DIAGRAMMES

F. CURY

La suffisante complétude connexe. Correctif à apporter à la section B. §5.5

Diagrammes, tome 32 (1994), exp. n° 1, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1994__32__A1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 32 , 1994

LA SUFFISANTE COMPLETUDE CONNEXE

CORRECTIF A APPORTER A LA SECTION B, §5.5

F. CURY

En Section B, §5.5 (i.e. en [S.C.C.B.]), nous avons introduit la notion de "$\mathcal{T}$-algèbre Ψ-quotientable". Il nous est apparu qu'on devait et qu'on pouvait utiliser une acception *plus large* que celle initialement introduite :

- on le doit car le *dernier* (et seulement ce dernier!) des exemples que nous avons en vue (voir la Section C, §6.6 - i.e. [S.C.C.C.]), relève seulement de cette acception plus large et non de l'acception stricte initiale,

- on le peut, puisque le seul et unique résultat (voir la Section B, §5.6, proposition 6 - i.e. [S.C.C.B.]) qui dépendait de cette acception stricte est encore *intégralement valable* avec cette acception plus large, et *sans la moindre*

modification dans la preuve.

Par contre, il nous a semblé opportun de *conserver* la terminologie initiale ("algèbre Ψ-quotientable") pour qualifier cette nouvelle acception plus large, en donnant à l'acception stricte antérieure une autre qualification ("algèbre strictement Ψ-quotientable").

On lira donc, en Section B, §5.5 (i.e. en [S.C.C.B.]), en lieu et place des pp. 40 à 43, ce qui suit :

" ...

5.5. Suffisante complétude et suffisante complétude connexe[12]

Introduisons la notion d'algèbre Ψ-*quotientable*.

Définition 9 : Si $\Psi = (\mathbb{A},\mathbb{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion et si $\mathcal{T} = (\mathbb{A},V,\mathbb{S},W,\mathbb{T})$ est une syntaxe sur $\mathbb{A}$, on dit qu'une $\mathcal{T}$-algèbre (A,τ) est Ψ-*quotientable* si et seulement s'il existe une (nécessairement unique) $\mathcal{T}$-algèbre $(R(F(A)),\tau/\varepsilon(A))$ telle que

- $\varepsilon(A) : (A,\tau) \longrightarrow (R(F(A)),\tau/\varepsilon(A))$ est un homomorphisme de $\mathcal{T}$-algèbres,

- pour tout objet A' de $\mathbb{A}'$, pour toute flèche $h : A \longrightarrow R(A')$ de $\mathbb{A}$ (à laquelle est donc associée, par adjonction, une unique flèche $h' : F(A) \longrightarrow A'$ de $\mathbb{A}'$ telle que $R(h').\varepsilon(A) = h$) et pour toute $\mathcal{T}$-algèbre

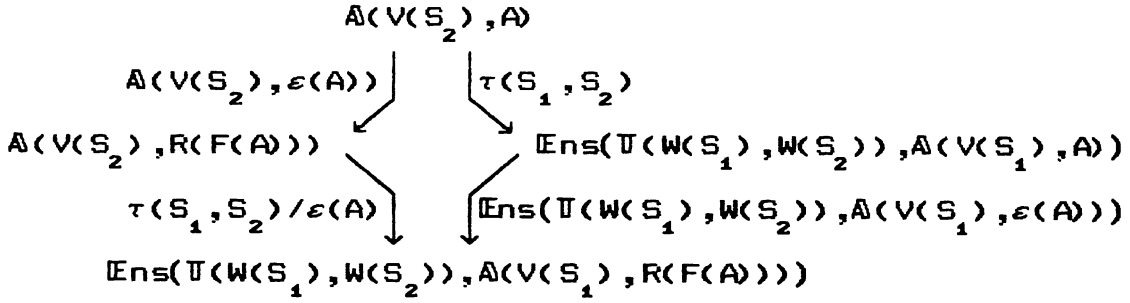
" ... [12] On trouvera des exemples de suffisante complétude et de suffisante complétude connexe en Section C, §§6.5 et 6.6 (i.e. en [S.C.C.C.]). ... "

$(R(A'),\tau')$, alors $h : (A,\tau) \longrightarrow (R(A'),\tau')$ est un homomorphisme de $\mathcal{T}$-algèbres si et seulement si $R(h') : (R(F(A)),\tau/\varepsilon(A)) \longrightarrow (R(A'),\tau')$ est un homomorphisme de $\mathcal{T}$-algèbres.

