DIAGRAMMES

F. CURY

La suffisante complétude connexe. Section C : exemples

Diagrammes, tome 32 (1994), exp. n° 2, p. 1-84

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1994__32__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 32 , 1994

LA SUFFISANTE COMPLETUDE CONNEXE

SECTION C : EXEMPLES

F. CURY

Introduction

Le présent texte est le dernier d'une série de trois ("Section A" - voir [S.C.C.A.] -, "Section B" - voir [S.C.C.B.] - et cette "Section C") consacrés à l'étude (d'un point de vue catégorique) de la propriété de *suffisante complétude connexe* : une "théorie essentiellement équationnelle" possède cette propriété lorsque ses algèbres *libres* sont constituées des composantes connexes (par réécriture) des algèbres *libres* d'une "théorie essentiellement relationnelle" qui "l'assouplit".

En Section A, nous avons présenté ce qu'il convenait

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 10 , 18 D 05 , 18 A 10

de comprendre - en toute généralité - par "théorie essentiellement équationnelle" puis par "théorie essentiellement relationnelle".

Nous y avons, tout d'abord, défini les *graphes à composition* comme autant de "présentations de catégories".
Alors, nous avons considéré qu'une "théorie essentiellement équationnelle" est une *syntaxe d'algèbres* sur une catégorie (localement petite) $\mathbb{A}'$ lui servant de contexte, i.e. est une $\mathcal{D}' = (\mathbb{A}', \ldots, \mathbb{B}', \ldots, \mathbb{D}')$ où $\mathbb{D}'$ (la partie "purement syntaxique" de $\mathcal{D}'$) est un sur-graphe à composition d'un sous-graphe à composition $\mathbb{B}'$ de $\mathbb{D}'$ ayant mêmes objets que $\mathbb{D}'$.
De la sorte, munir un objet A' de $\mathbb{A}'$ d'une structure (A', ϑ') de $\mathcal{D}'$-*algèbre* revient à se donner un foncteur :

$$\vartheta' : \mathbb{D}'^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$$

prolongeant le foncteur canonique :

$$\mathbb{B}'^{op} \hookrightarrow \mathbb{A}'^{op} \xrightarrow[Hom(-,A')]{} \mathbb{E}ns \ .$$

Ensuite, pour formaliser ce que l'on entend par "théorie essentiellement relationnelle", il nous a suffi d'enrichir les concepts précédents "avec des 2-flèches (de réécriture)".
Nous avons donc défini les *amphi-graphes à composition* (et, en particulier, les *amphi-catégories*), i.e. les graphes à composition enrichis à l'aide d'une structure de catégorie monoïdale, symétrique et fermée $\mathbb{G}rComp$ adéquate (qui *n'est pas* la cartésienne fermée) sur la catégorie $\mathbb{G}rComp$ des (petits) graphes à composition.
Alors, nous avons considéré qu'une "théorie essentiellement relationnelle" est une *amphi-syntaxe* sur une amphi-catégorie $\mathbf{A}$ lui servant de contexte enrichi, i.e. est une $\mathcal{D} = (\mathbf{A}, \ldots, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{D})$ où $\mathbf{D}$ (la partie purement syntaxique

de $\mathcal{D}$) est un sur-amphi-graphe à composition d'un sous-amphi-graphe à composition $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ ayant mêmes objets que $\mathbb{D}$.
De la sorte, munir un objet A de $\mathbb{A}$ d'une structure de $\mathcal{D}$-*amphi-algèbre* (A,Φ) c'est, en enrichissant "totalement" la notion précédente d'algèbre, se donner un amphi-foncteur :

$$\Phi : \mathbb{D}^{op} \longrightarrow \mathbb{G}\text{rComp}$$

prolongeant l'amphi-foncteur canonique :

$$\mathbb{B}^{op} \hookrightarrow \mathbb{A}^{op} \xrightarrow[\mathbb{A}(-,A)]{} \mathbb{G}\text{rComp} .$$

De même, en n'enrichissant que "partiellement", la notion d'algèbre, nous avons défini les $\mathcal{D}$-*sesqui-algèbres*.

En Section B, nous avons précisé comment une théorie essentiellement relationnelle (i.e. une amphi-syntaxe) peut "assouplir" une théorie essentiellement équationnelle (i.e. une syntaxe).

Ainsi, une amphi-syntaxe $\mathcal{D}$, de contexte enrichi l'amphi-catégorie $\mathbb{A}$, "assouplit" une syntaxe $\mathcal{D}'$, de contexte la catégorie $\mathbb{A}'$, lorsque $\mathcal{L} = (\mathcal{D},\mathcal{D}')$ est une *laxification*, i.e. quand :

- la partie purement syntaxique $\mathbb{D}$ de $\mathcal{D}$ admet pour Π_0-*modification* (obtenue en prenant les composantes connexes "Hom par Hom" de $\mathbb{D}$) la partie purement syntaxique $\mathbb{D}'$ de $\mathcal{D}'$,

- le contexte $\mathbb{A}'$ de $\mathcal{D}'$ admet pour Did-*modification* (obtenue en prenant l'amphi-catégorie des catégories discrètes "Hom par Hom" de $\mathbb{A}'$) une sous-amphi-catégorie amphi-réflexive $\mathrm{Did}(\mathbb{A}')$ de $\mathbb{A}$.

De la sorte, tout objet A' de $\mathbb{A}'$ s'identifie à un objet

de $\mathbb{A}$ qui engendre une $\mathfrak{D}$-amphi-algèbre (resp. une $\mathfrak{D}$-sesqui-algèbre) libre $(A_{\mathbb{A}'}, \vartheta_{\mathbb{A}'})$. Alors, à l'objet $A_{\mathbb{A}'}$ de $\mathbb{A}$ est associé, par amphi-réflexion, un objet $F(A_{\mathbb{A}'})$ de $\mathbb{A}'$ et une flèche canonique $\varepsilon_{\mathbb{A}'} : A_{\mathbb{A}'} \longrightarrow F(A_{\mathbb{A}'})$.
Dans ces conditions, si on suppose que :

- $\varepsilon_{\mathbb{A}'} : A_{\mathbb{A}'} \longrightarrow F(A_{\mathbb{A}'})$ est un "passage au quotient par connexité, *du point de vue* des objets d'une petite sous-catégorie pleine (suffisamment génératrice) $\mathbb{A}_o$ de $\mathbb{A}$ " (i.e. si, pour tout objet A_o de $\mathbb{A}_o$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(A_o, F(A_{\mathbb{A}'}))$ est constitué des composantes connexes de $\mathbb{A}(A_o, A_{\mathbb{A}'})$),

- la $\mathfrak{D}$-amphi-algèbre (resp. la $\mathfrak{D}$-sesqui-algèbre) $(A_{\mathbb{A}'}, \vartheta_{\mathbb{A}'})$ est *quotientable* le long de $\varepsilon_{\mathbb{A}'}$,

alors, on a établi que :

- la $\mathfrak{D}$-amphi-algèbre (resp. la $\mathfrak{D}$-sesqui-algèbre) quotient $(F(A_{\mathbb{A}'}), \vartheta/\varepsilon_{\mathbb{A}'})$ s'identifie à une $\mathcal{D}'$-algèbre $(F(A_{\mathbb{A}'}), \vartheta')$,

- $(F(A_{\mathbb{A}'}), \vartheta')$ est la $\mathcal{D}'$-algèbre librement engendrée par $\mathbb{A}'$,

autrement dit, dans ce cas, *il y a bien suffisante complétude connexe*.

Cependant, le seul point de vue des laxifications est par trop restrictif : comme établi en [E.S.C.C.] pour le cas particulier des catégories localement cartésiennes, le simple remplacement des égalités par des réécritures n'assure pas contre des "défauts de connexité", i.e. que les $\mathrm{Hom}(A_o, F(A_{\mathbb{A}'}))$ ne contiennent pas "plus" que les composantes connexes des $\mathbb{A}(A_o, A_{\mathbb{A}'})$! Nous avons alors montré comment il convenait de les corriger : en recherchant un *élargissement* $\mathfrak{E} = (\mathfrak{D}, \ldots, \mathcal{T}, \ldots, \mathcal{D}')$, i.e. une syntaxe $\mathcal{T}$ de contexte (la catégorie sous-jacente à $\mathbb{A}$) $\mathbb{A}$ qui "sur-

charge" $\mathcal{D}$.

Dans cette Section C, nous détaillons systématiquement, tout d'abord, quelques exemples (volontairement élémentaires) des différentes notions générales introduites dans la Section A (graphes à composition, syntaxes, algèbres, amphi-graphes à composition, amphi-syntaxes, amphi-algèbres et sesqui-algèbres). Puis, en appliquant les méthodes et résultats généraux de la Section B, nous établissons qu'il y a suffisante complétude connexe dans trois situations particulières, mais qui nous semblent caractéristiques.

Précisément, au §6.1, nous décrivons en détail quelques graphes à composition particuliers. Ce sont les parties purement syntaxiques de syntaxes que nous explicitons complètement au §6.2 en précisant, notamment, leurs contextes : "ensemblistes" (i.e. lorsqu'il s'agit de la catégorie $\mathbb{E}$ns) ou "catégoriques" (i.e. lorsqu'il s'agit de la catégorie $\mathbb{C}$at). Alors, leurs algèbres respectives sont des structures aussi "diverses" que :

- les *demi-groupes* (vus comme exemples génériques de modèles ensemblistes de théories essentiellement équationnelles "unisortes", à lois de composition "partout définies"),

- les (petites) catégories dont l'ensemble des objets est muni d'une structure de demi-groupe (vues comme exemples génériques de modèles non ensemblistes - en l'espèce : catégoriques - pour les théories essentiellement équationnelles "unisortes" à lois de composition "partout définies"),

- les (petites) catégories *quasi-cartésiennes* (vues comme

exemples génériques - du moins en première analyse - de modèles non ensemblistes pour les théories essentiellement équationnelles "multisortes" à lois de composition "non partout définies", i.e. ne s'appliquant que lorsque leurs arguments d'entrée vérifient des conditions équationnelles).

En "démontant" par le menu ces quelques "cas d'école" (délibérément simplistes), notre seul objectif est de convaincre le lecteur qu'aux présentations "classiques" de *toutes* les théories essentiellement équationnelles (a fortiori, des théories "totalement" équationnelles) et à leurs modèles, correspondent exactement les syntaxes et (en jouant sur les contextes) leurs algèbres.

Au §6.3, nous décrivons complètement un certain nombre d'amphi-graphes à composition. Ce sont, de nouveau, les parties purement syntaxiques d'un certain nombre d'amphi-syntaxes que nous décrivons explicitement au §6.2 en précisant, en particulier, leurs contextes enrichis :

- "ensemblistes avec réécritures" (i.e. lorsqu'il s'agit de l'amphi-catégorie **Relref** dont les objets sont les ensembles munis d'une relation réflexive "de réécriture", dont les flèches sont les applications compatibles et dont les 2-flèches sont les relations correspondantes - i.e. "valeurs par valeurs" - entre applications compatibles)

- "catégoriques avec naturalité" (i.e. lorsqu'il s'agit de la 2-catégorie **Cat** , c'est-à-dire de l'amphi-catégorie dont les objets sont les petites catégories, dont les flèches sont les foncteurs et dont les 2-flèches - "de réécriture" - sont les transformations naturelles),

- "2-catégoriques avec lax-naturalité" (i.e. lorsqu'il s'agit de l'amphi-catégorie **2-Cat** dont les objets sont

les petites 2-catégories, dont les flèches sont les 2-foncteurs et dont les 2-flèches - "de réécriture" - sont les transformations "lax-naturelles" entre foncteurs égaux sur les objets).

Alors, leurs amphi-algèbres (resp. leurs sesqui-algèbres) respectives sont des structures aussi "diverses" que :

- les *pseudo-demi-groupes* (resp. les *pseudo-demi-groupes faibles*), i.e. les ensembles munis d'une relation de réécriture et d'une loi binaire compatible (resp. non nécessairement compatible), associative à la réécriture près,

- les (petites) catégories munies d'une *multiplication* fonctorielle (resp. non nécessairement fonctorielle) *des objets*, associative à isomorphismes naturels (resp. non nécessairement naturels), non nécessairement cohérents, près,

- les (petites) catégories munies d'une *multiplication* fonctorielle (resp. non nécessairement fonctorielle) *des objets*, associative à isomorphismes naturels (resp. non nécessairement naturels), cohérents, près,

- les (petites) 2-catégories *lax-quasi-cartésiennes* (resp. *faiblement lax-quasi-cartésiennes*), i.e. les (petites) 2-catégories munies d'un choix fonctoriel (resp. non nécessairement fonctoriel) de "lax-quasi-produits" ...

Evidemment, ces amphi-syntaxes sont autant d'exemples (intentionnellement très élémentaires) "d'assouplissements" (au moins, au sens intuitif) des syntaxes (non enrichies) précédemment décrites. En "démontant" encore par le menu ces nouveaux "cas d'école", notre seul but est de convaincre le lecteur que, pour assouplir une "théorie essentiellement équationnelle" (i.e. une syntaxe), *il ne suffit pas* (contrairement à ce qui est bien souvent sous-entendu)

d'assouplir sa "partie purement syntaxique" en substituant (mécaniquement) aux "équations" (i.e. aux diagrammes commutatifs) des relations de réécriture (i.e. des diagrammes "2-commutatifs") : il convient aussi (et même surtout) de "jouer" (ce qui laisse une assez grande latitude, fort peu mécanique) sur la manière dont on assouplit le contexte initial (i.e. ses objets) pour obtenir le contexte enrichi où seront pris les modèles "avec réécritures".

Au §6.5, en reprenant deux des situations particulières précédentes et en leur appliquant les résultats de la Section B, nous établissons que deux laxifications typiques possèdent la propriété de suffisante complétude connexe.
Tout d'abord, si $\mathcal{D}'$ est la syntaxe (de contexte ensembliste) des demi-groupes et si $\mathcal{D}$ est l'amphi-syntaxe (de contexte ensembliste avec réécritures) des pseudo-demi-groupes, alors $\mathcal{L} = (\mathcal{D},\mathcal{D}')$ est une laxification (au sens de la Section B) : formellement la structure de pseudo-demi-groupe assouplit donc *effectivement* (comme on pouvait s'y attendre) la structure de demi-groupe. De plus, $\mathcal{L}$ possède la propriété de suffisante complétude connexe : ainsi, les éléments d'un quelconque demi-groupe libre sont les composantes connexes (par réécriture) d'un pseudo-demi-groupe libre. Evidemment, cette situation est tout à fait typique du cas général (classique) des modèles libres ensemblistes de quelconques théories essentiellement équationnelles "unisortes", à lois de composition "partout définies".
Maintenant, si $\mathcal{D}'$ est la syntaxe (catégorique) des (petites) catégories quasi-cartésiennes et si $\mathcal{D}$ est l'amphi-syntaxe (de contexte 2-catégorique avec lax-naturalité), alors $\mathcal{L} = (\mathcal{D},\mathcal{D}')$ est une laxification : formellement la structure de (petite) 2-catégorie lax-quasi-cartésienne

assouplit donc *effectivement* (comme on pouvait s'y attendre) la structure de (petite) catégorie quasi-cartésienne. De plus, $\mathcal{L}$ possède la propriété de suffisante complétude connexe : ainsi , les *objets* d'une quelconque (petite) catégorie quasi-cartésienne librement engendrée par un (petit) graphe (par exemple) sont exactement les objets de la 2-catégorie lax-quasi-cartésienne (où on a *choisi* - en jouant sur le contexte - de *ne pas* utiliser de réécritures entre objets) qu'il engendre, tandis que les flèches de cette catégorie sont les composantes "2-connexes Hom par Hom" de cette 2-catégorie. Evidemment, cette siutation est tout à fait typique du cas général de modèles libres catégoriques des théories essentiellement équationnelles "multisortes" à lois de composition (ou *constructeurs*) "non partout définies" mais pour lesquelles :

- seuls des objets peuvent servir à construire de "nouveaux" objets,

- les seules conditions de définition des lois de composition ("partielles") sont des égalités entre objets "associés" à leurs arguments d'entrée.

Au §6.6, nous étudions le cas des catégories *localement cartésiennes* librement engendrées par un graphe : précisément, nous y ré-interprètons les considérations de [E.S.C.C.], qui sont justement à l'origine de cette "théorie générale de la suffisante complétude connexe" développée dans les Sections A et B. Ce cas doit être considéré comme tout à fait typique de celui des modèles libres catégoriques de *quelconques* théories essentiellement équationnelles "multisortes" à constructeurs "non partout définis", i.e. où :

- même des flèches (par exemple) peuvent servir à construi-

re de "nouveaux" objets (en l'espèce, ici : des produits fibrés),

- les conditions de définition des lois de composition ("partielles"), tout en étant encore des tests d'égalité (en l'espèce, ici : l'égalité des composés de deux couples de flèches consécutives reliant les deux mêmes objets extrèmes), *ne concernent pas que* les objets associés aux arguments d'entrée mais aussi (par exemple) des flèches.

Ainsi, nous détaillons la syntaxe (de contexte catégorique) $\mathcal{D}'$ des catégories localement cartésiennes.
Ensuite, puisqu'il est nécessaire de considérer tant des réécritures entre objets que des réécritures entre flèches, nous décrivons un contexte "catégorique avec réécritures", i.e. l'amphi-catégorie des (petites) "catégories avec réécritures" (c'est-à-dire de ces amphi-catégories où les Hom sont des graphes à composition associés à un ordre réflexif et où est distinguée une certaine sous-catégorie de 1-flèches "de réécriture entre objets").
Alors, un assouplissement "mécanique" de $\mathcal{D}'$ fournit une amphi-syntaxe $\mathfrak{D}$, de contexte catégorique avec réécritures, et $\mathfrak{L} = (\mathfrak{D},\mathcal{D}')$ est une laxification ... qui *n'a pas* la propriété de suffisante complétude connexe. Aussi, on "surcharge" $\mathfrak{L}$ à l'aide d'un élargissement particulier $\mathfrak{T} = (\mathfrak{D},\ldots,\mathcal{T},\ldots,\mathcal{D}')$, où les algèbres de la syntaxe $\mathcal{T}$ sont les *catégories lax-localement-cartésiennes* de [E.S.C.C.].
Pour une part, les considérations de [E.S.C.C.] signifient que $\mathfrak{T}$ possède, lui, la propriété de suffisante complétude connexe. De la sorte, les objets (resp. les flèches, ...) de la (petite) catégorie localement cartésienne librement engendrée par un (petit) graphe (par exemple) sont exactement les composantes connexes par réécriture (resp. 2-

connexes par 2-réécriture "Hom par Hom", ...) de l'ensemble des objets (resp. des flèches, ...) de la (petite) catégorie lax-localement-cartésienne librement engendrée par ce graphe : c'est l'autre part des résultats particuliers de [E.S.C.C.] que les considérations générales de la Section B permettent donc de retrouver immédiatement.

Pour conclure, signalons qu'il n'est pas absolument nécessaire d'avoir lu en détail les Sections A et B précédentes pour pouvoir parcourir cette Section C : nous y fournissons systématiquement les références des multiples concepts et nombreuses notations spécifiques figurant dans ces Sections antérieures et abondamment utilisées ici, par la force des choses : il sera donc aisé de les localiser rapidement. Nous espérons, même, que cela permettra une (re)lecture "en parallèle", évidemment plus motivante, des Sections A ou B et de cette Section C.

---

6. Exemples

6.1. Exemples de graphes à composition[1]

Si $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ est un foncteur entre catégories, alors son *image* $F(\mathbb{A})$ est naturellement munie d'une structure de graphe à composition[2] telle que :

- $Ob(F(\mathbb{A})) = F(Ob(\mathbb{A}))$,
- $ObId(F(\mathbb{A})) = Ob(F(\mathbb{A}))$,
- $Fl(F(\mathbb{A})) = F(Fl(\mathbb{A}))$,
- $CComp(F(\mathbb{A})) = (F \times F)(CComp(\mathbb{A}))$,
- la restriction de F :

$$F_{|F(\mathbb{A})} : \mathbb{A} \longrightarrow F(\mathbb{A})$$

est un foncteur.

Alors, il est clair que :

- l'injection canonique :

$$F(\mathbb{A}) \hookrightarrow \mathbb{A}'$$

est un foncteur.

A la donnée (E,R) d'un ensemble E muni d'une relation binaire R, on associe le graphe à composition $Gac(E,R)$ tel que :

[1] Voir la Section A, §1.2 - i.e. [S.C.C.A.].

[2] Historiquement, c'est justement parce que $F(\mathbb{A})$ n'est pas, en général, une sous-catégorie de $\mathbb{A}'$ que la notion de "graphe multiplicatif" (i.e. de graphe à composition où tout objet est à identité) a été introduite en [C.A.S.T.] par C. Ehresmann.

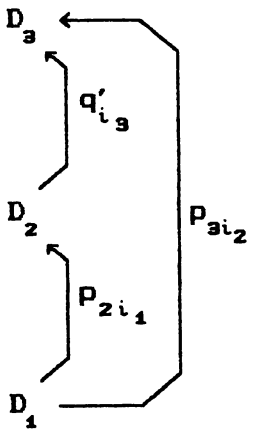
- $Ob(Gac(E,R)) = E$,

- $Fl(Gac(E,R))$ est l'ensemble des $(x,y) : x \longrightarrow y$ tels que $x \, R \, y$,

- $ObId(Gac(E,R))$ est l'ensemble des x tels que $x \, R \, x$ et l'on a $id(x) = (x,x) : x \longrightarrow x$,

- $CComp(Gac(E,R))$ est l'ensemble des $((y,z),(x,y))$ tels que $x \, R \, y$, $y \, R \, z$ et $x \, R \, z$, auquel cas l'on a $(y,z) \cdot (x,y) = (x,z)$.

