DIAGRAMMES

F. CURY

Complétion et complétude selon H. Andreka et I. Nemeti

Diagrammes, tome 28 (1992), p. 1-80

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1992__28__1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 28 , 1992

COMPLETION ET COMPLETUDE SELON H. ANDREKA ET I. NEMETI (*)

par

F. Cury (**)

(*) in "Generalization of the Concept of Variety and Quasi-Variety to Partial Algebras, through Category Theory", Diss. Math. CCIV, Warszawa, 1983.
(**) rapport de stage du D.E.A. d'Informatique Fondamentale, préparé sous la direction de P.-L. Curien, Paris, Septembre 1986.

A.M.S. SUB. CLASS. : 03 G 30 , 08 C 99 , 18 A 20 .

INTRODUCTION

En théorie classique des modèles, les toutes premières considérations sont, nécessairement, les suivantes:
- une classe E de formules (d'un certain type, donné) étant fixée, on décrit la classe

Modèles de E

de tous ses modèles (d'un certain genre, donné),
- une classe A de modèles (d'un certain genre, donné) étant fixée, on décrit la classe

Formules de A

de toutes les formules (d'un certain type, donné) valides dans tout modèle appartenant à A.

On peut donc effectuer les deux "aller-retour" suivants:
- A étant donnée, on prend

$\overline{A}$ = Modèles de (Formules de A)

(et on a toujours $A \subseteq \overline{A}$!),
- E étant donnée, on prend

$\overline{E}$ = Formules de (Modèles de E)

(et on a toujours $E \subseteq \overline{E}$!).

Ainsi, on obtient deux opérateurs:
- l'un (que la pratique incite à appeler *de complétion*), sur la classe des classes de modèles (du genre donné),
- l'autre (qu'on peut appeler *par complétude*), sur la classe des classes de formules (du type donné).

Alors, deux problèmes (au moins!) se posent:
(i) quel type de formules et quel genre de modèles faut-il choisir pour que $A \to \overline{A}$ et/ou $E \to \overline{E}$ soient des *fermetures*?
(ii) par quelles constructions, *internes* à la classe de tous les modèles (du genre donné), obtient-on $\overline{A}$ à partir de A et/ou par quelles constructions, internes à la classe de toutes les formules (du type donné), obtient-on $\overline{E}$ à partir de E ?

Dans le cadre "restreint" des algèbres (d'une signature donnée), le *théorème de Birkhoff* (ou ce que nous convenons d'appeler comme tel) fournit une solution aux problèmes (concernant les modèles) posés en (i) et (ii).
Ainsi, si l'on choisit:
- pour (genre de) modèles, les algèbres d'une signature donnée,
- pour (type de) formules, les "équations quantifiées universellement" (ou "identités"),

alors, $A \to \overline{A}$ est bien une fermeture et $\overline{A}$ s'obtient en saturant A par:
- produits,
- sous-algèbres,
- images homomorphes.

Dans le même cadre, les mêmes choix fournissent une solution (que nous convenons d'appeler *théorème de complétude algébrique*) aux problèmes (concernant les formules) posés en (i) et (ii).
Ainsi, dans ces conditions, $E \to \overline{E}$ est aussi une fermeture et $\overline{E}$ s'obtient à partir de E en effectuant toutes les ré-écritures possibles des formules (i. e. des équations) appartenant à E, au moyen de règles d'inférence particulières (i. e. par "déductions équationnelles").

Dans le cadre (initial) plus large de la théorie classique des modèles, i. e. si l'on choisit:
- pour modèles, les interprètations d'un langage,
- pour formules, les énoncés de la logique du 1er ordre (i. e. les formules closes, écrites à l'aide de variables, du langage, des connecteurs et quantificateurs usuels et, éventuellement, de deux valeurs de vérité 0 et 1),
les choses ne se passent pas complètement aussi bien.

On dispose en effet du *théorème de consistance* qu'on peut énoncer sous la forme suivante:

on ne peut pas déduire, par complétude, d'un ensemble d'énoncés E
deux énoncés contradictoires

ssi

E admet au moins un modèle,

ou encore:

$$(0 \leftrightharpoons 1) \notin E \quad \text{ssi} \quad \text{Modèles de } E \neq \emptyset .$$

Ce théorème de consistance une fois établi, on en déduit alors le *théorème de complétude logique* (c'est pourquoi on les confond, volontairement, souvent), i. e. une solution aux problèmes (concernant les énoncés) posés en (i) et (ii):
- l'opérateur $E \to \overline{E}$ est bien une fermeture et $\overline{E}$ s'obtient à partir de E en effectuant toutes les ré-écritures possibles des énoncés appartenant à E, au moyen de règles d'inférence un peu plus nombreuses que précédemment ("les déductions logiques").

Par contre, s'il est trivial de vérifier que $A \to \overline{A}$ est bien une fermeture, on ne sait pas caractériser toutes les constructions qui permettent d'obtenir $\overline{A}$ à partir de A.

Andréka-Németi obtiennent, dans un cadre intermédiaire entre le "restreint" et le "large", évoqués plus haut, tant un théorème de Birkhoff généralisé qu'un théorème de complétude, "essentiellement algébriques", et ce, en choisissant:
- pour modèles, soit les algèbres, soit les algèbres partielles d'une signature, soit encore les modèles - i. e. les interprètations - d'un langage,
- pour formules, essentiellement des implications entre formules atomiques "quantifiées universellement".

Ils obtiennent ce théorème de Birkhoff généralisé comme application d'une version catégorique de la situation usuelle: c'est que saturer A par produits, sous-algèbres, images homomorphes, est un cas particulier de saturation, dans une "bonne catégorie" (notamment munie d'un système de factorisation $\langle H, S \rangle$ et d'une classe particulère d'épimorphismes H), d'une classe d'objets par ... produits ("catégoriques"), sources des flèches de S , buts des flèches de H .
Cependant, leur version ne va pas jusqu'à donner un statut "catégorique" aux formules même infinitaires, et encore moins aux formules finitaires.
Nous montrons en détail que ceci est possible en poussant (un peu) plus loin les idées de Andréka-Néméti. Et nous détaillons avec soin leur procédé de traduction de ce cadre en le cadre usuel.

Le théorème de complétude essentiellement algébrique qu'ils obtiennent n'est pas, lui, catégorique: il n'est établi que dans le cadre "intermédiaire" évoqué précédemment.
Tout en re-situant le problème, nous n'avons pas cru devoir ré-écrire en détail ce qui n'avait pas besoin de l'être parce que se trouvant déjà dans Andréka-Németi. Par contre nous suggérons un cadre catégorique qui pourrait convenir.

0. PRELIMINAIRES

0.0. CONSIDERATIONS DE "TAILLES".

0.0.1. Classes et ensembles.

Pour la précision de la chose, disons que nous raisonnons dans un modèle N.B.G de la théorie des "ensembles" , i. e. avec des classes et des ensembles.

Alors, un ensemble est une *petite* classe. Et l'on peut parler de la classe de tous les ensembles, ou de tous les petits groupes ...

Nous userons abondamment des notations ensemblistes usuelles ... y compris pour les classes (par exemple pour écrire que tel élément x est dans la classe X , nous noterons $x \in X$ ...).

0.0.2. Petites catégories.

On dira qu'une catégorie est *petite* si, et seulement si, la classe de ses morphismes (et donc aussi de ses objets) est petite, i. e. est un ensemble.

De même, une limite projective ou inductive sera dite *petite* si, et seulement si, elle est indexée par une catégorie petite, i. e. si, et seulement si, c'est "la" limite d'un foncteur $F: I \to C$, où I est petite.

Lorsque ce n'est pas explicitement précisé, on ne fait pas d'hypothèse sur la taille des catégories considérées (i. e. on ne suppose pas qu'elles sont petites).

0.1. NOTATIONS GENERALES POUR LES CATEGORIES.

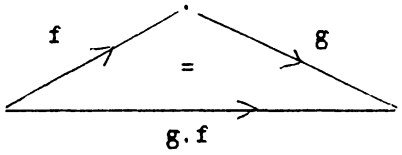
Dans tout ce 0.1. , on suppose que C est une catégorie.

0.1.1. Objets, morphismes et composition.

Pour tout morphisme $f: C \to C'$, on appelle C son *domaine* et C' son *codomaine*. Alors, on note $C = \mathrm{dom}(f)$ et $C' = \mathrm{codom}(f)$.

Pour tout objet C de **C** , nous notons $Id_C : C \to C$ le morphisme identité associé à C .

Enfin, nous écrivons la composition dans l'ordre habituel (i. e. comme pour la composition des applications). Ainsi, le diagramme suivant est-il *commutatif*:



0.1.2. Classes d'objets et de morphismes.

Nous notons Ob(C) , ou Ob **C** , ou même Ob (s'il n'y a pas risque d'ambiguïté) la classe de tous les objets de C .

Nous notons Mor(C) , ou Mor **C** , ou même Mor (s'il n'y a pas risque d'ambiguïté) la classe de tous les morphismes de C .

De même, nous notons Epi(C) (resp. Mono(C) , Iso(C)) , ou encore Epi (resp. Mono , Iso) , s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, la classe de tous les épimorphismes (resp. monomorphismes , isomorphismes) de C .

Les classes de morphismes que nous aurons à considérer ("génériquement") seront supposées saturées par isomorphismes.

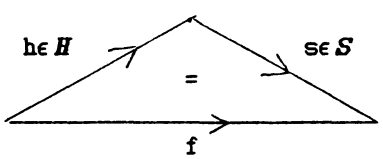
0.2. SYSTEMES DE FACTORISATION.

0.2.1. Définition des systèmes de factorisation.

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}$ deux classes de morphismes d'une catégorie C .

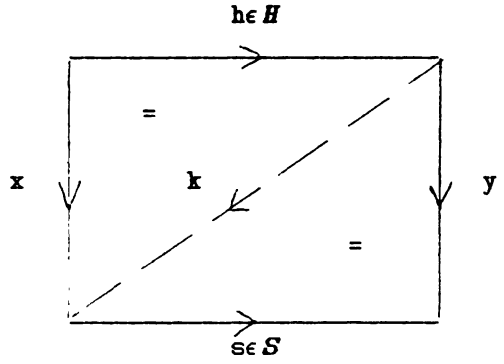
On dit que $\langle \mathcal{H}, \mathcal{S} \rangle$ est un *système de factorisation* de C si, et seulement si:

(i) tout morphisme f de C peut se décomposer en un élément h de $\mathcal{H}$ suivi d'un élément s de $\mathcal{S}$:



(ii) $\mathcal{H} \cap \mathcal{S}$ = Iso ,

(iii) (propriété du "diagonal fill-in") pour tout carré commutatif (y,h,s,x) de C , où $h \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathcal{S}$, il existe un unique morphisme k vérifiant s.k = y et k.h = x , i. e. rendant commutatif le diagramme:



0.2.2. **Propriétés générales des sytèmes de factorisation.**

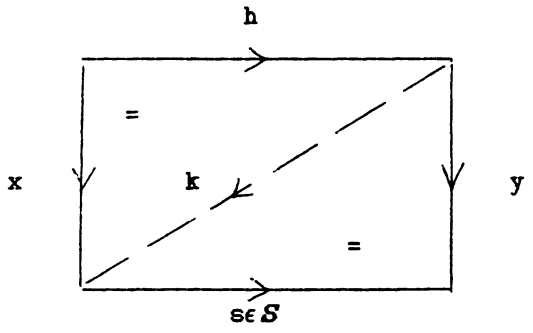
Soit $\langle \mathcal{H}, \mathcal{S} \rangle$ un système de factorisation de la catégorie C .

