettent de s'assurer que $T^{\varphi}_{e_0}F = T^{\varphi}_{e_0}G$ implique $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}F) = \Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}G)$. On vérifie $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}A) = A$ et $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}P_A) = P_A$.

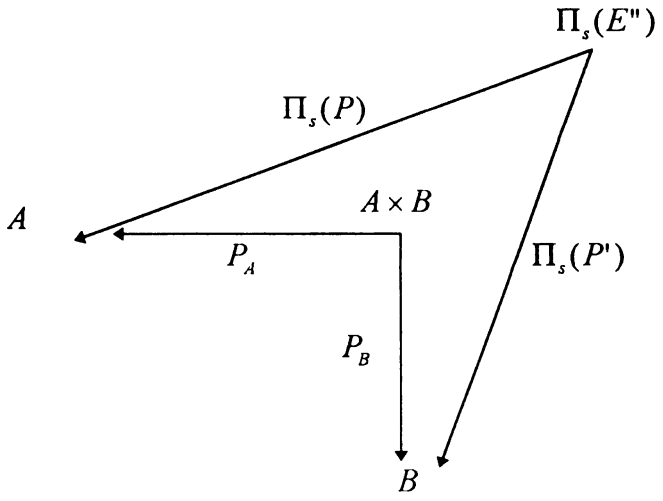
On a $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}A) = \Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}i_A) : A \to C(A,A)$ définie par $a \mapsto \varphi i_A(a) = \varphi a = a$ on en déduit donc $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}A) = i_A = A$.

On a $P_A : A \times B \to C(A \times B, A)$ définie par $a \times b \mapsto P_A(a \times b) = (a \times b \xrightarrow{p_a} a)$, par ailleurs $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}P_A) : A \times B \to C(A \times B, A)$ est définie par

$$a \times b \mapsto \varphi P_A(a \times b) = \varphi p_a = p_a = P_A(a \times b) \text{ (car } \varphi \text{ est régulier).}$$

On en déduit donc $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}P_A) = P_A$.

En conséquence le diagramme précédent devient par Π_s .



$A \times B$ étant un produit dans C_s, il existe donc un unique $H \in C_s(\Pi_s(E''), A \times B)$ tel que $\Pi_s(P) = P_A \circ H$ et $\Pi_s(P') = P_B \circ H$, d'où $T^{\varphi}_{e_0}(\Pi_s(P)) = T^{\varphi}_{e_0}(P_A \circ H) = T^{\varphi}_{e_0}(P_A) \circ T^{\varphi}_{e_0}(H)$. Or $\forall X \in T^{\varphi}_{e_0}(\Pi_s(E''))$ on pose $X = J^{\varphi}h$ avec $h \in C(e_0, \Pi_s(E''))$ et $P = T^{\varphi}_{e_0}Q$, il vient :

$$\begin{aligned}
(T^{\varphi}_{e_0}(\Pi_s(P)))(X) &= (T^{\varphi}_{e_0}(\Pi_s(P)))(J^{\varphi}h) \\
&= J^{\varphi}((\Pi_s(P))(\beta(h)).h) \\
&= J^{\varphi}(\varphi Q(\beta(h)).h) \\
&= J^{\varphi}(\varphi Q(\beta(h))).J^{\varphi}h \\
&= J^{\varphi}(Q(\beta(h))).J^{\varphi}h \\
&= J^{\varphi}(Q(\beta(h)).h) \\
&= (T^{\varphi}_{e_0}Q)(J^{\varphi}h) \\
&= (T^{\varphi}_{e_0}Q)(X) \\
&= P(X),
\end{aligned}$$

d'où $P = T^{\varphi}_{e_0}(P_A) \circ T^{\varphi}_{e_0}(H)$. On montre de même $P' = T^{\varphi}_{e_0}(P_B) \circ T^{\varphi}_{e_0}(H)$.

Montrons qu'un tel $T^{\varphi}_{e_0}(H)$ est unique. Supposons qu'il existe $T^{\varphi}_{e_0}(H')$ tel que $P = T^{\varphi}_{e_0}(P_A) \circ T^{\varphi}_{e_0}(H') = T^{\varphi}_{e_0}(P_A \circ H')$ et $P' = T^{\varphi}_{e_0}(P_B) \circ T^{\varphi}_{e_0}(H') = T^{\varphi}_{e_0}(P_B \circ H')$. Par Π_s on aura $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}(P_A \circ H')) : \Pi_s(E'') \to C(\Pi_s(E''), A)$ définie pour tout $e'' \in \Pi_s(E'')$ par $\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}(P_A \circ H'))(e'') = \varphi(P_A(\beta(H'(e''))).H'(e'')$.

Si on pose $e'' \xrightarrow{H'(e'')} a \times b$, on a $\beta(H'(e'')) = a \times b$ et $\beta(\varphi H'(e'')) = a \times b$ car $\varphi \in \Phi^0$ et $P_A(a \times b) = p_a$ avec $a \times b \xrightarrow{p_a} a$ d'où :

$$\begin{aligned}
\Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}(P_A \circ H'))(e'') &= \varphi(p_a.H'(e'')) \\
&= p_a.\varphi H'(e'') \qquad \text{(car } \varphi \text{ régulier)} \\
&= P_A(\beta(\varphi H'(e''))).\varphi H'(e'') \\
&= (P_A \circ \varphi H')(e'').
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant vraie quelque soit $e'' \in \Pi_s(E'')$ on a donc $\Pi_s(P) = \Pi_s(T^{\varphi}_{e_0}(P_A \circ H')) = P_A \circ \varphi H'$. Sachant que $\Pi_s(P) = P_A \circ H$ et $\Pi_s(P) = P_A \circ \varphi H'$, en raison de l'unicité de la factorisation on a $H = \varphi H'$ et donc $\forall a \in \alpha^{\varphi}_{e_0,s}(H)$ $\varphi H(a) = \varphi H'(a)$ soit $\varphi H = \varphi H'$ et finalement $T^{\varphi}_{e_0}H = T^{\varphi}_{e_0}H'$, d'où l'unicité de $T^{\varphi}_{e_0}H$.

Si $T^{\varphi}_{e_0}A \times T^{\varphi}_{e_0}B$ existe dans $T^{\varphi}_{e_0}C_s$ alors ce dernier produit est isomorphe à $T^{\varphi}_{e_0}(A \times B)$ et s'il en est ainsi pour tout produit choisi dans C_s alors $T^{\varphi}_{e_0}$ préserve les produits choisis de deux. ∇

5.2 PRODUITS FIBRES DANS LES ESPACES DE JETS

Rappelons que Φ^0 est la sous-catégorie de Φ formée des morphismes préservant toutes les unités de C et que $\varphi \in \Phi^c$ signifie qu'on a :

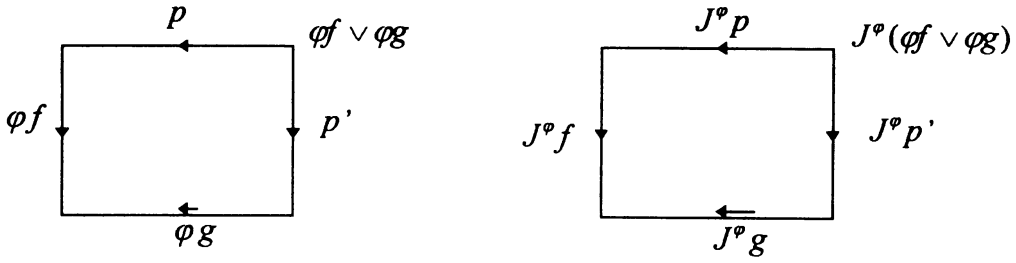
(1) $\varphi \in \Phi^0$, et
(2) f et g étant deux morphismes de C tels que $\varphi f \vee \varphi g$ existe dans C on a :

$$\forall (t,t') \in C^2 \ (\varphi(f.t) = \varphi(g.t') \ \Rightarrow \ \varphi f.\varphi t = \varphi g.\varphi t').$$

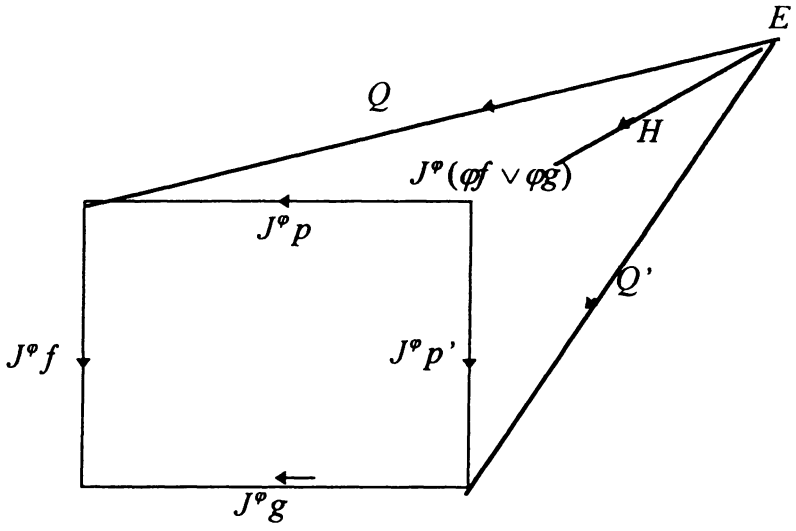
5.2.1 PROPOSITION

Si f et g sont deux morphismes de C tels que $\varphi f \vee \varphi g$ existe, et si on a $\varphi \in \Phi^c$ alors $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g)$ est un produit fibré dans $J^{\varphi}C$. On posera donc $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g) = J^{\varphi} f \vee J^{\varphi} g$.

Δ Considérons dans C le carré cartésien suivant et son image par J^{φ} dans $J^{\varphi}C$.



Sachant que $\varphi \in \Phi^0$, φ est alors idempotent et dans ce cas (4.1.4 3-) $J^{\varphi}\varphi f = J^{\varphi} f$ et $J^{\varphi}\varphi g = J^{\varphi} g$. J^{φ} étant un foncteur ; la commutativité du premier carré entraîne celle du deuxième. Il nous reste à montrer que $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g)$ est un produit fibré dans $J^{\varphi}C$. Pour cela on considère dans $J^{\varphi}C$ le diagramme suivant où $J^{\varphi} f.Q = J^{\varphi} g.Q'$.



Comme J^φ est surjectif il existe q et q' dans C tels que $Q = J^\varphi q$ et $Q' = J^\varphi q'$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} J^\varphi f.Q = J^\varphi g.Q' &\Leftrightarrow J^\varphi f.J^\varphi q = J^\varphi g.J^\varphi q' \\ &\Leftrightarrow J^\varphi(f.q) = J^\varphi(g.q') \\ &\Rightarrow \varphi(f.q) = \varphi(g.q') \\ &\Rightarrow \varphi f.\varphi q = \varphi g.\varphi q' \qquad (\text{car } \varphi \in \Phi^c) \end{aligned}$$

De l'existence de $\varphi f \vee \varphi g$ et de cette dernière égalité, il résulte l'existence d'un unique h tel que $\varphi q = p.h$ et $\varphi q' = p'.h$.

D'où l'on déduit :

$$J^\varphi(\varphi q) = J^\varphi(p.h) \qquad J^\varphi(\varphi q') = J^\varphi(p'.h)$$
$$J^\varphi q = J^\varphi p.J^\varphi h \qquad J^\varphi q' = J^\varphi p'.J^\varphi h$$
$$Q = J^\varphi p.J^\varphi h \qquad Q' = J^\varphi p'.J^\varphi h,$$

puis l'existence de $H = J^\varphi h$ tel que $Q = J^\varphi p.H$ et $Q' = J^\varphi p'.H$. Reste à montrer qu'un tel H est unique.

Supposons qu'il existe $H' = J^\varphi h'$ tel que $J^\varphi q = J^\varphi p.J^\varphi h' = J^\varphi(p.h')$ et $J^\varphi q' = J^\varphi p'.J^\varphi h' = J^\varphi(p'.h')$, on en déduit $J^\varphi q = J^\varphi p.J^\varphi h = J^\varphi p.J^\varphi h'$ puis $J^\varphi q = J^\varphi(p.h) = J^\varphi(p.h')$ et donc $\varphi q = \varphi(p.h) = \varphi(p.h')$ et finalement $\varphi p.\varphi h = \varphi p.\varphi h'$ (car $\varphi \in \Phi^c$). La factorisation de φq étant unique on est conduit à $\varphi h = \varphi h'$, soit $J^\varphi h = J^\varphi h'$, d'où $H=H'$, ce qui prouve l'unicité de H et achève de montrer que $J^\varphi(\varphi f \vee \varphi g)$ est un produit fibré. $J^\varphi(\varphi f \vee \varphi g)$ est donc un produit fibré au dessus de $J^\varphi f$ et $J^\varphi g$, l'isomorphisme de $J^\varphi f \vee J^\varphi g$ avec $J^\varphi(\varphi f \vee \varphi g)$ résulte immédiatement

de la définition du produit fibré dans une catégorie, c'est pourquoi nous identifions $J^{\varphi}f \vee J^{\varphi}g$ avec $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g)$ en posant $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g) = J^{\varphi}f \vee J^{\varphi}g$. ∇

Comme nous le verrons au paragraphe 6.1, au cours de l'étude d'un exemple particulièrement important, il est possible que φ ne soit pas cartésien et qu'on vérifie néanmoins (quand $\varphi f \vee \varphi g$ existe) que $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g)$ est un produit fibré. C'est la raison pour laquelle nous donnons la définition suivante.