On note $\mathbb{B}_{nass}$ le graphe à composition représenté par le diagramme (non commutatif) et le système d'équations (Eq_{nass}) ci-dessous :

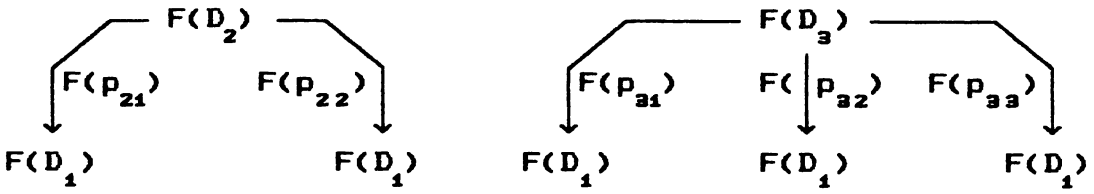


(où $1 \leq i_1 \leq 2$, $1 \leq i_2 \leq 3$ et $1 \leq i_3 \leq 2$)

$$(Eq_{nass}) \begin{cases} q'_1 \cdot p_{21} = p_{31} \\ q'_1 \cdot p_{22} = p_{32} \\ q'_2 \cdot p_{21} = p_{32} \\ q'_2 \cdot p_{22} = p_{33} \end{cases}$$

Clairement, si $F : (\mathbb{B}_{nass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur pour lequel les deux diagrammes ci-dessous sont des pro-

duits cartésiens (nous dirons, pour faire court, que F est *convenable*) :

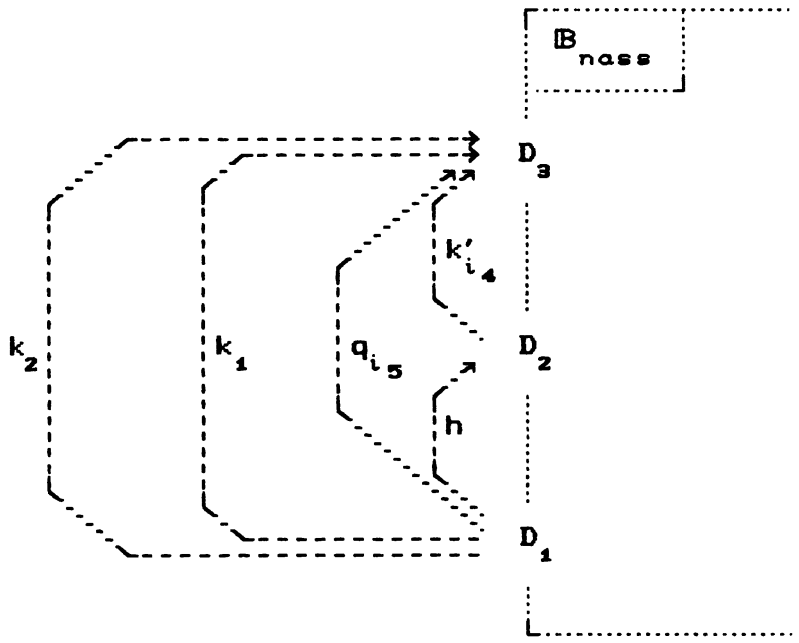


alors, on voit que F vérifie le système de conditions (Val_{nass}) suivant :

$$(Val_{nass})\begin{cases} \text{pour tous } x, y \in F(D_1), \text{ on a :} \\ \quad F(p_{21})(x,y) = x \\ \quad F(p_{22})(x,y) = y \\ \text{pour tous } x, y, z \in F(D_1), \text{ on a :} \\ \quad F(p_{31})(x,y,z) = x \\ \quad F(p_{32})(x,y,z) = y \\ \quad F(p_{33})(x,y,z) = z \\ \text{pour tous } x, y, z \in F(D_1), \text{ on a :} \\ \quad F(q'_1)(x,y,z) = (x,y) \\ \quad F(q'_2)(x,y,z) = (y,z) \end{cases}$$

(autrement dit, du point de vue de ces foncteurs convenables, $\mathbb{B}_{nass}$ est une *représentation graphique des projections nécessaires à l'associativité* - éventuelle - des lois de composition binaires et internes - éventuelles !).

On note maintenant $\mathbb{D}_{utass}$ le graphe à composition, contenant $\mathbb{B}_{nass}$, représenté par le diagramme (non commutatif) ci-dessous et vérifiant (outre le système (Eq_{nass})) le système supplémentaire d'équations (Eq_{utass}) qui le suit :



(où $1 \leq i_4 \leq 2$ et $1 \leq i_5 \leq 2$)

$$(Eq_{utass}) \begin{cases} q'_1 \cdot h = q_1 \\ q'_2 \cdot h = q_2 \\ \\ k'_1 \cdot p_{21} = q_1 \\ k'_1 \cdot p_{22} = p_{33} \\ \\ k'_2 \cdot p_{21} = p_{31} \\ k'_2 \cdot p_{22} = q_2 \\ \\ k'_1 \cdot h = k_1 \\ k'_2 \cdot h = k_2 \end{cases}$$

Cette fois, si $F : (\mathbb{D}_{utass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur dont la restriction $F_{|(\mathbb{B}_{nass})^{op}} : (\mathbb{B}_{nass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est convenable (et nous dirons encore que c'est F qui est *convenable*), alors :

- $F(h) : F(D_2) \longrightarrow F(D_1)$ est une loi de composition bi-

naire interne sur l'ensemble $F(D_1)$ (et, pour tous x , $y \in F(D_1)$, on note bien sûr $F(h)(x,y) = xy$),

- outre le système de conditions (Val_{nass}) précédent, F vérifie aussi le système (Val_{utass}) suivant :

$$(Val_{utass}) \begin{cases} \text{pour tous } x , y , z \in F(D_1) , \text{ on a :} \\ \quad F(q_1)(x,y,z) = xy \\ \quad F(q_2)(x,y,z) = yz \\ \quad F(k'_1)(x,y,z) = (xy,z) \\ \quad F(k'_2)(x,y,z) = (x,yz) \\ \quad F(k_1)(x,y,z) = (xy)z \\ \quad F(k_2)(x,y,z) = x(yz) \end{cases}$$

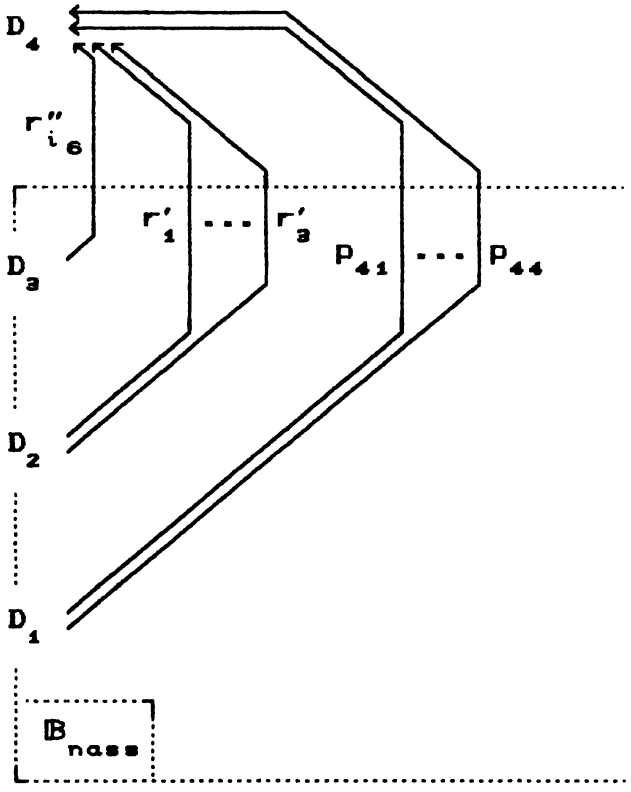
(autrement dit, du point de vue de ces foncteurs convenables, $\mathbb{D}_{utass}$ est une *représentation graphique de ce qui est utile à l'associativité* - éventuelle - des lois de composition binaires et internes).

Enfin, on désigne par $\mathbb{D}_{ass}$ le graphe à composition obtenu en quotientant $\mathbb{D}_{utass}$ par l'identification de k_1 et k_2 (à une même flèche notée k) et on note $Quo_{ass} : \mathbb{D}_{utass} \longrightarrow \mathbb{D}_{ass}$ le foncteur passage au quotient.
Il est clair que, si $F : (\mathbb{D}_{ass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur tel que $F \circ (Quo_{ass})^{op} : (\mathbb{D}_{utass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est convenable (et nous dirons, de nouveau, que c'est F qui est *convenable*), alors :

- $F(h) : F(D_2) \longrightarrow F(D_1)$ est une loi de composition binaire interne et associative sur $F(D_1)$,

(autrement dit, du point de vue de ces foncteurs convenables, $\mathbb{D}_{ass}$ est une *représentation graphique des lois de composition binaires, internes et associatives*).

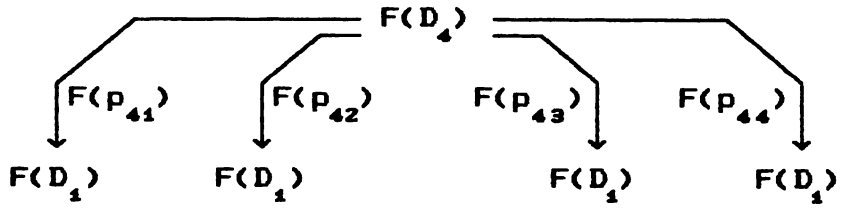
Notons $\mathbb{B}_{nsurass}$ le graphe à composition, contenant $\mathbb{B}_{nass}$, représenté par le diagramme (non commutatif) ci-dessous et vérifiant (outre le système (Eq_{nass})) le système supplémentaire d'équations $(Eq_{nsurass})$ qui le suit :



(où $1 \leq i_6 \leq 2$)

$$(Eq_{nsurass}) \quad \begin{cases} r'_1 \cdot p_{21} = p_{41} \\ r'_1 \cdot p_{22} = p_{42} \\ r'_2 \cdot p_{21} = p_{42} \\ r'_2 \cdot p_{22} = p_{43} \\ r'_3 \cdot p_{21} = p_{43} \\ s \cdot p_{22} = p_{44} \\ r''_1 \cdot p_{31} = p_{41} \\ r''_1 \cdot p_{32} = p_{42} \\ r''_1 \cdot p_{33} = p_{43} \\ r''_2 \cdot p_{31} = p_{42} \\ r''_2 \cdot p_{32} = p_{43} \\ r''_2 \cdot p_{33} = p_{44} \end{cases}$$

Clairement, si $F : (\mathbb{B}_{nsurass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur dont la restriction $F_{|(\mathbb{B}_{nass})^{op}} : (\mathbb{B}_{nass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est convenable et pour lequel, de plus, le diagramme ci-dessous est un produit cartésien (et nous dirons, comme d'habitude ..., que F est *convenable*) :



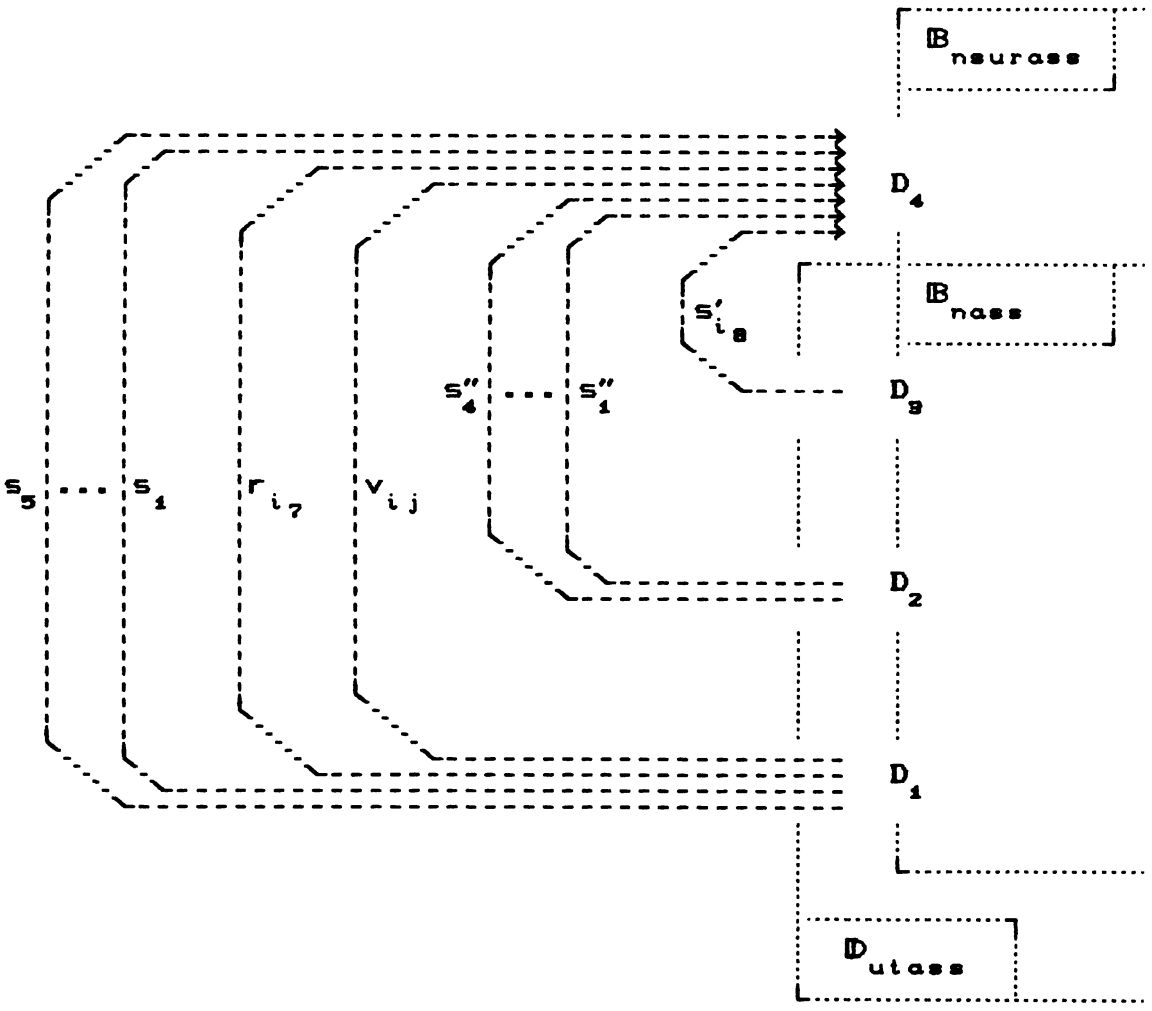
alors, on voit que F vérifie le système de conditions (Val_{nass}) précédent et le système $(Val_{nsurass})$ suivant :

$(Val_{nsurass})$ $\left\{\begin{array}{l} \text{pour tous } x, y, z, t \in F(D_1), \text{ on a :} \\ \quad F(p_{41})(x,y,z,t) = x \\ \quad F(p_{42})(x,y,z,t) = y \\ \quad F(p_{43})(x,y,z,t) = z \\ \quad F(p_{44})(x,y,z,t) = t \\ \quad F(r'_1)(x,y,z,t) = (x,y) \\ \quad F(r'_2)(x,y,z,t) = (y,z) \\ \quad F(r'_3)(x,y,z,t) = (z,t) \\ \quad F(r''_1)(x,y,z,t) = (x,y,z) \\ \quad F(r''_2)(x,y,z,t) = (y,z,t) \end{array}\right.$

(autrement dit, du point de vue de ces foncteurs convenables, $\mathbb{B}_{nsurass}$ est une *représentation graphique des projections nécessaires à la sur-associativité*, i.e. à l'associativité - éventuelle - à trois et quatre éléments, des lois de composition binaires et internes - éventuelles !(3)).

On note maintenant $\mathbb{D}_{ulsurass}$ le graphe à composition, contenant $\mathbb{B}_{nsurass}$ et $\mathbb{D}_{ulass}$, représenté par le diagramme (non commutatif) ci-dessous et vérifiant (outre les systèmes (Eq_{nass}), (Eq_{ulass}) et $(Eq_{nsurass})$) le système supplémentaire d'équations $(Eq_{ulsurass})$ qui le suit :

(3) Nous avons en vue quelques considérations ultérieures sur la cohérence et non sur "l'associativité à quatre éléments" bien entendu.



(où $1 \leq i_7 \leq 3$, $1 \leq i_8 \leq 3$, $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 2$)

$$(Eq_{ulsurass}) \left\{ \begin{array}{l} r_1 = r'_1 \cdot h \\ r_2 = r'_2 \cdot h \\ r_3 = r'_3 \cdot h \\ s'_1 \cdot p_{31} = r_1 \\ s'_1 \cdot p_{32} = p_{43} \\ s'_1 \cdot p_{33} = p_{44} \\ s'_2 \cdot p_{31} = p_{41} \\ s'_2 \cdot p_{32} = r_2 \\ s'_2 \cdot p_{33} = p_{44} \\ s'_3 \cdot p_{31} = p_{41} \\ s'_3 \cdot p_{32} = p_{42} \\ s'_3 \cdot p_{33} = r_3 \\ s''_1 \cdot p_{21} = r''_1 \cdot k_1 = v_{11} \\ s''_1 \cdot p_{22} = p_{44} \\ s''_2 \cdot p_{21} = r''_1 \cdot k_2 = v_{12} \\ s''_2 \cdot p_{22} = p_{44} \\ s''_3 \cdot p_{21} = p_{41} \\ s''_3 \cdot p_{22} = r''_2 \cdot k_1 = v_{21} \\ s''_4 \cdot p_{21} = p_{41} \\ s''_4 \cdot p_{22} = r''_2 \cdot k_2 = v_{22} \\ s_1 = s'_1 \cdot k_1 = s''_1 \cdot h \\ s_2 = s'_2 \cdot k_1 = s''_2 \cdot h \\ s_3 = s'_2 \cdot k_2 = s''_3 \cdot h \\ s_4 = s'_3 \cdot k_2 = s''_4 \cdot h \\ s_5 = s'_1 \cdot k_2 = s'_3 \cdot k_1 \end{array} \right.$$

Cette fois, si $F : (\mathbb{D}_{ulsurass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur dont la restriction $F_{|(\mathbb{B}_{nsurass})^{op}} : (\mathbb{B}_{nsurass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est convenable (et nous dirons bien sûr que F est aussi

convenable), alors :

- $F(h) : F(D_2) \longrightarrow F(D_1)$ est une loi de composition binaire interne sur l'ensemble $F(D_1)$ (et, pour tous $x , y \in F(D_1)$, on note bien sûr $F(h)(x,y) = xy$),

- outre les systèmes de conditions (Val_{nass}) , (Val_{ulass}) et $(Val_{nsurass})$ précédents, F vérifie aussi le système $(Val_{ulsurass})$ suivant :

$(Val_{ulsurass})$ pour tous $x , y , z , t \in F(D_1)$, on a :

$$F(r_1)(x,y,z,t) = xy$$
$$F(r_2)(x,y,z,t) = yz$$
$$F(r_3)(x,y,z,t) = zt$$

$$F(s'_1)(x,y,z,t) = (xy,z,t)$$
$$F(s'_2)(x,y,z,t) = (x,yz,t)$$
$$F(s'_3)(x,y,z,t) = (x,y,zt)$$

$$F(s''_1)(x,y,z,t) = ((xy)z,t)$$
$$F(s''_2)(x,y,z,t) = (x(yz),t)$$
$$F(s''_3)(x,y,z,t) = (x,(yz)t)$$
$$F(s''_4)(x,y,z,t) = (x,y(zt))$$

$$F(v_{11})(x,y,z,t) = (xy)z$$
$$F(v_{12})(x,y,z,t) = x(yz)$$
$$F(v_{21})(x,y,z,t) = (yz)t$$
$$F(v_{22})(x,y,z,t) = y(zt)$$

$$F(s_1)(x,y,z,t) = ((xy)z)t$$
$$F(s_2)(x,y,z,t) = (x(yz))t$$
$$F(s_3)(x,y,z,t) = x((yz)t)$$
$$F(s_4)(x,y,z,t) = x(y(zt))$$
$$F(s_5)(x,y,z,t) = (xy)(zt)$$

(autrement dit, du point de vue de ces foncteurs convenables, $\mathbb{D}_{ulsurass}$ est une *représentation graphique de ce*

qui est utile à la sur-associativité - éventuelle - des lois de composition binaires et internes).

Enfin, on désigne par $\mathbb{D}_{surass}$ le graphe à composition (contenant $\mathbb{D}_{ass}$) obtenu en quotientant $\mathbb{D}_{utsurass}$ par :

- l'identification de k_1 et k_2 (à une même flèche notée k),

- l'identification de s''_1 et s''_2 (à une même flèche notée s''_{12}),

- l'identification de s''_3 et s''_4 (à une même flèche notée s''_{34}),

- l'identification de s_1 , s_2 , s_3 , s_4 et s_5 (à une même flèche notée s),

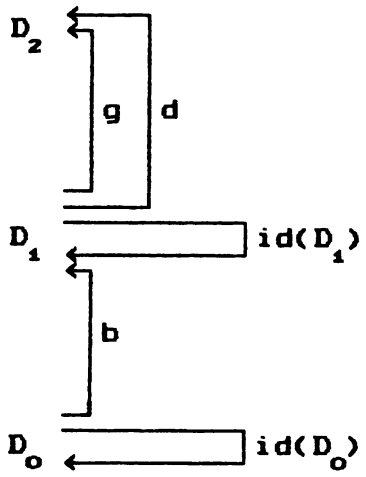
et on note $Quo_{surass} : \mathbb{D}_{utsurass} \longrightarrow \mathbb{D}_{surass}$ le foncteur passage au quotient.
Il est clair que, si $F : (\mathbb{D}_{surass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur tel que $F \circ (Quo_{surass})^{op} : (\mathbb{D}_{utsurass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est convenable (et nous dirons, de nouveau, que c'est F qui est *convenable*), alors :

- $F(h) : F(D_2) \longrightarrow F(D_1)$ est une loi de composition binaire interne, "associative et sur-associative" sur $F(D_1)$,

(autrement dit, comme la sur-associativité est évidemment conséquence de l'associativité, $\mathbb{D}_{surass}$ est, du point de vue de ces foncteurs convenables, une *représentation graphique surabondante des lois de composition binaires, internes et associatives*[4]).

[4] Nous avons toujours en vue quelques brèves considérations concernant la cohérence et non "l'associativité à quatre éléments".