Il est aisé d'établir les propriétés qui suivent.

Proposition 0. *Les classes* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{S}$ *contiennent la classe* $\{Id_C / C \in Ob\}$.
(Propriété bien évidente, vu la condition (ii), mais souvent utilisée.)

Proposition 1. *La décomposition d'un morphisme quelconque en un élément de* $\mathcal{H}$ *suivi d'un élément de* $\mathcal{S}$ *est unique à isomorphisme près.*
(Vérification classique utilisant l'unicité imposée par la propriété de "diagonal fill-in".)

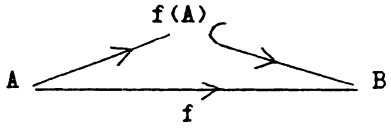
Proposition 2. *La classe* $\mathcal{H}$ *est entièrement déterminée par la classe* $\mathcal{S}$ *(et vice versa) par:*
- $\mathcal{H}$ *est la classe de tous les morphismes* h *pour lesquels tout carré commutatif* (y,h,s,x) *tel que* $s \in \mathcal{S}$ *possède une unique "diagonale"* k *rendant commutatif le diagramme:*



Proposition 3. *On a* $H.H = H$ *et* $S.S = S$.
(Ceci se déduit des propositions 0 et 2.)

0.2.3. **Exemple.**

Dans la catégorie Ens des ensembles, <Epi,Mono> est un système de factorisation.
En effet, les épimorphismes sont les surjections et les monomorphismes sont les injections. Alors, la décomposition d'une application $f:A\to B$ est la décomposition canonique:



0.2.4. **Remarque.**

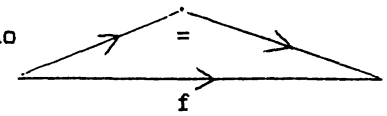
Cette notion de système de factorisation, qui n'est pas la seule existante, n'impose ni $H \subset$ Epi , ni $S \subset$ Mono .
Cependant, en pratique (notamment dans tous les exemples de 2.4.1.) ceci est "toujours" vrai.

0.3. CLASSES REMARQUABLES D'EPIMORPHISMES ET DE MONOMORPHISMES.

Dans tout ce 0.3. , C désigne une catégorie quelconque.

0.3.1. **Les épimorphismes clos.**

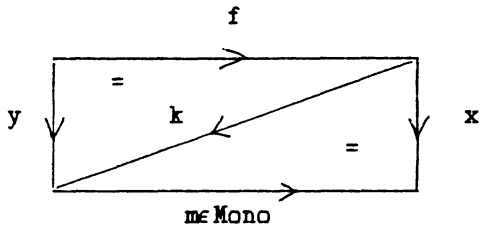
On dit que f est un *épimorphisme clos* si, et seulement si:
- f est un épimorphisme ,
- lorsque f peut se décomposer en un h , à la fois épimorphisme et monomorphisme, suivi d'un morphisme quelconque, alors h est nécessairement un isomorphisme, i. e. :

$h \in \text{Epi} \cap \text{Mono}$  $\Rightarrow$ $h \in \text{Iso}$

On note H_c la classe des épimorphismes clos.

0.3.2. Les épimorphismes forts.

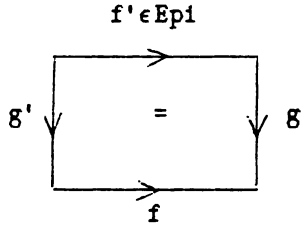
On dit que f est un *épimorphisme fort* si, et seulement si:
- f est un épimorphisme,
- pour tout monomorphisme m , pour tout carré commutatif (x,f,m,y) , il existe un unique morphisme k vérifiant m.k = x et k.f = y :



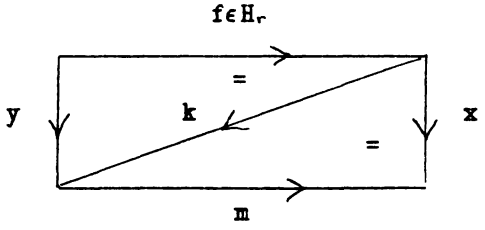
On note H_s (avec s comme "strong") la classe des épimorphismes forts.
Ainsi, on remarque que H_s est définie en imposant que le couple de classes $(H_s, Mono)$ vérifie la propriété du "diagonal fill-in" (mais, pour autant, $\langle H_s, Mono\rangle$ n'est pas, en général, un système de factorisation).

0.3.3. Epimorphismes relatifs et monomorphismes relatifs.

On dit que f est un *épimorphisme relatif* si, et seulement si:
- f est un épimorphisme,
- pour tout morphisme g vérifiant codom(g) = codom(f) , il existe des morphismes f' et g' tels que f' soit un épimorphisme et f.g' = g.f' :



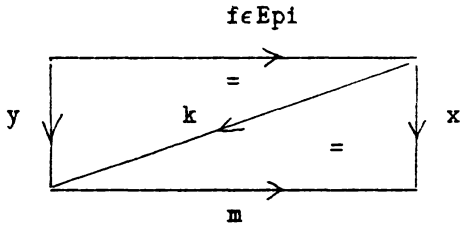
On note H_r la classe des épimorphismes relatifs.
On dit que m est un *monomorphisme relatif* si, et seulement si:
- m est un monomorphisme,
- pour tout épimorphisme relatif f et pour tout carré commutatif (x,f,m,y) , il existe un unique morphisme k vérifiant m.k = x et k.f = y :



On note S_r la classe des monomorphismes relatifs.
Ainsi, S_r est définie en imposant que le couple de classes (H_r, S_r) vérifie la propriété du "diagonal fill-in" (mais, pour autant, $\langle H_r, S_r\rangle$ n'est pas, en général, un système de factorisation).

0.3.4. Les monomorphismes forts.

On dit que m est un *monomorphisme fort* si, et seulement si:
- m est un monomorphisme,
- pour tout épimorphisme f et pour tout carré commutatif (x,f,m,y), il existe un unique morphisme k vérifiant $m.k = x$ et $k.f = y$:

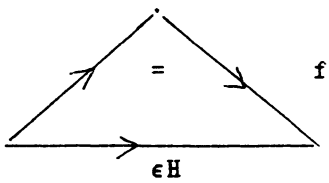


On note S_s (avec s comme "strong") la classe des monomorphismes forts.
Comme précédemment, on remarque qu'elle est définie en imposant que le couple de classes (Epi, S_s) vérifie la propriété du "diagonal fill-in" (mais, pour autant, $\langle Epi, S_s\rangle$ n'est pas, en général, un système de factorisation).

0.3.5. Quelques propriétés de ces classes remarquables.

Si C est une catégorie telle que les couples $\langle H_s, Mono\rangle$, $\langle H_r, S_r\rangle$ et $\langle Epi, S_s\rangle$ sont des systèmes de factorisation (ils vérifient de toute manière la propriété de "diagonal fill-in"), alors on prouve que:

(i) si $\mathcal{H}$ est une classe d'épimorphismes, tout $H \in \{Iso, H_c, H_s, H_r, Epi\}$ vérifie la condition (DIAG) suivante:
+ pour tout morphisme $h \in \mathcal{H}$ et pour tout morphisme f, si $f.h \in H$, alors $f \in H$ (ce qu'on peut écrire schématiquement par:

(DIAG) $\quad \in \mathcal{H} \quad$  $\quad f \quad \Rightarrow \quad f \in H \quad)$

(ii) on a $Iso \subset H_c \subset H_s \subset H_r \subset Epi$ et $Mono \supset S_r \supset S_s \supset Iso$.

Notons que les hypothèses précédentes peuvent être redondantes (ainsi, par exemple, l'inclusion $H_r \subset Epi$ est valable dans toute catégorie C ; de même, la condition (DIAG) est vérifiée dans toute catégorie C , dès que $H = Epi$, la classe H de morphismes pouvant être alors quelconque).

0.4. GENERATION.

Dans tout ce 0.4. , on désigne par C une catégorie quelconque.

0.4.1. Catégorie de décomposition.

Soit X une classe de morphismes de C et $e:E\to E'$ un morphisme de C .

On note $Dec_X(e)$ (ou plus simplement $Dec(e)$, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté sur la classe X) la *catégorie de* (ou *des*) *décomposition*(*s*) de e , i. e. la catégorie telle que:
- ses **objets** sont, d'une part $dom(e)$ et d'autre part les couples $(y:C\to E', x:E\to C)$ de flèches de C telles que $y.x = e$,
- ses flèches sont les $((y,x),x):dom(e)\to(y,x)$.

Alors, on dispose d'un foncteur canonique:

$$\begin{aligned} dec_X(e):\ Dec_X(e) &\to C \\ (y,x) &\to C = dom(y) = codom(x) \\ ((y,x),x) &\to x \end{aligned}$$

(foncteur que l'on notera plus simplement $dec(e)$, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté sur X).

0.4.2. Sous-classe dom-engendrant une classe d'épimorphismes.

Soit X' une classe d'épimorphismes de C et X une sous-classe de X' .

On dit que X dom-*engendre* X' si, et seulement si:
- pour tout morphisme $e:E\to E'$ appartenant à X' , l'objet E' est limite inductive (c'est-à-dire somme fibrée) du foncteur canonique $dec_X(e): Dec_X(e)\to C$ avec $(v_{\langle y,x\rangle} = y)_{\langle y,x\rangle\in Ob\ Dec(e)}$ pour famille de coprojections.

---

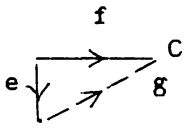
1. LE THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE.

1.1. VALIDATION.

1.1.1. Validation d'un épimorphisme.

Soit e un épimorphisme de **C** .

On dit qu'un objet de **C** *valide* e si, et seulement si:
- pour tout morphisme f: dom(e)→C de **C** , il existe un morphisme g: codom(e)→C de **C** tel que g.e = f , i. e. rendant commutatif le diagramme:



(un tel g , s'il existe, est évidemment unique, puisque e est un épimorphisme).

On note alors: C |= e.

1.1.2. Modèles.

Soit $\mathcal{E}$ une classe d'épimorphismes de **C** .

On dit qu'un objet C de **C** *valide* $\mathcal{E}$ ou *est un modèle de* $\mathcal{E}$ si, et seulement si:
- C valide tout e ∈ $\mathcal{E}$.

On note alors Mod($\mathcal{E}$) la classe de tous les modèles de $\mathcal{E}$.

1.1.3. Exemples (où l'on voit apparaître des formules...).

On prend pour **C** la catégorie **Ab** des (petits) groupes abéliens: les épimorphismes y sont exactement les homomorphismes surjectifs.

Un groupe abélien G valide l'homomorphisme "passage au quotient":

$$e_1 : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

si, et seulement si, il valide (au sens usuel) l'équation 2x = 0 (i. e. si, et seulement si, tous ses éléments non nuls sont d'ordre 2).

De même, un groupe abélien G valide l'homomorphisme canonique (induit par l'inclusion de $4\mathbb{Z}$ dans $2\mathbb{Z}$) :

$$e_2 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq [(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})]$$

si, et seulement si, il valide l'implication $4x = 0 \Rightarrow 2x = 0$ (i. e. si, et seulement si, aucun de ses éléments n'est d'ordre 4).