DEFINITION

J^{φ} est cartésien si et seulement si :

1- $\varphi \in \Phi^0$, et

2- si $\varphi f \vee \varphi g$ existe alors $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g)$ est un produit fibré et dans ce cas on pose $J^{\varphi}(\varphi f \vee \varphi g) = J^{\varphi}f \vee J^{\varphi}g$.

On peut donc reformuler la proposition 5.2.1 comme suit : si φ est cartésien alors J^{φ} est cartésien.

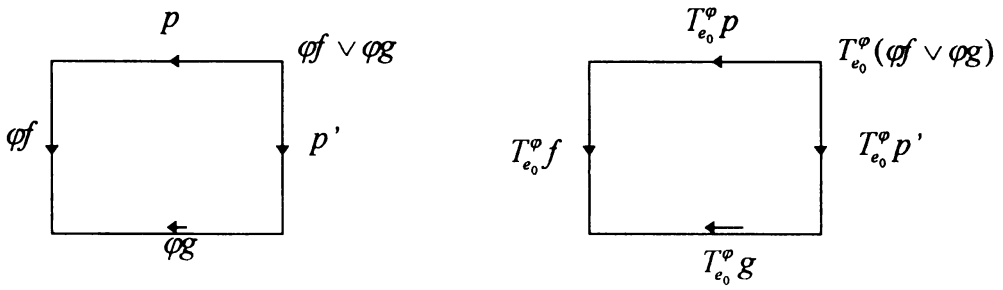
5.2.2 PROPOSITION

On suppose C e_0-transitive et telle que $\forall (f,g) \in C^2 \; T^{\varphi}_{e_0}f = T^{\varphi}_{e_0}g \Rightarrow \varphi f = \varphi g$.

Si f et g sont deux morphismes de C tels que $\varphi f \vee \varphi g$ existe, et si J^{φ} est cartésien alors $T^{\varphi}_{e_0}(\varphi f \vee \varphi g)$ est un produit fibré dans $T^{\varphi}_{e_0}C$. On posera donc $T^{\varphi}_{e_0}(\varphi f \vee \varphi g) = T^{\varphi}_{e_0}f \vee T^{\varphi}_{e_0}g$.

Δ Considérons dans C le carré cartésien suivant et son image par $T^{\varphi}_{e_0}$ dans $T^{\varphi}_{e_0}C$.

Sachant que $\varphi \in \Phi^0$, φ est alors idempotent, il en résulte qu'on a $T^{\varphi}_{e_0}\varphi f = T^{\varphi}_{e_0}f$ et $T^{\varphi}_{e_0}\varphi g = T^{\varphi}_{e_0}g$.

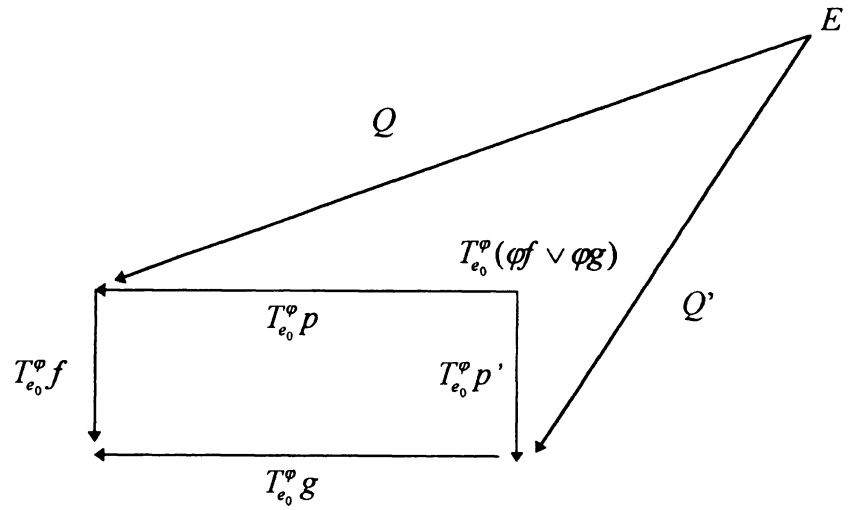


Montrons qu'on a $T^{\varphi}_{e_0}\varphi f = T^{\varphi}_{e_0} f$. Supposons qu'on ait $f \in C(e,e')$ alors on a $\varphi f \in C(e,e')$ (en raison de 1.1.3 1-) et les applications suivantes : $T^{\varphi}_{e_0} f : T^{\varphi}_{e_0} e \to T^{\varphi}_{e_0} e'$, $T^{\varphi}_{e_0}\varphi f : T^{\varphi}_{e_0} e \to T^{\varphi}_{e_0} e'$. Pour tout X de $T^{\varphi}_{e_0} e$ de la forme $X = J^{\varphi} k$ on a :

$$\begin{aligned}
\left(T^{\varphi}_{e_0}\varphi f\right)(X) &= J^{\varphi}(\varphi f . k) \\
&= J^{\varphi}(\varphi(\varphi f . k)) \qquad (\varphi \in \Phi^0) \\
&= J^{\varphi}(\varphi(f . k)) \qquad (\varphi \in \Phi^0) \\
&= J^{\varphi}(f . k) \qquad (\varphi \in \Phi^0) \\
&= \left(T^{\varphi}_{e_0} f\right)(X)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit $T^{\varphi}_{e_0}\varphi f = T^{\varphi}_{e_0} f$.

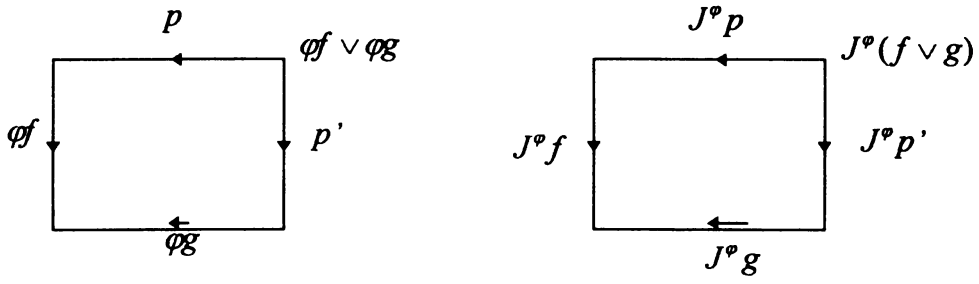
$T^{\varphi}_{e_0}$ étant un foncteur ; la commutativité du premier carré entraîne celle du deuxième. Il nous reste à montrer que $T^{\varphi}_{e_0}(\varphi f \vee \varphi g)$ est un produit fibré dans $T^{\varphi}_{e_0} C$. Pour cela on considère dans $T^{\varphi}_{e_0} C$ le diagramme suivant où $T^{\varphi}_{e_0} f . Q = T^{\varphi}_{e_0} g . Q'$.



Comme $T^{\varphi}_{e_0}$ est surjectif il existe q et q' dans C tels que $Q = T^{\varphi}_{e_0} q$ et $Q' = T^{\varphi}_{e_0} q'$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
T^{\varphi}_{e_0} f \circ Q = T^{\varphi}_{e_0} g \circ Q' &\Leftrightarrow T^{\varphi}_{e_0} f \circ T^{\varphi}_{e_0} q = T^{\varphi}_{e_0} g \circ T^{\varphi}_{e_0} q' \\
&\Leftrightarrow T^{\varphi}_{e_0}(f . q) = T^{\varphi}_{e_0}(g . q') \\
&\Rightarrow \varphi(f . q) = \varphi(g . q') \qquad \text{(hypothèse)} \\
&\Rightarrow J^{\varphi}(f . q) = J^{\varphi}(g . q') \qquad (J^{\varphi} \text{ cartésien}) \\
&\Rightarrow J^{\varphi} f . J^{\varphi} q = J^{\varphi} g . J^{\varphi} q'
\end{aligned}$$

Comme J^{φ} est cartésien et sachant que $\varphi f \vee \varphi g$ existe on sait alors que $J^{\varphi} f \vee J^{\varphi} g = J^{\varphi}(f \vee g)$, il en résulte que les deux carrés suivants sont cartésiens.



On a donc $J^\varphi f.J^\varphi p = J^\varphi g.J^\varphi p'$ et $J^\varphi f.J^\varphi q = J^\varphi g.J^\varphi q'$, il en résulte l'existence d'un unique $J^\varphi h$ tel que $J^\varphi q = J^\varphi p.J^\varphi h$ et $J^\varphi q' = J^\varphi p'.J^\varphi h$.

D'où l'on déduit successivement :

$$J^\varphi q = J^\varphi(p.h) \qquad J^\varphi q' = J^\varphi(p'.h)$$
$$\varphi q = \varphi(p.h) \qquad \varphi q' = \varphi(p'.h),$$

puis

$$T^\varphi_{e_0}(\varphi q) = T^\varphi_{e_0}(p.h) \qquad T^\varphi_{e_0}(\varphi q') = T^\varphi_{e_0}(p'.h)$$
$$T^\varphi_{e_0} q = T^\varphi_{e_0} p \circ T^\varphi_{e_0} h \qquad T^\varphi_{e_0} q' = T^\varphi_{e_0} p' \circ T^\varphi_{e_0} h$$
$$Q = T^\varphi_{e_0} p \circ T^\varphi_{e_0} h \qquad Q' = T^\varphi_{e_0} p' \circ T^\varphi_{e_0} h,$$

d'où l'existence de $H = T^\varphi_{e_0} h$ tel que $Q = T^\varphi_{e_0} p \circ H$ et $Q' = T^\varphi_{e_0} p' \circ H$. Reste à montrer qu'un tel H est unique.

Supposons qu'il existe $H' = T^\varphi_{e_0} h'$ tel que $T^\varphi_{e_0} q = T^\varphi_{e_0} p \circ T^\varphi_{e_0} h'$ et $T^\varphi_{e_0} q' = T^\varphi_{e_0} p' \circ T^\varphi_{e_0} h'$. On a alors $T^\varphi_{e_0} q = T^\varphi_{e_0}(p.h') = T^\varphi_{e_0}(p.h)$ et d'après les hypothèses on a $\varphi q = \varphi(p.h') = \varphi(p.h)$, puis $J^\varphi q = J^\varphi(p.h) = J^\varphi(p.h')$, $J^\varphi q = J^\varphi p.J^\varphi h = J^\varphi p.J^\varphi h'$.

Comme J^φ est cartésien, la factorisation de $J^\varphi q$ est unique on en déduit $J^\varphi h = J^\varphi h'$, soit $\varphi h' = \varphi h$ et donc $T^\varphi_{e_0} h' = T^\varphi_{e_0} h$, d'où l'unicité de H. $T^\varphi_{e_0}(\varphi f \vee \varphi g)$ est donc un produit fibré au dessus de $T^\varphi_{e_0} f$ et $T^\varphi_{e_0} g$.

Nous identifierons désormais $T^\varphi_{e_0} f \vee T^\varphi_{e_0} g$ avec $T^\varphi_{e_0}(\varphi f \vee \varphi g)$ en posant $T^\varphi_{e_0} f \vee T^\varphi_{e_0} g = T^\varphi_{e_0}(\varphi f \vee \varphi g)$. ∇

Rappelons qu'on utilise « $\times$ » et « $\times$ » respectivement pour noter le produit cartésien usuel et pour noter un produit choisi dans une catégorie.

5.2.3 PRODUIT FIBRE DANS C_s

On va dans un premier temps donner un sens à la notion de produit fibré dans C_s, puis ceci étant établi, préciser par une proposition dans quelle mesure les produits fibrés sont préservés par les foncteurs $T_{e_0}^{\varphi}$.

On considère les morphismes $A \xrightarrow{F} D$ et $B \xrightarrow{G} D$ de C_s. On a alors :

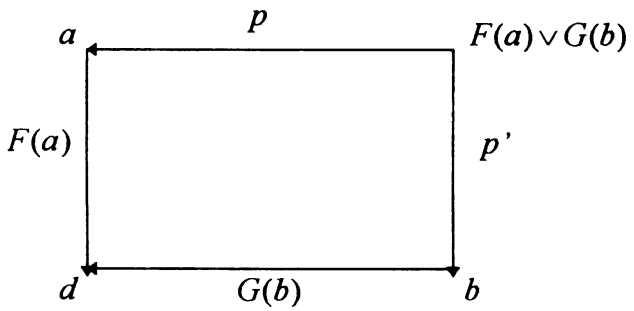
$$F: A \to C(A,D) \qquad \text{et} \qquad G: B \to C(B,D)$$
$$a \mapsto (a \xrightarrow{F(a)} \beta(F(a))) \qquad b \mapsto (b \xrightarrow{G(b)} \beta(G(b)))$$

On pose $E = \{(a,b) \in A \times B / \beta(F(a)) = \beta(G(b))\}$. En supposant $E \neq \varnothing$ et C tel que pour tout (a,b) de E, $F(a) \vee G(b)$ existe.