Désignons maintenant par $\mathbb{B}_{nqcart}$ le graphe à composition ("sans équations autres que les triviales") représenté par le diagramme ci-dessous :



Alors, si $\mathbb{C}$ est une catégorie petite, on désigne par $F_{\mathbb{C}} : (\mathbb{B}_{nqcart})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ le foncteur, dit *bien adapté à* $\mathbb{C}$, tel que :

(Val_{nqcart})

$$F_{\mathbb{C}}(D_o) = \{ (C_1, C_2) \;/\; C_1, C_2 \in Ob(\mathbb{C}) \}$$

$$F_{\mathbb{C}}(D_1) = \{ (c'_1 : C' \to C_1, c'_2 : C' \to C_2) \;/\; c'_1, c'_2 \in Fl(\mathbb{C}) \}$$

$$F_{\mathbb{C}}(D_2) = \{ (c_1 : C \to C_1, c_2 : C \to C_2, c' : C' \to C) \;/\; c_1, c_2, c' \in Fl(\mathbb{C}) \}$$

pour tout $(c'_1 : C' \to C_1, c'_2 : C' \to C_2) \in F_{\mathbb{C}}(D_1)$, on a :

$$F_{\mathbb{C}}(b)(c'_1, c'_2) = (C_1, C_2)$$

pour tout $(c_1, c_2, c') \in F_{\mathbb{C}}(D_2)$, on a :

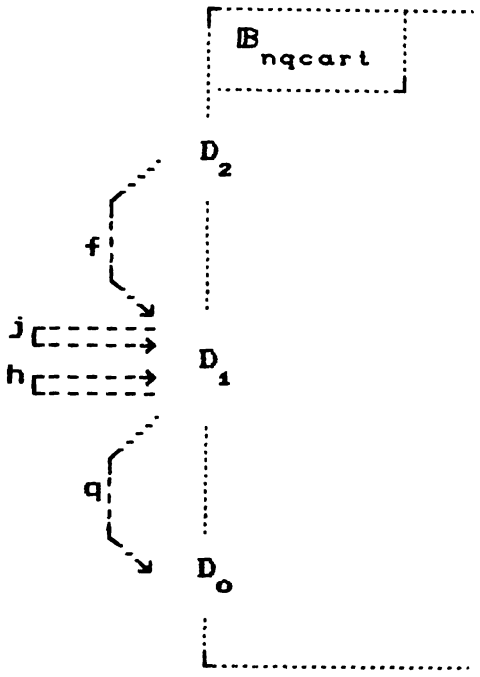
$$F_{\mathbb{C}}(g)(c_1, c_2, c') = (c_1, c_2)$$

$$F_{\mathbb{C}}(d)(c_1, c_2, c') = (c_1 \cdot c', c_2 \cdot c')$$

(on dira que, du point de vue de ces foncteurs bien adap-

tés, $\mathbb{B}_{nqcart}$ est une *représentation graphique des "ingrédients catégoriques" nécessaires à une éventuelle structure de catégorie quasi-cartésienne* - terminologie que ce qui suit justifiera[5]).

Dès lors, on note $\mathbb{D}_{utqcart}$ le graphe à composition, contenant $\mathbb{B}_{nqcart}$, représenté par le diagramme (non commutatif) ci-dessous et vérifiant le système d'équations $(Eq_{utqcart})$ qui le suit :

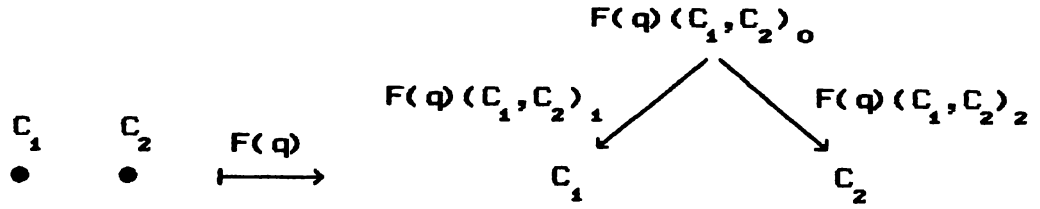


$$(Eq_{utqcart}) \begin{cases} q.b = id(D_0) \\ f.g = h = b.q \\ f.d = j \end{cases}$$

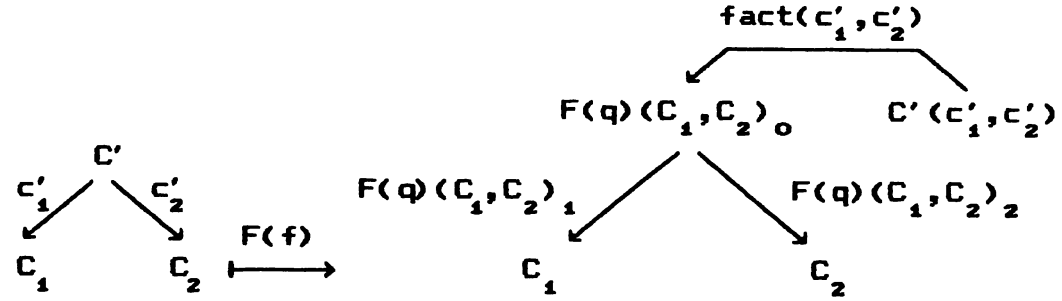
[5] Pour faire court, nous nous contentons d'évoquer les catégories "quasi-cartésiennes". Bien entendu, des considérations tout à fait analogues s'appliquent aux catégories cartésiennes.

Clairement, si $F : (\mathbb{D}_{utqcart})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur dont la restriction $F_{|(\mathbb{B}_{nqcart})^{op}} : (\mathbb{B}_{nqcart})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur bien adapté à une petite catégorie $\mathbb{C}$ (auquel cas nous dirons que F est *adapté à* $\mathbb{C}$), alors on voit que :

- $F(q) : F(D_0) \longrightarrow F(D_1)$ est une *loi sur* $\mathbb{C}$ associant à tout couple (C_1, C_2) de deux objets de $\mathbb{C}$ un *quasi-produit potentiel de* C_1 *et* C_2 , i.e. un couple de flèches de $\mathbb{C}$ tel que représenté ci-dessous :



- $F(f) : F(D_1) \longrightarrow F(D_2)$ est une *loi sur* $\mathbb{C}$ associant à tout couple $(c'_1 : C' \to C_1, c'_2 : C' \to C_2)$ de deux flèches (de même domaine) de $\mathbb{C}$ une *factorisation potentielle de* ce couple, i.e. un triplet de flèches de $\mathbb{C}$ tel que représenté ci-dessous :

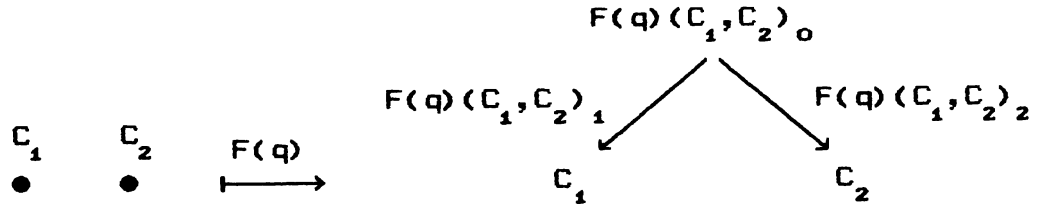


(on dira que, du point de vue de ces foncteurs adaptés, $\mathbb{D}_{utqcart}$ est une *représentation graphique des "ingrédients catégoriques" utiles à la structure de catégorie quasi-cartésienne*).

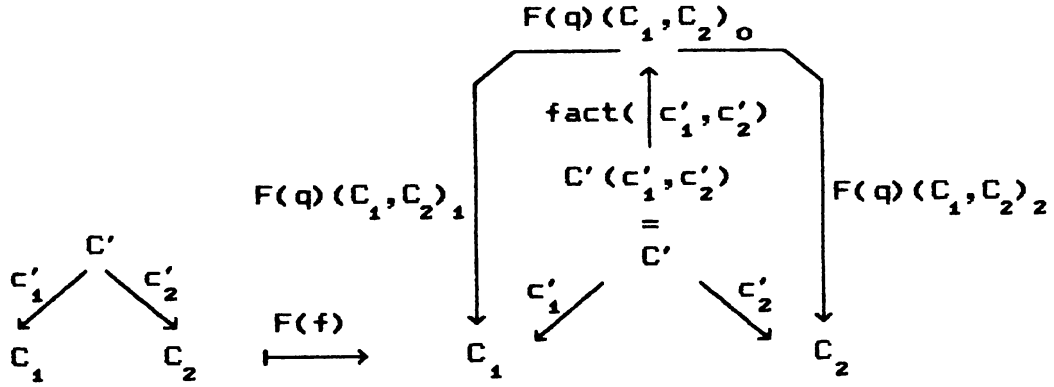
Enfin, on note $\mathbb{D}_{qcart}$ le graphe à composition obtenu en

quotientant $\mathbb{D}_{utqcart}$ par l'identification de j à $id(D_1)$ et on désigne par $Quo_{qcart} : \mathbb{D}_{utqcart} \longrightarrow \mathbb{D}_{qcart}$ le foncteur passage au quotient.
Manifestement, si $F : (\mathbb{D}_{qcart})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur *adapté* à une petite catégorie $\mathbb{C}$, i.e. tel que le foncteur $F \circ (Quo_{qcart})^{op} : (\mathbb{D}_{utqcart})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est adapté à $\mathbb{C}$, alors F "munit" $\mathbb{C}$ d'une structure de *catégorie quasi-cartésienne*. Autrement dit :

- $F(q) : F(D_0) \longrightarrow F(D_1)$ est un *choix de quasi-produits sur* $\mathbb{C}$, associant à tout couple (C_1, C_2) de deux objets de $\mathbb{C}$ un *quasi-produit de* C_1 *et* C_2, i.e. un couple de flèches de $\mathbb{C}$ tel que représenté ci-dessous :



- $F(f) : F(D_1) \longrightarrow F(D_2)$ est un *choix de factorisations sur* $\mathbb{C}$, associant à tout couple $(c'_1 : C' \to C_1, c'_2 : C' \to C_2)$ de deux flèches (de même domaine) de $\mathbb{C}$ une *factorisation de ce couple au travers du quasi-produit*, i.e. de sorte que le diagramme ci-dessous est commutatif :



(on peut donc légitimement dire que, du point de vue de ces foncteurs adaptés, $\mathbb{D}_{qcart}$ est une *représentation graphique de la structure de catégorie quasi-cartésienne*[6]).

6.2. Exemples de syntaxes et d'algèbres[7]

Désignons par $K_{ass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{D}_{ass}$ le foncteur injection canonique et par $J_{nass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ le foncteur tel que :

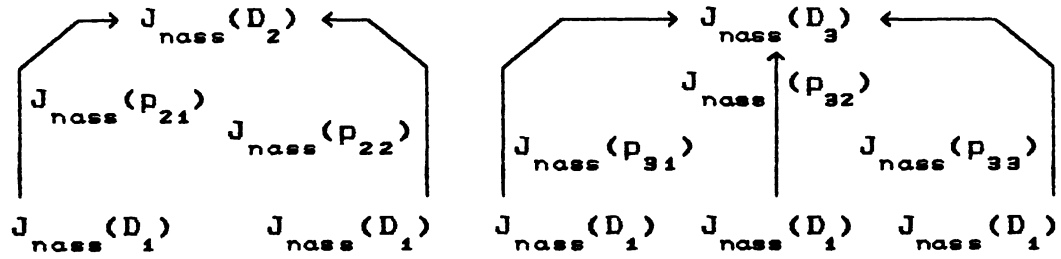
- pour tout $1 \leq i \leq 3$, on a :
$$J_{nass}(D_i) = \{1,\ldots,i\}$$
- pour tout $1 \leq i \leq 2$, on a :
$$J_{nass}(p_{2i}) : \{1\} \longrightarrow \{1,2\}$$
$$1 \longmapsto i$$
- pour tout $1 \leq i \leq 3$, on a :
$$J_{nass}(p_{3i}) : \{1\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$
$$1 \longmapsto i$$
- pour tout $1 \leq i \leq 2$, on a :
$$J_{nass}(q_i') : \{1,2\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$
$$1 \longmapsto i$$
$$2 \longmapsto i + 1$$

Alors, clairement, $\mathcal{D}_{ass} = (\mathbb{E}ns, J_{nass}, \mathbb{B}_{nass}, K_{ass}, \mathbb{D}_{ass})$ est une syntaxe sur $\mathbb{E}ns$.

Par construction, les deux diagrammes ci-dessous :

(6) Comme précédemment, nous nous limitons aux catégories quasi-cartésiennes pour faire court. Mais des considérations tout à fait analogues valent pour les catégories cartésiennes.

(7) Voir la Section A, §§2.1 et 2.2 - i.e. [S.C.C.A.].



représentent deux sommes dans $\mathbb{E}ns$. Il en résulte que, pour tout ensemble E , le foncteur :

$$\mathbb{E}ns(J_{nass}(-),E) : (\mathbb{B}_{nass})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$$

est naturellement équivalent à un foncteur convenable (au sens du §6.1).

Si (E,ϑ) est une $\mathcal{D}_{ass}$-algèbre et si $x , y \in E$, on dispose de l'application :

$$\lceil x,y \rceil : J_{nass}(D_2) = \{1,2\} \longrightarrow E$$
$$1 \longmapsto x$$
$$2 \longmapsto y$$

et donc de l'application :

$$\lceil x,y \rceil \cdot_\vartheta h : \{1\} = J_{nass}(D_1) \longrightarrow E .$$

En posant, pour tous $x , y \in E$:

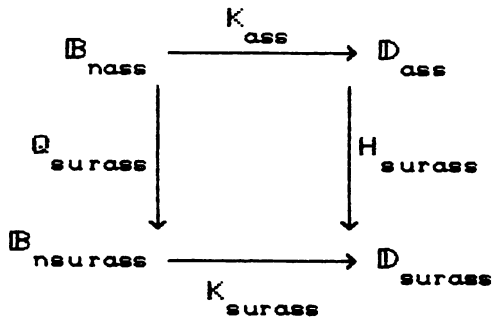
$$x \perp_\vartheta y = (\lceil x,y \rceil \cdot_\vartheta h)\ (1) ,$$

il est clair qu'on définit une loi binaire associative :

$$\perp_\vartheta : E \times E \longrightarrow E .$$

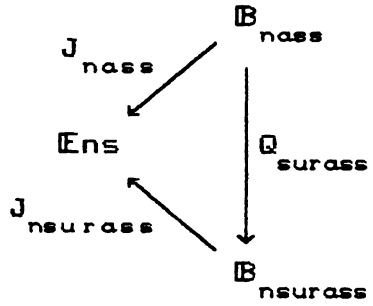
On en conclut facilement que la catégorie des $\mathcal{D}_{ass}$-algèbres (E,ϑ) est équivalente à la catégorie des demi-groupes $(E,\perp)$.

Notons maintenant $Q_{surass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{B}_{nsurass}$, $H_{surass} : \mathbb{D}_{ass} \longrightarrow \mathbb{D}_{surass}$ et $K_{surass} : \mathbb{B}_{nsurass} \longrightarrow \mathbb{D}_{surass}$ les foncteurs injections canoniques (résultant des constructions du §6.1), de sorte que le diagramme ci-dessous est commutatif :



Désignons également par $J_{nsurass} : \mathbb{B}_{nsurass} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ le foncteur tel que :

- le diagramme ci-dessous est commutatif :



- on a :

$$J_{nsurass}(D_4) = \{1,2,3,4\}$$

- pour tout $1 \leq i \leq 4$, on a :

$$J_{nsurass}(p_{4i}) : \{1\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$$
$$1 \longmapsto i$$

- pour tout $1 \leq i \leq 3$, on a :

$$J_{nsurass}(r'_i) : \{1,2\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$$
$$1 \longmapsto i$$
$$2 \longmapsto i + 1$$

- pour tout $1 \leq i \leq 2$, on a :

$$J_{nsurass}(r''_i) : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$$
$$1 \longmapsto i$$
$$2 \longmapsto i + 1$$
$$3 \longmapsto i + 2$$

Alors, il est facile de vérifier que :

$$\mathcal{D}_{surass} = (\mathbb{E}ns, J_{nsurass}, \mathbb{B}_{nsurass}, K_{surass}, \mathbb{D}_{surass})$$

est une syntaxe sur $\mathbb{E}ns$. De même, il est facile de vérifier que :

$$\mathcal{H} = (Q_{surass}, H_{surass}) : \mathcal{D}_{ass} \longrightarrow \mathcal{D}_{surass}$$

est un homomorphisme de syntaxes sur $\mathbb{E}ns$. Et, enfin, que (l'associativité étant évidemment équivalente à la surassociativité ... en tout cas pour les lois binaires sur des ensembles !) $\mathcal{H}$ est bien entendu une isologie.

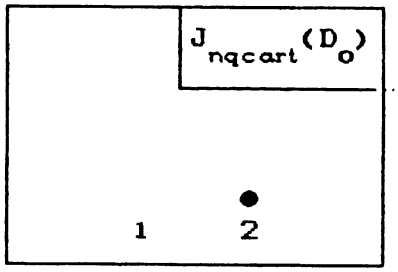
Désignons par $Disc : \mathbb{E}ns \longrightarrow \mathbb{C}at$ le foncteur (adjoint à gauche du foncteur "objets de" $Ob : \mathbb{C}at \longrightarrow \mathbb{E}ns$) associant à tout ensemble E la catégorie discrète ayant E pour ensemble d'objets.

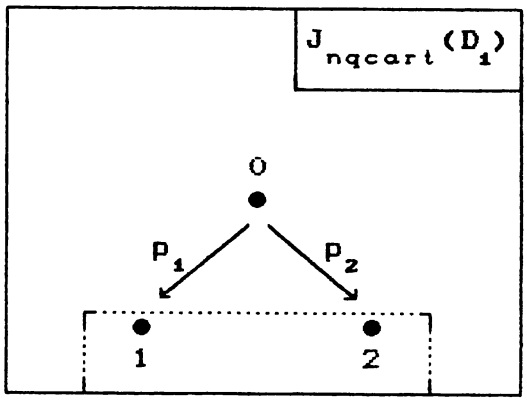
Clairement, $\mathcal{D}_{ass}$ (resp. $\mathcal{D}_{surass}$) est transportable (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) par le foncteur $Disc : \mathbb{E}ns \longrightarrow \mathbb{C}at$.

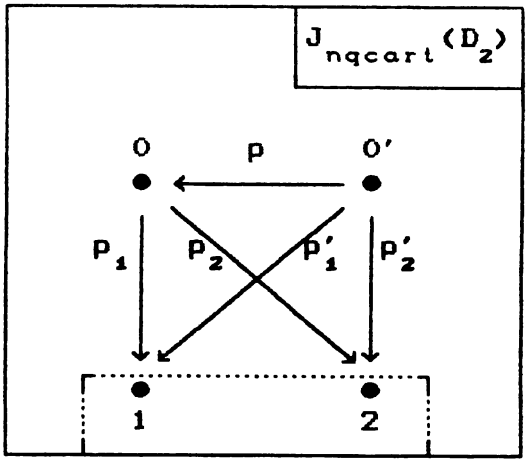
Manifestement, la catégorie des $(Disc.\mathcal{D}_{ass})$-algèbres (resp. des $(Disc.\mathcal{D}_{surass})$-algèbres) est équivalente à la catégorie des petites catégories dont l'ensemble des objets est muni d'une structure de demi-groupe.

Désignons par $K_{qcart} : \mathbb{B}_{nqcart} \longrightarrow \mathbb{D}_{qcart}$ le foncteur injection canonique et par $J_{nqcart} : \mathbb{B}_{nqcart} \longrightarrow \mathbb{C}at$ le foncteur tel que :

- les catégories $J_{nqcart}(D_0)$, $J_{nqcart}(D_1)$ et $J_{nqcart}(D_2)$ sont représentées par les diagrammes commutatifs ci-dessous :


$J_{nqcart}(D_0)$
1
2


$J_{nqcart}(D_1)$
0
p_1
p_2
1
2


$J_{nqcart}(D_2)$
0
p
0'
p_1
p_2
p'_1
p'_2
1
2

- on a :

$$J_{nqcart}(b) : J_{nqcart}(D_0) \longrightarrow J_{nqcart}(D_1)$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$2 \longmapsto 2$$

$$J_{nqcart}(g) : J_{nqcart}(D_1) \longrightarrow J_{nqcart}(D_2)$$
$$p_1 \longmapsto p_1$$
$$p_2 \longmapsto p_2$$

et :

$$J_{nqcart}(d) : J_{nqcart}(D_1) \longrightarrow J_{nqcart}(D_2)$$
$$p_1 \longmapsto p'_1$$
$$p_2 \longmapsto p'_2$$

Alors, $\mathcal{D}_{qcart} = (\mathbb{C}at, J_{nqcart}, \mathbb{B}_{nqcart}, K_{qcart}, \mathbb{D}_{qcart})$ est évidemment une syntaxe sur $\mathbb{C}at$.

Il est facile de vérifier que, pour toute petite catégorie $\mathbb{C}$, le foncteur :

$$\mathbb{C}at(J_{nqcart}(-), \mathbb{C}) : (\mathbb{B}_{nqcart})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$$

est naturellement équivalent au foncteur bien adapté à $\mathbb{C}$ (au sens du §6.1) $F_{\mathbb{C}} : (\mathbb{B}_{nqcart})^{op} \longrightarrow \mathbb{E}ns$.