Plus généralement encore, G valide l'homomorphisme canonique (induit par l'inclusion de $\{ 4x_i-6x_{i+2} / i\in\mathbb{N} \}$ dans $\{ 2x_i-3x_{i+2} / i\in\mathbb{N} \}$):

$$e_{\mathcal{G}}: \mathbb{Z}^{(\{x_i/i\in\mathbb{N}\})} / \bigwedge_{i\in\mathbb{N}}(4x_i=6x_{i+2}) \to \mathbb{Z}^{(\{x_i/i\in\mathbb{N}\})} / \bigwedge_{i\in\mathbb{N}}(2x_i=3x_{i+2})$$

$$\simeq$$

$$(\mathbb{Z}^{(\{x_i/i\in\mathbb{N}\})} / \bigwedge_{i\in\mathbb{N}}(4x_i=6x_{i+2})) / \bigwedge_{i\in\mathbb{N}}(2x_i=3x_{i+2})$$

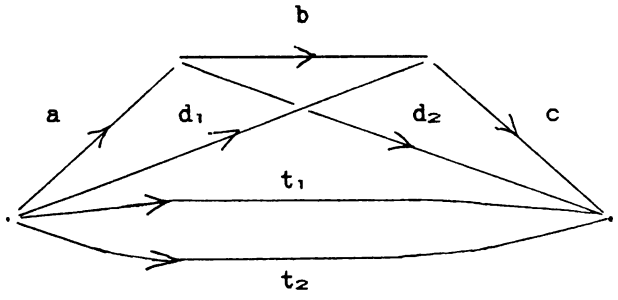
(où, si E est un ensemble, $\mathbb{Z}^{(E)}$ désigne le groupe abélien libre engendré par E)

si, et seulement si, G valide l'implication $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}}(4x_i=6x_{i+2}) \Rightarrow \bigwedge_{i\in\mathbb{N}}(2x_i=3x_{i+2})$.

1.1.4. **Exemple (où l'on continue à voir apparaître des formules).**

On prend pour C la catégorie des (petites) catégories non (nécessairement) associatives (i. e. où l'on ne requiert pas l'axiome d'associativité). Les homomorphismes (i. e. les foncteurs) surjectifs en sont des épimorphismes (mais la réciproque est fausse).

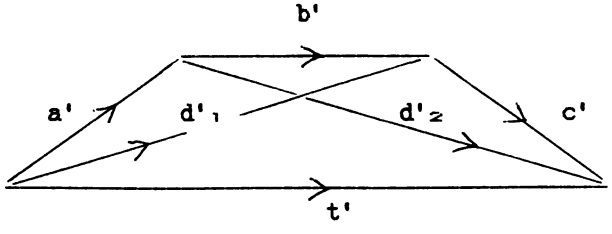
Soit E la catégorie non associative:



où:

$$d_1=b.a$$
$$d_2=c.b$$
$$t_1=c.d_1=c.(b.a)$$
$$t_2=d_2.a=(c.b).a$$

et soit E' la catégorie non associative (mais il se trouve que c'est une "vraie" catégorie!):



où:

$$d'_1 = b'.a'$$
$$d'_2 = c'.b'$$
$$t' = c'.d'_1 = c'.(b'.a')$$
$$t' = d'_2.a' = (c'.b').a'.$$

Un foncteur de **E** vers une catégorie non associative **A** s'identifie à la donnée d'un quelconque triplet (f,g,h) de morphismes consécutifs de **A** et un foncteur de **E'** vers **A** s'identifie à la donnée d'un tel triplet, mais vérifiant (h.g).f=h.(g.f).
Dans ces conditions, une catégorie non (nécessairement) associative **A** valide le foncteur "passage au quotient":

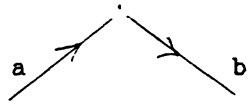
$$e: E \to E' = E/((z.y).x = z.(y.x))$$

si, et seulement si, c'est une "vraie" catégorie.

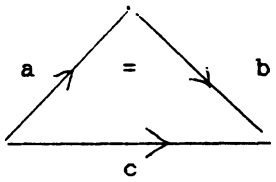
1.1.5. **Exemple (où l'on voit apparaître des formules un peu particulières).**

On prend pour **C** la catégorie des (petits) graphes multiplicatifs. Rappelons que la structure de graphe multiplicatif est un peu plus faible que celle de catégorie: on n'y requiert ni l'associativité de la composition, ni que deux flèches consécutives soient nécessairement composables. Les homomorphismes (i. e. les foncteurs) surjectifs y sont des épimorphismes (mais la réciproque est fausse).

Soit **E** le graphe multiplicatif:



et soit **E'** le graphe multiplicatif (mais il se trouve que c'est une catégorie!):



où c=b.a .

Un graphe multiplicatif **A** validera l'épimorphisme "passage au quotient":

$$e: E \to E' = E/(\mathrm{dom}(y)=\mathrm{codom}(x) \Rightarrow \exists! y.x)$$

(où $\exists!\ y.x$ signifie "le composé $y.x$ est défini")

si, et seulement si, **A** est, en fait, une catégorie non (nécessairement) associative (voir 1.1.5.).

1.2. PROPRIETES DE LA CLASSE Mod(*E*).

Dans tout ce 1.2., *E* désigne une classe d'épimorphismes de C.

1.2.1. **Propriété 1.** *Si* *E* *est une classe d'épimorphismes de la catégorie* C , *alors la classe* Mod(*E*) *est stable par (petits) produits.*

Preuve. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de C , indexée par un ensemble I et telle que tous les C_i valident *E* et admettent un produit C ayant pour famille de projections $(p_i:C\to C_i)_{i\in I}$.

Soit $e\in E$ et prouvons qu'alors C valide e .

Soit $f: E\to C$. Pour tout $i\in I$, comme C_i valide e , il existe g_i tel que $g_i.e=p_i.f$ .Le morphisme g , défini par:

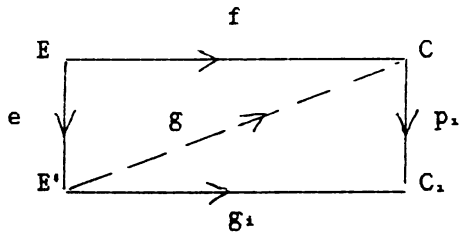
$$\forall i\in I \quad p_i.g=g_i$$

vérifie alors:

$$g.e=f$$

car:

$$\forall i\in I \quad p_i.g.e=g_i.e=p_i.f \ .$$



Ainsi C valide e . **Fin de la preuve.**

On résume la propriété 1 précédente en écrivant symboliquement:

$$P\ \mathrm{Mod}(E) \subset \mathrm{Mod}(E).$$

1.2.2. **Propriété 2.** *Si* *E* *est une classe d'épimorphismes de la catégorie* C , *si* $\langle H,S\rangle$ *est un système de factorisation de* C *et si* $E\subset H$, *alors la classe*

Mod(E) est stable sous l'action de S , i. e., dès que s:C→C' *appartient à S et* C'∈Mod(E) , *on a* C∈Mod(E).

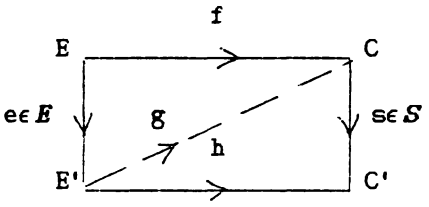
Preuve. Soit un tel s∈S , soit e∈E et prouvons qu'alors C valide e .

Soit f:E→C . Comme C' valide e , il existe h tel que:

$$s.f = h.e .$$

Puisque $E \subset H$, la propriété du "diagonal fill-in" assure l'existence d'un morphisme g vérifiant:

$$g.e=f \text{ (et } s.g=h \text{).}$$



Ainsi, C valide e . **Fin de la preuve.**

On résume la propriété 2 précédente en écrivant:

$$S\,\mathrm{Mod}(E) \subset \mathrm{Mod}(E).$$

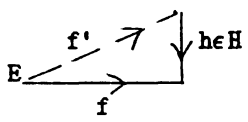
1.2.3. **Objets H-projectifs.**

La propriété 3 qui suit (en 1.2.4.) fait intervenir la notion d'objet H-projectif qu'il convient donc de rappeler.

Désignons par H une classe d'épimorphismes de C .

On dit qu'alors un objet E de C est H-*projectif* si, et seulement si:

- pour tout morphisme h appartenant à H et pour tout morphisme f:E→codom(h), il existe un morphisme f':E→dom(h) vérifiant h.f'=f , i. e. rendant commutatif le diagramme:



Un tel morphisme f' n'est pas, en général, unique, ce dont on peut se convaincre facilement grâce à l'exemple suivant: dans la catégorie Ens des ensembles, choisissons pour classe H la classe de tous les épimorphismes (i. e. de toutes les surjections), alors tout objet de Ens est H-projectif ... en vertu de l'axiome du choix ... qui permet donc de choisir f' parmi plusieurs (en général).

On note H-proj la classe des objets H-projectifs de la catégorie C .

1.2.4. **Propriété 3.** *Si* $\mathcal{E}$ *et* H *sont des classes d'épimorphismes de la catégorie* C , *si* Dom($\mathcal{E}$) $\subset$ H-proj *(i. e. si le domaine de tout* $e \in \mathcal{E}$ *est un objet* H-*projectif de* C *), alors la classe* Mod($\mathcal{E}$) *est stable sous l'action de* H , *i. e., dès que* $h: C \to C'$ *appartient à* H *et* $C \in$ Mod($\mathcal{E}$) , *on a* $C' \in$ Mod($\mathcal{E}$).

Preuve. Soit un tel $h \in H$, soit $e \in \mathcal{E}$ et prouvons qu'alors C' valide e .

Soit $f: E \to C'$. E étant H-projectif, f se relève en un f' tel que:

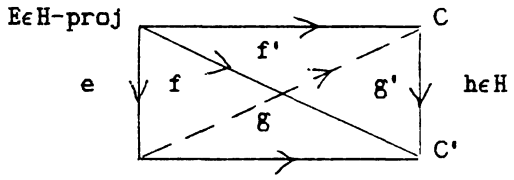
$$h.f' = f .$$

Comme C valide e , il existe un morphisme g' vérifiant:

$$g'.e = f'.$$

Le morphisme $g = h.g'$ vérifie alors:

$$g.e = h.g'.e = h.f' = f .$$



Ainsi, C' valide e . **Fin de la preuve.**

On résume la propriété 3 précédente en écrivant:

$$H \text{ Mod}(\mathcal{E}) \subset \text{Mod}(\mathcal{E}).$$

1.2.5. **Propriété fondamentale de** Mod($\mathcal{E}$).

En regroupant les hypothèses et les conclusions des trois propriétés précédentes et en remarquant que:
- Mod($\mathcal{E}$) $\subset$ P Mod($\mathcal{E}$),
- Mod($\mathcal{E}$) $\subset \mathcal{S}$ Mod($\mathcal{E}$) (car $\mathcal{S} \supset$ Iso $\supset \{Id_C / C \in Ob\ C\}$ si $\langle \mathcal{H}, \mathcal{S} \rangle$ est un système de factorisation),
- Mod($\mathcal{E}$) $\subset$ H Mod($\mathcal{E}$) , si $H \supset$ Iso ,

nous obtenons la proposition qui suit.