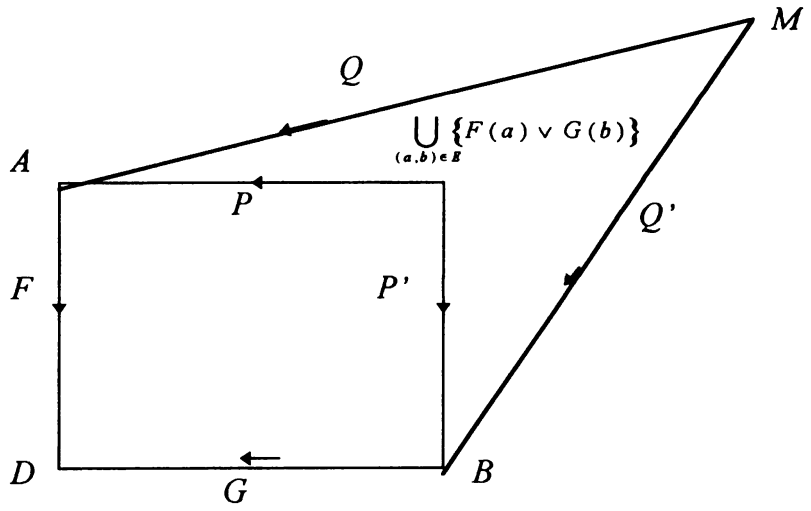
On montre alors que $F \vee G$ est défini par :

$$F \vee G = \bigcup_{(a,b) \in E} \{F(a) \vee G(b)\}.$$

C est tel que pour tout $(a,b) \in E$ le carré suivant est cartésien ; les morphismes p et p' font évidemment partie du choix de $F(a) \vee G(b)$. On est donc amené à poser $P(F(a) \vee G(b)) = p$ et $P'(F(a) \vee G(b)) = p'$ avec $P: E \to C(E,A)$ et $P': E \to C(E,B)$, il en résulte qu'on a $F^{\circ} P = G^{\circ} P'$.



Afin d'établir que $F \vee G = \bigcup_{(a,b) \in E} \{F(a) \vee G(b)\}$ est effectivement un produit fibré dans C_s on considère le diagramme suivant.



Ce diagramme est tel que $F^{\circ}Q = G^{\circ}Q'$. On va établir qu'il existe un unique $M \xrightarrow{H} \bigcup_{(a,b)\in E}\{F(a)\vee G(b)\}$ tel que $Q = P^{\circ}H$ et $Q' = P'^{\circ}H$.

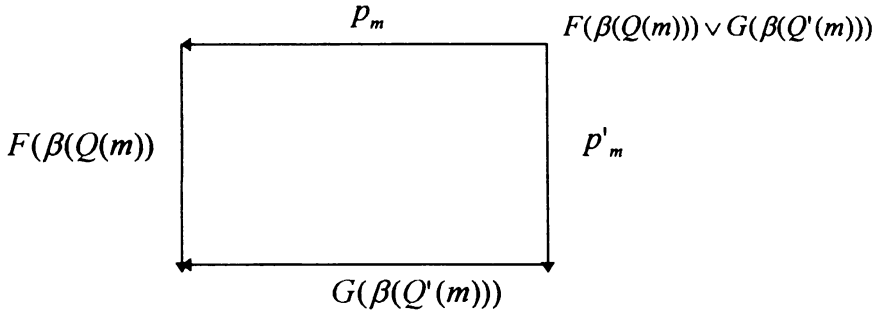
Pour tout m de M on a $(F^{\circ}Q)(m) = F(\beta(Q(m))).Q(m)$ avec $\beta(Q(m)) \in A$, $(G^{\circ}Q')(m) = G(\beta(Q'(m))).Q'(m)$ et $\beta(Q'(m)) \in B$. On en déduit :

$$(F^{\circ}Q)(m) = (G^{\circ}Q)(m) \Rightarrow \beta((F^{\circ}Q)(m)) = \beta((G^{\circ}Q)(m))$$
$$\Rightarrow \beta(F(\beta(Q(m)))) = \beta(G(\beta(Q'(m)))).$$

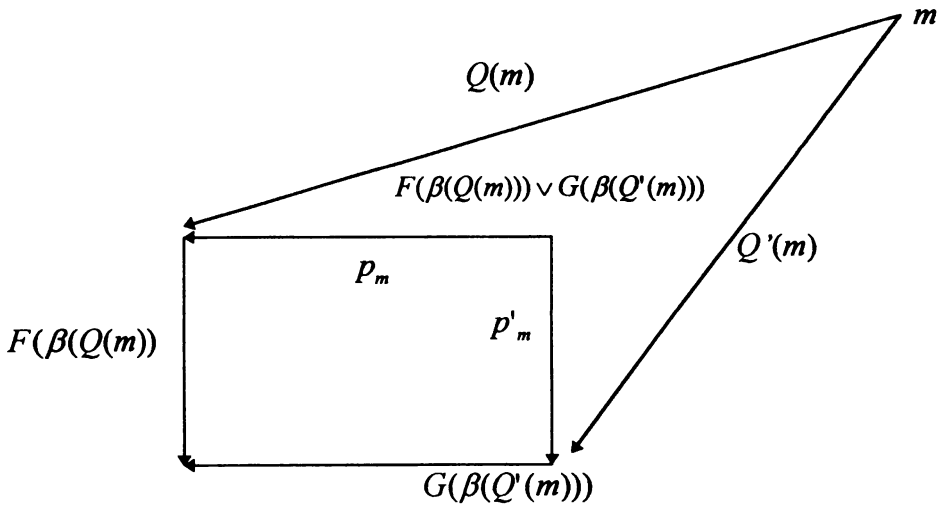
Il en résulte $(\beta(Q(m)),\beta(Q'(m))) \in E$.

Posons (afin de simplifier les notations) $P(F(\beta(Q(m))) \vee G(\beta(Q'(m)))) = p_m$ ainsi que $P'(F(\beta(Q(m))) \vee G(\beta(Q'(m)))) = p'_m$.

Le carré suivant est alors cartésien.



Considérons dans C le diagramme suivant



Pour tout $m \in M$ le carré précédent est cartésien de par sa construction, compte tenu de la définition de P et P' il en résulte $F^{\circ} P = G^{\circ} P'$, il existe donc un unique h_m tel que $Q(m) = p_m.h_m$, $Q'(m) = p'_m.h_m$ avec $m \xrightarrow{h_m} F(\beta(Q(m))) \vee G(\beta(Q'(m)))$.

On pose:

$$H: M \to C\left(M, \bigcup_{(a,b)\in E}\{F(a) \vee G(b)\}\right).$$
$$m \mapsto H(m) = h_m$$

Reste à montrer qu'on a $Q = P^{\circ} H$ et $Q' = P'^{\circ} H$. Soit à montrer que pour tout $m \in M$ on a $Q(m) = (P^{\circ} H)(m)$ et $Q'(m) = (P'^{\circ} H)(m)$. Or pour tout $m \in M$ on a :

$$\begin{aligned}(P^{\circ} H)(m) &= P(\beta(H(m))).H(m)\\ &= P(\beta(h_m)).h_m\\ &= P(F(\beta(Q(m))) \vee G(\beta(Q'(m)))).h_m\\ &= p_m.h_m\\ &= Q(m).\end{aligned}$$

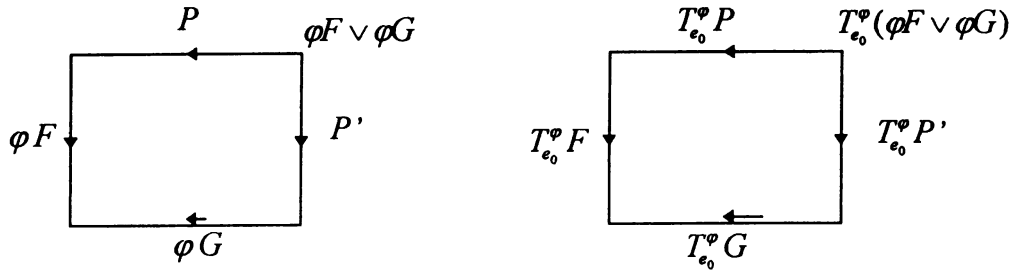
On a donc $Q = P^{\circ} H$, on montre de même $Q' = P'^{\circ} H$, on peut désormais conclure en affirmant que F, P, G et P' forment un carré cartésien et qu'en conséquence si $F \vee G$ existe alors $\bigcup_{(a,b)\in E}(F(a) \vee G(b))$ est isomorphe à $F \vee G$ On identifiera désormais (en raison de cet isomorphisme) $F \vee G$ et $\bigcup_{(a,b)\in E}\{F(a) \vee G(b)\}$. On peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION

On suppose C e_0-transitive et telle que :
$\forall (F,G) \in C_s^2 \ \left(T_{e_0}^{\varphi} F = T_{e_0}^{\varphi} G\right) \Rightarrow \left(\alpha_{e_0,s}^{\varphi}(F) = \alpha_{e_0,s}^{\varphi}(G) \ \forall e \in \alpha_{e_0,s}^{\varphi}(F) \ \varphi F(e) = \varphi G(e)\right)$.

Si F et G sont deux morphismes de C_s tels que $\varphi F \vee \varphi G$ existe dans C_s et si J^{φ} est cartésien alors $T_{e_0}^{\varphi}(\varphi F \vee \varphi G)$ est un produit fibré dans $T_{e_0}^{\varphi} C_s$. On posera donc $T_{e_0}^{\varphi}(\varphi F \vee \varphi G) = T_{e_0}^{\varphi} F \vee T_{e_0}^{\varphi} G$.

Δ On considère dans C_s le carré cartésien suivant et son image par $T_{e_0}^{\varphi}$ dans $T_{e_0}^{\varphi} C_s$.



On pose $F: A \to C(A,D)$ $\qquad$ $G: B \to C(B,D)$

$a \mapsto (a \xrightarrow{F(a)} \beta(F(a)))$ $\qquad$ $b \mapsto (b \xrightarrow{G(b)} \beta(G(b)))$

et $\qquad E = \{(a,b) \in A \times B \,/\, \beta(F(a)) = \beta(G(b))\}$.

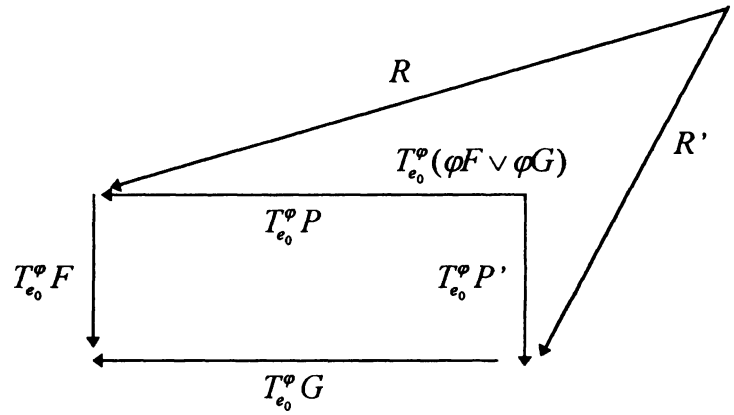
L'existence de $\varphi F \vee \varphi G$ dans C_s signifie que que pour tout (a,b) de E, le produit fibré $\varphi F(a) \vee \varphi G(b)$ existe dans C. De plus comme $\varphi \in \Phi^0$, φ est alors idempotent, il en résulte comme en 5.2.2 qu'on a $T_{e_0}^{\varphi} \varphi F = T_{e_0}^{\varphi} F$ et $T_{e_0}^{\varphi} \varphi G = T_{e_0}^{\varphi} G$. En effet, en supposant qu'on ait $F: A \to C(A,D)$, il vient $T_{e_0}^{\varphi} F: T_{e_0}^{\varphi} A \to T_{e_0}^{\varphi} D$ définie par $X \mapsto F(a).X = J^{\varphi}(F(a).f)$, avec $X = J^{\varphi} f$, $f \in C(e_0, a)$ et $a \in A$. On a donc pour tout X de $T_{e_0}^{\varphi} A$:

$$\begin{aligned}
\left(T_{e_0}^{\varphi}(\varphi F)\right)(X) &= J^{\varphi}(\varphi F(a).f) \\
&= J^{\varphi}(\varphi((\varphi F)(a).f)) \qquad (\varphi \text{ idempotent}) \\
&= J^{\varphi}(\varphi(F(a).f)) \\
&= J^{\varphi}(F(a).f) \\
&= \left(T_{e_0}^{\varphi} F\right)(X),
\end{aligned}$$

d'où $T_{e_0}^{\varphi}(\varphi F) = T_{e_0}^{\varphi} F$.

$T^{\varphi}_{e_0}$ étant un foncteur, la commutativité du premier carré entraîne celle du second. Il nous reste à montrer que $T^{\varphi}_{e_0}(\varphi F \vee \varphi G)$ est un produit fibré dans $T^{\varphi}_{e_0}C_s$.

Pour cela considérons dans $T^{\varphi}_{e_0}C_s$ le diagramme suivant, où $T^{\varphi}_{e_0}F \circ R = T^{\varphi}_{e_0}G \circ R'$.