Si $(\mathbb{C}, \vartheta)$ est une $\mathcal{D}_{qcart}$-algèbre et si C_1 , $C_2 \in Ob(\mathbb{C})$ sont deux objets de $\mathbb{C}$, on dispose du foncteur :

$$\ulcorner C_1, C_2 \urcorner : J_{nqcart}(D_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$1 \longmapsto C_1$$
$$2 \longmapsto C_2$$

et donc du foncteur :

$$\ulcorner C_1, C_2 \urcorner \cdot_{\vartheta} q : J_{nqcart}(D_1) \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

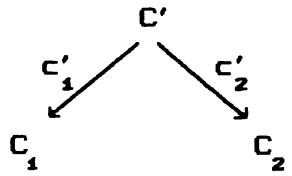
c'est-à-dire du cône projectif de $\mathbb{C}$ (nécessairement de base les objets C_1 et C_2 , vu le système d'équations $(Eq_{ulqcart})$) représenté ci-dessous :

$$\ulcorner C_1, C_2 \urcorner \cdot_\vartheta q \ (0) \underset{=}{} C_1 \times_\vartheta C_2$$

$$\text{proj}_\vartheta(C_1,C_2)_1 = (\ulcorner C_1, C_2 \urcorner \cdot_\vartheta q)(p_1) \qquad \text{proj}_\vartheta(C_1,C_2)_2 = (\ulcorner C_1 C_2 \urcorner \cdot_\vartheta q)(p_2)$$

$$C_1 \qquad C_2$$

Ce cône projectif est un quasi-produit dans $\mathbb{C}$, puisque, si on dispose d'un autre cône projectif (c'_1, c'_2) de $\mathbb{C}$ (de même base C_1 et C_2), tel que représenté ci-dessous :



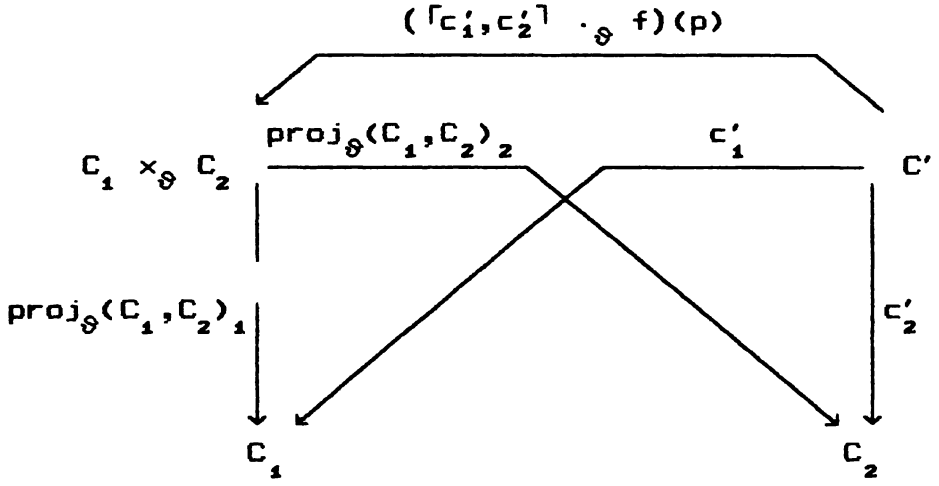
alors il lui correspond le foncteur :

$$\ulcorner c'_1, c'_2 \urcorner : J_{nqcart}(D_1) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$p_1 \longmapsto c'_1$$
$$p_2 \longmapsto c'_2$$

et donc le foncteur :

$$\ulcorner c'_1, c'_2 \urcorner \cdot_\vartheta f : J_{nqcart}(D_2) \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

En d'autres termes, on dispose d'une factorisation (choisie) du cône projectif (c'_1, c'_2) au travers du quasi-produit, i.e. on dispose du diagramme (nécessairement) commutatif (vu le système d'équations $(Eq_{ulqcart})$ et l'identification de j à $id(D_1)$) ci-dessous :



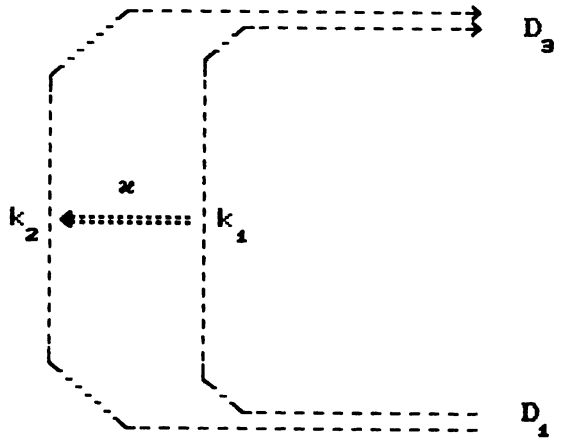
Ainsi, la catégorie des $\mathcal{D}_{qcart}$-algèbres $(\mathbb{C},\vartheta)$ est équivalente à la catégorie des petites catégories quasi-cartésiennes, i.e. des petites catégories munies d'un choix de quasi-produits (et d'un choix de factorisations vers ces quasi-produits) $(\mathbb{C},\times_\vartheta)$.

6.3. Exemples d'amphi-graphes à composition[8]

On note $\mathbb{D}_{reecass}$ l'amphi-graphe à composition tel que :

- le graphe à composition de ses 1-flèches est (isomorphe au graphe à composition) $\mathbb{D}_{utass}$ (introduit au §6.1),
- ses 2-flèches sont représentées par le diagramme ci-dessous :

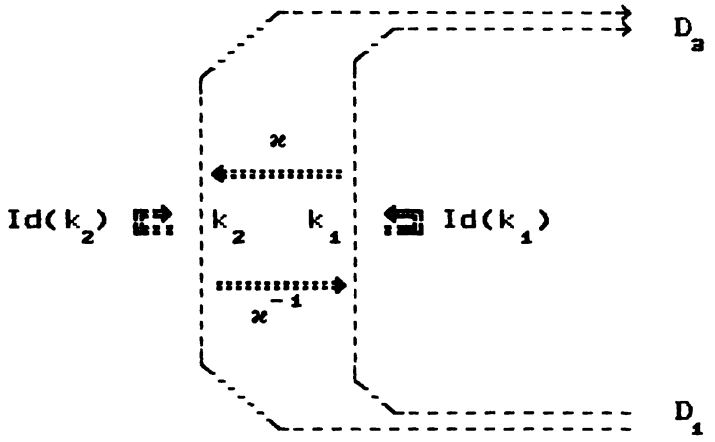
[8] Voir la Section A, §3.2 - i.e. [S.C.C.A.].



Cet amphi-graphe à composition "permet de décrire (amphi-)graphiquement" la structure d'ensemble muni d'une relation de réécriture et d'une loi binaire compatible, associative à la réécriture près (pour s'en convaincre, si nécessaire, le lecteur pourra se reporter au §6.4).

Plus particulièrement, on note $\mathbb{D}_{assiso}$ l'amphi-graphe à composition tel que :

- le graphe à composition de ses 1-flèches est (isomorphe au graphe à composition) $\mathbb{D}_{utass}$ (introduit au §6.1),
- ses 2-flèches sont représentées par le diagramme ci-dessous :



- les équations suivantes sont vérifiées (en utilisant des notations analogues à celles adoptées en Section A, §3.2 - i.e. en [S.C.C.A.] -, en particulier si $*$ désigne la composition des flèches dans le graphe à composition $\mathbb{D}_{assiso}(D_1, D_3)$) :

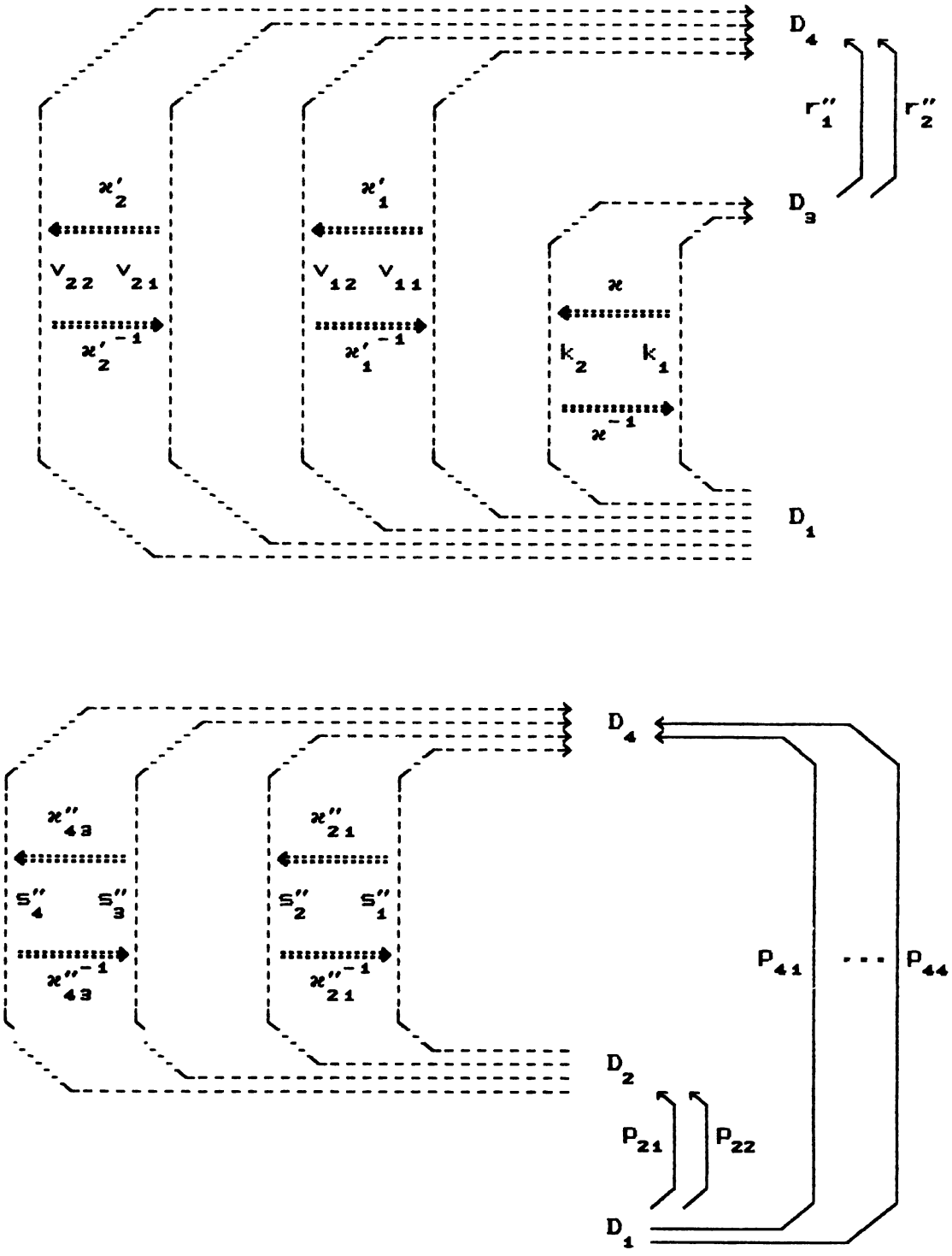
$$x * x^{-1} = Id(k_2) \ ,$$
$$x^{-1} * x = Id(k_1) \ .$$

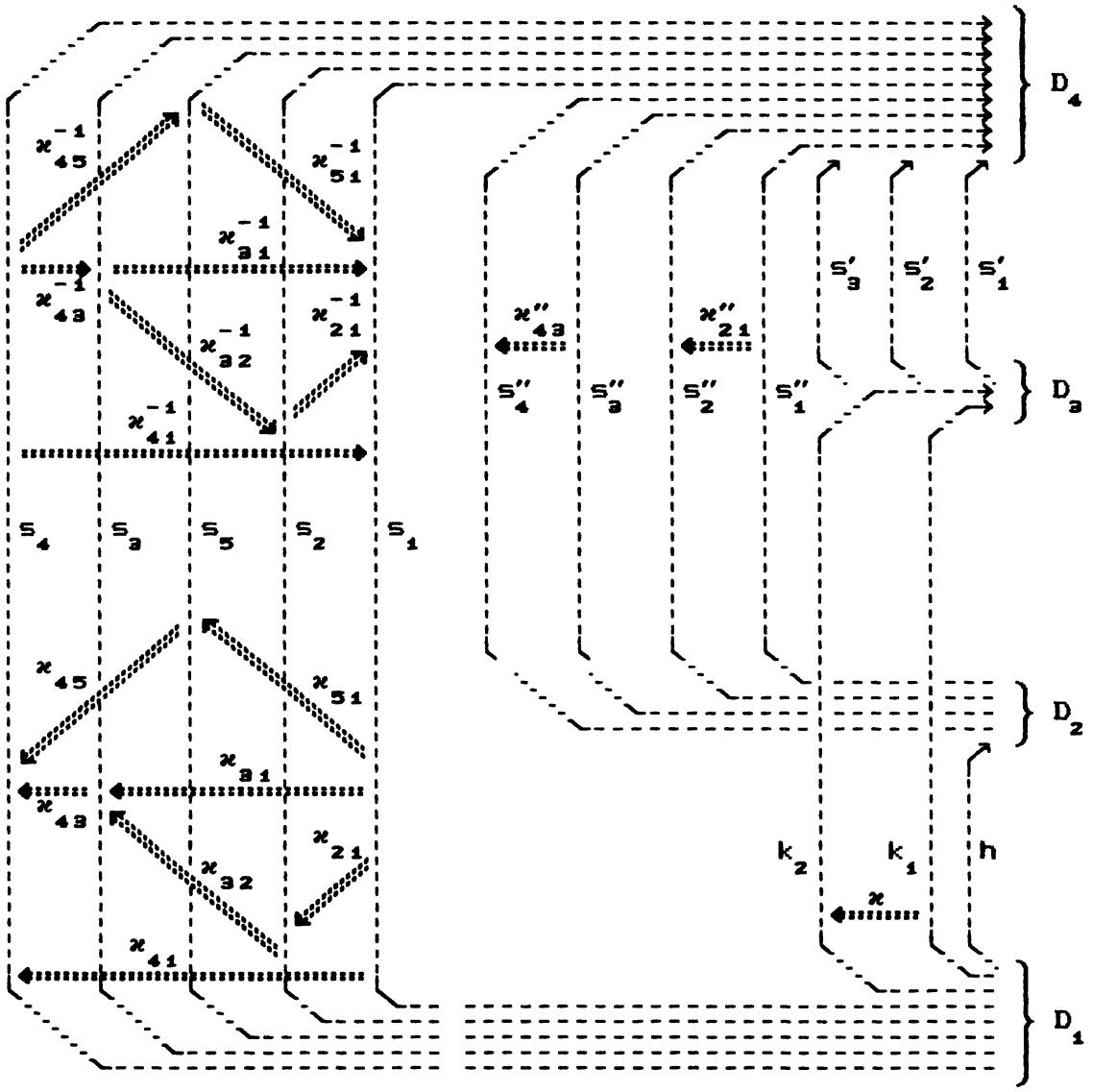
Cet amphi-graphe à composition "permet de décrire (amphi-)graphiquement" la structure de catégorie multiplicative, associative à isomorphismes naturels (mais non nécessairement cohérents) près (le lecteur pourra se reporter au §6.4).

De même, on note $\mathbb{D}_{assisocoh}$ l'amphi-graphe à composition tel que :

- le graphe à composition de ses 1-flèches est (isomorphe au graphe à composition) $\mathbb{D}_{utsurass}$ (introduit au §6.1),

- ses 2-flèches, différentes de 2-flèches identités, sont représentées par les trois diagrammes ci-dessous :


D4
r''1
r''2
D3
x'2
V22 V21
x'2 -1
x'1
V12 V11
x'1 -1
x
k2 k1
x -1
D1
D4
x''43
S''4 S''3
x''43 -1
x''21
S''2 S''1
x''21 -1
P41 ... P44
D2
P21 P22
D1



- les équations suivantes sont vérifiées (et spécifient que certaines 1-flèches possèdent une 2-flèche identité) :

$$\varkappa'_1 = r''_1 \cdot \varkappa$$
$$\varkappa'_2 = r''_2 \cdot \varkappa$$

$$\begin{aligned}
\varkappa''_{21} \cdot p_{21} &= \varkappa'_1 \\
\varkappa''_{21} \cdot p_{22} &= Id(p_{44}) \\
\varkappa''_{43} \cdot p_{21} &= Id(p_{41}) \\
\varkappa''_{43} \cdot p_{22} &= \varkappa'_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varkappa_{21} &= \varkappa''_{21} \cdot h \\
\varkappa_{32} &= s'_2 \cdot \varkappa \\
\varkappa_{43} &= \varkappa''_{43} \cdot h \\
\varkappa_{51} &= s'_1 \cdot \varkappa \\
\varkappa_{45} &= s'_3 \cdot \varkappa \\
\varkappa_{31} &= \varkappa_{32} * \varkappa_{21} \\
\varkappa_{41} &= \varkappa_{43} * \varkappa_{31} = \varkappa_{45} * \varkappa_{51}
\end{aligned}$$

- les équations suivantes sont (comme les notations le laissent prévoir) vérifiées (et spécifient que certaines 1-flèches possèdent une 2-flèche identité) :

$$\begin{aligned}
\delta * \delta^{-1} &= Id(d) \\
\delta^{-1} * \delta &= Id(d')
\end{aligned}$$

dès qu'elles ont un sens
en choisissant les valeurs de δ ,

- ses seules 2-flèches identités sont celles spécifiées dans (toutes) les équations précédentes.

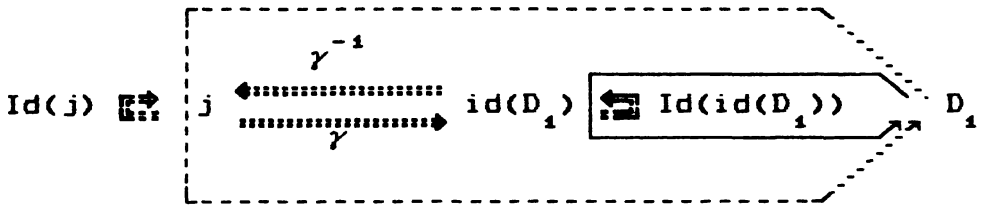
Cet amphi-graphe à composition "permet de décrire (amphi-)graphiquement" la structure de catégorie multiplicative, associative à isomorphismes naturels et cohérents près (le lecteur pourra se reporter au §6.4).

Trivialement, par construction, on dispose d'amphi-foncteurs "injections canoniques" :

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{reecass} &\longrightarrow \mathbb{D}_{assiso} \ , \\
\mathbb{D}_{assiso} &\longrightarrow \mathbb{D}_{assisocoh} \ .
\end{aligned}$$

On désigne par $\mathbb{D}_{laxqcart}$ l'amphi-graphe à composition tel que :

- le graphe à composition de ses 1-flèches est (isomorphe au graphe à composition) $\mathbb{D}_{ulqcart}$ (introduit au §6.1),
- ses 2-flèches sont représentées par le diagramme ci-dessous :



- les équations suivantes sont (comme les notations le laissent supposer) vérifiées :

$$\gamma * \gamma^{-1} = Id(id(D_1)) \ ,$$
$$\gamma^{-1} * \gamma = Id(j) \ .$$

Cet amphi-graphe à composition "permet de décrire (amphi-)graphiquement" la structure de catégorie lax-quasi-cartésienne, i.e. munie d'un choix de lax-quasi-produits et d'un choix de factorisations vers ces lax-quasi-produits (dans un sens qu'on peut prévoir, ou trouver précisé au §6.4).

6.4. Exemples d'amphi-syntaxes, d'amphi-algèbres et de sesqui-algèbres[9]

Le graphe à composition $\mathbb{B}_{nass}$ (introduit au §6.1) s'identifie à un amphi-graphe à composition $\mathbb{B}_{nass}$ "sans

[9] Voir la Section A, §§4.1 et 4.2 - i.e. [S.C.C.A.].

2-flèches". Vu la construction (faite au §6.3) de $\mathbb{D}_{reecass}$, on dispose donc d'un amphi-foncteur injection canonique $\mathbb{K}_{reecass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{D}_{reecass}$.

Notons maintenant $\mathbb{R}$elref la catégorie telle que, notamment :

- ses objets sont les couples (E,R) formés d'un ensemble E et d'une relation binaire réflexive R sur E ,

- ses flèches sont les triplets tels que :

$$((E,R),f,(E',R')) : (E,R) \longrightarrow (E',R')$$

où $f : E \longrightarrow E'$ est une application compatible avec R et R' (bien entendu, on notera beaucoup plus simplement $f = ((E,R),f,(E',R')) : (E,R) \longrightarrow (E',R')$).

On note, alors, $Releg : \mathbb{E}ns \longrightarrow \mathbb{R}elref$ le foncteur (adjoint à gauche du foncteur "ensemble sous-jacent") associant $Releg(E) = (E,=)$ à tout ensemble E .

Si $f , f' : (E,R) \longrightarrow (E',R')$ sont deux applications compatibles, on dit qu'elles sont *en relation* et on note $f\ rel_{R,R'}\ f'$ (ou, plus simplement, $f\ rel\ f'$) si et seulement si :

- pour tout élément $x \in E$, on a $f(x)\ R'\ f'(x)$.

Dans ces conditions, on désigne par $\mathbb{R}$elref l'amphi-catégorie (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement) telle que, notamment :

- $\mathbb{R}$elref est la catégorie de ses 1-flèches,

- si (E,R) et (E',R') en sont deux objets, alors $\mathbb{R}elref((E,R),(E',R')) = Gac(\mathbb{R}elref((E,R),(E',R')),rel_{R,R'})$ est le graphe à composition (nécessairement identitaire, au sens de la Section A, §1.2 - i.e. de [S.C.C.A.] -, donc où tout objet est à identité) associé (comme au §6.1) à l'en-

semble des applications compatibles de (E,R) vers (E',R') , muni de la relation réflexive $rel_{R,R'}$.

Bien entendu, il existe un unique amphi-foncteur $\mathbb{J}r_{nass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{R}elref$ pour lequel le foncteur sous-jacent est (en reprenant les notations du §6.2, pour J_{nass} , et de la Section A, §3.2 - i.e. de [S.C.C.A.] -, pour $\mathbb{1}_{\emptyset}/-$) :

$$\mathbb{J}r_{nass} = \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{J}r_{nass} = Releg \circ J_{nass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{R}elref .$$

Alors :

$$\mathbb{D}_{reecass} = (\mathbb{R}elref, \mathbb{J}r_{nass}, \mathbb{B}_{nass}, \mathbb{K}_{reecass}, \mathbb{D}_{reecass})$$

est évidemment une amphi-syntaxe.

Il est facile de vérifier que la catégorie des $\mathbb{D}_{reecass}$-sesqui-algèbres est isomorphe à la catégorie des $(E,R,\perp)$ où :

- E est un ensemble,

- R est une relation binaire réflexive ("de réécriture") sur E ,

- $\perp : E \times E \longrightarrow E$ est une application (multiplication des éléments de E),

- pour tous éléments x_1 , x_2 , $x_3 \in E$, on a :

$$(x_1 \perp x_2) \perp x_3 \; R \; x_1 \perp (x_2 \perp x_3) \quad ,$$

(mais où la loi $\perp$, "associative à la réécriture prés", n'est pas nécessairement *compatible* avec R).

Enfin, il est trivial de constater que la catégorie des $\mathbb{D}_{reecass}$-amphi-algèbres est isomorphe à la catégorie des *pseudo-demi-groupes*, c'est-à-dire des "ensembles munis d'une relation réflexive (de réécriture) et d'une loi de

composition compatible, associative à la réécriture près", i.e. à la catégorie des $(E,R,\perp)$ où :

- E est un ensemble,

- R est une relation binaire réflexive ("de réécriture") sur E ,

- $\perp : E \times E \dashrightarrow E$ est une application (multiplication des éléments de E),

- pour tous éléments x_1 , x_2 , $x_3 \in E$, on a :

$$(x_1 \perp x_2) \perp x_3 \; R \; x_1 \perp (x_2 \perp x_3) \quad ,$$

- pour tous éléments x_1 , x_1' , x_2 , $x_2' \in E$, on a :

$$(x_1 \; R \; x_1') \quad \text{et} \quad (x_2 \; R \; x_2')$$
$$\text{impliquent}$$
$$(x_1 \perp x_2) \; R \; (x_1' \perp x_2')$$

Vu la construction (faite au §6.3) de $\mathbb{D}_{assiso}$ (et l'identification précédente de $\mathbb{B}_{nass}$ à un amphi-graphe à composition $\mathbb{B}_{nass}$ "sans 2-flèches"), on dispose d'un amphi-foncteur injection canonique :

$$\mathbb{K}_{assiso} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{D}_{assiso} \; .$$

Notons maintenant $\mathbb{C}at$ l'amphi-catégorie (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement) telle que, notamment :

- $\mathbb{C}at$ est la catégorie de ses 1-flèches,

- si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ sont deux petites catégories, alors $\mathbb{C}at(\mathbb{C},\mathbb{C}')$ est (le graphe à composition sous-jacent à) la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}'$.