Proposition. *Si* $\langle \mathcal{H}, \mathcal{S} \rangle$ *est un système de factorisation de la catégorie* C , *si* $\mathcal{E}$ *est une classe d' épimorphismes de* C , *incluse dans* $\mathcal{H}$, *et si* H *est une classe d'épimorphismes de* C *telle que* Dom($\mathcal{E}$) $\subset$ H-proj , *alors la classe* Mod($\mathcal{E}$) *est stable sous l'action de* H $\mathcal{S}$ P , *i. e. on a:*

$$H\ \mathcal{S}\ P\ \text{Mod}(\mathcal{E}) \subset \text{Mod}(\mathcal{E})$$

et donc:

$$H\ \mathcal{S}\ P\ \mathrm{Mod}(\mathcal{E}) = \mathrm{Mod}(\mathcal{E}).$$

1.3. BONNES CATEGORIES ET EXTENSIONS LIBRES.

On désigne toujours par C une catégorie.

1.3.1. Catégories à peu d'objets quotients.

Si $\mathcal{H}$ est une classe de morphismes de C, on dit que C *est à peu de* $\mathcal{H}$*-objets quotients* si, et seulement si:
- pour tout objet C de C, la classe des morphismes appartenant à $\mathcal{H}$ et de domaine C, considérés à isomorphisme près, est un ensemble.

Cette condition sera, dans la pratique (i. e. dans les exemples que nous avons en vue), vérifiée pour toute catégorie algébrique C dès que l'on aura choisi $\mathcal{H} \subset \mathrm{Epi}$.
Ce qui "justifie" la terminologie d' "objets quotients" adoptée ici. Cependant, dans d'autres cas, il serait préférable de la remplacer par "codomaines".

1.3.2. Catégories ayant suffisamment d'objets projectifs.

Si H est une classe d'épimorphismes de C, on dit que C *a suffisamment d'objets* H*-projectifs* si, et seulement si:
- pour tout objet C de C, il existe un objet H-projectif (voir 1.2.3.) X de C et un morphisme $h: X \to C$ appartenant à H.

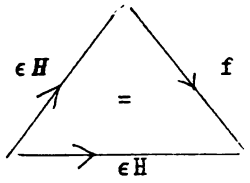
Intuitivement, dans une catégorie algébrique, cette condition signifie que tout objet peut être présenté comme un certain quotient d'une structure libre.

1.3.3. Bonnes catégories.

On dit que $(C, H, \langle \mathcal{H}, \mathcal{S} \rangle)$ est une *bonne catégorie* (ou, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, que c'est simplement C qui est une bonne catégorie) si, et seulement si:
- $H \supset \mathrm{Iso}$ est une classe d'épimorphismes de C,

- $\mathcal{H} \subset$ Epi,
- $\langle \mathcal{H}, \mathcal{S} \rangle$ est un système de factorisation de $\mathbf{C}$,
- $\mathbf{C}$ est à (petits) produits,
- $\mathbf{C}$ est à peu de $\mathcal{H}$-objets quotients,
- $\mathbf{C}$ a suffisamment d'objets H-projectifs,
- la condition (DIAG) suivante est vérifiée:
  + pour tout morphisme h appartenant à $\mathcal{H}$ et pour tout morphisme f , si $f.h \in H$ alors $f \in H$ (ce qu'on peut écrire schématiquement par:

(DIAG)



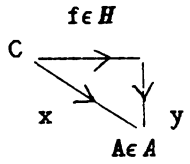
$\Rightarrow \quad f \in H$).

1.3.4. **Extensions libres.**

Soient $\mathcal{H}$ une classe de morphismes de $\mathbf{C}$, $\mathcal{A}$ une classe d'objets de $\mathbf{C}$ et C un objet de $\mathbf{C}$.

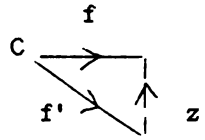
On dit qu'un morphisme f de $\mathbf{C}$ est *$\mathcal{H}$-extension libre de C relative à $\mathcal{A}$* si, et seulement si:

(i) $f \in \mathcal{H}$, $\mathrm{dom}(f)=C$ et, pour tout morphisme $x: C \to A \in \mathcal{A}$ de $\mathbf{C}$, il existe un morphisme y tel que $y.f=x$, i. e. rendant commutatif le diagramme:



(notons que y est unique si $\mathcal{H} \subset$ Epi),

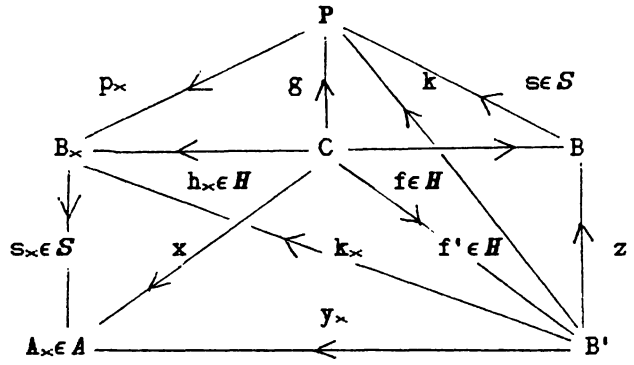
(ii) pour tout morphisme f' de $\mathbf{C}$ vérifiant la propriété (i), il existe un unique morphisme z tel que $f=z.f'$, i. e. rendant commutatif le diagramme:



Alors, on note $f=fr_{\mathbf{C}}{}^{\mathcal{H}}\ \mathcal{A}$ et $\mathrm{codom}(f)=Fr_{\mathbf{C}}{}^{\mathcal{H}}\ \mathcal{A}$ (bien entendu, la propriété universelle précédente assure que f est unique à isomorphisme près, dès qu'elle existe).

1.3.5. **Proposition (existence d'extensions libres dans une bonne catégorie).** *Si* $\mathbf{C}$ *est une bonne catégorie et si* A *est une classe d'objets de* $\mathbf{C}$, *alors tout objet* C *de* $\mathbf{C}$ *engendre une* H*-extension libre* $f=fr_C{}^{H}A$ *dont le codomaine* $Fr_C{}^{H}A$ *est élément de* SPA.

Preuve. Pour tout $x:C\to A_\varkappa\in A$, on choisit "la" décomposition $x=s_\varkappa.h_\varkappa$, où $s_\varkappa\in S$ et $h_\varkappa\in H$ et on pose $\mathrm{codom}(h_\varkappa)=B_\varkappa$.
Notant X la classe des x considérés ci-dessus, on désigne par X' la classe quotient X/R, où R est définie par:
- $x\ R\ u$ si, et seulement si, il existe $\omega\in Iso$ tel que $h_\varkappa=\omega.h_\mu$.
La catégorie $\mathbf{C}$ étant à peu de H-objets quotients, la classe X' est un ensemble et on considère "le" produit $P=\prod_{\varkappa\in X'}B_\varkappa$ et la famille $(p_\varkappa)_{\varkappa\in X'}$ de projections associée.



On désigne par g l'unique morphisme tel que:

$$\forall x\in X'\quad p_\varkappa.g=h_\varkappa\ .$$

On décompose g en $g=s.f$, avec $s\in S$ et $f\in H$.

Prouvons, maintenant, que $f=fr_C{}^{H}A$.

Pour ce faire, soit d'abord $x:C\to A_\varkappa$ un morphisme tel que $A_\varkappa\in A$. On cherche alors un morphisme $y:B\to A_\varkappa$ (où l'on a posé $\mathrm{codom}(f)=B$) vérifiant $y.f=x$ (pour simplifier, on suppose que x est le représentant de sa classe, choisi pour construire le produit P); comme $x\in X'$, le morphisme $y=s_\varkappa.p_\varkappa.s$ convient bien puisque:

$$s_\varkappa.p_\varkappa.s.f=s_\varkappa.p_\varkappa.g=s_\varkappa.h_\varkappa=x\ .$$

Ainsi, f vérifie la condition (i) de 1.3.4.
Supposons, maintenant, qu'un morphisme $f':C\to B'$, élément de H, vérifie aussi cette condition (i) et prouvons qu'il existe alors un $z:B'\to B$ tel que $z.f'=f$ (f' étant un épimorphisme, z sera nécessairement unique). Or, tout x de X se factorise par f' : il existe donc un $y_\varkappa$ vérifiant $y_\varkappa.f'=x$. Comme $y_\varkappa.f'=s_\varkappa.h_\varkappa$, la propriété du "diagonal fill-in" assure l'existence d'un morphisme $k_\varkappa$ tel que $s_\varkappa.k_\varkappa=y_\varkappa$ et $k_\varkappa.f'=h_\varkappa$. Considérons, maintenant, l'unique morphisme k vérifiant:

$$\forall x\in X'\quad p_\varkappa.k=k_\varkappa.$$

L'égalité $k.f'=s.f$, due au fait que:

$$\forall x \in X' \quad p_x.k.f' = k_x.f' = h_x = p_x.g = p_x.s.f \ ,$$

permet d'utiliser la propriété du "diagonal fill-in": il existe un unique morphisme $z: B' \to B$ vérifiant $s.z = k$ et $z.f' = f$.
Ce z convient donc. **Fin de la preuve.**

Remarquons que l'idée de base de cette preuve est tout à fait analogue à celle de la preuve du théorème d'existence de structures libres de C. Ehresmann ou de P. Freyd.

1.4. BONNES CLASSES D'EPIMORPHISMES DANS UNE BONNE CATEGORIE.

La classe d'épimorphismes intervenant dans le théorème de Birkhoff catégorique doit vérifier de "bonnes" propriétés que nous introduisons ici.

Maintenant, $(C, H, \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{S} \rangle)$ désigne une bonne catégorie.

1.4.1. La bonne classe canonique d'épimorphismes.

On appelle *bonne classe canonique d'épimorphismes* de la bonne catégorie C la classe:

$$\boldsymbol{E}'_{HS} = \{e: E \to E' \ / \ e \in \boldsymbol{H} \text{ et } E \in H\text{-proj}\}.$$

Rappelons que $\boldsymbol{H}$ est déterminé de manière unique en fonction de $\boldsymbol{S}$ et réciproquement: ainsi, la notation utilisée ne prête pas à confusion.

La proposition de 1.2.5. assure alors que toute partie $\boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{E}'_{HS}$ vérifie:

$$H\ \boldsymbol{S}\ P\ Mod(\boldsymbol{E}) = Mod(\boldsymbol{E}).$$

1.4.2. Bonnes classes primitives d'épimorphismes.

On dit que $\boldsymbol{E}_{HS}$ est *une bonne classe primitive d'épimorphismes* de la bonne catégorie C si, et seulement si:
- $\boldsymbol{E}_{HS} \subset \boldsymbol{E}'_{HS}$,
- $\boldsymbol{E}_{HS}$ dom-engendre (voir 0.4.2.) $\boldsymbol{E}'_{HS}$.

Notons que, s'il n'y a qu'*une* bonne classe canonique d'épimorphismes (c'est bien pourquoi nous l'avons qualifiée de canonique!), il peut y avoir *plusieurs* bonnes classes primitives d'épimorphismes (et $\mathcal{E}'_{Hs}$ en est toujours une !).

1.4.3. **Exemple.**

Reprenons l'exemple de 1.1.3. .

Dans la catégorie $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$ des (petits) groupes abéliens, on considère l'homomorphisme e_3 .

Alors, la famille d'homomorphismes surjectifs (donc d'épimorphismes) "passages aux quotients":

$$(h_i : \mathrm{dom}(e_3) \to (\mathrm{dom}(e_3)) \;/\; (2x_i = 3x_{i+2})_{i\in\mathbb{N}}$$

dom-engendre e_3.