Comme $T^{\varphi}_{e_0}$ est surjectif, il existe Q et Q' dans C_s tels que $R = T^{\varphi}_{e_0}Q$ et $R' = T^{\varphi}_{e_0}Q'$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} T^{\varphi}_{e_0}F \circ R = T^{\varphi}_{e_0}G \circ R' &\Leftrightarrow T^{\varphi}_{e_0}F \circ T^{\varphi}_{e_0}Q = T^{\varphi}_{e_0}G \circ T^{\varphi}_{e_0}Q' \\ &\Leftrightarrow T^{\varphi}_{e_0}(F^{\circ}Q) = T^{\varphi}_{e_0}(G^{\circ}Q') \\ &\Rightarrow \varphi(F^{\circ}Q) = \varphi(G^{\circ}Q') \qquad \text{(hypothèse).} \end{aligned}$$

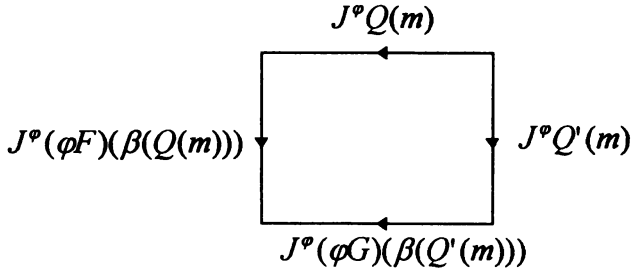
Comme $\varphi \in \Phi^0$ on a donc pour tout m de $\alpha^{\varphi}_{e_0,s}(F^{\circ}Q) = \alpha^{\varphi}_{e_0,s}(G^{\circ}Q')$:

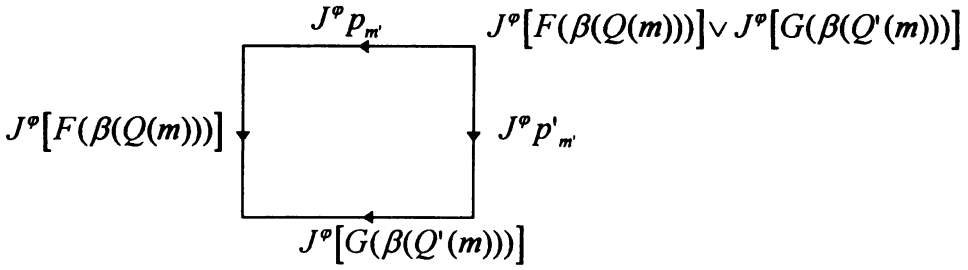
$$\begin{aligned} &(\varphi(F^{\circ}Q))(m) = (\varphi(G^{\circ}Q'))(m) \\ \Leftrightarrow\ &\varphi(F(\beta(Q(m))).Q(m)) = \varphi(G(\beta(Q'(m))).Q'(m)) \\ \Leftrightarrow\ &J^{\varphi}(F(\beta(Q(m))).Q(m)) = J^{\varphi}(G(\beta(Q'(m))).Q'(m)) \\ \Leftrightarrow\ &J^{\varphi}F(\beta(Q(m))).J^{\varphi}Q(m) = J^{\varphi}G(\beta(Q'(m))).J^{\varphi}Q'(m) \\ \Leftrightarrow\ &J^{\varphi}(\varphi F)(\beta(Q(m))).J^{\varphi}Q(m) = J^{\varphi}(\varphi G)(\beta(Q'(m))).J^{\varphi}Q'(m) \end{aligned}$$

On a $\beta(Q(m)) \in A$ et $\beta(Q'(m)) \in B$, en conséquence $(\beta(Q(m)), \beta(Q'(m))) \in E$ car $\beta((\varphi F)(\beta(Q(m)))) = \beta((\varphi G)(\beta(Q'(m))))$. Comme $(\varphi F)(\beta(Q(m))) \vee (\varphi G)(\beta(Q'(m)))$ existe, comme J^{φ} est cartésien on a donc :

$$J^{\varphi}\left[(\varphi F)(\beta(Q(m))) \vee (\varphi G)(\beta(Q'(m)))\right] = J^{\varphi}\left[F(\beta(Q(m)))\right] \vee J^{\varphi}\left[G(\beta(Q'(m)))\right].$$

Autrement dit, nous avons le carré suivant commutatif et le second qui est cartésien car $J^{\varphi}(\varphi F)(\beta(Q(m))) = J^{\varphi}F(\beta(Q(m)))$ et $J^{\varphi}(\varphi G)(\beta(Q(m))) = J^{\varphi}G(\beta(Q(m)))$.





Il existe alors un unique jet noté $J^{\varphi}h_m$ tel que :

$J^{\varphi}Q(m) = J^{\varphi}p_{m'}.J^{\varphi}h_m$, $J^{\varphi}Q'(m) = J^{\varphi}p'_{m'}.J^{\varphi}h_m$ où $m' = \varphi F(\beta(Q(m))) \vee \varphi G(\beta(Q'(m)))$.

Sachant que $\alpha(h_m) = \alpha(Q(m)) = m$ on définit l'application :

$$H : \alpha^{\varphi}_{e_0,s}(Q) \to C(\alpha^{\varphi}_{e_0,s}(Q), \varphi F \vee \varphi G).$$
$$m \mapsto H(m) = \varphi h_m$$

Cette application est bien entendu une section locale de α donc un morphisme de C_s tel que $H(m)$ ne dépend que du jet $J^{\varphi}h_m$. On a également l'application :

$$P : \varphi F \vee \varphi G \to C(\varphi F \vee \varphi G, A)$$
$$m' \mapsto P(m') = \varphi p_{m'}$$

qui est encore une section locale de α telle que $P(m')$ ne dépend que du jet $J^{\varphi}p_{m'}$. On a de manière tout à fait analogue l'application : $P' : \varphi F \vee \varphi G \to C(\varphi F \vee \varphi G, B)$.

On a donc pour tout m de $\alpha^{\varphi}_{e_0,s}(Q) = \alpha^{\varphi}_{e_0,s}(Q')$:

$$J^{\varphi}Q(m) = J^{\varphi}p_{m'}.J^{\varphi}h_m \Leftrightarrow J^{\varphi}Q(m) = J^{\varphi}P(\beta(H(m))).J^{\varphi}H(m)$$
$$\Leftrightarrow J^{\varphi}Q(m) = J^{\varphi}(P(\beta(H(m))).H(m))$$
$$\Leftrightarrow J^{\varphi}Q(m) = J^{\varphi}(P^{\circ}H)(m)$$

d'où l'on déduit

$$\varphi Q(m) = \varphi(P \circ H)(m)$$
$$T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H)$$
$$T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0} P \circ T^{\varphi}_{e_0} H .$$

En effet, si on suppose que pour tout m de $\alpha^{\varphi}_{e_0,s}(Q)$ on a $\varphi Q(m) = \varphi(P \circ H)(m)$ alors pour tout X de la forme $J^{\varphi}k$ tel que $\left(T^{\varphi}_{e_0} Q\right)(X)$ soit défini on aura :

$$\begin{aligned}\left(T^{\varphi}_{e_0} Q\right)(X) &= J^{\varphi}(Q(\beta(f)).f) \\ &= J^{\varphi}(\varphi Q(\beta(f)).f) \\ &= J^{\varphi}(\varphi(P \circ H)(\beta(f)).f) \\ &= J^{\varphi}((P \circ H)(\beta(f)).f) \\ &= \left(T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H)\right)(X)\end{aligned}$$

d'où $T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H)$. De la même manière on montre $T^{\varphi}_{e_0} Q' = T^{\varphi}_{e_0}(P' \circ H)$.

Montrons qu'un tel $T^{\varphi}_{e_0} H$ est unique. Supposons qu'il existe $T^{\varphi}_{e_0} H'$ tel que $R = T^{\varphi}_{e_0} P \circ T^{\varphi}_{e_0} H'$ et $R' = T^{\varphi}_{e_0} P' \circ T^{\varphi}_{e_0} H'$, ce qui équivaut à $T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0} P \circ T^{\varphi}_{e_0} H'$ et $T^{\varphi}_{e_0} Q' = T^{\varphi}_{e_0} P' \circ T^{\varphi}_{e_0} H'$. On a donc $T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H')$, $T^{\varphi}_{e_0}(Q') = T^{\varphi}_{e_0}(P' \circ H)$.

De $T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0} P \circ T^{\varphi}_{e_0} H$ et $T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0} P \circ T^{\varphi}_{e_0} H'$ on déduit :

$T^{\varphi}_{e_0} Q = T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H) = T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H')$,

puis pour tout m de $\alpha^{\varphi}_{e_0,s}(F \circ Q) = \alpha^{\varphi}_{e_0,s}(G \circ Q')$ on a successivement :

$$\left(T^{\varphi}_{e_0} Q\right)(m) = \left(T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H)\right)(m) = \left(T^{\varphi}_{e_0}(P \circ H')\right)(m)$$
$$\varphi Q(m) = \varphi(P \circ H)(m) = \varphi(P \circ H')(m)$$
$$J^{\varphi} Q(m) = J^{\varphi}(P(\beta(H(m))).H(m)) = J^{\varphi}(P(\beta(H'(m))).H'(m))$$
$$J^{\varphi} Q(m) = J^{\varphi} p_{m'} . J^{\varphi} h_m = J^{\varphi} P(\beta(H'(m))).J^{\varphi} H'(m) .$$

Pour un m donné $J^{\varphi} p_{m'}$ ne dépend que de m' et donc de φ, F, G et m et non de $J^{\varphi} h_m$ ou de $J^{\varphi} H'(m)$. Autrement dit on a $J^{\varphi} p_{m'} = J^{\varphi} P(\beta(H'(m)))$ et $\beta(H'(m)) = \beta(H(m))$.

Comme la factorisation de $J^{\varphi} Q(m)$ est unique dans $J^{\varphi} C$ il s'en suit que pour tout m de $\alpha^{\varphi}_{e_0,s}(Q) = \alpha^{\varphi}_{e_0,s}(Q')$ on a :

$$J^{\varphi} H(m) = J^{\varphi} H'(m) \Leftrightarrow \varphi H(m) = \varphi H'(m) ,$$

d'où l'on tire $\varphi H = \varphi H'$ puis $T^{\varphi}_{e_0} H = T^{\varphi}_{e_0} H'$. De là s'en suit l'unicité de $T^{\varphi}_{e_0} H$.

$T^{\varphi}_{e_0}(\varphi F \vee \varphi G)$ est donc un produit fibré au dessus de $T^{\varphi}_{e_0}F$ et de $T^{\varphi}_{e_0}G$. Nous identifierons désormais $T^{\varphi}_{e_0}F \vee T^{\varphi}_{e_0}G$ avec $T^{\varphi}_{e_0}(\varphi F \vee \varphi G)$ en posant $T^{\varphi}_{e_0}F \vee T^{\varphi}_{e_0}G = T^{\varphi}_{e_0}(\varphi F \vee \varphi G)$. ∇

On remarquera que le même genre de considérations conduit à l'existence et au calcul dans C_s ou $T^{\varphi}_{e_0}C_s$ de limites projectives tout à fait générales.

6 EXEMPLES

6.1 JETS DE C.EHRESMANN

Nous nous placons de nouveau dans l'algèbre de contact (k,Φ,J^lC_p) longuement décrite en 1.1.2 8-b-.

6.1.1 PRODUIT FIBRE DANS LA CATEGORIE DES JETS

Tous les résultats établis dans le paragraphe 5.2 sont liés au fait que φ ou J^φ est cartésien. Vouloir construire des produits fibrés dans les catégories $J^\varphi C$, $T^\varphi_{e_0}C$ ou $T^\varphi_{e_0}C_s$ nécéssite d'avoir pour le moins l'existence de $\varphi f \vee \varphi g$ (un tel produit fibré a le mérite de ne dépendre que des jets $J^\varphi f$ et $J^\varphi g$, puis d'en prendre l'image par J^φ ou $T^\varphi_{e_0}$, c'est ce que nous avons fait tout au long de ce paragraphe.

Si on examine le cas de l'algèbre de contact (k,Φ,J^lC_p) évoquée en 1.1.2 8-b- on est amené à faire un certain nombre de remarques concernant l'existence d'un produit fibré, existence qui, de manière générale, reste une question délicate.

Si on considère la catégorie des applications r-différentiables entre variétés r-différentiables on sait que le produit fibré de deux telles applications existe quand l'une des deux est une submersion ou si ces deux applications sont transversales.

Rappelons que les applications différentiables $f:A\to C$ et $g:B\to C$ sont transversales si et seulement si $f(A)\cap g(B)\neq\varnothing$ et pour tout $z\in f(A)\cap g(B)$ tel que $z=f(x)=g(y)$ on a, avec les notations classiques, T_zC (espace vectoriel tangent à C en z) qui est égal à la somme des images des applications linéaires tangentes $f'(x):T_xA\to T_zC$ et $g'(y):T_yB\to T_zC$, soit $T_zC=\mathrm{Im}(f'(x))+\mathrm{Im}(g'(y))$. Dans le cas où f et g sont transversales on sait que $f\vee g=\{(x,y)\in A\times B/\ f(x)=g(y)\}$ est une sous-variété fermée de $A\times B$.