Bien entendu, il existe un unique amphi-foncteur $\mathbb{J}d_{nass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{C}at$ pour lequel le foncteur sous-

jacent est (en reprenant les notations du §6.2, pour Disc et J_{nass}, et celle de la Section A, §3.2 - i.e. de [S.C.C.A.] -, pour $\mathbb{1}_{\emptyset}/-$) :

$$Jd_{nass} = \mathbb{1}_{\emptyset}/Jd_{nass} = Disc \circ J_{nass} : \mathbb{B}_{nass} \longrightarrow \mathbb{C}at .$$

Alors :

$$\mathbb{D}_{assiso} = (\mathbb{C}at, Jd_{nass}, \mathbb{B}_{nass}, \mathbb{K}_{assiso}, \mathbb{D}_{assiso})$$

est évidemment une amphi-syntaxe.

Il est facile de vérifier que la catégorie des $\mathbb{D}_{assiso}$-sesqui-algèbres est isomorphe à la "catégorie des petites catégories dont l'ensemble des objets est muni d'une multiplication associative à isomorphismes (non nécessairement *naturels*, non nécessairement *cohérents*) près", i.e. à la catégorie des $(\mathbb{C}, \perp, \alpha)$ où :

- $\mathbb{C}$ est une petite catégorie,

- $\perp : Ob(\mathbb{C}) \times Ob(\mathbb{C}) \longrightarrow Ob(\mathbb{C})$ est une application (multiplication des - seuls - objets),

- pour tous objets C_1, C_2, $C_3 \in Ob(\mathbb{C})$, on dispose d'un isomorphisme (non nécessairement naturel, non nécessairement cohérent) de $\mathbb{C}$:

$$\alpha(C_1, C_2, C_3) : (C_1 \perp C_2) \perp C_3 \xrightarrow{\simeq} C_1 \perp (C_2 \perp C_3) .$$

Enfin, il est trivial de constater que la catégorie des $\mathbb{D}_{assiso}$-amphi-algèbres est isomorphe à la "catégorie des petites catégories multiplicatives, associatives à isomorphismes naturels (non nécessairement *cohérents*) près", i.e. à la catégorie des $(\mathbb{C}, \circledcirc, \alpha)$ où :

- $\mathbb{C}$ est une petite catégorie,

- $\circledcirc : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est un foncteur (multiplication *bi*-

fonctorielle des objets et des flèches),

- *naturellement* en tous objets C_1 , C_2 , $C_3 \in Ob(\mathbb{C})$, on dispose d'un isomorphisme (non nécessairement cohérent) de $\mathbb{C}$:

$$\alpha(C_1,C_2,C_3) : (C_1 \circ C_2) \circ C_3 \xrightarrow{\simeq} C_1 \circ (C_2 \circ C_3)$$

(autrement dit :

$$\alpha : (-\circ-)\circ- \xrightarrow{\simeq} -\circ(\ -) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une équivalence naturelle).

Le graphe à composition $\mathbb{B}_{nsurass}$ (introduit au §6.1) s'identifie aussi à un amphi-graphe à composition $\mathbb{B}_{nsurass}$ "sans 2-flèches". Vu la construction (faite au §6.3) de $\mathbb{D}_{assisocoh}$, on dispose donc d'un amphi-foncteur injection canonique $\mathbb{K}_{assisocoh} : \mathbb{B}_{nsurass} \longrightarrow \mathbb{D}_{assisocoh}$.

Il existe encore un unique amphi-foncteur $\mathbb{J}d_{nsurass} : \mathbb{B}_{nsurass} \longrightarrow \mathbb{C}at$ pour lequel le foncteur sous-jacent est (en reprenant les notations du §6.2, pour Disc et $J_{nsurass}$, et de la Section A, §3.2 - i.e. de [S.C.C.A.] -, pour $\mathbb{1}_{\emptyset}/-$) :
$Jd_{nsurass} = \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{J}d_{nsurass} = Disc \circ J_{nsurass} : \mathbb{B}_{nsurass} \longrightarrow \mathbb{C}at$.

Alors :

$$\mathbb{D}_{assisocoh} = (\mathbb{C}at, \mathbb{J}d_{nsurass}, \mathbb{B}_{nsurass}, \mathbb{K}_{assisocoh}, \mathbb{D}_{assisocoh})$$

est une nouvelle amphi-syntaxe.

Il est facile de vérifier que la catégorie des $\mathbb{D}_{assisocoh}$-sesqui-algèbres est isomorphe à la "catégorie des petites catégories dont l'ensemble des objets est muni d'une multiplication associative à isomorphismes cohérents (non nécessairement *naturels*) près", i.e. à la catégorie

des $(\mathbb{C}, \perp, \alpha, \beta, \gamma)$ où :

- $\mathbb{C}$ est une petite catégorie,

- $\perp : Ob(\mathbb{C}) \times Ob(\mathbb{C}) \longrightarrow Ob(\mathbb{C})$ est une application (multiplication des - seuls - objets),

- pour tous objets C_1 , C_2 , $C_3 \in Ob(\mathbb{C})$, on dispose de l'isomorphisme (non nécessairement naturel) de $\mathbb{C}$:

$$\alpha(C_1, C_2, C_3) : (C_1 \perp C_2) \perp C_3 \xrightarrow{\simeq} C_1 \perp (C_2 \perp C_3) ,$$

- pour tous objets C_1 , C_2 , C_3 , $C_4 \in Ob(\mathbb{C})$, on dispose de l'isomorphisme (non nécessairement naturel) de $\mathbb{C}$:

$$\beta(C_1, C_2, C_3, C_4) : ((C_1 \perp C_2) \perp C_3) \perp C_4 \xrightarrow{\simeq} (C_1 \perp (C_2 \perp C_3)) \perp C_4$$

(qu'on peut noter - mais ce n'est qu'une *notation* :

$$\beta(C_1, C_2, C_3, C_4) = \alpha(C_1, C_2, C_3) \perp C_4 \quad),$$

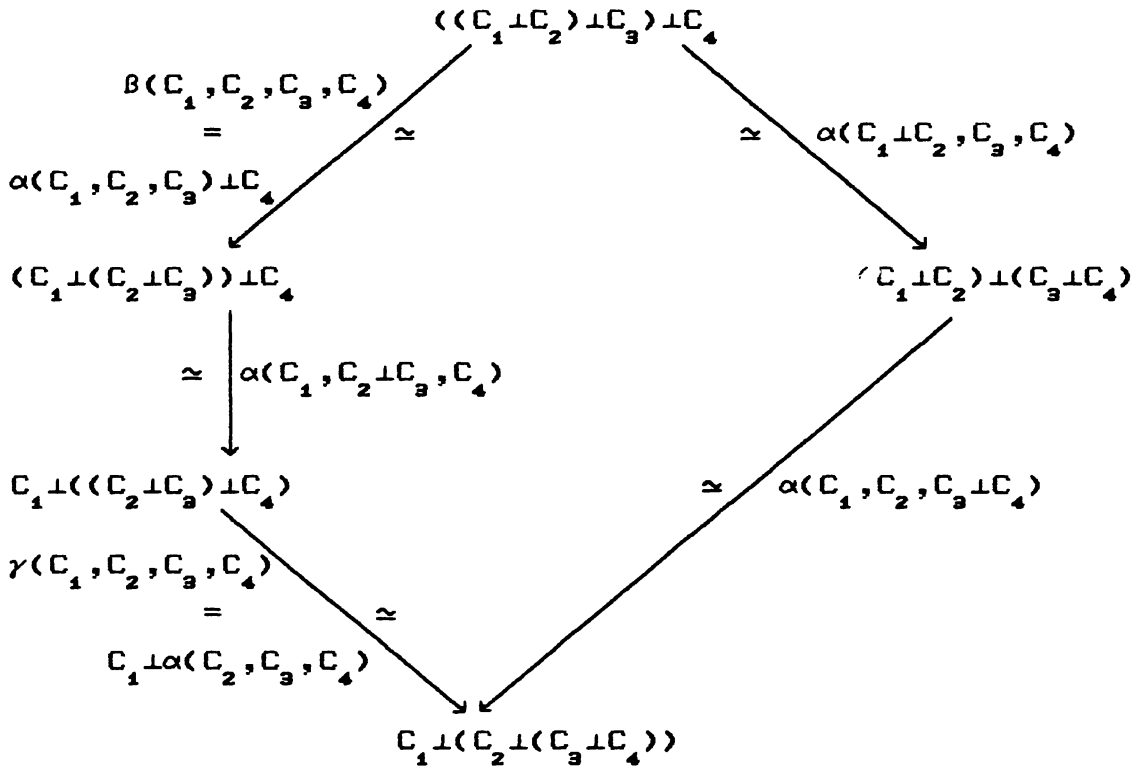
- pour tous objets C_1 , C_2 , C_3 , $C_4 \in Ob(\mathbb{C})$, on dispose de l'isomorphisme (non nécessairement naturel) de $\mathbb{C}$:

$$\gamma(C_1, C_2, C_3, C_4) : C_1 \perp ((C_2 \perp C_3) \perp C_4) \xrightarrow{\simeq} C_1 \perp (C_2 \perp (C_3 \perp C_4))$$

(qu'on peut noter - mais ce n'est qu'une *notation* :

$$\gamma(C_1, C_2, C_3, C_4) = C_1 \perp \alpha(C_2, C_3, C_4) \quad),$$

- pour tous objets C_1 , C_2 , C_3 , $C_4 \in Ob(\mathbb{C})$, le diagramme de $\mathbb{C}$ ci-dessous est commutatif :



Enfin, il est trivial de constater que la catégorie des $\mathcal{D}_{assisoco h}$-amphi-algèbres est isomorphe à la "catégorie des petites catégories multiplicatives, associatives à isomorphismes naturels et cohérents près", i.e. à la catégorie des $(\mathbb{C},\otimes,\alpha)$ où :

- $\mathbb{C}$ est une petite catégorie,

- $\otimes : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est un foncteur (multiplication *bi-fonctorielle* des objets *et* des flèches),

- *naturellement* en tous objets C_1 , C_2 , $C_3 \in Ob(\mathbb{C})$, on dispose de l'isomorphisme de $\mathbb{C}$:

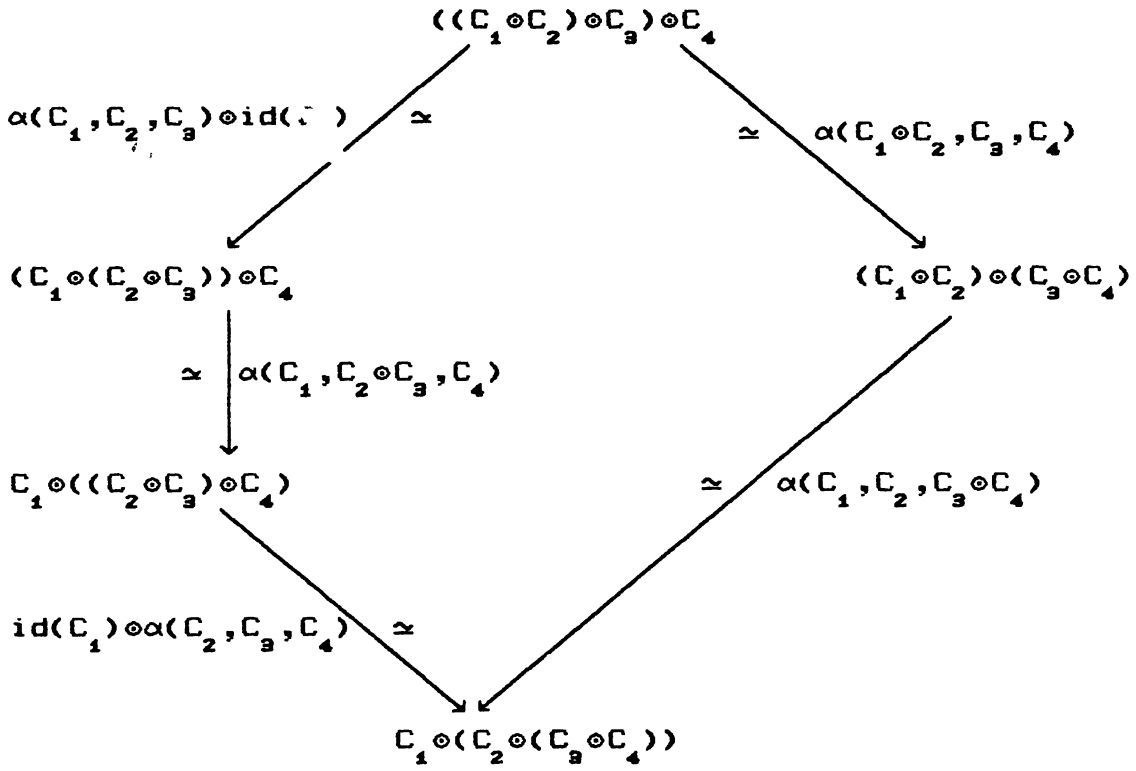
$$\alpha(C_1,C_2,C_3) : (C_1 \otimes C_2) \otimes C_3 \xrightarrow{\simeq} C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3)$$

(autrement dit :

$$\alpha : (-\otimes-)\otimes- \xRightarrow{\simeq} -\otimes(-\otimes-) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une équivalence naturelle),

- pour tous objets C_1 , C_2 , C_3 , $C_4 \in Ob(\mathbb{C})$, le diagramme (de cohérence) ci-dessous est commutatif :



Le graphe à composition $\mathbb{B}_{nqcart}$ (introduit au §6.1) s'identifie à un amphi-graphe à composition $\mathbb{B}_{nqcart}$ "sans 2-flèches". Vu la construction (faite au §6.3) de $\mathbb{D}_{laxqcart}$, on dispose d'un amphi-foncteur injection canonique $\mathbb{K}_{laxqcart} : \mathbb{B}_{nqcart} \longrightarrow \mathbb{D}_{laxqcart}$.

Désignons maintenant par 2-$\mathbb{C}$at la catégorie des petites 2-catégories et par 2-Triv : $\mathbb{C}$at $\longrightarrow$ 2-$\mathbb{C}$at le foncteur associant, à toute petite catégorie $\mathbb{C}$, la petite 2-catégorie *triviale* 2-Triv($\mathbb{C}$) n'ayant que des identités pour 2-flèches. Alors, on note 2-$\mathbb{C}$at l'amphi-catégorie

(que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement) telle que (notamment) :

- 2-$\mathbb{C}$at est la catégorie de ses 1-flèches,

- si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ sont deux petites 2-catégories, alors 2-$\mathbb{C}$at($\mathbb{C}$,$\mathbb{C}'$) est (le graphe à composition sous-jacent à) la catégorie telle que (notamment) :

  + ses objets sont les 2-foncteurs $\mathbb{F} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$,

  + si $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}' : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$ sont deux 2-foncteurs *égaux sur les objets* de $\mathbb{C}$, ses flèches $\delta : \mathbb{F} \Longrightarrow \mathbb{F}'$ sont les familles de 2-flèches de $\mathbb{C}$:

$$\delta = (\delta_C : \mathbb{F}(c) \Longrightarrow \mathbb{F}'(c))_{c \in Fl(\mathbb{C})} : \mathbb{F} \Longrightarrow \mathbb{F}'$$

  pour lesquelles :

$$\delta_{id(C)} = Id(id(C)) \ ,$$

$$\delta_{C' . C} = \delta_{C'} . \delta_C \ ,$$

$$\delta_{C'} * \mathbb{F}(\gamma) = \mathbb{F}'(\gamma) * \delta_C \ ,$$

  dès que cela a un sens (et en reprenant la notation de la Section A, §3.2 - i.e. de [S.C.C.A.] -, pour $*$).

Bien entendu, il existe un unique amphi-foncteur $\mathbb{J}d_{nqcart} : \mathbb{B}_{nqcart} \longrightarrow 2\text{-}\mathbb{C}at$ pour lequel le foncteur sous-jacent est (en reprenant les notations du §6.2, pour Disc et J_{nqcart} , et de la Section A, §3.2 - i.e. de [S.C.C.A.] -, pour $\mathbb{1}_{\emptyset}/-$) :

$$Jd_{nqcart} = \mathbb{1}_{\emptyset} / \mathbb{J}d_{nqcart} = 2\text{-}Triv \circ Disc \circ J_{nqcart} : \mathbb{B}_{nqcart} \longrightarrow 2\text{-}\mathbb{C}at \ .$$

Alors :

$$\mathbb{D}_{laxqcart} = (2\text{-}\mathbb{C}at, \mathbb{J}d_{nqcart}, \mathbb{B}_{nqcart}, \mathbb{K}_{laxqcart}, \mathbb{D}_{laxqcart})$$

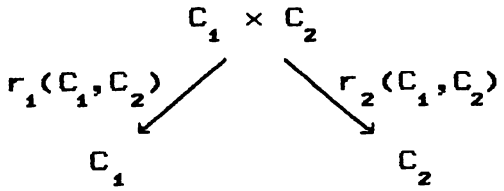
est évidemment une amphi-syntaxe.

Il est facile de vérifier que la catégorie des

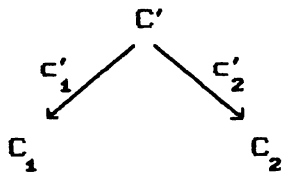
$\mathfrak{D}_{laxqcart}$-sesqui-algèbres est isomorphe à la "catégorie des petites 2-catégories munies d'un choix de lax-quasi-produits (et de 2-factorisations)", i.e. à la catégorie des $(\mathbf{C},\times,r_1,r_2,r,\delta_1,\delta_2)$ où :

- $\mathbf{C}$ est une petite 2-catégorie,

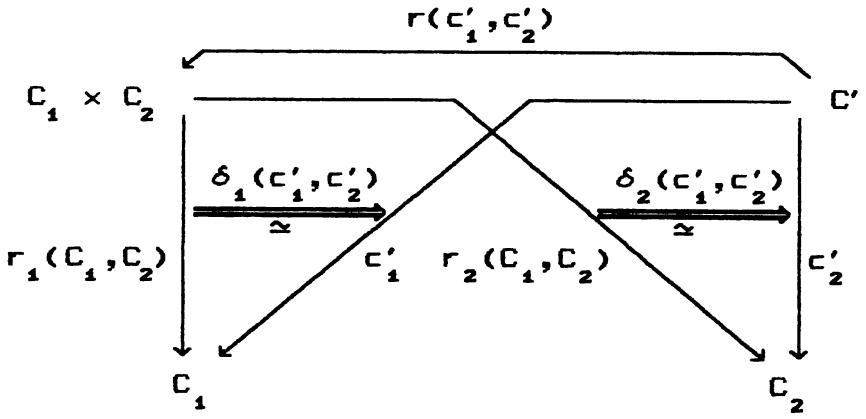
- à tout couple (C_1,C_2) d'objets de $\mathbf{C}$, les "lois" -x- (lax-quasi-produit), $r_1(-,-)$ (première projection) et $r_2(-,-)$ (deuxième projection) associent un cône projectif (lax-quasi-produit) :



- les lois $r(-,-)$ (2-factorisation), $\delta_1(-,-)$ (première 2-flèche de 2-commutation) et $\delta_2(-,-)$ (deuxième 2-flèche de 2-commutation) associent à tout cône projectif tel que ci-dessous :



un diagramme "2-commutatif" :



Enfin, il est trivial de constater que la catégorie des $\mathfrak{D}_{laxqcart}$-amphi-algèbres est isomorphe à la catégorie des petites catégories *lax-quasi-cartésiennes*, i.e. à la catégorie des $(\mathbb{C},\times,r_1,r_2,r,\delta_1,\delta_2)$ vérifiant les conditions précédentes (caractérisant les $\mathfrak{D}_{laxqcart}$-sesqui-algèbres) et où, de plus, $r(-,-)$ est *fonctoriel* et $\delta_1(-,-)$ et $\delta_2(-,-)$ sont *naturelles* (ce que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter).

6.5. Exemples de laxifications possédant la propriété de suffisante complétude (totalement) connexe[10]

Clairement (en reprenant les notations du §6.1, concernant Gac , et du §6.4, concernant $\mathbb{R}$elref), le foncteur "graphe à composition associé" :

$$\begin{array}{rcl} Gac : \mathbb{R}elref & \longrightarrow & \mathbb{G}rComp \\ (E,R) & \longmapsto & Gac(E,R) \end{array}$$

[10] Voir la Section B, §§5.5, 5.6 et 5.7 (i.e. [S.C.C.B.]).

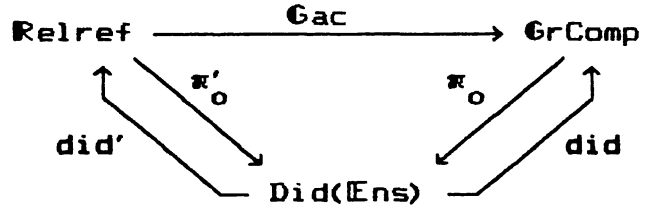
est sous-jacent à un amphi-foncteur (qu'on laisse au lecteur le soin de préciser) :

$$\mathbb{G}ac : \mathbb{R}elref \longrightarrow \mathbb{G}rComp$$

permettant d'identifier $\mathbb{R}elref$ à une "sous-amphi-catégorie amphi-pleine" de $\mathbb{G}rComp$.
Par restriction (à $\mathbb{R}elref$), on déduit, de l'amphi-réflexion $\rho = (\mathbb{G}rComp, \pi_0, v, w, did, Did(\mathbb{E}ns))$, sous-jacente à l'amphi-configuration de base Φ (voir la Section B, §5.3 - i.e. [S.C.C.B.]), la Φ-réflexion (voir la Section B, §5.3 - i.e. [S.C.C.B.]) :

$$\Psi_{relref} = (\mathbb{R}elref, \pi'_0, v', w', did', \mathbb{E}ns)$$

(que nous laissons au lecteur le soin de préciser complètement), de sorte que le diagramme ci-dessous est commutatif :



(ainsi, l'amphi-foncteur que nous notons ici **did'** - pour plus de commodité - est sur-jacent au foncteur Releg , introduit au §6.4).