En d'autres termes, un groupe abélien G valide e_3 si, et seulement si, il valide tous les h_i . Ce que l'on peut encore écrire:

$$G \models (\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (4x_i = 6x_{i+2})) \Rightarrow (\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (2x_i = 3x_{i+2}))$$

si, et seulement si:

$$G \models (\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (4x_i = 6x_{i+2})) \Rightarrow (2x_i = 3x_{i+2})$$

pour tout $i\in\mathbb{N}$.

1.4.4. **Proposition.** *Si $\mathcal{E}_{Hs}$ est une bonne classe primitive d'épimorphismes de la bonne catégorie $\mathbf{C}$, alors, pour tout $e'\in\mathcal{E}'_{Hs}$ et pour tout objet A de $\mathbf{C}$, on a:*

- $A \models e'$ si, et seulement si, pour tout $(u_i,e_i)\in\mathrm{Ob}\ \mathrm{Dec}(e')$, $A \models e_i$.

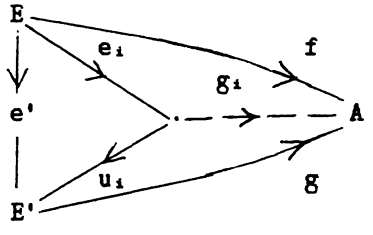
Preuve. Cette propriété est une banale transcription de la définition d'une somme fibrée.

Supposons d'abord que A valide e' et prouvons qu'il valide e_i , lorsque $(u_i,e_i)\in\mathrm{Ob}\ \mathrm{Dec}(e')$.

Soit $f:E\to A$. Il existe alors $g:E'\to A$ vérifiant $g.e'=f$. Définissant g_i par $g_i=g.u_i$, nous avons:

$$g_i.e_i = g.u_i.e_i = g.e' = f \ .$$

Ainsi, A valide e_i .



Réciproquement, supposons que A valide e_i pour tout $(u_i,e_i)\in Ob\ Dec(e')$ et prouvons que A valide e' .Soit $f:E\to A$.
Pour tout i , il existe $g_i:codom(e_i)\to A$ vérifiant $g_i.e_i=f$. Les composés $g_i.e_i$ étant indépendants du i choisi, la famille $(g_i)_{i...}$ détermine un unique $g:E\to A$ tel que:

$$\forall i\ g.u_i=g_i\ .$$

On a alors:

$$g.e'=g.u_i.e_i=g_i.e_i=f\ .$$

Ainsi, A valide e' . **Fin de la preuve.**

1.5. LE THEOREME DE BIRKHOFF DANS UNE BONNE CATEGORIE.

1.5.1. Enoncé du théorème de Birkhoff catégorique.

Si $(C,H,\langle H,S\rangle)$ *est une bonne catégorie, si* $\mathcal{E}_{HS}$ *est une bonne classe primitive d'épimorphismes et si* A *est une classe d'objets de* C , *alors on a:*

$$Mod(\mathcal{E}_{HS}(A)) = H\ S\ P\ A$$

(où l'on désigne par $\mathcal{E}_{HS}(A)$ *la sous-classe de* $\mathcal{E}_{HS}$ *constituée de ceux de ses épimorphismes validés par tout élément de* A , *i. e.:*

$$\mathcal{E}_{HS}(A)=\{\ e\in\mathcal{E}_{HS}\ /\ \forall A\in A\ A\models e\ \}\ ).$$

1.5.2. Preuve du théorème de Birkhoff catégorique.

a). La classe $\mathcal{E}_{HS}(A)$ étant une partie de $\mathcal{E}_{HS}$, donc de la bonne classe canonique d'épimorphismes $\mathcal{E}'_{HS}$, on a:

$$HS\ PMod(\mathcal{E}_{HS}(A))=Mod(\mathcal{E}_{HS}(A)),$$

comme ceci a été vu en 1.4.1. .
D'autre part, par définition, on a

$$A\subset Mod(\mathcal{E}_{HS}(A))\ ,$$

ce qui assure:

$$H\ S\ P\ A\subset H\ S\ P\ Mod(\mathcal{E}_{HS}(A))\ .$$

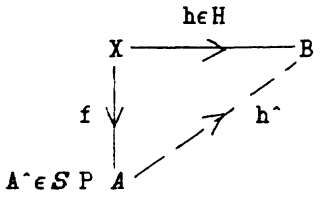
Ainsi, on a:

$$H\mathcal{S}\,P\,\mathcal{A} \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{E}_{H,S}(\mathcal{A}))\ .$$

b). Supposons donc, maintenant, que $B \in \mathrm{Mod}(\mathcal{E}_{H,S}(\mathcal{A}))$ et prouvons alors que $B \in H\mathcal{S}\,P\mathcal{A}$.

$\mathbf{C}$ ayant suffisamment d'objets H-projectifs, désignons par $h: X \to B$ un élément de la classe H dont le domaine X est un objet H-projectif.

La proposition de 1.3.5. assure que X engendre une H-extension libre f , relative à $\mathcal{A}$, dont le codomaine $A\hat{}$ est élément de $\mathcal{S}\,P\mathcal{A}$.



Ainsi, la démonstration sera achevée dès que l'on aura construit un morphisme $h\hat{}: A\hat{} \to B$ vérifiant $h\hat{}.f = h$, puisque la condition (DIAG) assurera alors que $h\hat{} \in H$. Or, pour ce faire, il suffit que B valide f .
Le morphisme f étant, en fait, élément de $\mathcal{E}'_{H,S}$, en notant $\mathrm{Dec}(f) = \{(u_i, e_i) \,/\, i \in I\}$, nous savons que B validera f dès que B validera tous les e_i.

Il nous reste par conséquent à vérifier que B valide e_i , si $i \in I$; ce que nous allons faire (puisque B est un modèle de $\mathcal{E}_{H,S}(\mathcal{A})$) en vérifiant que $e_i \in \mathcal{E}_{H,S}(\mathcal{A})$.

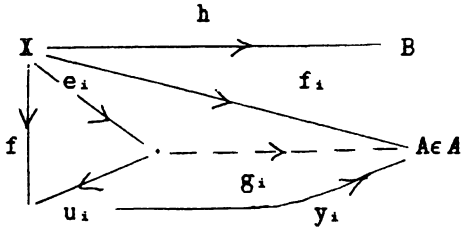
Par définition de $\mathrm{Dec}(f)$, $e_i \in \mathcal{E}_{H,S}$. Soit, maintenant, $A \in \mathcal{A}$ et prouvons que A valide e_i .
Pour ce faire, considérons $f_i: X \to A$ et exhibons un morphisme g_i vérifiant $g_i.e_i = f_i$.
Comme $A \in \mathcal{A}$, f_i se factorise par $f = fr_X{}^{H}\mathcal{A}$: il existe donc un morphisme y_i tel que $y_i.f = f_i$.
Alors, le morphisme g_i , défini par:

$$g_i = y_i.u_i\ ,$$

vérifie:

$$g_i.e_i = y_i.u_i.e_i = y_i.f = f_i.$$

Ainsi, A valide e_i , ce qui assure que $e_i \in \mathcal{E}_{H,S}(\mathcal{A})$.



Fin de la preuve.

2. INTERPRETATION DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE DANS LA CATEGORIE DES ALGEBRES TOTALES, LA CATEGORIE DES ALGEBRES PARTIELLES, LA CATEGORIE DES MODELES.

2.1. DEFINITION DES CATEGORIES T , P , M .

2.1.1. La catégorie T des algèbres totales.

Σ désignant une signature donnée, la catégorie T_Σ , ou plus simplement **T** , est la catégorie des (petites) Σ-algèbres totales, c'est-à-dire que:
- les objets de **T** sont les Σ-algèbres (totales), ayant pour classe sous-jacente un ensemble,
- les morphismes de **T** sont les homomorphismes entre ces Σ-algèbres .

2.1.2. La catégorie P des algèbres partielles.

Soit $\Sigma=\{ u_i / i\in I \}$ une signature. Alors, pour tout $i\in I$, on note $n(i)$ l'arité du symbole fonctionnel u_i .

Rappelons qu'une (petite) Σ-algèbre *partielle* $\mathbf{A}=(A,(A_i)_{i\in I},(\alpha_i)_{i\in I})$ est la donnée:
- d'un ensemble, dit *sous-jacent*, A ,
- pour tout $i\in I$, d'une partie A_i du produit cartésien $A^{n(i)}$, partie appelée *ensemble des* $n(i)$*-uplets d'éléments de* **A** *composables pour* (resp. *par*) u_i (resp. α_i),
- pour tout $i\in I$, d'une application $\alpha_i:A_i\to A$, dite *interprètation de* u_i .

Dans ces conditions, on identifiera, le plus souvent, le symbole u_i avec son interprètation α_i . Ainsi, par exemple, si $(a_1,\ldots,a_{n(i)})$ est composable pour u_i et donc par α_i , on posera $\alpha_i(a_1,\ldots,a_{n(i)})=u_i(a_1,\ldots,a_{n(i)})$.
Dans le même ordre d'idée, on peut facilement généraliser la notion de $n(i)$-uplet $(a_1,\ldots,a_{n(i)})$, composable pour un symbole fonctionnel u_i , en celle de n-*uplet* $(a_1,\ldots,a_n)$ *composable pour un terme* $t\in T_\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ (il suffit de procéder par récurrence sur les sous-termes de t) : son composé sera alors noté $t(a_1,\ldots,a_n)$.

Rappelons, également, qu'un *homomorphisme* de Σ-algèbres partielles $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ est la donnée d'une application (encore notée) $f:A\to B$ qui, pour tout symbole fonctionnel u_i , transforme les uplets composables pour u_i en des uplets composables pour u_i et les composés par α_i en des composés par β_i .

La catégorie P_Σ , ou plus simplement **P** , des (petites) Σ-algèbres partielles a alors:
- pour objets les (petites) Σ-algèbres partielles,
- pour morphismes les homomorphismes entre ces Σ-algèbres partielles.

Ainsi, la catégorie **T** apparaît comme une sous-catégorie pleine de **P** (puisque tout homomorphisme de Σ-algèbres partielles entre deux Σ-algèbres totales est en fait un homomorphisme de Σ-algèbres totales).

2.1.3. La catégorie **M** des modèles.

Soit $L=\{ u_i \ / \ i\in I \}$ un langage (i. e., ici, un ensemble de symboles relationnels). Pour tout $i\in I$, on note $m(i)$ l'arité du symbole relationnel u_i (ainsi, a-t-on $m(i)> 0$).

Rappelons qu'un (petit) *modèle* $A=(A,(A_i)_{i\in I})$ de L est la donnée:
- d'un ensemble, dit *sous-jacent*, A,
- pour tout $i\in I$, d'une partie A_i du produit cartésien $A^{m(i)}$, partie appelée *ensemble des $m(i)$-uplets en relation pour u_i*.

Rappelons aussi qu'un homomorphisme de modèles (de L) $f:A\to B$ est la donnée d'une application (encore notée) $f:A\to B$ qui, pour tout $i\in I$, transforme les uplets en relation pour u_i en des uplets en relation pour u_i.

La catégorie $\mathbf{M}_L$, ou plus simplement $\mathbf{M}$, des petits modèles a alors:
- pour objets les (petits) modèles de L,
- pour morphismes les homomorphismes entre ces modèles.