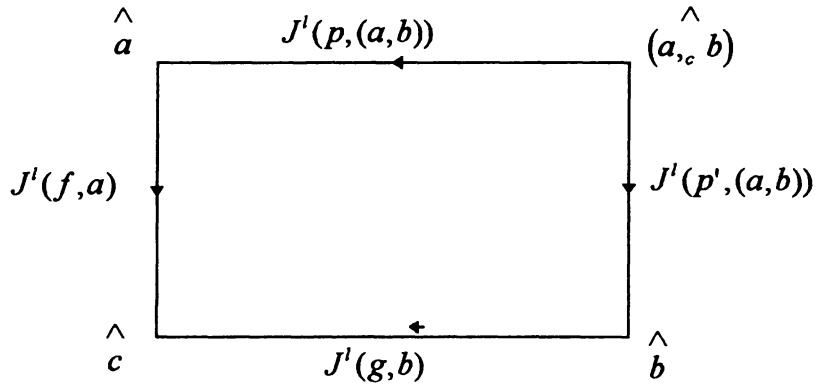
Si on considère $J^l(f,a)$ et $J^l(g,b)$ où $a\in A$, $b\in B$ et tels que $f(a)=g(b)$, le produit fibré des jets est alors défini par :

$$J^l(f,a)\vee J^l(g,b)=\overset{\wedge}{(a,_c\ b)},$$

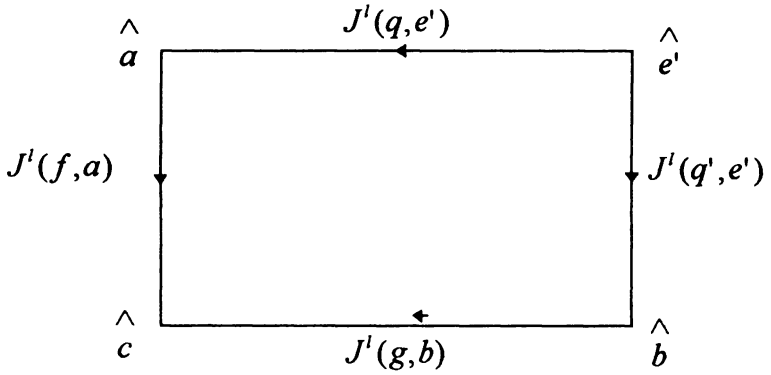
où $\overset{\wedge}{(a,_c\ b)}$ est le germe de (a,b) dans la variété $f\vee g$, soit $\overset{\wedge}{(a,_c\ b)}=J^l\left(Id_{f\vee g},(a,b)\right)$.

Nous notons $\overset{\wedge}{(a,_c\ b)}$ afin de marquer la distinction d'avec $\overset{\wedge}{(a,b)}=J^l\left(Id_{A\cdot B},(a,b)\right)$.

On a donc de manière canonique le carré commutatif suivant où p et p' sont respectivement les projections canoniques du produit cartésien sur son premier facteur et son second facteur.



Supposons qu'il existe e', q, q' tels que le carré suivant soit commutatif, q et q' sont évidemment tels que $q(e') = a$ et $q'(e') = b$.



On a aussi $p(a,b) = a$ et $p'(a,b) = b$. Si on considère l'application $[q,q']$ telle que $[q,q'](e') = (q(e'),q'(e')) = (a,b)$ alors le jet $J^l([q,q'],e')$ est évidemment unique et vérifie $J^l(q,e') = J^l(p,(a,b)).J^l([q,q'],e')$ et $J^l(q',e') = J^l(p',(a,b)).J^l([q,q'],e')$. On prouve ainsi que $(\hat{a},_c b)$ est bien égal à $J^l(f,a) \vee J^l(g,b)$.

Examinons l'action de $\varphi \in \Phi$.

Si on considère que f_φ et g_φ sont transversales, d'aprés ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\varphi\left(J^l(f,a)\right)\vee\varphi\left(J^l(g,b)\right) &= J^l(f_\varphi,a)\vee J^l(g_\varphi,b)\\ &= J^l\left(Id_{f_\varphi\vee g_\varphi},(a,b)\right)\\ &= \left(a\overset{\wedge}{,}_c\, b\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs si $b=f(a)$, $b=f'(a)$ et si f' et g' sont tels qu'on ait :

$$\varphi\left(J^l(g,b).J^l(f,a)\right)=\varphi\left(J^l(g',b).J^l(f',a)\right),$$

alors on en déduit

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\varphi J^l(g,b).\varphi J^l(f,a)\right)=\varphi\left(\varphi J^l(g',b).\varphi J^l(f',a)\right)\\ \Leftrightarrow\ &\varphi\left(J^l(g_\varphi,b).J^l(f_\varphi,a)\right)=\varphi\left(J^l(g'_\varphi,b).J^l(f'_\varphi,a)\right).\end{aligned}$$

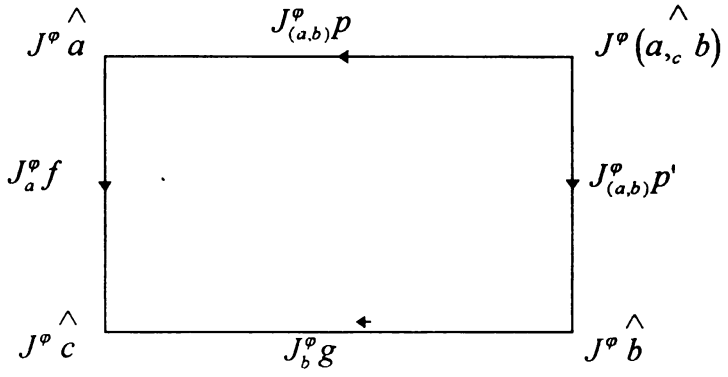
Malheureusement il n'y a aucune raison, en général, d'en déduire $J^l(g_\varphi,b).J^l(f_\varphi,a)=J^l(g'_\varphi,b).J^l(f'_\varphi,a)$ et en conséquence φ ne peut être cartésien.

Essayons alors de construire de manière directe le produit fibré $J^\varphi\left(J^l(f,a)\right)\vee J^\varphi\left(J^l(g,b)\right)$ où $f(a)=g(b)=c$, et montrons que :

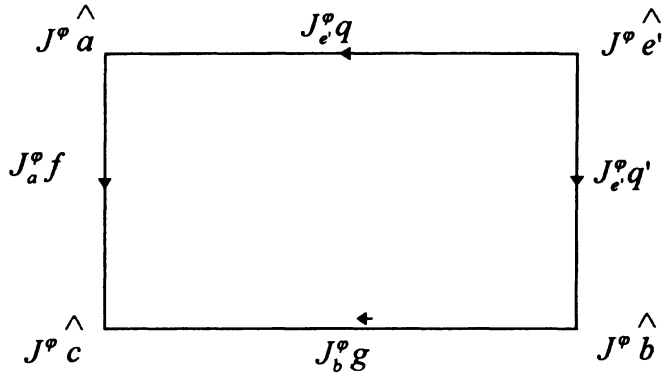
$J^\varphi\left(\varphi J^l(f,a)\vee\varphi J^l(g,b)\right)$ est un produit fibré dans $J^\varphi(J^lC_p)$.

Pour ce faire nous noterons plus simplement : $J^\varphi\left(J^l(f,a)\right)=J^\varphi_a f$.

Le carré suivant est commutatif, compte tenu de toutes les hypothèses et notations avancées précédemment.



Si le carré qui suit est également commutatif,



alors considérons le jet $J^{\varphi}_{e'}[q,q']$ qui évidemment est l'unique jet vérifiant

$$J^{\varphi}_{(a,b)}p.J^{\varphi}_{e'}[q,q'] = J^{\varphi}_{e'}q \text{ et } J^{\varphi}_{(a,b)}p'.J^{\varphi}_{e'}[q,q'] = J^{\varphi}_{e'}q' .$$

Il en résulte que $J^{\varphi}(\hat{a}_{,c}\, b)$ est un produit fibré dans $J^{\varphi}(J^{l}C_{p})$. Nous identifierons donc $J^{\varphi}(\hat{a}_{,c}\, b)$ et $J^{\varphi}_{a}f \vee J^{\varphi}_{b}g$, d'où la relation :

$$J^{\varphi}_{a}f \vee J^{\varphi}_{b}g = J^{\varphi}(\hat{a}_{,c}\, b)$$

Cette dernière égalité conduit à définir pour les foncteurs du type J^{φ} la notion de foncteur cartésien même (et surtout) si φ ne l'est pas. En effet, ce qui a été dit en 5.2.1 revient finalement à dire que si φ est cartésien alors J^{φ} l'est également.

Dans le cas de l'algèbre de contact $(k,\Phi,J^{l}C_{p})$, il est clair que φ généralement n'est pas cartésien alors qu'un calcul direct nous a montré que J^{φ} pouvait l'être moyennant l'hypothèse de transversalité.

6.1.2 FONCTEUR $T^{\varphi}_{e_0}$ SUR $J^{l}C_{p}$

Examinons comment sont définis les foncteurs $T^{\varphi}_{e_0}$ sur C et $T^{\varphi}_{e_0}$ sur C_s quand C est la catégorie des jets locaux définis sur la catégorie C_p des applications indéfiniment différentiables pointées entre variétés indéfiniment différentiables pointées.

On pose $e_0 = \hat{(\mathbf{R},0)} \in \left(J^l C_p\right)_0$ (c.f. 4.5.1), il est clair que $J^l C_p$ est $\hat{(\mathbf{R},0)}$-transitive.

On considère les morphismes $\hat{(A,a)} \xrightarrow{J^l(g,a)} \hat{(B,b)}$ et $\hat{(\mathbf{R},0)} \xrightarrow{J^l(f,0)} \hat{(A,a)}$ dans $J^l C_p$. On a alors :

$$T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\left(J^l(g,a)\right) : T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\hat{(A,a)} \to T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\hat{(B,b)}.$$
$$J^{\varphi}_a f \mapsto J^{\varphi}_a(g.f)$$

6.1.3 FONCTEUR $T^{\varphi}_{e_0}$ SUR $\left(J^l C_p\right)_s$

Considérons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\left(J^l C_p\right)_0$, c'est à dire deux ensembles de germes tels que $\beta\left(\mathcal{F}(\mathcal{A})\right) = \mathcal{B}$ où $\mathcal{F}$ est une section locale de α (rétraction source dans $J^l C_p$).

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \left(J^l C_p\right)(\mathcal{A},\mathcal{B})$$
$$\hat{(A,a)} \mapsto J^l(g,a) = \hat{(A,a)} \xrightarrow{J^l(g,a)} \hat{(B,b)}$$

Précisons alors l'application $T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\mathcal{F}$ avec $T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\mathcal{F} : T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\mathcal{A} \to T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\mathcal{B}$ où l'on a :

$$T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\mathcal{A} = \bigcup_{\hat{(A,a)} \in \mathcal{A}} T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\hat{(A,a)}.$$

Si $X = J^{\varphi}(J^l(f,0)) = J^{\varphi}_0 f$ on a alors :

$$\left(T^{\varphi}_{\hat{(\mathbf{R},0)}}\mathcal{F}\right)(X) = J^{\varphi}\left(\mathcal{F}\left(\hat{(A,a)}\right).\left(J^l(f,0)\right)\right) = J^{\varphi}\left(\mathcal{F}(\beta(X)).X\right)$$

Plus particulièrement si $g : A \to B$ est une application de classe C^{∞} entre variétés de classe C^{∞}, on peut alors lui associer un morphisme dans $\left(J^l C_p\right)_s$ de la manière suivante.

On pose $\mathcal{A} = \bigcup_{a \in A} \hat{(A,a)}$ et $\mathcal{B} = \bigcup_{a \in B} \hat{(B,b)}$ puis on définit l'application suivante ;

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \left(J^l C_p\right)(\mathcal{A},\mathcal{B})$$
$$\hat{(A,a)} \mapsto J^l(g,a) = \hat{(A,a)} \xrightarrow{J^l(g,a)} \hat{(B,b)}$$

qui est une section locale de α .

Si $X = J_0^\varphi f$ on a alors :

$$\left(T^\varphi_{\substack{\wedge \\ (\mathbf{R},0)}} \mathcal{G}\right)(X) = J^\varphi\left(\mathcal{G}\left(\hat{(A,a)}\right).\left(J^1(f,0)\right)\right)$$
$$= J^\varphi\left(\mathcal{G}(\beta(X)).X\right)$$
$$= J^\varphi\left(J^1(g.f,0)\right)$$
$$= J_0^\varphi(g.f).$$

$T^\varphi_{\substack{\wedge \\ (\mathbf{R},0)}} \mathcal{G}$ n'est autre que l'application tangente habituellement notée $T^\varphi g$.

6.2 DIVISIBILITE DANS $(\mathbf{Z},+,\times)$

6.2.1 NEOALGEBRE DE CONTACT DOUBLE

Soit $(\mathbf{Z},+,\times)$ l'anneau commutatif des entiers relatifs et $\varphi\mathbf{Z}$ l'idéal des multiples de φ pour $\varphi \in \mathbf{Z}$. $(\mathbf{Z}/\varphi\mathbf{Z},+,\times)$ est alors l'anneau des entiers modulo φ. On définit l'application $k:\mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ par $(\varphi,z) \mapsto \varphi z$ où φz est le reste de la division euclidienne de z par φ. On vérifie sans peine que $\left(k,\mathbf{Z}^*,(\mathbf{Z},+)\right)$ est une néoalgèbre de contact.

Notons que sur $\mathbf{Z}^*$ on ne définit aucune loi de composition, il n'y a donc pas lieu de vérifier (1) de 1.1.1 . Par contre il est clair qu'on a (2). Vérifions (3).

Si $z = q.\varphi + \varphi z$ et $z' = q'.\varphi + \varphi z'$ alors $z + z' = (b+b').\varphi + \varphi z + \varphi z'$ et $\varphi(z+z') = \varphi(\varphi z + \varphi z')$.

Si on considère toujours l'application k définie précédemment on a une autre structure de néoalgèbre de contact notée $\left(k,\mathbf{Z}^*,(\mathbf{Z},\times)\right)$. Il suffit de vérifier (3) de 1.1.1. Si $z = q.\varphi + \varphi z$ et $z' = q'.\varphi + \varphi z'$ alors $z.z' = b.b'.\varphi^2 + (b.\varphi z' + b'.\varphi z).\varphi + \varphi z.\varphi z'$ et $\varphi(z.z') = \varphi(\varphi z.\varphi z')$.