On vérifie immédiatement que l'amphi-syntaxe $\mathfrak{D}_{reecass}$ (introduite au §6.4) est Π_0-modifiable (au sens de la Section B, §5.2 - i.e. de [S.C.C.B.]), que sa Π_0-modification $\Pi_0(\mathfrak{D}_{reecass})$ est $\Pi_0(\pi'_0)$-transportable (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) et qu'alors $\Pi_0(\pi'_0)\cdot\Pi_0(\mathfrak{D}_{reecass})$ est isomorphe sur $\mathbb{E}ns$ à la syntaxe $\mathfrak{D}_{ass}$ (introduite au §6.2). Par conséquent, $\mathfrak{L}_{reecass} = (\mathfrak{D}_{reecass}, \mathfrak{D}_{ass})$ est (à une renotation près) une Ψ_{relref}-laxification (au sens de la Section B, §5.4 - i.e.

de [S.C.C.B.]).

Maintenant, il est évident que :

- Ψ_{relref} est (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) amphi-co-complète et amphi-complète (puisque $\mathbb{R}$elref l'est),

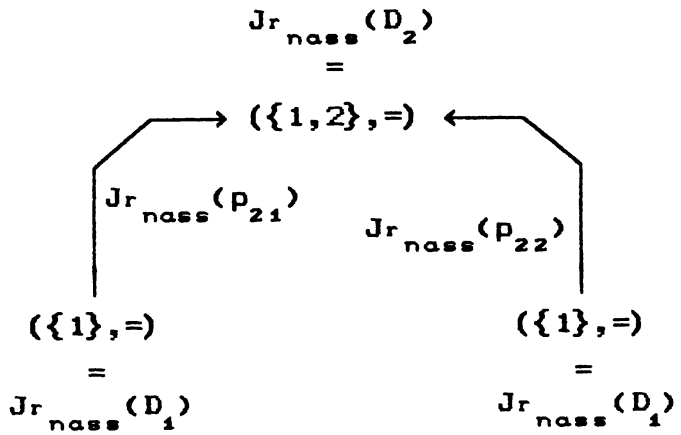
- Ψ_{relref} est (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) co-représentable (puisque $\mathbb{R}$elref l'est, ne serait-ce que par "restriction" de la co-représentabilité de $\mathbb{G}$rComp),

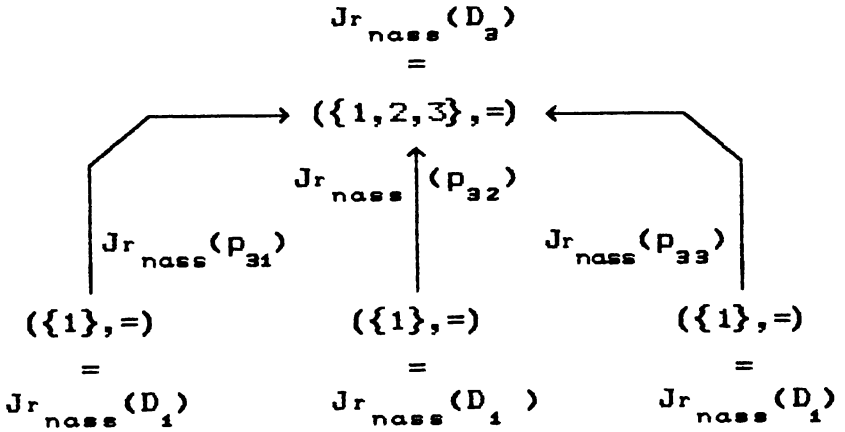
- si on désigne par $\mathbb{R}elref_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{R}$el dont $(\{1\},=)$ est l'unique objet, alors Ψ_{relref} est totalement $\mathbb{R}elref_0$-connexe (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]),

- Ψ_{relref} est $\mathbb{R}elref_0$-identitaire (au sens de la Section B, §5.6 - i.e. de [S.C.C.B.]).

De plus, l'amphi-syntaxe $\mathfrak{D}_{reecass}$ est trivialement d'amphi-rang $\leq \aleph_0$ (au sens de la Section A, §4.1 - i.e. de [S.C.C.A.]), la syntaxe $\mathfrak{D}_{ass}$ est trivialement de rang $\leq \aleph_0$ (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) et, par construction (voir les §§6.2 et 6.4), les diagrammes ci-dessous représentent trois sommes dans $\mathbb{R}$elref :

$$
\begin{array}{c}
Jr_{nass}(D_i) \\
= \\
(\{1\},=) \\
\uparrow \\
id(\{1\}) \\
\uparrow \\
(\{1\},=) \\
= \\
Jr_{nass}(D_i)
\end{array}
$$





Par application des résultats de la Section B, §5.6 (i.e. de [S.C.C.B.]), on en conclut (en reprenant la notation de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.] - concernant le Ψ_{relref}-amphi-élargissement $\mathcal{A}(\mathcal{L}_{reecass})$ associé à la Ψ_{relref}-laxification $\mathcal{L}_{reecass}$) que le couple $(\Psi_{relref}, \mathcal{A}(\mathcal{L}_{reecass}))$ a la propriété de suffisante amphi-

complétude totalement $\mathbb{R}elref_0$-connexe (au sens de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]).

D'un point de vue "sémantique" (i.e. en appliquant la proposition 5 de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]), cette propriété de suffisante amphi-complétude totalement connexe permet d'affirmer (ce qui n'est évidemment pas fait pour surprendre) - pour faire court - que :

- les composantes connexes par réécriture du pseudo-demi-groupe librement engendré par un ensemble E sont canoniquement munies d'une structure de demi-groupe, et c'est le demi-groupe librement engendré par E .

D'un point de vue "syntaxique" (i.e. en appliquant la proposition 6 de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]), la propriété de suffisante amphi-complétude totalement connexe précédente permet d'affirmer que la "théorie" des demi-groupes, i.e. la théorie achevée engendrée (au sens de la Section A, §2.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) par la syntaxe $\mathcal{D}_{ass}$, est une image de la "théorie" des pseudo-demi-groupes, i.e. de la théorie achevée engendrée par la syntaxe de co-représentation (au sens de la Section A, §4.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) $\mathcal{PAA}(\mathcal{D}_{reecass})$. Ce qu'on peut - pour faire court - interpréter en énonçant (ce qui n'est pas plus que précédemment fait pour surprendre) que :

- toute propriété équationnelle des demi-groupes est démontrable "par réécritures" dans un pseudo-demi-groupe approprié ...

Désignons par $2\text{-}\pi_0 : 2\text{-}\mathbb{C}at \longrightarrow \mathbb{C}at$ le foncteur associant à toute petite 2-catégorie $\mathbb{C}$ la catégorie $2\text{-}\pi_0(\mathbb{C})$ de ses "composantes 2-connexes", i.e. la catégorie

(que nous laissons au lecteur le soin de préciser complètement) telle que (notamment) :

- $Ob(2\text{-}\pi_0(\mathbb{C})) = Ob(\mathbb{C})$,

- pour tous objets C_1 , $C_2 \in Ob(\mathbb{C})$, on a :

$$2\text{-}\pi_0(\mathbb{C})(C_1,C_2) = \pi_0(\mathbb{C}(C_1,C_2)) \ .$$

Evidemment, le foncteur $2\text{-}\pi_0 : 2\text{-}\mathbb{C}at \longrightarrow \mathbb{C}at$ est adjoint à gauche du foncteur $2\text{-}Triv : \mathbb{C}at \longrightarrow 2\text{-}\mathbb{C}at$ (défini au §6.4) et il est facile de constater que l'adjonction $(2\text{-}\pi_0, 2\text{-}Triv)$ est sous-jacente à une Φ-réflexion (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) $\Psi_{2\text{-}cat} = (2\text{-}\mathbb{C}at, 2\text{-}\pi_0, \ldots, 2\text{-}\mathbb{T}riv, \mathbb{C}at)$ (que nous laissons au lecteur le soin de préciser complètement).

On vérifie immédiatement que l'amphi-syntaxe $\mathfrak{D}_{laxqcart}$ (construite au §6.4) est Π_0-modifiable (au sens de la Section B, §5.2 - i.e. de [S.C.C.B.]), que sa Π_0-modification $\Pi_0(\mathfrak{D}_{laxqcart})$ est $\Pi_0(2\text{-}\pi_0)$-transportable (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) et que $\Pi_0(2\text{-}\pi_0)\cdot\Pi_0(\mathfrak{D}_{laxqcart})$ est isomorphe sur $\mathbb{C}at$ à la syntaxe $\mathfrak{D}_{qcart}$ (introduite au §6.2). Par conséquent, $\mathfrak{L}_{laxqcart} = (\mathfrak{D}_{laxqcart}, \mathfrak{D}_{qcart})$ est (au sens de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.]) une $\Psi_{2\text{-}cat}$-laxification (à une renotation près).

Il est évident que :

- $\Psi_{2\text{-}cat}$ est (aux sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) amphi-co-complète et amphi-complète (puisque $2\text{-}\mathbb{C}at$ l'est évidemment),

- $\Psi_{2\text{-}cat}$ est (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) co-représentable (puisque $2\text{-}\mathbb{C}at$ l'est évidem-

ment),

- si l'on désigne par $2\text{-}\mathbb{C}at_0$ la sous-catégorie pleine de $2\text{-}\mathbb{C}at$ dont les objets sont $2\text{-}Triv(\mathbb{1})$, $2\text{-}Triv(\mathbb{2})$ et $2\text{-}Triv(\mathbb{3})$, alors $\Psi_{2\text{-}cat}$ est suffisamment $2\text{-}\mathbb{C}at_0$-connexe (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]),

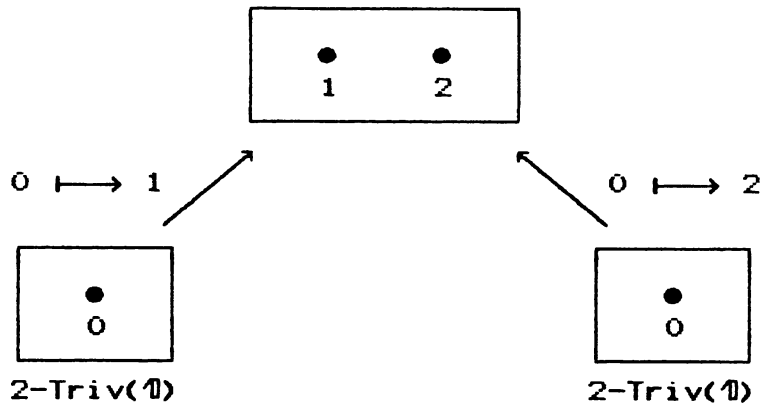
- $\Psi_{2\text{-}cat}$ est $2\text{-}\mathbb{C}at_0$-identitaire (au sens de la Section B, §5.6 - i.e. de [S.C.C.B.]).

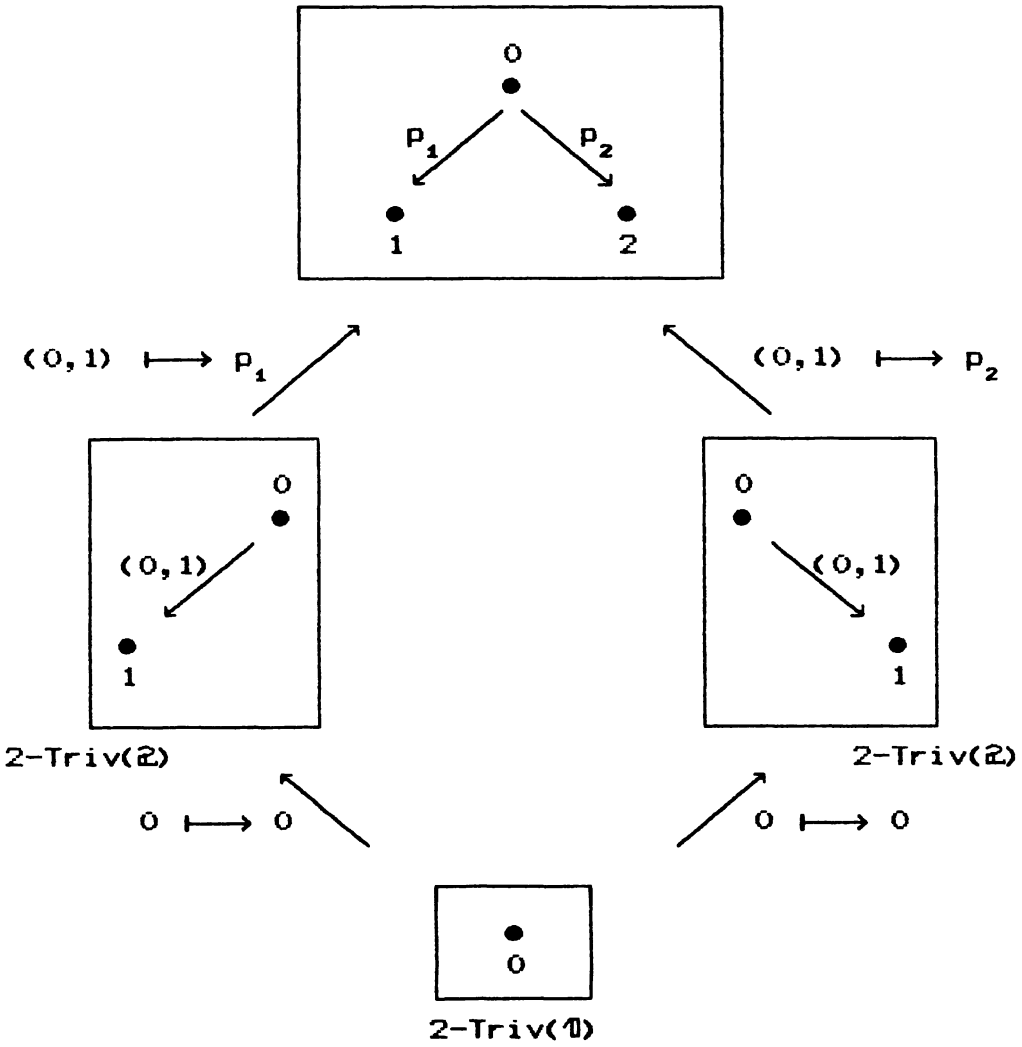
De plus, on voit que :

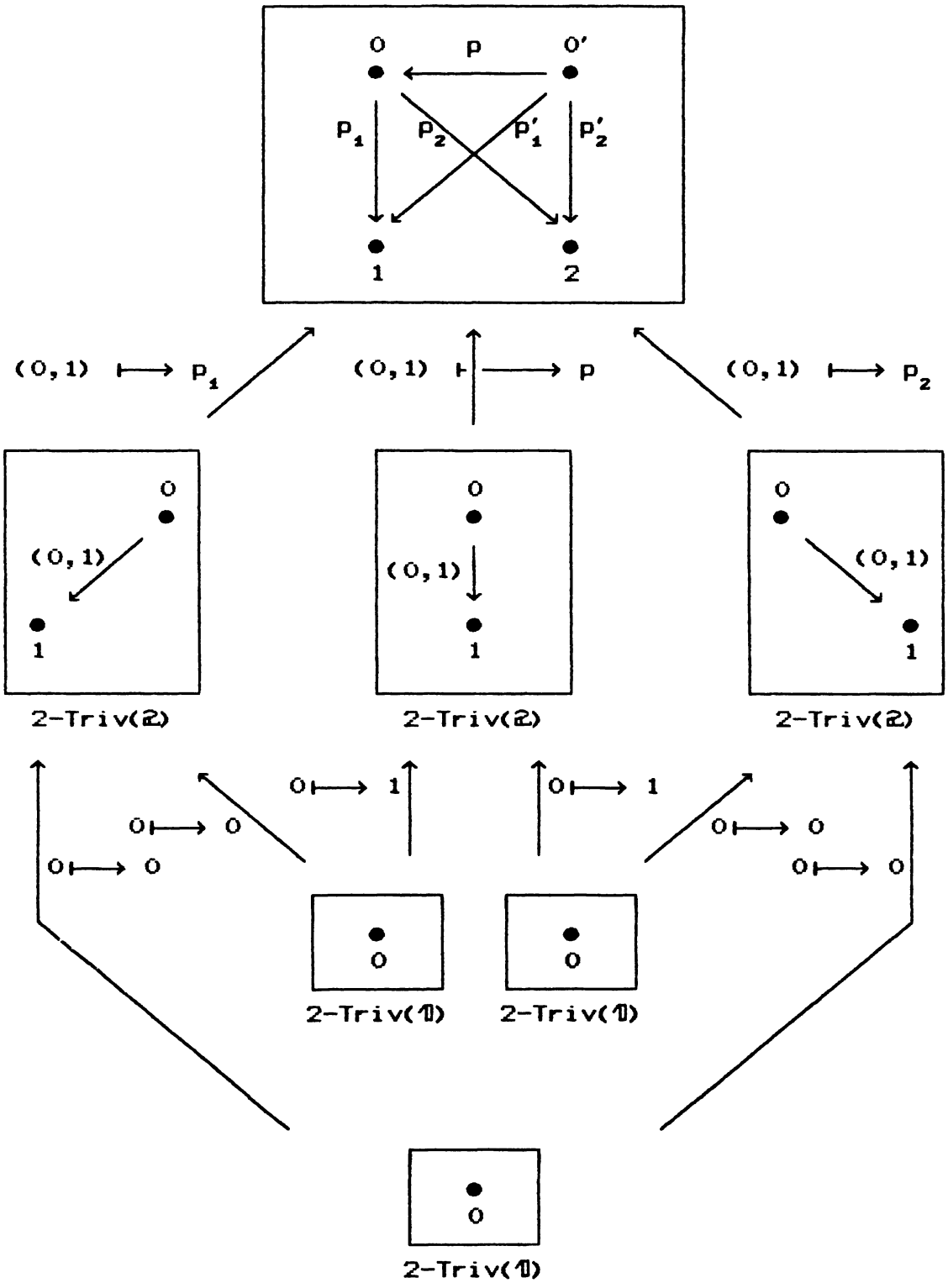
- l'amphi-syntaxe $\mathfrak{D}_{laxqcart}$ est évidemment d'amphi-rang $\leq \aleph_0$ (au sens de la Section A, §4.1 - i.e. de [S.C.C.A.]),

- la syntaxe $\mathfrak{D}_{qcart}$ est évidemment de rang $\leq \aleph_0$ (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]),

- les trois diagrammes ci-dessous représentent trois co-limites dans $2\text{-}\mathbb{C}at$:




0
p_1
p_2
1
2
$(0,1) \longmapsto p_1$
$(0,1) \longmapsto p_2$
0
(0,1)
1
2-Triv(2)
0
(0,1)
1
2-Triv(2)
$0 \longmapsto 0$
$0 \longmapsto 0$
0
2-Triv(1)


0
p
0'
p_1
p_2
p'_1
p'_2
1
2
(0,1) ⟼ p_1
(0,1) ⟼ p
(0,1) ⟼ p_2
0
(0,1)
1
2-Triv(2)
0
(0,1)
1
2-Triv(2)
0
(0,1)
1
2-Triv(2)
0⟼1
0⟼0
0⟼0
0⟼1
0⟼0
0⟼0
0
2-Triv(1)
0
2-Triv(1)
0
2-Triv(1)

Si l'on désigne par $2\text{-}\mathbb{C}at_{oo}$ la sous-catégorie pleine de $2\text{-}\mathbb{C}at_{o}$ ayant $2\text{-}Triv(\mathbb{1})$ pour seul objet , on voit que les considérations de la Section B, §5.7 (i.e. de [S.C.C.B.]) s'appliquent et donc (en reprenant la notation de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.] - concernant le $\Psi_{2\text{-}cat}$-amphi-élargissement $\mathscr{A}(\mathscr{L}_{laxqcart})$ associé à la $\Psi_{2\text{-}cat}$-laxification $\mathscr{L}_{laxqcart}$) que $(\Psi_{2\text{-}cat},\mathscr{A}(\mathscr{L}_{laxqcart}))$ a la propriété de suffisante amphi-complétude totalement $2\text{-}\mathbb{C}at_{o}$-connexe (au sens de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]).

D'un point de vue "sémantique" (i.e. en appliquant la proposition 5 de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]), cette propriété de suffisante amphi-complétude totalement connexe permet d'affirmer - pour faire court - que :

- les composantes 2-connexes de la catégorie lax-quasi-cartésienne librement engendrée par une quelconque petite catégorie $\mathbb{C}$ sont canoniquement munies d'une structure de catégorie quasi-cartésienne, et c'est la structure de catégorie quasi-cartésienne librement engendrée par $\mathbb{C}$.

D'un point de vue "syntaxique" (i.e. en appliquant la proposition 6 de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]), la propriété de suffisante amphi-complétude totalement connexe précédente permet d'affirmer que la "théorie" des catégories quasi-cartésiennes, i.e. la théorie achevée engendrée (au sens de la Section A, §2.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) par la syntaxe $\mathscr{D}_{qcart}$, est une image de la "théorie" des catégories lax-quasi-cartésiennes, i.e. de la théorie achevée engendrée par la syntaxe de co-représentation (au sens de la Section A, §4.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) $\mathscr{S}\mathscr{A}\mathscr{A}(\mathscr{D}_{laxqcart})$. Ce qu'on peut interpréter - pour faire court - en énonçant

que :

- toute propriété équationnelle des catégories quasi-cartésiennes est démontrable "par 2-réécritures" dans une catégorie lax-quasi-cartésienne appropriée ...

6.6. Exemple d'élargissement possédant la propriété de suffisante complétude connexe[11]

Appelons (petite) *catégorie avec réécritures* tout triplet $\underline{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}, \mathcal{R}, \Longrightarrow)$ tel que :

- $\mathbb{C}$ est une (petite) catégorie,

- $\mathcal{R}$ est une sous-catégorie de $\mathbb{C}$,

- $\Longrightarrow$ est un préordre sur $Fl(\mathbb{C})$,

- pour tout objet C de $\mathbb{C}$, la flèche $id(C) : C \longrightarrow C$ appartient à $\mathcal{R}$,

- pour toutes flèches c_1 , c_2 de $\mathbb{C}$, si $c_1 \Longrightarrow c_2$ alors $dom(c_1) = dom(c_2)$ et $codom(c_1) = codom(c_2)$,

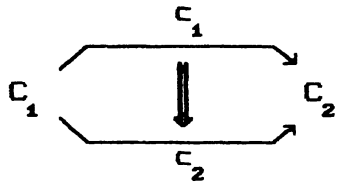
- pour toutes flèches c_1 , $c_2 : C' \longrightarrow C''$ et toute flèche $c : C \longrightarrow C'$ (resp. $c : C'' \longrightarrow C'''$) de $\mathbb{C}$, si on a $c_1 \Longrightarrow c_2$ alors on a $c_1 \cdot c \Longrightarrow c_2 \cdot c$ (resp. $c \cdot c_1 \Longrightarrow c \cdot c_2$),

(ainsi, $\mathcal{R}$ a mêmes objets que $\mathbb{C}$ et $\Longrightarrow$ détermine un *enrichissement* de $\mathbb{C}$ par la catégorie des préordres).