Ainsi, $\mathbf{P}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\mathbf{M}$, puisque:
- à la signature Σ on peut associer le langage $L=\Sigma$, de sorte que, pour tout $i\in I$, on ait $m(i)=n(i)+1$,
- toute Σ-algèbre partielle A s'identifie au modèle $A\hat{}=(A,(A\hat{}_i)_{i\in I})$, où, pour tout $i\in I$, on a:

$$A\hat{}_i=\{ (a_1,\dots,a_{n(i)+1}) \ / \ (a_1,\dots,a_{n(i)})\in A_i \text{ et } a_{n(i)+1}=u_i(a_1,\dots,a_{n(i)}) \}.$$

Bien entendu, cette sous-catégorie est pleine, puisqu'un homomorphisme de modèles entre deux algèbres partielles est nécessairement un homomorphisme d'algèbres partielles.
Enfin, ce qui vient d'être dit pour la catégorie des algèbres partielles est, a fortiori, valable pour la catégorie des algèbres totales.

2.2. CARACTERISATION DANS **T**, **P**, **M**, DES CLASSES REMARQUABLES DEFINIES EN 0.3.

2.2.1. Caractérisation intrinsèque.

Les tableaux qui suivent indiquent à quelles conditions nécessaires et suffisantes un homomorphisme $f:A\to B$, dans la catégorie $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}$ ou $\mathbf{M}$, est élément des classes remarquables:

$$\mathrm{Iso} \subset H_c \subset H_m \subset H_r \subset \mathrm{Epi}$$

et:

$$\mathrm{Mono} \supset S_r \supset S_m \supset \mathrm{Iso},$$

(nous avons rangé, arbitrairement, la classe Iso dans le premier tableau).

	T	P	M
Iso	f:A→B bijective	f:A→B bijective telle que "tout uplet antécédent d'uplet composable est lui-même composable", i. e.: $\forall u_i \in \Sigma \quad \forall (a_1,\ldots,a_{n(i)}) \in A^{n(i)} \quad ((f(a_1),\ldots f(a_{n(i)})) \in B_i \Rightarrow (a_1,\ldots,a_{n(i)}) \in A_i)$	caractérisation analogue à celle dans P (*)
H_c — H	f:A→B surjective	f:A→B surjective et telle que "tout uplet antécédent d'uplet composable est lui-même composable", i. e.: $\forall u_i \in \Sigma \quad \forall (a_1,\ldots,a_{n(i)}) \in A^{n(i)} \quad ((f(a_1),\ldots,f(a_{n(i)}) \in B_i \Rightarrow (a_1,\ldots,a_{n(i)}) \in A_i)$	caractérisation analogue à celle dans P (*)
H_m	$H_m = H_c$	f:A→B surjective telle que "tout uplet composable admet un uplet antécédent composable", i. e.: $\forall u_i \in \Sigma \quad \forall (b_1,\ldots,b_{n(i)}) \in B_i \quad \exists (a_1,\ldots,a_{n(i)}) \in A_i \quad \forall k \quad (f(a_k)=b_k)$	caractérisation analogue à celle dans P (*)
H_r — H	$H_r=H_m=H_c$	f:A→B surjective	caractérisation analogue à celle dans P
Epi	Epi=H_r=H_m=H_c	Le saturé de la partie f(A) de B est B lui-même, si l'on a saturé f(A) par les composés, existant dans B et "à base dans f(A)", par des termes d'une $T_\Sigma(V)$ quelconque.	f:A→B surjective (donc Epi=H_r)

(*) pour obtenir la caractérisation dans M, reprendre celle dans P de la classe analogue en y remplaçant "uplet composable" par "uplet en relation", la signature Σ par le langage L et n(i) par m(i).

	T	P	M
Mono	f:A→B injective	f:A→B injective	f:A→B injective
S_r — S	S_r=Mono	f:A→B injective telle que "un uplet est composable dès que son uplet image l'est et que le composé est élément de f(A) ", i. e.: $\forall u_i \in \Sigma \quad \forall (a_1,\ldots,a_{m<i>}) \in A^{m<i>}$ $(f(a_1),\ldots,f(a_{m<i>})) \in B_i$ et $u_i(f(a_i),\ldots,f(a_{m<i>})) \in f(A)$ impliquent $(a_1,\ldots,a_{m<i>}) \in A_i$	f:A→B injective telle que "un uplet est en relation dès que son uplet image est en relation", i. e. : $\forall u_i \in L \quad \forall (a_1,\ldots a_{m<i>}) \in A^{m<i>}$ $(f(a_1),\ldots,f(a_{m<i>})) \in B_i$ implique $(a_1,\ldots,a_{m<i>}) \in A_i$
S_m — S	S_m=S_r=Mono	f:A→B injective telle que "un uplet est composable dès que son uplet image l'est", i. e.: $\forall u_i \in \Sigma \quad \forall (a_1,\ldots,a_{m<i>}) \in A^{m<i>}$ $(f(a_1),\ldots,f(a_{m<i>})) \in B_i$ implique $(a_1,\ldots,a_{m<i>}) \in A_i$	$S_m = S_r$

2.2.2. **Exemple.**

Reprenons les exemples de 1.1., notamment celui de 1.1.4 et celui de 1.1.5. (celui de 1.1.3., qui fait intervenir une catégorie d'algèbres totales, étant beaucoup moins intéressant ici).

La catégorie des (petites) catégories non (nécessairement) associatives est une sous-catégorie d'une catégorie d'algèbres partielles **P** (pour laquelle on a $\Sigma=\{dom, codom, comp\}$, où les arités respectives de ces symboles - s'interprètant comme "domaines", "codomaines" , "composition" - sont 1 , 1 , 2).
L'épimorphisme e de 1.1.4. est élément de H_c (donc, a fortiori, de $H_=$, H_r et Epi).

La catégorie des (petits) graphes multiplicatifs est une sous-catégorie de la même catégorie d'algèbres partielles **P** que précédemment.
L'épimorphisme e de 1.1.5. n'est élément ni de H_c , ni de $H_=$, ni de H_r ,...mais il vérifie clairement le critère caractérisant la classe Epi .

2.2.3. **Présentation, en termes de "passages aux quotients", des éléments de $H_=$, H_r , Epi .**

Nous montrons ici comment toute flèche $f:A\to B$ appartenant à $H_=$, H_r ou Epi , dans **T** , **P** ou **M** peut s'interpréter (i. e. se présenter) comme un "passage à un quotient" d'un type précis (i. e. par des "relations" de nature déterminée).

CAS DE LA CATEGORIE **T** .

On y a $H_==H_r=Epi=\{homomorphismes\ surjectifs\}$.
On obtient donc **B** à partir de **A** en identifiant certains de ses éléments; f est alors de la forme:

$$A \to A \,/\, \bigwedge_{i\in I} (a_i=a'_i)$$

(l'ensemble I pouvant être, bien entendu, vide).

CAS DE LA CATEGORIE $\mathcal{P}$.

Rappelons qu'a priori la structure d'algèbre partielle induite par $\mathbf{B}$ sur $f(A)$ est plus riche, i. e. contient davantage de uplets composables, que celle de l'algèbre partielle image $f(A)$.

- Cas de $\mathcal{H}=H_m$.

La caractérisation de H_m assure que, contrairement au cas général rappelé ci-dessus, les deux structures d'algèbres partielles sur l'ensemble $B=f(A)$ sont exactement les mêmes et qu'ainsi on obtient $\mathbf{B}$ à partir de $\mathbf{A}$ en identifiant certains de ses éléments; f est donc de la forme:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} / \bigwedge_{i\in I} (a_i=a'_i)$$

(l'ensemble I pouvant être vide).

- Cas de $\mathcal{H}=H_r$.

Dans ce cas, en revanche, si l'on a encore $B=f(A)$, pour obtenir $\mathbf{B}$ à partir de $\mathbf{A}$, il faut non seulement identifier certains de ses éléments mais aussi imposer à certains uplets de devenir composables (leurs composés étant alors, nécessairement, des éléments déjà existants); ainsi, f est de la forme:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} / \left(\bigwedge_{i\in I} (a_i=a'_i)\right) \bigwedge \left(\bigwedge_{j\in J} \exists!\, t_j(a_{j1},\ldots,a_{jp(j)})\right)$$

(où I et J peuvent être vides, les t_j sont des termes de $T_\Sigma(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$ et $\exists!\, t_j(a_{j1},\ldots,a_{jp(j)})$ signifie "le $p(j)$-uplet $(a_{j1},\ldots,a_{jp(j)})$ est composable pour le terme t_j ")

- Cas de $\mathcal{H}=\mathrm{Epi}$.

Dans ce cas, on n'a plus, a priori, $B=f(A)$. Cependant $\mathbf{B}$ s'obtient à partir de $\mathbf{A}$:

+ en identifiant certains de ses éléments,
+ puis en imposant (puisque le saturé de $f(A)$ doit être $\mathbf{B}$) à certains uplets de devenir composables, leurs composés étant rajoutés formellement,
+ enfin, en imposant (en raison du rappel ci-dessus) à certains uplets de devenir composables, leurs composés étant, cette fois-ci, des éléments déjà existants;

ainsi, f est de la forme:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} / \left(\bigwedge_{i\in I} (a_i=a'_i)\right) \bigwedge \left(\bigwedge_{j\in J} \exists!\, t_j(a_{j1},\ldots,a_{jp(j)})\right)$$

(avec les conventions précédentes, étant entendu que certains des composés dont on impose l'existence peuvent être rajoutés formellement).
Notons que le symbole de "passage au quotient" / est à manier, ici, avec beaucoup de précautions, puisqu'il ne signifie pas que f est nécessairement surjective.

CAS DE LA CATEGORIE M .

Il peut se traiter rapidement, maintenant.
En effet, le (sous-)cas $\mathcal{H}=H_m$ est analogue à celui décrit dans la catégorie P ; on obtient ainsi pour forme générale de f:

$$A \to A \,/ \bigwedge_{i\in I} (a_i = a'_i)$$

De même, le (sous-)cas $\mathcal{H}=H_r=Epi$ est analogue au (sous-)cas $\mathcal{H}=H_r$ décrit dans P ; on obtient, ainsi, pour forme générale de f:

$$A \to A \,/ \left(\bigwedge_{i\in I} (a_i = a'_i)\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\in J} (u_j(a_{j1}, \ldots, a_{jp(j)}))\right)$$

(où I et J peuvent être vides et les u_j sont des symboles relationnels du langage L).

2.3. CARACTERISATION DANS T , P , M DES OBJETS H-PROJECTIFS POUR H = Iso , H_c , H_m , H_r .

2.3.1. Tableau de caractérisation.

Le premier tableau de 2.2.1. permet, comme précédemment, de caractériser les objets H-projectifs de T , P , M pour H = Iso , H_c , H_m , H_r .
Ces caractérisations sont regroupées dans le tableau de la page suivante.