On a donc une structure de néoalgèbre de contact que nous qualifierons de double , puisque compatible (au sens de 1.1.1) avec les deux lois définies sur $\mathbf{Z}$. On note une telle structure $\left(k,\mathbf{Z}^*,(\mathbf{Z},+,\times)\right)$.

6.2.2 JETS DANS $\left(k,\mathbf{Z}^*,(\mathbf{Z},+)\right)$

Pour $\varphi \neq 0$ on a $J^\varphi z = \left\{z' \in \mathbf{Z} / z' - z \in \varphi\mathbf{Z}\right\}$ et les jets sont donc les classes de congruence autre que la classe de zéro. On peut donc écrire $J^\varphi z = \tilde{z} \in \mathbf{Z}/\varphi\mathbf{Z}$ et $J^\varphi 0 = \varphi\mathbf{Z}$.

Dans la suite $(A,+,.)$, qu'on notera parfois plus simplement A, est une algèbre locale sur **R** dont l'unique idéal maximal est I. On identifie **R.1** avec **R** où **1** est l'unité de $(A,.)$, $(A,+,.)$ étant un anneau commutatif.

6.3 ALGEBRE DE CONTACT DOUBLE SUR $(I,+,.)$

On note Φ un ensemble maximal d'applications linéaires de I dans I qui vérifient :

a- $\forall \varphi \in \Phi \quad \varphi \circ \varphi = \varphi$, et
b- $\forall \varphi \in \Phi \quad \forall \varphi' \in \Phi \quad \varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi$, et
c- $\forall \varphi \in \Phi \quad \forall (i,j) \in I^2 \quad \varphi(i.j) = \varphi(\varphi(i).\varphi(j))$.

6.3.1 PROPOSITION

Pour la composition des applications, Φ est un monoïde abélien.

Δ Montrons que si $\varphi \in \Phi$ et $\varphi' \in \Phi$ alors $\varphi \circ \varphi' \in \Phi$.

a-
$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi') \circ (\varphi \circ \varphi') &= (\varphi' \circ \varphi) \circ (\varphi \circ \varphi') \\ &= \varphi' \circ (\varphi \circ \varphi) \circ \varphi' \\ &= \varphi' \circ \varphi \circ \varphi' \\ &= (\varphi \circ \varphi') \circ \varphi' \\ &= \varphi \circ (\varphi' \circ \varphi') \\ &= \varphi \circ \varphi'\end{aligned}$$

b-
$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi') \circ \psi &= \varphi \circ (\varphi' \circ \psi) \\ &= \varphi \circ (\psi \circ \varphi') \\ &= (\varphi \circ \psi) \circ \varphi' \\ &= (\psi \circ \varphi) \circ \varphi' \\ &= \psi \circ (\varphi \circ \varphi')\end{aligned}$$

c-
$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi')(i.j) &= \varphi\left[\varphi'(\varphi'(i).\varphi'(j))\right] \\ &= (\varphi \circ \varphi')(\varphi'(i).\varphi'(j)) \\ &= (\varphi' \circ \varphi)(\varphi'(i).\varphi'(j)) \\ &= \varphi'\left[\varphi(\varphi'(i).\varphi'(j))\right] \\ &= \varphi'\left[\varphi((\varphi \circ \varphi')(i).(\varphi \circ \varphi')(j))\right] \\ &= (\varphi' \circ \varphi)\left[(\varphi \circ \varphi')(i).(\varphi \circ \varphi')(j)\right] \\ &= (\varphi \circ \varphi')\left[(\varphi \circ \varphi')(i).(\varphi \circ \varphi')(j)\right]\end{aligned}$$

Par ailleurs il est clair que si φ et φ' sont linéaires alors $\varphi \circ \varphi'$ et $\varphi' \circ \varphi$ le sont. Φ est non vide car Φ contient au moins Id_I. ∇

Posons $k : \Phi \times I \to I$, on peut énoncer.
$(\varphi, i) \mapsto \varphi(i)$

6.3.2 PROPOSITION

$(k, \Phi, (I, +, .))$ est une algèbre de contact double abélienne et idempotente.

Δ Il suffit de vérifier (3) de 1.1.1 pour chaque loi de composition interne.

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(i) + \varphi(j)) &= \varphi(\varphi(i + j)) \\ &= (\varphi \circ \varphi)(i + j) \\ &= \varphi(i + j). \end{aligned}$$

Par définition on a $\varphi(\varphi(i).\varphi(j)) = \varphi(i.j)$. ∇

6.4 ALGEBRE DE CONTACT DOUBLE SUR $(A,+,.)$

A étant toujours une algèbre locale sur $\mathbf{R}$ dont l'unique idéal maximal est I.
On pose $k' : \Phi \times A \to A$ où $a = a_0 + i \in \mathbf{R} \oplus I = A$.
$(\varphi, a) \mapsto \varphi(a) = a_0 + \varphi(i)$

On vérifie que φ est une application linéaire de A dans A.

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= \varphi(a_0 + i + b_0 + j) \\ &= \varphi(a_0 + b_0 + i + j) \\ &= a_0 + b_0 + \varphi(i + j) \\ &= a_0 + b_0 + \varphi(i) + \varphi(j) \\ &= a_0 + \varphi(i) + b_0 + \varphi(j) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda a) &= \varphi(\lambda a_0 + \lambda i) \\ &= \lambda a_0 + \varphi(\lambda i) \\ &= \lambda a_0 + \lambda \varphi(i) \\ &= \lambda(a_0 + \varphi(i)) \\ &= \lambda \varphi(a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\varphi)(a) &= \varphi(a_0+\varphi(i))\\ &= a_0+(\varphi\circ\varphi)(i)\\ &= a_0+\varphi(i)\\ &= \varphi(a)\ .\end{aligned}$$

On a donc $\varphi\circ\varphi=\varphi$

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\varphi')(a) &= \varphi(a_0+\varphi'(i))\\ &= a_0+(\varphi\circ\varphi')(i)\\ &= a_0+(\varphi'\circ\varphi)(i)\\ &= \varphi'(a_0+\varphi(i))\\ &= (\varphi'\circ\varphi)(a)\ .\end{aligned}$$

On a donc $\varphi\circ\varphi'=\varphi'\circ\varphi$.

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi(a).\varphi(b)) &= \varphi((a_0+\varphi(i)).(b_0+\varphi(j)))\\ &= \varphi(a_0.b_0+a_0.\varphi(j)+b_0.\varphi(i)+\varphi(i).\varphi(j))\\ &= a_0.b_0+\varphi(a_0.\varphi(j)+b_0.\varphi(i)+\varphi(i).\varphi(j))\\ &= a_0.b_0+a_0.(\varphi\circ\varphi)(j)+b_0.(\varphi\circ\varphi)(i)+\varphi(\varphi(i).\varphi(j))\\ &= a_0.b_0+a_0.\varphi(j)+b_0.\varphi(i)+\varphi(i.j)\\ &= a_0.b_0+\varphi(a_0.j)+\varphi(b_0.i)+\varphi(i.j)\\ &= a_0.b_0+\varphi(a_0.j+b_0.i+i.j)\\ &= \varphi(a_0.b_0+a_0.j+b_0.i+i.j)\\ &= \varphi(a.b)\ .\end{aligned}$$

On a donc $\varphi(a.b)=\varphi(\varphi(a).\varphi(b))$.

On peut donc énoncer.

6.4.1 PROPOSITION

$(k',\Phi,(A,+,.))$ est une algèbre de contact double abélienne et idempotente.

6.4.2 JETS DE TYPE φ

On a :

$$J^{\varphi}a=\{a'\in A/\varphi(a')=\varphi(a)\}$$

$$J^{\varphi}a=\{a'\in A/a'=a_0+i'\wedge\varphi(i')=\varphi(i)\}\ \text{avec}\quad a=a_0+\varphi(i)\quad\text{et}$$

finalement on a :

$$J^{\varphi}a=a_0+J^{\varphi}i\ .$$

6.5 ALGEBRE DE CONTACT DOUBLE SUR A^V

A est toujours une algèbre locale sur **R** dont l'unique idéal maximal est I.

A^V est l'ensemble des applications de V dans A (V étant un ensemble non vide). A^V est muni naturellement d'une structure d'algèbre induite par celle définie sur A.

On considère : $k'' : \Phi \times A^V \to A^V$.
$(\varphi, f) \mapsto \varphi \circ f$

On peut alors énoncer.

6.5.1 PROPOSITION

$(k'', \Phi, (A^V, +, .))$ est une algèbre de contact double abélienne et idempotente.

Δ Il suffit de vérifier qu'on a :

$$\varphi \circ (f+g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g$$
$$\varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f)$$
$$\varphi \circ (f.g) = \varphi \circ ((\varphi \circ f).(\varphi \circ g))$$

$$\begin{aligned} \forall x \in V \quad (\varphi \circ (f+g))(x) &= \varphi(f(x)+g(x)) \\ &= \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)) \\ &= (\varphi \circ f)(x) + (\varphi \circ g)(x) \\ &= (\varphi \circ f + \varphi \circ g)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in V \quad (\varphi \circ (\lambda f))(x) &= \varphi(\lambda f(x)) \\ &= \lambda(\varphi(f(x)) \\ &= \lambda(\varphi \circ f)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in V \quad (\varphi \circ (f.g))(x) &= \varphi(f(x).g(x)) \\ &= \varphi((\varphi \circ f)(x).(\varphi \circ g)(x)) \\ &= (\varphi \circ ((\varphi \circ f).(\varphi \circ g)))(x) \end{aligned}$$ ∇

6.6 CONSEQUENCES

Notons $J^\varphi I = \{J^\varphi i / i \in I\}$,
$J^\varphi A = \{J^\varphi a / a \in A\}$,
$J^\varphi(A^V) = \{J^\varphi f / f \in A^V\}$.

1- $J^{\varphi}A$ est muni naturellement d'une structure d'algèbre car on a :

$J^{\varphi}(a+b) = J^{\varphi}a + J^{\varphi}b$ et $J^{\varphi}(a.b) = J^{\varphi}a.J^{\varphi}b$ en raison de la structure d'ACD, et $J^{\varphi}(\lambda a) = J^{\varphi}(\lambda a_0 + \lambda i) = \lambda a_0 + J^{\varphi}(\lambda i) = \lambda a_0 + \lambda J^{\varphi}i = \lambda(a_0 + J^{\varphi}i) = \lambda J^{\varphi}a$ car en raison de la linéarité, $\varphi(\lambda i) = \lambda\varphi(i)$ implique $J^{\varphi}(\lambda i) = \lambda J^{\varphi}i$.

2- $J^{\varphi}I$ est un idéal de $J^{\varphi}A$.

$J^{\varphi}a.J^{\varphi}i = J^{\varphi}(a.i)$ or $a.i \in I$ et donc $J^{\varphi}(a.i) \in J^{\varphi}I$.

3- I^{V} est un idéal de A^{V} et par suite $J^{\varphi}I^{V}$ est un idéal de $J^{\varphi}A^{V}$.

4- $J^{\varphi}: I \to J^{\varphi}I$, $J^{\varphi}: A \to J^{\varphi}A$, $J^{\varphi}: I^{V} \to J^{\varphi}I^{V}$, $J^{\varphi}: A^{V} \to J^{\varphi}A^{V}$ sont des homomorphismes surjectifs d'algèbres.

6.6.1 PROPOSITION

Si A est une algèbre locale dont l'unique idéal maximal est I alors $J^{\varphi}A$ est une algèbre locale dont l'unique idéal maximal est $J^{\varphi}I$.

Δ On a vu que $J^{\varphi}I$ est un idéal de $J^{\varphi}A$. Montrons qu'il est maximal. Si on suppose qu'il existe un idéal K dans $J^{\varphi}A$ tel que $J^{\varphi}I \subset K$, on pose alors $L = \{l \in A \mid J^{\varphi}l \in K\}$ et on montre que L est un idéal de A . En effet, soit $a \in A$ et $l \in L$ on a alors $J^{\varphi}(a.l) = J^{\varphi}a.J^{\varphi}l \in (J^{\varphi}A).K \subset K$ donc $a.l \in L$.

Du fait que $J^{\varphi}I \subset K$, tous les éléments de I sont donc dans L qui est un idéal et de ce fait I n'est plus maximal ce qui est contraire aux hypothèses. On en conclut que K (tel que K soit un idéal propre de $J^{\varphi}A$ et tel que $J^{\varphi}I \subset K$) n'existe pas et donc que $J^{\varphi}I$ est un idéal maximal de $J^{\varphi}A$.

Reste à montrer que $J^{\varphi}I$ est l'unique idéal maximal de $J^{\varphi}A$.

Dans ce qui précède on a montré que tout idéal K de $J^{\varphi}A$ est de la forme $J^{\varphi}L$ où L est un idéal de A. De plus on a établi que si I est maximal alors $J^{\varphi}I$ est maximal. Inversement montrons que si $J^{\varphi}L$ est maximal alors L est maximal, ce qui équivaut à montrer que si L est non maximal alors $J^{\varphi}L$ est non maximal.