Nous dirons de toute flèche $r : C_1 \longrightarrow C_2$ appartenant à $\mathcal{R}$ que c'est une (1-)*flèche de réécriture entre objets*

[11] Voir la Section B, §5.5 (i.e. [S.C.C.B.]).

(permettant de réécrire C_1 en C_2) et nous noterons, plus précisément, $r : C_1 \rightsquigarrow C_2$.
De même, nous dirons que $\Rightarrow$ est la *relation de réécriture entre flèches* et, si $c_1 , c_2 : C_1 \longrightarrow C_2$ sont deux flèches de $\mathbb{C}$ telles que $c_1 \Rightarrow c_2$ (i.e. telles que c_1 se réécrit en c_2), nous noterons (bien entendu) $c_1 \Rightarrow c_2 : C_1 \rightarrow C_2$ ou encore :



(on pourra même dire qu'on dispose d'une *2-flèche de réécriture* de c_1 vers c_2).

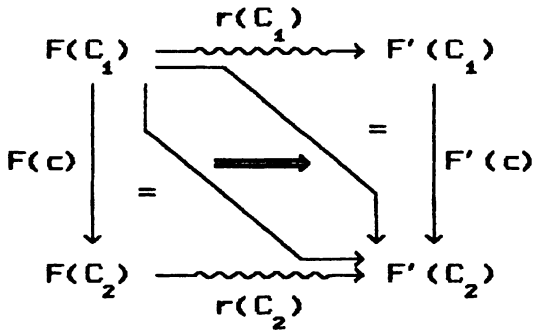
Par exemple, tous les diagrammes $\underline{\mathbb{G}}$ des "configurations des lois" du §1 de [E.S.C.C.] sont autant de systèmes de générateurs et de relations pour de telles petites catégories avec réécritures gen($\underline{\mathbb{G}}$) ; il en est de même pour tous les diagrammes des "schémas représentant les axiomes" du §1 de [E.S.C.C.].

Il est facile de définir les foncteurs *compatibles* (i.e. les homomorphismes) entre catégories avec réécritures. Alors, on note $\mathbb{C}$atreec la catégorie des petites catégories avec réécritures.

Si $\underline{\mathbb{C}}$ et $\underline{\mathbb{C}}'$ sont deux petites catégories avec réécritures et si $F , F' : \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}'$ sont deux foncteurs compatibles, on dit que $r : F \Rightarrow F' : \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}'$ est une *réécriture de F vers F'* si et seulement si :

- pour tout objet C de $\underline{\mathbb{C}}$, $r(C) : F(C) \longrightarrow F'(C)$ est une flèche de réécriture de $\underline{\mathbb{C}}'$,

- pour toute flèche $c : C_1 \longrightarrow C_2$ de $\underline{\mathbb{C}}$, on a $r(C_2) \cdot F(c) \Rightarrow F'(c) \cdot r(C_1)$ dans $\underline{\mathbb{C}}'$, autrement dit on dispose du diagramme ("commutatif à la réécriture près") ci-dessous :



Alors, on note $\mathbb{C}$atreec l'amphi-catégorie (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement) telle que (notamment) :

- $\mathbb{C}$atreec est la catégorie de ses 1-flèches,

- si $\underline{\mathbb{C}}$ et $\underline{\mathbb{C}}'$ sont deux petites catégories avec réécritures, alors $\mathbb{C}$atreec$(\underline{\mathbb{C}},\underline{\mathbb{C}}')$ est la catégorie dont les objets sont les foncteurs compatibles de $\underline{\mathbb{C}}$ vers $\underline{\mathbb{C}}'$ et dont les flèches sont les réécritures entre ces foncteurs compatibles.

Si $\underline{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}, \mathcal{R}, \Rightarrow)$ est une petite catégorie avec réécritures, on note ρ la relation binaire sur $Fl(\mathbb{C})$ telle que :

- si $r : C_1 \rightsquigarrow C_2$ est une flèche de réécriture, alors on a $id(C_1)\ \rho\ r$ et $r\ \rho\ id(C_2)$,

- si c_1 et c_2 sont deux flèches de $\mathbb{C}$ et si $c_1 \Rightarrow c_2$, alors on a $c_1\ \rho\ c_2$.

Dans ces conditions, on note $\overline{\rho}$ la relation d'équivalence

compatible (avec la structure de catégorie de $\mathbb{C}$) engendrée par ρ . Ainsi, à $\overline{\rho}$, sont associées trois relations d'équivalence $\overline{\rho}_{Ob}$ (sur $Ob(\mathbb{C})$), $\overline{\rho}_{Fl} = \overline{\rho}$ (sur $Fl(\mathbb{C})$) et $\overline{\rho}_{CComp}$ (sur l'ensemble $CComp(\mathbb{C})$ des couples de flèches composables - i.e. consécutives - de $\mathbb{C}$), de sorte qu'on dispose du diagramme d'applications compatibles ci-dessous (où l'on utilise les notations introduites en Section A, §1.2 - i.e. en [S.C.C.A.] -, concernant dom , codom , selid , comp et CComp , et en désignant par $p_{i\mathbb{C}}$ la i-ème projection, quand $i \in \{1,2\}$) :

$$(Ob(\mathbb{C}),\overline{\rho}_{Ob}) \underset{codom_{\mathbb{C}}}{\overset{selid_{\mathbb{C}}}{\rightleftarrows}} (Fl(\mathbb{C}),\overline{\rho}_{Fl}) \underset{p_{2\mathbb{C}}}{\overset{comp_{\mathbb{C}}}{\leftrightarrows}} (CComp(\mathbb{C}),\overline{\rho}_{CComp})$$

En passant aux quotients, on obtient le diagramme d'applications suivant :

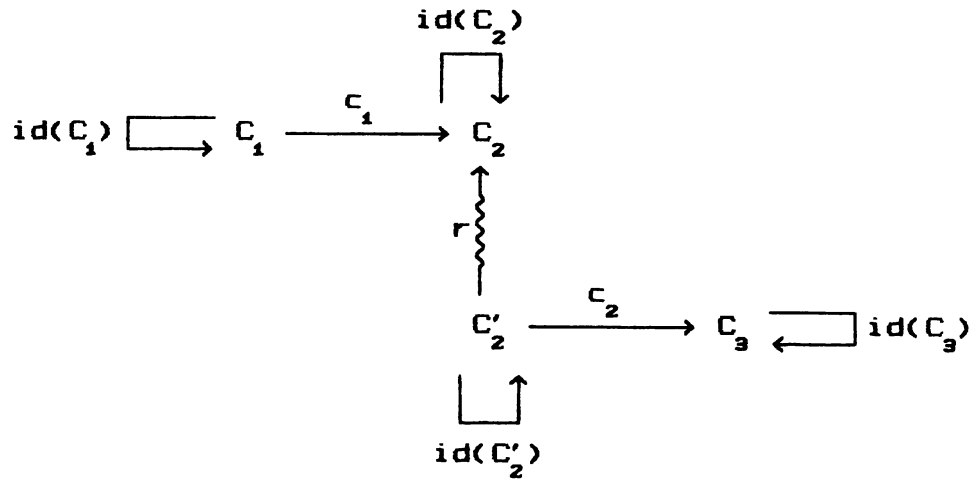
$$Ob(\mathbb{C})/\overline{\rho}_{Ob} \underset{codom}{\overset{selid}{\rightleftarrows}} Fl(\mathbb{C})/\overline{\rho}_{Fl} \underset{p_2}{\overset{comp}{\leftrightarrows}} CComp(\mathbb{C})/\overline{\rho}_{CComp}$$

Il représente le *quotient* $\mathbb{C}/\overline{\rho}$ *de* $\mathbb{C}$ *par* $\overline{\rho}$: c'est seulement (en général) un graphe à composition, puisque le produit fibré $CComp(\mathbb{C}) = Fl(\mathbb{C}) \times_{Ob(\mathbb{C})} Fl(\mathbb{C})$ n'est pas (en général) préservé par passage au quotient.

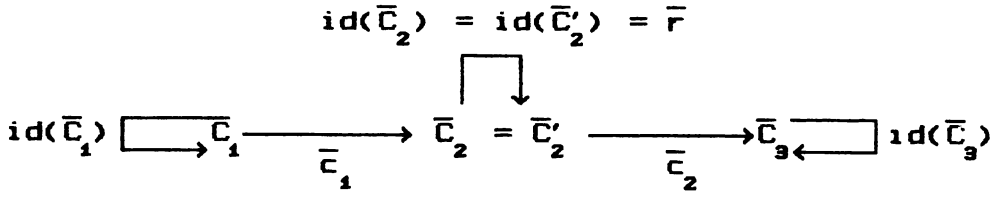
Alors, on désigne par $\mathbb{C}//\rho = \mathbb{C}//\overline{\rho}$ la catégorie librement engendrée par le graphe à composition $\mathbb{C}/\overline{\rho}$. Au sens de

[C.A.S.T.], $\mathbb{C}//\overline{\rho}$ est la catégorie *quasi-quotient de* $\mathbb{C}$ *par* ρ (ou par l'équivalence, ou l'équivalence compatible, engendrée par ρ). On pourra dire que $\mathbb{C}//\overline{\rho}$ est la catégorie des "quasi-composantes réécriture-connexes" de $\underline{\mathbb{C}}$ [12] et on notera $\mathbb{C}//\rho = \mathbb{C}//\overline{\rho} = \text{reec-}\pi_0(\underline{\mathbb{C}})$.

Par exemple, supposons que $\underline{\mathbb{C}}$ est la catégorie avec réécritures représentée ci-dessous :



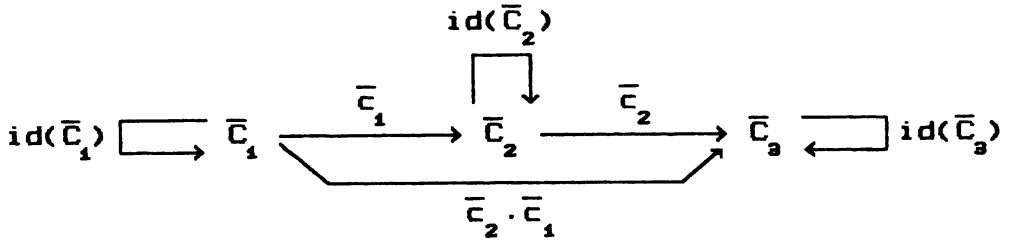
De la sorte, $\mathbb{C}/\overline{\rho}$ est le graphe à composition, sans autres couples composables que les triviaux, représenté ci-dessous :



Tandis que $\mathbb{C}//\overline{\rho} = \mathbb{C}//\rho = \text{reec-}\pi_0(\underline{\mathbb{C}})$ est la catégorie re-

[12] La catégorie $\mathbb{C}//\overline{\rho}$ de toutes les "quasi-composantes réécriture-connexes" de $\mathbb{C}$ est donc librement engendrée par le graphe à composition $\mathbb{C}/\overline{\rho}$ des (seules) composantes réécriture-connexes de $\mathbb{C}$.

présentée (par le diagramme *commutatif*) ci-dessous :



Clairement, le foncteur "quasi-composantes réécriture-connexes" (qui résulte des constructions précédentes) :

$$\text{reec-}\pi_0 : \mathbb{C}\text{atreec} \longrightarrow \mathbb{C}\text{at}, \quad \underline{\mathbb{C}} \longmapsto \mathbb{C}//\rho$$

est adjoint à gauche du foncteur "catégorie avec réécritures triviale" :

$$\text{reec-Triv} : \mathbb{C}\text{at} \longrightarrow \mathbb{C}\text{atreec}, \quad \mathbb{C} \longmapsto (\mathbb{C}, \text{Selid}(\text{Ob}(\mathbb{C})), =)$$

(si on désigne par $\text{Selid}(\text{Ob}(\mathbb{C}))$ la sous-catégorie de $\mathbb{C}$ dont les flèches sont toutes les $\text{id}_{\mathbb{C}}(C) = \text{selid}_{\mathbb{C}}(C)$, quand C parcourt $\text{Ob}(\mathbb{C})$).

Nous laissons au lecteur le soin de constater que l'adjonction $(\text{reec-}\pi_0, \text{reec-Triv})$ est (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) sous-jacente à une Φ-réflexion $\Psi_{\text{catreec}} = (\mathbb{C}\text{atreec}, \text{reec-}\pi_0, \ldots, \text{reec-Triv}, \mathbb{C}\text{at})$.

Dans ces conditions, on vérifie facilement que :

- Ψ_{catreec} est (aux sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) amphi-co-complète et amphi-complète,

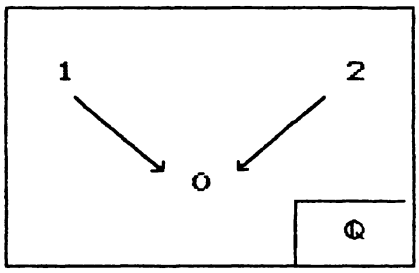
- Ψ_{catreec} est (au sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) co-représentable.

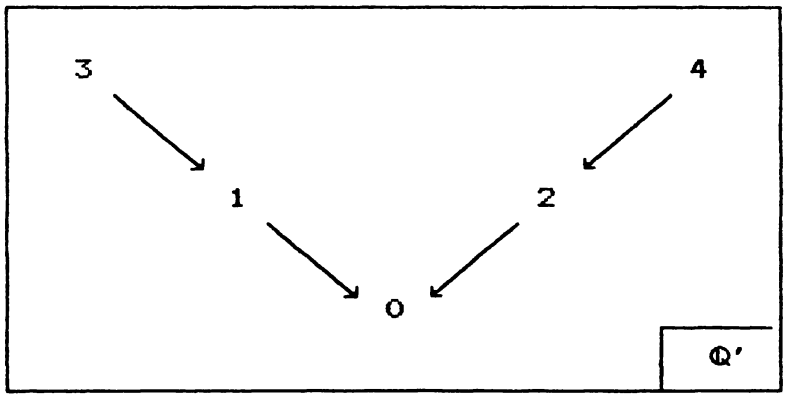
Par contre, désignons par :

- $\mathbb{C}\text{atreec}'_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}\text{atreec}$ dont les objets sont les catégories avec réécritures $\text{reec-Triv}(\mathbb{1})$,

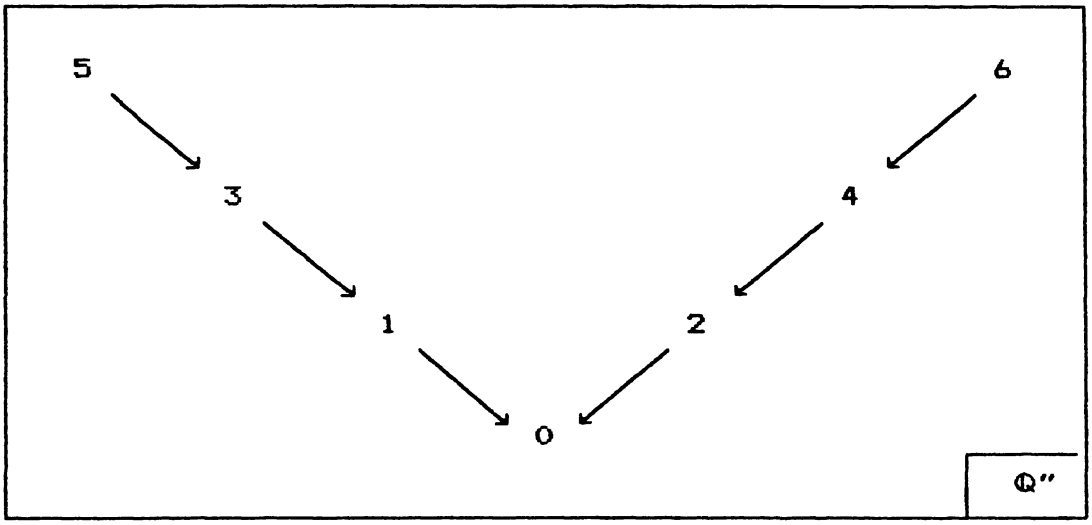
reec-Triv(𝟚) et reec-Triv(𝟛) ,

- $\mathbb{C}\mathrm{atreec}_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$atreec dont les objets sont[13] reec-Triv(∅) , reec-Triv(𝟙) , reec-Triv(𝟚) , reec-Triv(𝟛) , reec-Triv(ℚ) , reec-Triv(ℚ') et reec-Triv(ℚ") , où ℚ , ℚ' et ℚ" sont les catégories engendrées par les graphes orientés représentés ci-dessous :





[13] Les catégories ∅ , 𝟙 , 𝟚 , 𝟛 , ℚ , ℚ' et ℚ" considérées ici sont (à des isomorphismes près) les objets de la syntaxe des catégories localement cartésiennes que nous utilisons plus loin.



alors, on constate que :

- $\Psi_{catreec}$ est (aux sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) suffisamment $\mathbb{C}atreec'_0$-générée mais *n'est pas* totalement $\mathbb{C}atreec'_0$-connexe,

- $\Psi_{catreec}$ est (aux sens de la Section B, §5.3 - i.e. de [S.C.C.B.]) suffisamment $\mathbb{C}atreec_0$-générée mais *n'est pas* totalement $\mathbb{C}atreec_0$-connexe.

A la "présentation à la Freyd" des catégories lax-localement-cartésiennes du §1 de [E.S.C.C.] associons maintenant une première syntaxe (auxiliaire) :

$$\mathcal{T}_{allcc} = (\mathbb{C}atreec, \mathbb{V}_{allcc}, \mathbb{S}_{allcc}, \mathbb{W}_{allcc}, \mathbb{T}_{allcc})$$

comme suit.

Toute "loi" $\varkappa$ est présentée au §1 de [E.S.C.C.] sous la forme générale suivante :

$$\forall \qquad\qquad \varkappa$$
$$\| \quad \underline{\mathbb{G}}_{\varkappa} \quad \| \quad \underline{\mathbb{G}}'_{\varkappa} \quad \leq \quad \underline{\mathbb{G}}''_{\varkappa}$$

où :

$\underline{\mathbb{G}}_{\varkappa}$ est une présentation (avec ou sans réécritures explicites) d'une catégorie avec réécritures (et $\underline{\mathbb{G}}_{\varkappa}$ est destinée à décrire la disposition mutuelle des arguments de la loi $\varkappa$),

- $\underline{\mathbb{G}}'_{\varkappa}$ est (isomorphe à la catégorie avec réécritures triviale) reec-Triv(𝟙) ou reec-Triv(𝟚) (et $\underline{\mathbb{G}}'_{\varkappa}$ est destinée à décrire la sorte - ou le type - du résultat produit par la loi $\varkappa$),

- $\underline{\mathbb{G}}''_{\varkappa}$ est une présentation d'une catégorie avec réécritures et contient aussi bien $\underline{\mathbb{G}}_{\varkappa}$ que $\underline{\mathbb{G}}'_{\varkappa}$ (et $\underline{\mathbb{G}}''_{\varkappa}$ est destinée à décrire la disposition mutuelle des arguments de la loi et du résultat qu'elle produit).

Alors, on impose que :

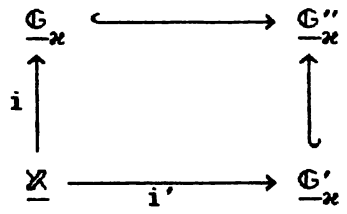
$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{G}}'_{\varkappa} & \overset{\varkappa}{\dashrightarrow} & \underline{\mathbb{G}}_{\varkappa} \\ & {\scriptstyle i'} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle i} & \\ & \underline{\mathbb{X}} & \end{array}$$

sont des objets et des flèches constituant un diagramme commutatif de $\mathbb{T}_{allcc}$, dès que :

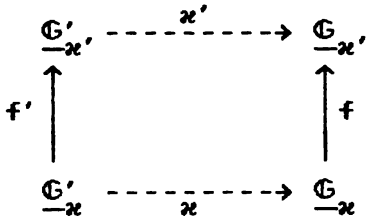
- $\underline{\mathbb{X}}$ = reec-Triv(𝟙) ou $\underline{\mathbb{X}}$ = reec-Triv(𝟚) ,

- $i : \underline{\mathbb{X}} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\varkappa}$ et $i' : \underline{\mathbb{X}} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}'_{\varkappa}$ sont des injections,

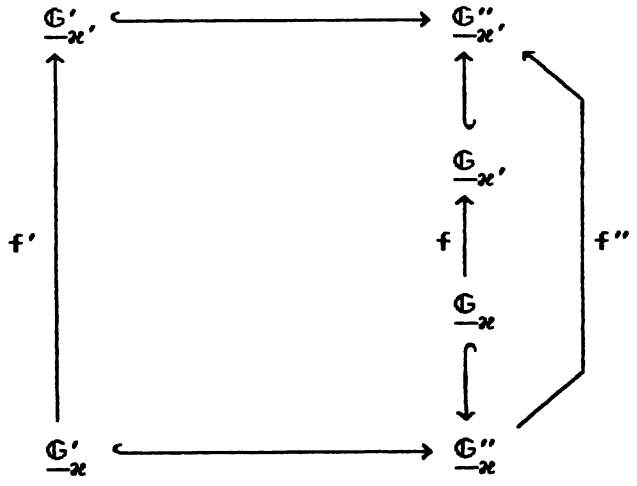
- le diagramme ci-dessous est commutatif :



Si $\varkappa$ et $\varkappa'$ sont deux lois, on impose que :



sont des objets et des flèches constituant un diagramme commutatif de $\mathbb{U}_{allcc}$, dès qu'on dispose d'un diagramme commutatif de foncteurs compatibles *satisfaisant(s)* (i.e. déterminé(s) par la dénotation des objets et flèches des présentations concernées) tel que :



Tout "axiome" α du §1 de [E.S.C.C.] peut trivialement être présenté sous la forme générale suivante :

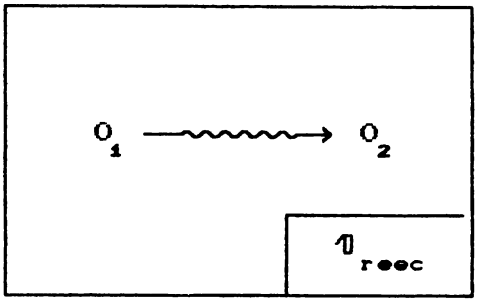
$\forall$ on a

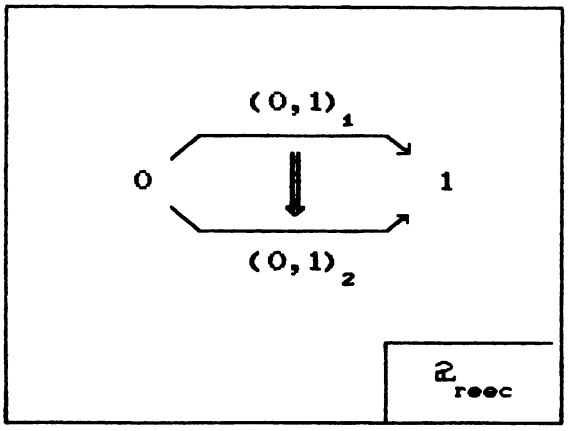
$\| \underline{\mathbb{G}}_\alpha \| \underline{\mathbb{G}}'_\alpha \subseteq \underline{\mathbb{G}}''_\alpha$

où :

- $\underline{\mathbb{G}}_\alpha$ est une présentation (avec ou sans réécritures explicites) d'une catégorie avec réécritures,

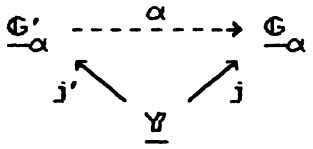
- $\underline{\mathbb{G}}'_\alpha$ est (isomorphe à) l'une des catégories avec réécritures $\mathbb{1}_{reec}$ ou $\mathbb{2}_{reec}$ représentées ci-dessous :





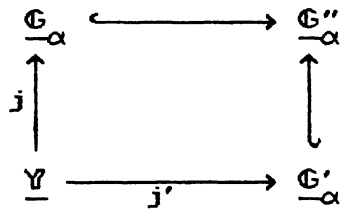
- $\underline{\mathbb{G}}''_\alpha$ est une présentation d'une catégorie avec réécritures et contient aussi bien $\underline{\mathbb{G}}_\alpha$ que $\underline{\mathbb{G}}'_\alpha$.