	T	P	M
Iso-proj	Ob(T)	Ob(P)	Ob(M)
H_c-proj	les algèbres de termes $T_\Sigma(V)$ (*) où V ensemble quelconque.	les segments initiaux d'une $T_\Sigma(V)$ quelconque (*), i. e. les sous-algèbres partielles d'une $T_\Sigma(V)$ qui, lorsqu'elles contiennent un terme, en contiennent tous les sous-termes. (*)	Ob(M)
H_m-proj	H_m-proj=H_c-proj	les algèbres A telles que, pour tout $a\in A$, il existe au plus un terme t , au plus un (n+1)-uplet $(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})\in A^{n+1}$, où $a_{n+1}=t(a_1,\ldots,a_n)$ et au plus un $1\leq i\leq n+1$ vérifiant $a_i=a$.	caractérisation analogue à celle dans P: les modèles A tels que, pour tout $a\in A$, il existe au plus un $u_i\in L$, au plus un m(i)-uplet $(a_1,\ldots,a_{m<i>})$ et au plus un $1\leq j\leq m(i)$ vérifiant $a_j=a$.
H_r-proj	H_r-proj=H_m-proj =H_c-proj	les algèbres discrètes (i. e. les algèbres A pour lesquelles, pour tout $u_i\in\Sigma$, $A_i=\emptyset$, i. e. il n'existe pas de uplet composable pour u_i).	caractérisation analogue à celle dans P: les modèles discrets (i. e. les modèles A pour lesquels, pour tout $u_i\in L$, $A_i=\emptyset$).

(*) à isomorphisme près bien entendu

2.3.2. **Présentation des objets H-projectifs de T , P , M (pour H = Iso , H_c , H_m , H_r) comme quotients.**

Dans une catégorie algébrique donnée, donc dans T , P , M , tout objet est déterminé par:
- la donnée d'un ensemble Gén de générateurs (d'une structure libre, relativement à un foncteur qui, dans les trois cas qui nous intéressent, sera le foncteur "ensemble sous-jacent"),
- la donnée d'un ensemble Rel de "relations" entre ces générateurs.

Autrement dit, tout objet se présente (de manière non nécessairement unique ou canonique) comme le "quotient" d'une structure libre par un ensemble de "relations", i. e. sous la forme:

$$\text{Libre(Gén)} \;/\; \text{Rel}.$$

Nous présentons, ici, un objet H-projectif quelconque A de T , P , M (pour H = Iso , H_c , H_m , H_r) sous cette forme.

CAS DE LA CATEGORIE T .

Les structures libres relativement au foncteur "ensemble sous-jacent" sont ici (à isomorphisme près, bien entendu) les algèbres de termes $T_\Sigma(V)$, où V est un ensemble (de "variables") quelconque.
Plus précisément, $T_\Sigma(V) = \text{Libre}(V)$ est "la" structure libre sur l'ensemble V.

- Cas H = Iso .
Dans ce cas, A est une algèbre totale quelconque et peut donc s'écrire sous la forme:

$$\text{Libre}(V) \;/\; \bigwedge_{j\in J} (t_j(x_{j1},\dots,x_{jp(j)}) = t'_j(x'_{j1},\dots,x'_{jp'(j)}))$$

où l'ensemble J peut être vide (et où l'on peut choisir pour ensemble V = Gén de générateurs l'ensemble A , sous-jacent à A , et pour ensemble Rel de relations l'ensemble de toutes les égalités, valides dans A , entre composés, par des termes, d'éléments de A).

- Cas $H = H_c = H_m = H_r$.
Dans ce cas, A est de la forme $T_\Sigma(V)$, i. e. s'écrit:

$$\text{Libre}(V)$$

(c'est dire que, cette fois-ci, on choisit explicitement Gén = V , et non A , pour ensemble de générateurs et Rel = $\emptyset$, i. e. J = $\emptyset$).

CAS DE LA CATEGORIE P .

Les structures libres, relativement au foncteur "ensemble sous-jacent", sont les algèbres discrètes (voir tableau de 2.3.1.) Disc(V) , où V est un ensemble (de "variables") quelconque.
Plus précisément, Disc(V) = Libre(V) est "la" structure libre sur l'ensemble V .

- Cas H = Iso .
Dans ce cas, **A** est une algèbre partielle quelconque et peut donc s'écrire sous la forme:

$$\mathrm{Libre}(V) \;/\; \bigwedge_{j\in J} (t_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})=t'_j(x'_{j1},\ldots,x'_{jp'(j)}))$$

où l'ensemble J peut être vide et où, par convention, une écriture telle que:

$$t(x_1,\ldots x_p)=t'(x'_1,\ldots,x'_{p'})$$

signifie:
$(\exists!\ t(x_1,\ldots,x_p)\ )\quad(\exists!\ t'(x'_1,\ldots,x'_{p'})\ )\quad(\ t(x_1,\ldots,x_p)=t'(x'_1,\ldots,x'_{p'})\ )$

(et l'on peut donc choisir l'ensemble **A** comme ensemble V = Gén de générateurs et l'ensemble de toutes les "composabilités" et égalités entre composés, valides dans **A** , comme ensemble Rel de "relations").

- Cas $H = H_c$.
Dans ce cas, **A** est (à isomorphisme près) un segment initial quelconque d'une algèbre totale quelconque $T_\Sigma(V)$. Si nous notons $(t_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)}))_{j\in J}$ la famille de tous les composés existant dans **A** , il s'écrit donc sous la forme:

$$\mathrm{Libre}(V) \;/\; \bigwedge_{j\in J} \exists!\ t_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$$

où J peut être vide (remarquons que, cette fois-ci, on n'a pas choisi pour ensemble Gén de générateurs l'ensemble **A** , ce qui permet de "simplifier" l'ensemble Rel de "relations" par lesquelles on "quotiente").

- Cas $H = H_m$.
Dans ce cas, **A** est nécessairement H_c-projectif et donc de la forme précédente; d'autre part, vu la caractérisation de H_m-proj , la famille de tous les composés existant dans **A** est du type:

$$(u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})_{j\in J}$$
où $u_j\in\Sigma$, pour tout $j\in J$, et
$x_{ji} \neq x_{kh}$ dès que $(i,j) \neq (h,k)$.

Ainsi, **A** s'écrit sous la forme:

$$\text{Libre}(V) \;/\; \bigwedge_{j\in J} \exists!\; u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$$

où J peut être vide, $u_j \in \Sigma$, pour tout $j\in J$, et où $x_{ji} \neq x_{kh}$, dès que $(i,j) \neq (h,k)$.

- Cas $H = H_r$.
  Alors, **A** est de la forme:

$$\text{Libre}(V).$$

CAS DE LA CATEGORIE M.

Les structures libres relativement au foncteur "ensemble sous-jacent" sont les modèles discrets (voir tableau de 2.3.1.) $\text{Disc}(V)$, où V est un ensemble quelconque (de "variables").
Plus précisément, $\text{Disc}(V) = \text{Libre}(V)$ est "la" structure libre sur l'ensemble V.
Notons qu'un modèle quelconque **A** peut toujours s'écrire sous la forme:

$$\text{Libre}(A) \;/\; \bigwedge_{j\in J} u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$$

où $(u_j(x_{j1},\ldots,u_{jp(j)}))_{j\in J}$ désigne la famille de tous les uplets d'éléments de **A**, en relation par les symboles relationnels du langage L.

- Cas $H = \text{Iso}$ ou H_c (puisque $\text{Iso-proj} = H_c\text{-proj}$, bien que Iso et H_c ne soient pas, généralement, les mêmes).
  Tout objet **A** est H-projectif, i. e. de la forme:

$$\text{Libre}(V) \;/\; \bigwedge_{j\in J} u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$$

(puisque $V = A$ convient).

- Cas $H = H_m$.
  Alors, **A** est de la forme:

$$\text{Libre}(V) \;/\; \bigwedge_{j\in J} u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$$
$$\text{où } x_{ji} \neq x_{kh} \text{ dès que } (i,j)\neq(h,k)$$

(l'ensemble J pouvant être vide).

- Cas $H = H_r$.
  Alors **A** est de la forme:

$$\text{Libre}(V).$$

2.4. STRUCTURES DE BONNES CATEGORIES SUR T , P , M ET BONNES CLASSES D'EPIMORPHISMES ASSOCIEES.

2.4.1. Choix de structures de bonnes catégories sur T , P , M .

Les propriétés des catégories algébriques, en particulier de T , P , M (que l'on peut établir directement, par exemple en utilisant les caractérisations précédentes), assurent que les hypothèses du théorème de Birkhoff catégorique sont vérifiées lorsqu'on choisit (de manière indépendante l'une de l'autre):
- le système de factorisation $\langle H, S\rangle$ dans l'ensemble
$$\{ \langle H_m, \mathrm{Mono}\rangle , \langle H_r, S_r\rangle , \langle \mathrm{Epi}, S_m\rangle \} ,$$
- la classe d'épimorphismes H dans l'ensemble
$$\{ \mathrm{Iso} , H_c , H_m , H_r \} .$$

Ainsi, obtient-on douze choix possibles (non nécessairement distincts) et donc douze versions possibles du théorème de Birkhoff concernant les algèbres totales, les algèbres partielles, les modèles ... et certains types de formules.

Remarquons, pour être tout à fait complet, que la classe H_c n'est pas, en général, sous-jacente à un système de factorisation (sauf, par exemple, dans T , où l'on a $H_c = H_m = H_r = \mathrm{Epi}$).
De même, le système de factorisation $\langle \mathrm{Mor}, \mathrm{Iso}\rangle$ est exclu puisque, d'une part, la bonne catégorie considérée ne doit être qu'à peu de H-objets quotients et, d'autre part, H doit être une classe d'épimorphismes.
Constatons aussi que le système de factorisation $\langle \mathrm{Iso}, \mathrm{Mor}\rangle$ est inintéressant, puisqu'il nous ferait apprendre, par le théorème de Birkhoff catégorique, que ... les isomorphismes sont validés par n'importe quel objet.
Enfin, on exclut la classe d'épimorphismes $H = \mathrm{Epi}$ car la catégorie P n'a généralement pas d'objets Epi-projectifs (et parce que, dans les catégories T et M , on a $\mathrm{Epi} = H_r$).

2.4.2. Caractérisation, dans T , P , M , des bonnes classes canoniques d'épimorphismes et choix de bonnes classes primitives d'épimorphismes.

Pour chacun des douze choix possibles du couple $(H, \langle H, S\rangle)$, dans chacune des catégories T , P , M , nous avons décrit précédemment les objets H-projectifs et les éléments de H . Il est donc facile, mais fastidieux, d'en déduire, dans chaque cas, la caractérisation des éléments de la bonne classe canonique d'épimorphismes E'_{HS} ; nous ne le ferons pas, mais nous remarquerons seulement que les éléments de E'_{HS} ont une présentation (en termes de "passage aux quotients") de la forme:

$$e' : (\mathrm{Libre}(V)/\bigwedge_{j\in J} F_j) \to ((\mathrm{Libre}(V)/\bigwedge_{j\in J} F_j) / \bigwedge_{i\in I} \psi_i)$$

où les F_j (resp. les ψ_i) sont des "relations" , i. e. des formules au sens usuel, d'un certain type disons T_{Hs} (resp. T'_{Hs}), dépendant des choix de H et $\mathcal{S}$ (ou $\mathcal{H}$) et où les ensembles V , J et I sont arbitraires.