Or dans l'algèbre locale A dire que L est non maximal signifie que L est un idéal non propre ou que $L \subset I$ avec $L \neq I$. Autrement dit $L = \{0\}$ ou $L = A$ ou $L \subset I$ avec $L \neq I$ et dans ce cas on a $J^{\varphi}L = J^{\varphi}\{0\}$ ou $J^{\varphi}L = J^{\varphi}A$ ou $J^{\varphi}L \subset J^{\varphi}I$ avec $J^{\varphi}L \neq J^{\varphi}I$ ce qui revient à affirmer que $J^{\varphi}L$ est un idéal non maximal. ∇

Noter qu'on peut affaiblir l'hypothèse de la linéarité en supposant les applications φ de Φ telles que l'on ait avec des notations désormais évidentes $\varphi(i+j)=\varphi(\varphi(i)+\varphi(j))$ et $\varphi(\lambda i)=\lambda\varphi(i)$. Bien entendu la validité des résultats énoncés précédemment subsiste.

6.6.2 APPLICATION

V étant une variété C^∞ de dimension finie, $\mathbf{R}^V$ l'ensemble des applications de classe C^∞ de V dans $\mathbf{R}$, I l'idéal maximal de $\mathbf{R}^V$ des fonctions qui s'annulent en $x_0 \in V$, $\mathbf{R}^V$ est alors une algèbre locale et on a $\mathbf{R}^V = \mathbf{R} \oplus I$ ce qui signifie que si $f \in \mathbf{R}^V$ on a $f = f(x_0)+i$, soit $\forall x \in V \quad f(x) = f(x_0)+i(x)$.

On définit $\bar{k}:\Phi \times \mathbf{R}^V \to \mathbf{R}^V$.

$$(\varphi, f) \mapsto f(x_0)+\varphi(i)$$

On montre alors facilement que $\left(\bar{k}, \Phi, \left(\mathbf{R}^V, +, .\right)\right)$ est une algèbre de contact double abélienne et idempotente, $J^\varphi \mathbf{R}^V$ est alors une algèbre locale dont l'unique idéal maximal est $J^\varphi I$ .Par suite $J^\varphi : \mathbf{R}^V \to J^\varphi \mathbf{R}^V$

$$f \mapsto f(x_0)+J^\varphi i$$

est un homomorphisme d'algèbres et J^φ est un $J^\varphi \mathbf{R}^V$-point de $\mathbf{R}^V$ proche de x_0.

6.7 LES CHAINES CONTROLEES

6.7.1 LA CATEGORIE DES CHAINES CONTROLEES

Soit E un ensemble non vide et soit n un entier naturel. Une chaîne de longueur est un n-uplet d'éléments de E.

L'ensemble des chaînes sur E est noté $C(E)$ et ( ) est la chaîne vide de longueur nulle.

Soit E un ensemble non vide et soit n un entier naturel. Une chaîne contrôlée de longueur n (n étant un entier naturel supérieur à 2) est un n-uplet d'éléments de E. La première composante et la dernière composante de ce n-uplet sont respectivement nommées but et source de la chaîne contrôlée et constituent à ce titre les variables de contrôle du chaînage.

L'ensemble des chaînes contrôlées sur E est noté $C_c(E)$. On note $C_c(E)_0$ l'ensemble des chaînes contrôlées de la forme (x,x) où $x \in E$. On définit également :

$$\alpha : C_c(E) \to C_c(E)_0 \qquad \text{et} \qquad \beta : C_c(E) \to C_c(E)_0$$
$$f \mapsto \alpha(f) = (p_n(f), p_n(f)) \qquad f \mapsto \beta(f) = (p_1(f), p_1(f))$$

où $n = l(f)$ est la longueur de f, p_1 et p_n sont respectivement première et dernière projection canonique de E^n sur E.

Notons qu'il n'y a aucune difficulté à identifier les chaînes de la forme (x,x) avec x, autrement dit à confondre $C_c(E)_0$ et E.

On définit sur $C_c(E)$ une loi de composition partiellement définie notée k

$$\begin{aligned} C_c(E) \times C_c(E) &\xrightarrow{k} C_c(E) \\ (g,f) &\longrightarrow g.f \end{aligned}$$

où $g.f$ est défini si et seulement si $\alpha(g) = \beta(f)$ et dans ce cas si $l(g) = p$ et $l(f) = n$ alors on a $l(g.f) = n + p - 2$. Si on pose $g = (b', x'_1, \ldots, x'_{p-2}, b)$ avec $f = (b, x_1, \ldots, x_{n-2}, s)$ alors on aura :

$$g.f = (b', x'_1, \ldots, x'_{p-2}, x_1, \ldots, x_{n-2}, s).$$

$C_c(E)$ est ainsi muni d'une structure de catégorie dont les rétractions source et but sont respectivement α et β

On considère l'application $\mathcal{f}: E \to F$ et l'ensemble $C(F)$ des chaînes (non contrôlées) définies sur F. Les éléments de $C(F)$ définissent alors ce qu'on pourra appeler des $\mathcal{f}$-cribles sur E. Si $f = (x_1, \ldots, x_n)$ est une chaîne (non contrôlée) de $C(E)$ on pose $\mathcal{f}(f) = (\mathcal{f}(x_1), \ldots, \mathcal{f}(x_n))$. Si $f = (b, x_1, \ldots, x_n, s)$ est une chaîne de $C_c(E)$ alors on pose $\mathcal{f}(f) = (b, \mathcal{f}(x_1), \ldots, \mathcal{f}(x_n), s)$.

On définit $E_1 = E \cup C(E)$ puis $C(E_1)$ et $C_c(E_1)$ qui sont respectivement l'ensemble des chaînes sur E_1 et l'ensemble des chaînes contrôlées sur E_1 telles que les variables de contrôle soient encore des éléments de E, autrement dit telles que $C_c(E_1)_0 = E$. On munit comme précédemment $C_c(E_1)$ d'une structure de catégorie.

De même que précédemment on définit $\mathcal{f}(f)$ que f soit une chaîne de $C(E_1)$ ou une chaîne de $C_c(E_1)$.

6.7.2 NEOALGEBRE DE CONTACT SUR $C_c(E_1)$

Soit $C = C_c(E_1)$ et $\Phi = C(F)$ (noter qu'aucune loi de composition, même partielle, n'est définie sur Φ). On définit une action de Φ sur C par

$$\begin{aligned} k': \Phi \times C &\to C \\ (\varphi, f) &\mapsto \varphi f \end{aligned}$$

en posant :

1- si $l(\varphi) > l(f) - 2$ alors $\varphi f = f$,

2- si $l(\varphi) \leq l(f) - 2$) alors on exécute l'algorithme de « recherche » suivant pour $f = (b, x_1, \ldots, x_n, s)$ et $\varphi = (y_1, \ldots, y_k)$ avec $k \leq n$ et φf devient alors le résultat de cette recherche.

1- $r = 1$: *long*=*n*

2- Si $(\mathcal{L}(x_r), \mathcal{L}(x_{r+1}), \ldots, \mathcal{L}(x_{r+k-1})) = \varphi$

Alors : on remplace (dans l'écriture de f) la séquence $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+k-1}$ par $(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+k-1})$ (les parenthèses ayant pour but de signaler que la séquence a été « trouvée »)

: $r = r + 2$: *long*=*long*-*k*+1

Sinon : $r = r + 1$

3- Si $r + k - 1 \leq long$

Alors : exécuter 2-

4- Fin.

long est ici une variable destinée à contrôler la longeur de la chaîne au fil des modifications d'écritures qu'elle subit au cours du traitement.

Il est clair que l'action de Φ est idempotente et préserve par définition les chaînes de $C_c(E_1)_0$. On définit ainsi une structure de néoalgèbre de contact notée $(k', C(F), C_c(E_1))$.

6.7.3 NEOALGEBRE DE CONTACT SUR $C_c(E)$

On peut également définir la néoalgèbre de contact $(k", C(F), C_c(E))$ où $k"$ est définie par :

$$k": C(F) \times C_c(E) \to C_c(E)$$
$$(\varphi, f) \mapsto k"(\varphi, f)$$

en posant :

1- si $l(\varphi) > l(f) - 2$ alors $k"(\varphi, f) = f$

2- si $l(\varphi) \leq l(f) - 2$ on exécute l'algorithme de « suppression » suivant pour $f = (b, x_1, \ldots, x_n, s)$ et $\varphi = (y_1, \ldots, y_k)$ avec $k \leq n$, et φf devient alors le résultat de cet l'algorithme de « suppression ».

1- $r=1$: $long=n$

2- Si $(\mathcal{L}(x_r),\mathcal{L}(x_{r+1}),\ldots,\mathcal{L}(x_{r+k-1}))=\varphi$

Alors : $f=(b,x_1,\ldots,x_{r-1},x_{r+k},\ldots,x_n,s)$: $long=long-k$: $r=1$

Sinon : $r=r+1$.

3- Si $r+k-1\leq long$

Alors : exécuter 2-

4- Fin.

long est une variable destinée à contrôler la longueur de la chaîne que l'on traite au fil des suppressions qu'elle est amenée à subir.

Par exemple si on prend $f=(b,x,y,z,x,x,y,y,s)$, si $\mathcal{L}:E\to F$ est Id_E et si $\varphi=(x,y)$ alors on obtient successivement (l'élément surligné étant celui pointé par *r*):

$(b,\overline{x},y,z,x,x,y,y,s)$
$(b,\overline{z},x,x,y,y,s)$
$(b,z,\overline{x},x,y,y,s)$
$(b,z,x,\overline{x},y,y,s)$
$(b,\overline{z},x,y,s)$
$(b,z,\overline{x},y,s)$
(b,z,s)

d'où $k''(\varphi,f)=(b,z,s)$.

Là encore l'action de $C(F)$ est idempotente et préserve les unités de $C_c(E)_0$.

6.7.4 JETS DANS $(k',C(F),C_c(E_1))$

Si $\varphi f=f$ alors $J^{\varphi}f=\{f\}$. Sinon considérons $f=(b,x_1,x_2,\ldots,x_n,s)$, $\varphi=(y_1,y_2,\ldots,y_k)\in\mathcal{L}(E)$ (avec $k\leq n$) et supposons qu'on ait :

$$\varphi f=\left(b,x_1,\ldots,x_l,\left(x_{l+1},\ldots,x_{l+k}\right),x_{l+k+1},\ldots,x_m,\left(x_{m+1},\ldots,x_{m+k}\right),x_{m+k+1},\ldots,x_n,s\right)$$

$J^{\varphi}f$ sera formé de toutes les chaînes f' vérifiant :

$$f'=\left(b,x_1,\ldots,x_l,x'_{l+1},\ldots,x'_{l+k},x_{l+k+1},\ldots,x_m,x'_{m+1},\ldots,x'_{m+k},x_{m+k+1},\ldots,x_n,s\right)$$

avec $(\mathcal{L}(x'_{l+1}),\ldots,\mathcal{L}(x'_{l+k}))=(\mathcal{L}(x'_{m+1}),\ldots,\mathcal{L}(x'_{m+k}))=\varphi$ et vérifiant de plus :
$\forall i\in[1,l]$ $\mathcal{L}(x_i,\ldots,x_{i+k})\neq\varphi$ et $\forall i\in[l+k+1,m]$ $\mathcal{L}(x_i,\ldots,x_{i+k})\neq\varphi$.

6.7.5 JETS DANS $(k'',C(F),C_c(E))$

Si $\varphi \in \mathcal{L}(C(E))$, on considére $\mathcal{L}^{-1}(\varphi)$ l'ensemble des chaînes g telles que $g \in C(E)$ et $\mathcal{L}(g) = \varphi$. Le jet $J^{\varphi} f$ est alors formé de toutes les chaînes déduites de φf par l'algorithme suivant.

1- $h = \varphi f$

2- On inserre entre deux termes successifs de h tous les termes d'une chaîne quelconque de $\mathcal{L}^{-1}(\varphi)$, ce qui donne h'

3- $h = h'$

4- Exécuter 2- puis 3- un nombre fini de fois

5- Fin

6.7.6 APPLICATION

Outre le traitement des chaînes de caractères, une chaîne contrôlée peut être vue (en dehors des variables de contrôle) comme la donnée d'une liste séquencée d'instructions.

La recherche devient alors la recherche d'une séquence donnée et la mise entre parenthèses de cette séquence peut être regardée comme la reconnaissance d'un sous-programme au sens usuel. Par conséquent le contenu de ce parenthèsage peut être remplacé par une instruction d'appel à ce sous-programme.

SUITE à paraître dans « DIAGRAMMES n° 37 »

Pour l'essentiel -chapitres 1 et 4- cette première partie présente les idées et les techniques illustrées au chapitre 6. Ce sont ces mêmes outils et ces mêmes idées qu'on retrouvera dans la seconde partie.

En premier lieu ils vont nous servir à développer dans une algèbre de contact un calcul différentiel (le mot « différentiel » n'étant employé ici que par pure analogie), et plus particulièrement un calcul différentiel qu'on pourrait qualifier d' « intrinsèque ».

Afin d'atteindre cet objectif trois techniques sont évoquées :

1- le recours aux *transformations* de l'algèbre de contact initiale qui forment une classe particulière d'inversibles de C, il en va de même dans le calcul différentiel usuel où les translations sont requises,

2- le recours aux inversibles de la catégorie C,

3- le recours aux repères, c'est à dire aux jets inversibles de morphismes de C.

On rend compte de l'option choisie au travers d'une section de $[\beta,\alpha]$ à caractère fonctoriel dite *section admissible*. Une algèbre de contact sur laquelle est définie une telle section est dite *transitive*.