Alors, on impose que :

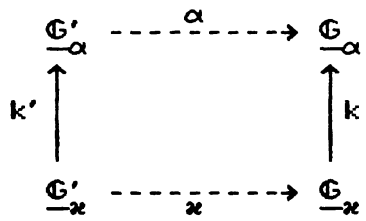


sont des objets et des flèches constituant un diagramme commutatif de $\mathbb{T}_{allcc}$, dès que :

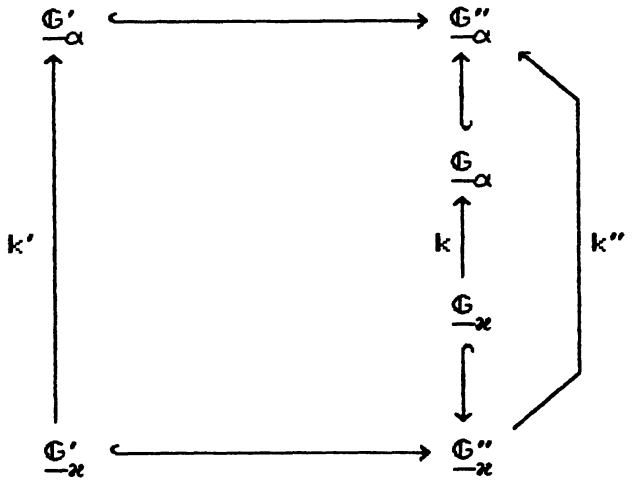
- $\underline{\mathcal{Y}}$ = reec-Triv(𝟙) ou $\underline{\mathcal{Y}}$ = reec-Triv(𝟚) ou $\underline{\mathcal{Y}} = \mathbb{1}_{reec}$ ou $\underline{\mathcal{Y}} = \mathbb{2}_{reec}$,
- $j : \underline{\mathcal{Y}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_{\alpha}$ et $j' : \underline{\mathcal{Y}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}'}_{\alpha}$ sont des injections,
- le diagramme ci-dessous est commutatif :



Si $\varkappa$ est une loi et si α est un axiome, on impose que :



sont des objets et des flèches constituant un diagramme commutatif de $\mathbb{T}_{allcc}$, dès qu'on dispose d'un diagramme commutatif de foncteurs compatibles *satisfaisant(s)* (i.e. déterminé(s) par la dénotation des objets et flèches des présentations concernées) tel que :



Si l'on note :

- $\mathbb{S}_{allcc}$ le sous-graphe à composition de $\mathbb{T}_{allcc}$ constitué des flèches telles que les i , i' , f , f' , j , j' , k , k' précédentes,

- $W_{allcc} : \mathbb{S}_{allcc} \longrightarrow \mathbb{T}_{allcc}$ le foncteur injection canonique,

- $V_{allcc} : \mathbb{S}_{allcc} \longrightarrow \mathbb{C}atreec$ le foncteur associant à tout objet $\underline{\mathbb{G}}$ de $\mathbb{S}_{allcc}$ la catégorie avec réécritures $V_{allcc}(\underline{\mathbb{G}}) = gen(\underline{\mathbb{G}})$ engendrée par la présentation $\underline{\mathbb{G}}$,

alors $\mathcal{T}_{allcc} = (\mathbb{C}atreec, V_{allcc}, \mathbb{S}_{allcc}, W_{allcc}, \mathbb{T}_{allcc})$ est bien une syntaxe dont il est facile de vérifier que la catégorie $\mathbb{C}atreec^{\mathcal{T}_{allcc}}$ de ses algèbres est isomorphe à la catégorie $\mathbb{LLCC}$ des petites catégories lax-localement-cartésiennes de [E.S.C.C.].

Clairement, $\mathcal{T}_{allcc}$ est une syntaxe transportable (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) par le foncteur $reec\text{-}\pi_0 : \mathbb{C}atreec \longrightarrow \mathbb{C}at$.
Alors, si on note $\mathcal{D}''_{alcc} = reec\text{-}\pi_0 \cdot \mathcal{T}_{allcc}$, il est facile de vérifier que la catégorie $\mathbb{C}at^{\mathcal{D}''_{alcc}}$ des

$\mathcal{D}''_{alcc}$-algèbres est isomorphe à la catégorie $\mathbb{LCC}$ des petites catégories localement cartésiennes de [E.S.C.C.].

A la "présentation à la Freyd" des catégories lax-localement-cartésiennes du §1 de [E.S.C.C.] associons cette fois une amphi-syntaxe

$$\mathcal{D}_{llcc} = (\mathbb{C}atreec, \sim_{llcc}, \mathbb{B}_{llcc}, \mathbb{K}_{llcc}, \mathbb{D}_{llcc}) ,$$

en ne nous préoccupant plus que des lois $\varkappa$ et des axiomes α pour lesquels $\underline{\mathbb{G}}_{\varkappa}$ et $\underline{\mathbb{G}}_{\alpha}$ ne contiennent aucune réécriture explicite.

Pour les seules lois $\varkappa$ telles que $\underline{\mathbb{G}}_{\varkappa}$ ne contient aucune réécriture, on constate que $\underline{\mathbb{G}}'_{\varkappa}$ et $\underline{\mathbb{G}}''_{\varkappa}$ n'en contiennent pas plus. Alors, on reprend intégralement les constructions précédentes.

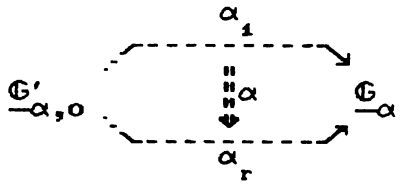
Si α est un axiome tel que $\underline{\mathbb{G}}_{\alpha}$ ne contient aucune réécriture, on constate que $\underline{\mathbb{G}}'_{\alpha}$ et $\underline{\mathbb{G}}''_{\alpha}$ en contiennent nécessairement, puisque $\underline{\mathbb{G}}'_{\alpha} = \mathbb{1}_{reec}$ ou $\underline{\mathbb{G}}'_{\alpha} = \mathbb{2}_{reec}$.
Alors, si $\underline{\mathbb{G}}'_{\alpha} = \mathbb{1}_{reec}$, on note $\underline{\mathbb{G}}'_{\alpha,o} = \text{reec-Triv}(\mathbb{1})$ et, pour tout $r \in \{1,2\}$, on pose :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\alpha,r} : & \underline{\mathbb{G}}'_{\alpha,o} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{G}}'_{\alpha} \\ & 0 & \longmapsto & 0_r \end{array}$$

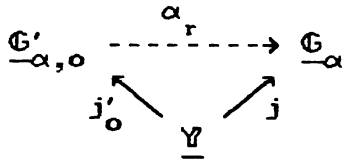
De même, si $\underline{\mathbb{G}}'_{\alpha} = \mathbb{2}_{reec}$, on note $\underline{\mathbb{G}}'_{\alpha,o} = \text{reec-Triv}(\mathbb{2})$ et, pour tout $r \in \{1,2\}$, on pose :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\alpha,r} : & \underline{\mathbb{G}}'_{\alpha,o} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{G}}'_{\alpha} \\ & (0,1) & \longmapsto & (0,1)_r \end{array}$$

Dans ces conditions, on impose que :

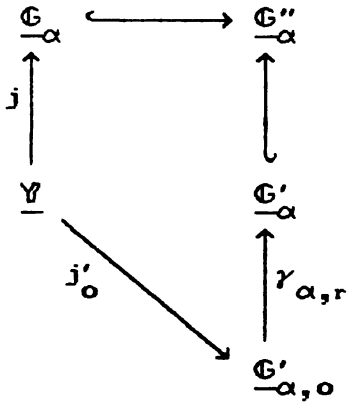


sont des objets, des 1-flèches et une 2-flèche de $\mathbb{D}_{llcc}$ et que, pour tout $r \in \{1,2\}$:

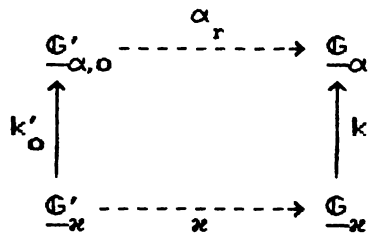


sont des objets et des flèches constituant un diagramme commutatif de $\mathbb{D}_{llcc}$, dès que :

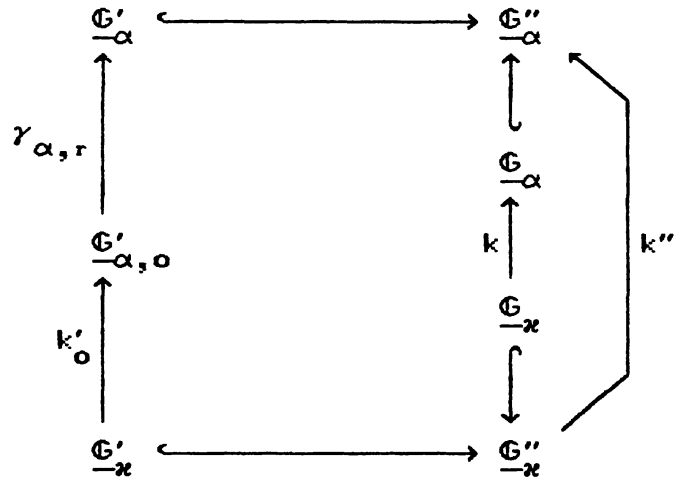
- $\mathbb{Y}$ = reec-Triv(1) ou $\mathbb{Y}$ = reec-Triv(2) ,
- $j : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{G}_\alpha$ et $j'_o : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{G}'_{\alpha,o}$ sont des injections,
- le diagramme ci-dessous est commutatif :



Si $\varkappa$ est une loi et si α est un axiome pour lesquels $\mathbb{G}_\varkappa$ et $\mathbb{G}_\alpha$ ne contiennent aucune réécriture, on impose que, pour tout $r \in \{1,2\}$:



sont des objets et des flèches constituant un diagramme commutatif de $\mathbb{D}_{llcc}$, dès qu'on dispose d'un diagramme commutatif de foncteurs compatibles *satisfaisant*(s) (i.e. déterminé(s) par la dénotation des objets et flèches des présentations concernées) tel que :



Si l'on note :

- $\mathbb{B}_{llcc}$ le sous-amphi-graphe à composition de $\mathbb{D}_{llcc}$ constitué (seulement) des 1-flèches telles que les i , i' , f , f' , j , j'_o , k , k'_o précédentes,

- $\mathbb{K}_{llcc} : \mathbb{B}_{llcc} \longrightarrow \mathbb{D}_{llcc}$ l'amphi-foncteur injection canonique,

- $\mathbb{J}_{llcc} : \mathbb{B}_{llcc} \longrightarrow$ Catreec l'amphi-foncteur associant à tout objet $\underline{\mathbb{G}}$ de $\mathbb{B}_{llcc}$ la catégorie avec réécritures $\mathbb{J}_{llcc}(\underline{\mathbb{G}}) = gen(\underline{\mathbb{G}})$ engendrée par la présentation $\underline{\mathbb{G}}$,

alors $\mathfrak{D}_{llcc} = (\mathbb{C}atreec, \mathbb{J}_{llcc}, \mathbb{B}_{llcc}, \mathbb{K}_{llcc}, \mathbb{D}_{llcc})$ est bien une amphi-syntaxe. Mais, il est facile de constater que, ni la catégorie $\mathbb{C}atreec^{\mathfrak{D}_{llcc}}$ de ses sesqui-algèbres, ni la catégorie $\mathbb{C}atreec^{\mathfrak{D}_{llcc}}$ de ses amphi-algèbres, ne sont isomorphes à la catégorie (qui s'identifie seulement à l'une de leurs sous-catégories pleines strictes) $\mathbb{LLCC}$ des petites catégories lax-localement-cartésiennes de [E.S.C.C.].

Clairement, l'amphi-syntaxe $\mathfrak{D}_{llcc}$ est Π_0-modifiable (au sens de la Section B, §5.2 - i.e. de [S.C.C.B.]) et sa Π_0-modification $\Pi_0(\mathfrak{D}_{llcc})$ est une syntaxe transportable (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) par le foncteur $reec\text{-}\pi_0 : \mathbb{C}atreec \longrightarrow \mathbb{C}at$.
Alors, si on note $\mathfrak{D}'_{lcc} = reec\text{-}\pi_0 \cdot \Pi_0(\mathfrak{D}_{llcc})$, il est facile de vérifier que la catégorie $\mathbb{C}at^{\mathfrak{D}'_{lcc}}$ des $\mathfrak{D}'_{lcc}$-algèbres est isomorphe à la catégorie $\mathbb{LCC}$ des petites catégories localement cartésiennes de [E.S.C.C.].

Par construction, $\mathfrak{L}_{llcc} = (\mathfrak{D}_{llcc}, \mathfrak{D}'_{lcc})$ est une $\Psi_{catreec}$-laxification (au sens de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.]).

On constate sans difficulté que :

- $(\Psi_{catreec}, \mathcal{S}(\mathfrak{L}_{llcc}))$ *n'a pas* la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{C}atreec'_0$-connexe (au sens de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.] - et en reprenant la notation de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.] - concernant le $\Psi_{catreec}$-sesqui-élargissement $\mathcal{S}(\mathfrak{L}_{llcc})$ associé à la $\Psi_{catreec}$-laxification $\mathfrak{L}_{llcc}$),

- $(\Psi_{catreec}, \mathcal{A}(\mathfrak{L}_{llcc}))$ *n'a pas* la propriété de suffisante amphi-complétude $\mathbb{C}atreec'_0$-connexe (au sens de la Section B,

§5.5 - i.e. de [S.C.C.B.] - et en reprenant la notation de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.] - concernant le $\Psi_{catreec}$-amphi-élargissement $\mathscr{A}(\mathscr{L}_{llcc})$ associé à la $\Psi_{catreec}$-laxification $\mathscr{L}_{llcc}$).

A fortiori, il est clair que :

- $(\Psi_{catreec}, \mathscr{S}(\mathscr{L}_{llcc}))$ *n'a pas* la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{C}atreec_o$-connexe,

- $(\Psi_{catreec}, \mathscr{A}(\mathscr{L}_{llcc}))$ *n'a pas* la propriété de suffisante amphi-complétude $\mathbb{C}atreec_o$-connexe.

Il est facile de déduire des constructions précédentes un $\Psi_{catreec}$-sesqui-élargissement (au sens de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.]) :

$$\mathscr{E}_{llcc} = (\mathscr{D}_{llcc}, \mathscr{K}', \mathscr{T}_{llcc}, \mathscr{K}'', \mathscr{D}''_{lcc}, \mathscr{K}', \mathscr{D}'_{lcc}) ,$$

en notant :

- $\mathscr{T}_{llcc}$ la syntaxe (à laquelle $\mathscr{T}_{allcc}$ est évidemment isologue, au sens de la Section A, §2.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) obtenue par "réunion" de $\mathscr{T}_{allcc}$ et $\mathscr{PPA}(\mathscr{D}_{llcc})$ (en reprenant la notation de la Section A, §4.3 - i.e. de [S.C.C.A.] - concernant la syntaxe de co-représentation $\mathscr{PPA}(\mathscr{D}_{llcc})$ associée à $\mathscr{D}_{llcc}$),

- $\mathscr{K}'$ "l'injection canonique" de $\mathscr{PPA}(\mathscr{D}_{llcc})$ dans $\mathscr{T}_{llcc}$,

et (puisque $\mathscr{T}_{llcc}$ est manifestement reec-π_o-transportable, au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) :

- $\mathscr{D}''_{lcc} = \text{reec-}\pi_o \cdot \mathscr{T}_{llcc}$ la syntaxe (à laquelle $\mathscr{D}''_{alcc}$, et donc $\mathscr{D}'_{lcc}$, sont isologues, au sens de la Section A, §2.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) transportée correspondante,

- $\mathscr{K}'$ l'isologie de $\mathscr{D}'_{lcc}$ vers $\mathscr{D}''_{lcc}$.

Alors, il est clair que :

- $\mathcal{Z}_{llcc}$ est un $\Psi_{catreec}$-sesqui-élargissement petit et ayant un rang (aux sens de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.]).

De même, on vérifie sans difficulté (en reprenant la notation de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.] - concernant la classe $C_{(\Psi_{catreec},\mathcal{Z}_{llcc})}$) que :

- $\Psi_{catreec}$ est (au sens de la Section B, §5.4 - i.e. de [S.C.C.B.]) suffisamment $\mathbb{C}atreec_0$-connexe pour la classe $C_{(\Psi_{catreec},\mathcal{Z}_{llcc})}$ (de toutes les petites catégories avec réécritures, sous-jacentes à une structure de catégorie lax-localement-cartésienne librement engendrée par une catégorie)[14].

Enfin, on déduit immédiatement des §§3, 4 et 5 de [E.S.C.C.], i.e. de la *preuve* des seuls points (i) et (ii) du théorème du §2 de [E.S.C.C.] (quand bien même, l'*énoncé* de ce théorème ne fait allusion qu'aux catégories lax-localement-cartésiennes *librement engendrées* par un graphe orienté), que :

- *toute* $\mathcal{T}_{llcc}$-algèbre (i.e. toute catégorie lax-localement-cartésienne) est $\Psi_{catreec}$-quotientable (au sens du "Correctif à apporter à la Section B, §5.5" - i.e. de [S.C.C.X.]).

Tout ceci signifie donc que :

- *le couple* $(\Psi_{catreec},\mathcal{Z}_{llcc})$ *a la propriété de suffisante*

[14] $\Psi_{catreec}$ est même suffisamment $\mathbb{C}atreec_0$-connexe pour la classe C_{llcc} de toutes les catégories avec réécritures, sous-jacentes à une quelconque structure de catégorie lax-localement-cartésienne.

sesqui-complétude $\mathbb{C}$atreec$_0$*-connexe* (au sens de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]).

En conclusion, d'un point de vue "sémantique" (i.e. en appliquant la proposition 5 de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B]), la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{C}$atreec$_0$-connexe précédente permet d'affirmer - pour faire court - que :

- les quasi-composantes réécriture-connexes de la catégorie lax-localement-cartésienne librement engendrée par une quelconque petite catégorie $\mathbb{C}$ en sont exactement les composantes réécriture-connexes, elles sont canoniquement munies d'une structure de catégorie localement cartésienne, et c'est la structure de catégorie localement cartésienne librement engendrée par $\mathbb{C}$,

si bien qu'on retrouve, de la sorte, mais par application de méthodes générales, ce qui est établi directement en [E.S.C.C.] (i.e. ce qui résulte de la preuve du point (iii) du théorème du §2 de [E.S.C.C.], quand bien même son énoncé ne concerne que les catégories $\mathbb{C}$ librement engendrées par un graphe orienté).

De même, d'un point de vue "syntaxique" (i.e. en appliquant la proposition 6 de la Section B, §5.5 - i.e. de [S.C.C.B.]), la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{C}$atreec$_0$-connexe précédente permet d'affirmer que la "théorie" des catégories localement cartésiennes, i.e. la théorie achevée engendrée (au sens de la Section A, §2.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) par $\mathcal{D}'_{lcc}$, est une image de la "théorie" des catégories lax-localement-cartésiennes, i.e. de la théorie achevée engendrée par $\mathcal{T}_{llcc}$. Ce qu'on peut interpréter - pour faire court - en énonçant que :

- toute propriété équationnelle des catégories localement cartésiennes est démontrable "par réécritures et 2-réécritures" (i.e. par réécritures d'objets et réécritures de flèches) dans une catégorie lax-localement-cartésienne appropriée...

Bibliographie de la Section C

[C.A.S.T.] C. Ehresmann, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

[E.S.C.C.] F. Cury, Catégories lax-localement-cartésiennes et catégories localement cartésiennes : un exemple de suffisante complétude connexe de sémantiques initiales, Diagrammes 25, Paris, 1991.

[S.C.C.A.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section A : amphi-syntaxes, amphi-algèbres et sesqui-algèbres, Diagrammes 30, Paris, 1993.

[S.C.C.B.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section B : théorie générale, Diagrammes 31, Paris, 1994.

[S.C.C.X.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Correctif à apporter à la Section B, §5.5, Diagrammes 32, Paris, 1994 (ce volume).

Table de la Section C

Introduction de la Section C ..... Intro. - page 1

6. Exemples ..... §6. - page 1
   6.1. Exemples de graphes à composition ..... §6. - page 1
   6.2. Exemples de syntaxes et d'algèbres ..... §6. - page 17
   6.3. Exemples d'amphi-graphes à composition ..... §6. - page 24
   6.4. Exemples d'amphi-syntaxes, d'amphi-algèbres et de sesqui-algèbres ..... §6. - page 30
   6.5. Exemples de laxifications possédant la propriété de suffisante complétude (totalement) connexe ..... §6. - page 41
   6.6. Exemple d'élargissement possédant la propriété de suffisante complétude connexe .... §6. - page 51

Bibliographie de la Section C ..... Biblio. - page 1

Table de la Section C ..... Table - page 1