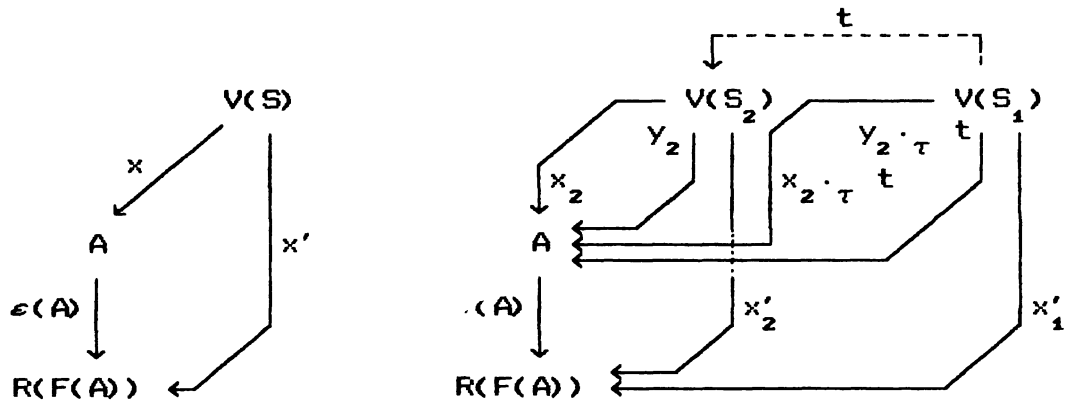
Souvent (sans que ce soit, cependant, toujours le cas) une $\mathcal{T}$-algèbre peut être Ψ-quotientable parce que "quotientable sorte par sorte" (les "sortes" étant les objets de $\mathbb{S}$). Précisément, disons qu'une $\mathcal{T}$-algèbre (A,τ) est *strictement Ψ-quotientable* si et seulement si :

- pour tout objet $S \in Ob(\mathbb{S})$, l'application :
$$\mathbb{A}(V(S),\varepsilon(A)) : \mathbb{A}(V(S),A) \longrightarrow \mathbb{A}(V(S),R(F(A)))$$
est surjective,

- pour tous objets S_1 , $S_2 \in Ob(\mathbb{S})$, il existe une (nécessairement unique) application :
$$\tau(S_1,S_2)/\varepsilon(A)$$
$$\mathbb{A}(V(S_2),R(F(A))) \longrightarrow \mathbb{E}ns(\mathbb{T}(W(S_1),W(S_2)),\mathbb{A}(V(S_1),R(F(A))))$$
rendant commutatif le diagramme ci-dessous :



Ainsi, (A,τ) est strictement Ψ-quotientable si et seulement si (en se reportant aux deux diagrammes ci-dessous) :



- pour tout objet $S \in Ob(\mathbb{S})$ et pour toute flèche $x' : V(S) \longrightarrow R(F(A))$ de $\mathbb{A}$, il existe (au moins) une flèche $x : V(S) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ telle que $\varepsilon(A) \cdot x = x'$,

- pour tous objets $S_1, S_2 \in Ob(\mathbb{S})$, pour toute flèche $t : W(S_1) \longrightarrow W(S_2)$ de $\mathbb{T}$ et pour toutes flèches $x_2, y_2 : V(S_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, si l'on a $\varepsilon(A) \cdot x_2 = \varepsilon(A) \cdot y_2 \ (= x'_2)$, alors on a $\varepsilon(A) \cdot (x_2 \cdot_\tau t) = \varepsilon(A) \cdot (y_2 \cdot_\tau t) \ (= x'_1)$.

Il est clair que :

Proposition 4 : *Si* $\Psi = (\mathbb{A}, \mathbb{F}, \nu, \omega, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ *est une* Φ*-réflexion, si* $\mathcal{T}$ *est une syntaxe sur* $\mathbb{A}$ *et si* (A,τ) *est une* $\mathcal{T}$*-algèbre strictement* Ψ*-quotientable, alors* (A,τ) *est une* $\mathcal{T}$*-algèbre* Ψ*-quotientable.*

Preuve.

Pour tous objets $S_1, S_2 \in Ob(\mathbb{S})$, il suffit de, et il faut, poser :

$$\tau/\varepsilon(A)\,(S_1,S_2) = \tau(S_1,S_2)/\varepsilon(A)$$

$$\mathbb{A}(V(S_2),R(F(A))) \longrightarrow \mathbb{E}ns(\mathbb{T}(W(S_1),W(S_2)),\mathbb{A}(V(S_1),R(F(A)))).$$

Autrement dit, pour tous objets S_1 , $S_2 \in Ob(\mathbb{S})$, pour toute flèche $t : W(S_1) \longrightarrow W(S_2)$ de $\mathbb{T}$ et pour toute flèche $x'_2 : V(S_2) \longrightarrow R(F(A))$ de $\mathbb{A}$, il suffit de, et il faut, poser :

$$x'_2 \cdot_{\tau/\varepsilon(A)} t = \varepsilon(A) \cdot (x_2 \cdot_\tau t) ,$$

en choisissant arbitrairement une flèche $x_2 : V(S_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ telle que $\varepsilon(A) \cdot x_2 = x'_2$.
Fin de la preuve.

Introduisons maintenant la notion de *suffisante complétude*.

Définition 10 : Supposons que :

- $\Psi = (\mathbb{A}, \mathbb{F}, \nu, \omega, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion co-représentable et amphi-co-complète,

... "

Bibliographie

[S.C.C.B.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section B : théorie générale, Diagrammes 31, Paris, 1994.

[S.C.C.C.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section C : exemples, Diagrammes 32, Paris, 1994 (ce volume).