Ceci étant posé ; *différentielle*, *vitesse* (ou *codifférentielle*) et *dérivée* se définissent comme des jets particuliers. La particularité réside dans le choix d'une unité au but (resp. à la source, au but et à la source) du jet considéré. C'est le choix de cette unité qui gouverne le type de calcul développé, de même qu'elle détermine en géométrie différentielle le type de fibré tangent étudié. Ces notions sont introduites à la fois pour les morphismes de C et leurs jets.

Partant de là on déduit un ample formulaire qui incite à quotienter la catégorie initiale en considérant comme équivalents deux morphismes dont les deux sources ainsi que les deux buts peuvent être respectivement liés soit par une transformation, soit par un inversible de C ou bien par un jet inversible de telle sorte que le carré formé soit commutatif. On passe alors de l'algèbre de contact transitive initiale à son algèbre de contact quotient où les notions de différentielle, vitesse et dérivée se confondent. Enfin quatre exemples élémentaires permettent d'illustrer et de conforter le choix des définitions données.

Depuis la toute première définition, les contacts ont été abordés et décrits en termes de jets et plus particulièrement sous forme de différentielle, vitesse et dérivée. Ils le sont encore -au chapitre 8- sous forme *d'éléments de contact* (resp. *d'éléments d'enveloppe*) comme orbites particulières (c'est à dire classes de jets, où le groupe d'opérateurs est le groupe d'isotropie) à la source (resp. au but). A cette occasion on rappelle la *relation*

d'incidence définie à la fois sur la catégorie des jets et celle des éléments de contact. A titre d'exemple on précise les liens entre les idées d'Ehresmann et la présentation algèbrique qui en est faite ici.

Jets, éléments de contact, objets tangents, espaces tangents ; il n'est question que de classes d'équivalence. On est donc naturellement conduit aux *fibrations*, elles sont définies et les plus importantes sont inventoriées. On termine par la présentation des *objets plongés*.

Si pour tout ce qui précède la structure d'algèbre de contact est omniprésente dans sa forme initiale, il est nécessaire, pour la suite (chapitre 9), d'en décrire quelques prolongements qui sont dans l'ordre :

1- l'algèbre de contact sur la catégorie des jets $J^{\varphi}C$,

2- l'algèbre sur la catégorie C^U des applications de U (U ensemble non vide) dans C,

3- l'algèbre sur la catégorie C_s des sections locales de α,

4- l'algèbre sur la catégorie C_b des sections locales de β,

5- l'algèbre sur la catégorie $C_{b\bullet}$ des sections locales pointées de β.

Noter qu'on peut enchaîner les deux premières extensions, ce qui conduit aux prolongements *holonomes* ou *non holonomes*. C'est d'ailleurs par un processus similaire qu'on étend les notions d'holonomie et de non holonomie aux jets construits par extensions successives sur C_s ou C_b. A ce propos notons l'isomorphisme d'algèbres entre les algèbres définies sur $\left(J^{\varphi}C\right)^U$ et $J^{\varphi}\left(C^U\right)$ déduites par extensions successives de l'algèbre de contact sur C. Autre isomorphisme important, celui de la catégorie $\left(J^{\varphi}C\right)_s$ des sections locales de α^{φ} avec la catégorie $J^{\varphi}\left(C_s\right)$ des jets de sections locales de α.

A ce stade les outils sont en place pour parachever l'ensemble en définissant, pour une algèbre de contact donnée, les *éléments de connexion* et la notion de *connexion*. Moyennant l'hypothèse de transitivité locale sur C, on montre qu'il existe sur l'ensemble des éléments de connexion une espèce de structures.

Les liens entre éléments de connexion et éléments de contact sont précisés, puis on montre que la *différentielle absolue* n'est autre qu'une différentielle au sens précédent calculée dans une algèbre de contact transitive déduite de l'algèbre initiale. Tout naturellement on termine en précisant le *groupoïde d'holonomie* et le *groupe d'holonomie* attachés à un élément de connexion.

A cette heure, et pour être complet, il reste à définir torsion et courbure d'une connexion. La réussite d'un tel challenge apporterait -s'il en était encore besoin- la preuve de la fécondité du concept de « jets », sa puissance, sa simplicité et au final le caractère plus que novateur des conceptions d'Ehresmann auxquelles cette étude est largement redevable.

INDEX DES NOTATIONS

(k,Φ,C)	Algèbre de contact	1.1.1
φf	Troncature de type φ de f	1.1.1
$C*C$	Ensemble des couples composables de morphismes	1.1.1
C_0	Ensemble des unités de C	1.1.1
$J^l(f,a)$	Jet local de f en a	1.1.2
$\hat{a}$	Germe de variété en a	1.1.2
$C(e,e')$	Ensemble des morphismes de C de source e et de but e'	1.1.3
$\left(\overline{k},\overline{\Phi},C\right)$	Algèbre de contact complétée de (k,Φ,C)	1.3.2
$P\times F$	Morphisme entre algèbres de contact	1.4.1
Φ^0	Ensemble des morphismes de Φ préservant les unités de C	1.5
Φ^r	Ensemble des morphismes réguliers de Φ^0	1.5.1
Φ^c	Ensemble des morphismes cartésiens de Φ^0	1.6.2
$[r,R]$	Echelon sur C	2.1.1
$[r,R]\bullet[s,S]$	Composé de deux échelons	2.1.5
$\mathcal{E}$	Echelonnement sur C	2.2.3
$J^\varphi f$	Jet de type φ de f ou φ-jet de f	4.1.1
J^φ	Foncteur de C vers $J^\varphi C$	4.1.2
α^φ, β^φ	Rétractions source et but de $J^\varphi C$	4.1.2
$J^\varphi_x f$	Jet infinitésimal d'ordre φ de f en x	4.1.3
Φ_γ	Groupoïde des isomorphismes de Φ	4.1.4
$J^\Phi C$	$=\bigcup_{\varphi\in\Phi} J^\varphi C$	4.1.4
$A\bullet B$	$=\{f\in C / \exists(a,b)\in A\times B$ tel que $\alpha(a)=\beta(b)$ et $f=a.b\}$	4.2.2
C_γ	Groupoïde des isomorphismes de C	4.2.2
$J^\varphi A$	$=\{h\in C / \exists a\in A\ \varphi h=\varphi a\}=\bigcup_{a\in A} J^\varphi a = Sat\ A$	4.2.3
$(k,\Phi,C)^{(n)}$	$=\left(k^{(n)},J^{(n)}\Phi,\mathcal{P}^{(n)}(C)\right)$	4.3.2
$(C_\gamma,J^\varphi C_0,k')$	Espèce de morphismes	4.4.1
$C_\gamma\times_{k'} J^\varphi C_0$	Catégorie produit croisé	4.4.1
G_e	Groupe des isomorphismes de C de source et de but e	4.4.2

H_e^φ	$= J^\varphi e$	4.4.2
$(C, J^\varphi C_0, k')$	Espèce de morphismes	4.4.2
$C \times_{k'} J^\varphi C_0$	Catégorie produit croisé	4.4.2
(C, E, k')	Espèce de structures	4.4.3
$T_{e_0}^\varphi e$	$= \{X \in J^\varphi C / X = J^\varphi f \text{ avec } f \in C(e_0, e)\}$	4.5.1
$J^\varphi(e_0, e)$	$= T_{e_0}^\varphi e$ l'objet (e_0, φ)-tangent à e	4.5.1
$T_{e_0}^\varphi g$	Morphisme (e_0, φ)-tangent à e	4.5.1
$T_{e_0}^\varphi$	Foncteur de C vers $T_{e_0}^\varphi C$	4.5.2
$\alpha_{e_0}^\varphi$, $\beta_{e_0}^\varphi$	Rétractions source et but de $T_{e_0}^\varphi C$	4.5.2
$C(A,B)$	Ensemble des morphismes de C dont la source est dans A et le but dans B	4.5.3
C_s	Catégorie des sections locales de α	4.5.3
α_s, β_s	Rétractions source et but de C_s	4.5.3
$G^\circ F$	Composé de morphismes de C_s	4.5.3
$T_{e_0}^\varphi A$	$= \bigcup_{a \in A} T_{e_0}^\varphi a$ l'espace (e_0, φ)-tangent à A	4.5.3
$T_{e_0}^\varphi F$	Application (e_0, φ)-tangente à F	4.5.3
$T_{e_0}^\varphi C_s$	$= \bigcup_{F \in C_s} \{T_{e_0}^\varphi F\}$	4.5.3
$\alpha_{e_0,s}^\varphi$, $\beta_{e_0,s}^\varphi$	Rétractions source et but de $T_{e_0}^\varphi C_s$	4.5.3
$T_{e_0}^{\varphi^*} e$	Objet (e_0, φ)-cotangent à e	4.5.3
$T_{e_0}^{\varphi^*} g$	Morphisme (e_0, φ)-tangent à e	4.5.3
$T_{e_0}^{\varphi^*} A$	Espace (e_0, φ)-cotangent à A	4.5.3
$T_{e_0}^{\varphi^*} F$	Application (e_0, φ)-cotangente à F	4.5.3

$C(E)$	Ensemble des chaînes d'éléments de E	6.7.1
$C_c(E)$	Ensemble des chaînes contrôlées d'éléments de E	6.7.1
$(k', C(F), C_c(E_1))$	Néoalgèbre de contact sur $C_c(E_1)$	6.7.2
$(k'', C(F), C_c(E))$	Néoalgèbre de contact sur $C_c(E)$	6.7.2

REFERENCES

Charles Ehresman

Topologie sur les espaces fibrés différentiables
C.R.A.S. Paris 224 (1947)

Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable
Colloque de topologie Bruxelles CBRM (1950)

Géométrie différentielle: les prolongements d'une variété différentiable

I - Calcul des jets, prolongement principal
C.R.A.S. Paris 233 (1951)

II - L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m
C.R.A.S. Paris 233 (1951)

III - Transitivité des prolongements
C.R.A.S. Paris 233 (1951)

IV - Eléments de contact, éléments d'enveloppe
C.R.A.S. Paris 234 (1952)

Les prolongements d'une variété différentiable
Dagli « Atti del IV Congresso dell' Unione Matematica Italiana »
(Taormina 25-31 Octobre 1954)

Structures locales
Conférence polycopiée à Rome (Mars 1952)

Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie
(Synthèse de plusieurs articles publiés jusqu'en 1953)
Colloque international de géométrie différentielle Strasbourg CNRS (1953)

Géométrie différentielle : extension du calcul des jets aux jets non holonomes
C.R.A.S. Paris 239 (1954)

Géométrie différentielle : application de la notion de jet non holonome
C.R.A.S. Paris 240 (1955)

Géométrie différentielle : les prolongements d'un espace fibré différentiable
C.R.A.S. Paris 240 (1955)

Sur les connexions d'ordre supérieur
Dagli « Atti del V Congresso dell' Unione Matematica Italiana »
(Pavia - Torino 1956)

Prolongements des catégories différentiables
Séminaire Charles Ehresmann
Topologie et géométrie différentielle (volume VI Juin 1964)

Propriétés infinitésimales des catégories différentiables
Cahiers de topologie et géométrie différentielle Paris
(volume IX Septembre 1966)

Catégories in differential geometry
Colloque sur l'algèbre des catégories Amiens (1973)
Cahiers de topologie et géométrie différentielle Paris (volume XIV)

Catégories et structures
Editions Dunod Paris (1965)

On trouvera l'essentiel des articles publiés par Charles Ehresmann et relatifs à la géométrie différentielle dans :
« Charles Ehresmann, Oeuvres complètes et commentées »
Suppléments 1 et 2 au volume XXIV des cahiers de topologie et géométrie différentielle Amiens (1983)

André Weil

Théorie des points proches
Colloque international de géométrie différentielle Strasbourg CNRS (1953)

TABLE

INTRODUCTION 17

1 ALGEBRE DE CONTACT 21

1.1 Action de Φ SUR C 21
1.2 Ordres 25
1.3 Algèbre de contact complète 26
1.4 Morphismes d'algèbres de contact 28
1.5 Produits 29
1.6 Produits fibrés 31
1.7 Invariants et constantes 32

2 ECHELONNEMENT 35

2.1 Echelon sur C 35
2.2 Echelonnement sur C 39
2.3 Morphismes 42

3 EQUIVALENCE DES POINTS DE VUE 47

3.1 Echelonnement associé à une algèbre de contact 47
3.2 Algèbre de contact associée à un échelonnement 48
3.3 Conclusions 48

4 CALCUL DES JETS 51

4.1 Jets de type φ 51
4.2 Extensions 53
4.3 Extensions d'ordre supérieur de (k,Φ,C) 56
4.4 Espèce de morphismes associée 59
4.5 Foncteurs $T^{\varphi}_{e_0}$ 64

5 PRODUITS ET PRODUITS FIBRES 67

5.1 Produits sur les espaces de jets 67
5.2 Produits fibrés dans les espaces de jets 77

6 EXEMPLES 91

6.1 Jets de C.Ehresmann 91
6.2 Divisibilité dans $(Z,\times,+)$ 96
6.3 Algèbre de contact double sur $(I,\times,+)$ 97
6.4 Algèbre de contact double sur $(A,\times,+)$ 98
6.5 Algèbre de contact double sur A^V 100
6.6 Conséquences 100
6.7 Les chaînes contrôlées 102

SUITE 107

INDEX DES NOTATIONS 109

REFERENCES 111

14, Grande Rue
94130 NOGENT-SUR-MARNE
FRANCE