On prouve alors que, dans chaque cas, la sous-classe $\mathcal{E}_{Hs}$ de $\mathcal{E}'_{Hs}$, constituée des:

$$e: (\text{Libre}(V)/\bigwedge_{j\in J} F_j) \to ((\text{Libre}(V)/\bigwedge_{j\in J} F_j) / \psi)$$

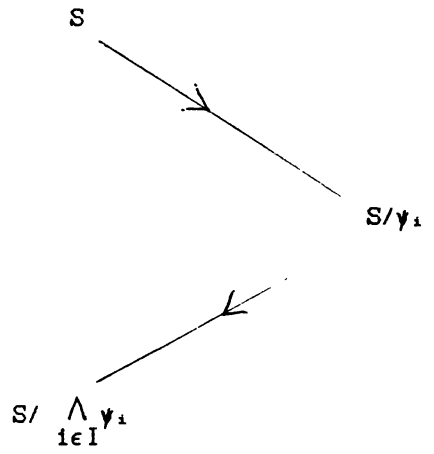
où ψ est une formule arbitraire de type T'_{Hs}
et où V , J et les F_j sont comme précédemment

est une bonne classe primitive d'épimorphismes.

[En effet, notant:

$$S = (\text{Libre}(V) / \bigwedge_{j\in J} F_j)$$

on vérifie aisément que le diagramme:



(où i décrit I et où tous les morphismes sont des passages au quotient ou s'en déduisent canoniquement)

est une somme fibrée: c'est d'ailleurs l'idée sous-jacente à la notion de bonne classe primitive d'épimorphismes ... et aux exemples de 1.1.3. repris en 1.4.3.
D'autre part, on vérifie facilement aussi, mais de manière intrinsèque (i. e. purement catégorique) que, dès qu'il existe une sous-classe C de Dec(e') (voir 0.4.1 et 0.4.2) telle que codom(e') = $\text{Sommefib}_{\langle u,\bullet\rangle\in C}$ e , alors on a aussi codom(e') = $\text{Sommefib}_{\langle u,\bullet\rangle\in \text{Dec}\langle\bullet'\rangle}$ e . Ainsi, dans certains cas, il est encore possible de réduire la bonne classe primitive d'épimorphismes: nous ne le ferons que dans le cadre équivalent des formules associées (voir 2.5.3.), pour éviter trop de redites.]

2.5. TRADUCTION EN TERMES DE FORMULES.

2.5.1. Considérations préliminaires.

Nous avons donné (en 1.4.) la définition intrinsèque des bonnes classes $\mathcal{E}'_{Hs}$ et $\mathcal{E}_{Hs}$ d'épimorphismes.

Dans le cas des catégories **T** , **P** , **M** , pour les douze choix possibles du couple $(H,\langle \mathcal{H},\mathcal{S}\rangle)$, et moyennant la description de ces classes (donnée en 2.2. et 2.3.) nous allons leur associer des classes de formules, notées $\mathbf{E}'_{Hs}$ et $\mathbf{E}_{Hs}$. Plus généralement encore, à toute sous-classe $\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}'_{Hs}$, nous allons associer une sous-classe **E** de $\mathbf{E}'_{Hs}$, de sorte que, pour tout objet **B** de **C** = **T** , **P** ou **M** , on ait:

B valide (au sens de 1.1.1) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{Hs}$ (resp. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'_{Hs}$)
si, et seulement si
B valide (au sens usuel) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}'_{Hs}$ (resp. $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_{Hs}$)

Il convient de noter que ce processus de traduction d'une sous-classe $\mathcal{E}$ d'épimorphismes (en particulier: d'*un* épimorphisme) en une sous-classe **E** de formules (en particulier: en *une* formule) n'est pas intrinsèque (ou canonique). En effet, il dépend de la présentation (qui n'est pas unique) choisie pour décrire sous la forme:

$$\text{Libre(Gén)/Rel}$$

les objets de la catégorie considérée.

Reprenant les notations de 2.4.2. et considérant un élément quelconque de $\mathcal{E}_{Hs}$ (resp. $\mathcal{E}'_{Hs}$) , nous l'écrivons sous la forme:

$$e:\ S=(\text{Libre}(V)/\bigwedge_{j\in J} F_j) \to S/\psi$$
$$(\text{resp. } e':\ S=(\text{Libre}(V)/\bigwedge_{j\in J} F_j) \to (S/\bigwedge_{i\in I}\psi_i))$$

Un objet quelconque **B** de **T** , **P** ou **M** valide alors e (resp. e') si, et seulement si, tout morphisme $f:S\to B$ se factorise par e (resp. e'). Or, en raison des propriétés universelles définissant un passage au quotient et une structure libre, la donnée d'un tel morphisme quelconque f est équivalente à la donnée d'une évaluation quelconque - i. e. d'une application - de l'ensemble V dans l'ensemble B , sous-jacent à **B**, telle que les évaluations des générateurs valident les formules F_j (dont les "variables" sont bien des éléments de V). La condition de validation de e (resp e') par **B** va donc se *traduire* exactement par la validation (au sens usuel de la logique) par **B** de l'implication form(e) (resp. form(e')) suivante:

$$\bigwedge_{j\in J} F_j \Rightarrow \psi$$
$$(\text{resp. } \bigwedge_{j\in J} F_j \Rightarrow \bigwedge_{i\in I}\psi_i)$$

où les variables (figurant dans les F_j , y_i et y) sont "quantifiées universellement".
Dans ce qui suit, nous omettrons donc le plus souvent de faire figurer les variables et nous ne ferons pas figurer les quantificateurs universels (puisqu'il ne peut donc y avoir ambiguïté).

Dans ces conditions, nous allons décrire les implications telles que form(e) , la description des implications telles que form(e') s'en déduisant facilement.
Par analogie avec les classes d'épimorphismes, nous dirons que E_{HS} est *une (bonne) classe primitive de formules*.

2.5.2. Classes primitives de formules pour les algèbres totales (i. e. pour T).

Les douze choix possibles dont il est question en 2.4.1. se réduisent ici à seulement deux choix distincts, à savoir $H = Iso$ ou $H = H_c = H_m = H_r$ et $\langle H,S\rangle = \langle H_m, Mono\rangle = \langle H_r, S_r\rangle = \langle Epi, S_m\rangle$.

Des présentations étudiées en 2.2.3. et 2.3.2. ressort alors immédiatement que:
- $E_{Iso,Mono} = \{ \bigwedge_{j\in J}(t_j=t'_j) \Rightarrow t=t' \ /\ J$ ensemble et les t_j,t'_j,t,t' termes$\}$
- pour $H=H_c=H_m=H_r$, $E_{H,Mono} = \{ t=t' \ /\ t$ et t' termes$\}$.

En conséquence, on remarque que, dans ce dernier cas, le théorème de Birkhoff catégorique a pour traduction le ... théorème de Birkhoff usuel.

2.5.3. Classes primitives de formules pour les algèbres partielles (i. e. pour P).

Des présentations étudiées en 2.2.3. et 2.3.2. ressort immédiatement que (en utilisant les mêmes conventions):

- $E_{Iso,Mono} = \{ \bigwedge_{j\in J}(t_j=t'_j) \Rightarrow x=x' /\ J$ ensemble, les t_j,t'_j termes, x,x' variables$\}$,

- $E_{Iso,Sr} = \{ \bigwedge_{j\in J}(t_j=t'_j) \Rightarrow x=u(y_1,\ldots,y_p) /\ J$ ensemble, les t_j,t'_j termes, x variable ; les y_k variables et $u\in\Sigma$ optionnel$\}$

[N. B.:
- dire que le symbole u est *optionnel* signifie que l'on peut avoir à considérer non une égalité du type $x=u(y_1,\ldots,y_p)$ mais du type *dégénéré* $x=y$,
- comme la possibilité en avait été évoquée en 2.4.2., la classe primitive a été réduite: intuitivement, la classe d'implications donnée ici "engendre" celle où le symbole u décrirait non seulement Σ mais l'ensemble des termes, en un quelconque nombre fini de variables],

- $E_{I=o,S=} = \{ \bigwedge_{j\in J} (t_j=t'_j) \Rightarrow t=t' \ / \ J$ ensemble, les t,t' et t_j,t'_j termes $\}$

[on comparera utilement ce cas avec le précédent: ici, on rajoute (éventuellement) composabilités *et* composés, alors que, précédemment, seules les composabilités étaient rajoutées, les composés étant des éléments déjà existants],

- $E_{Hc,Mono} = \{ (\bigwedge_{j\in J} \exists t_j) \ \exists t \ \exists t' \Rightarrow t=t' \ / \ J$ ensemble, les t,t',t_j termes),

- $E_{Hc,Sr} = \{ (\bigwedge_{j\in J} \exists t_j) \ \exists t \ \exists s_1 \ \ldots \ \exists s_p \Rightarrow t=u(s_1,\ldots,s_p) / J$ ensemble, $u\in\Sigma$ optionnel$\}$ les t,t_j,s_k termes

[N. B.: analogue au cas $E_{I=o,Sr}$],

- $E_{Hc,S=} = \{ (\bigwedge_{j\in J} \exists t_j) \Rightarrow t=t' \ / \ J$ ensemble, les t,t',t_j termes$\}$

[comparaison avec $E_{Hc,Sr}$ analogue à la comparaison précédente de $E_{I=o,Sr}$ avec $E_{I=o,S=}$],

Les descriptions des objets H_c-projectifs et H_r-projectifs étant fort similaires ici, celles des classes $E_{Hc,S}$ et $E_{H=,S}$ (pour $S\in\{Mono,S_r,S_=\}$) le sont aussi. Ainsi a-t-on:

- $E_{H=,Mono} = \{ (\bigwedge_{j\in J} \exists u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})) \Rightarrow r=r' \ / \ J$ ensemble, les $u_j\in\Sigma$, les r,r' des variables ou des $u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$ les x_{ji} variables $x_{ji}\neq x_{kh}$ ssi $(i,j)\neq(h,k)$ $\}$

- $E_{H=,Sr} = \{ (\bigwedge_{j\in J} \exists u_{j<}(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})) \Rightarrow r=u(r_1,\ldots,r_p)$ /J ensemble, les $u,u_j\in\Sigma$, u optionnel, les r,r_k des variables ou des $u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})$, les x_{ji} des variables, $x_{ji}\neq x_{kh}$ ssi $(i,j)\neq(h,k)$ $\}$

- $E_{H=,S=} = \{ (\bigwedge_{j\in J} \exists u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)})) \Rightarrow t=t' \ / \ J$ ensemble, les $u_j\in\Sigma$, t et t' termes les x_{ji} des variables, $x_{ji}\neq x_{kh}$ ssi $(i,j)\neq(h,k)$ $\}$

La classe $E_{Hr,S}$ (pour $S\in\{Mono,S_r,S_=\}$) est la sous-classe de $E_{I=o,S}$ ou de $E_{Hr,S}$ déterminée par la condition $J=\emptyset$ (l'ensemble J intervenant dans la classe $E_{Hc,S}$ ne jouant pas le même rôle que dans les autres classes). Ainsi, on obtient:

- $E_{Hr,Mono} = \{ x=x' \ / \ x$ et x' des variables $\}$

- $E_{Hr,Sr} = \{ x=u(x'_1,\ldots,x'_p) \ / \$ les x,x'_k des variables, $u\in\Sigma$ optionnel$\}$

- $E_{Hr,S=} = \{ t=t' \ / \ t$ et t' termes $\}$

[N. B.: $E_{Hr,Sm}$ contient donc aussi les formules de la forme $t=t$ (où t est un terme), équivalentes aux formules de la forme $\exists! t$.]

2.5.4. **Classes primitives de formules pour les modèles (i. e. pour M).**

Les douze choix dont il est question en 2.4.1. se réduisent ici à six choix distincts, car , d'une part, H_r = Epi (i. e. $S_r = S_m$) et, d'autre part, Iso-proj = H_c-proj .

Des présentations fournies en 2.2.3. et 2.3.2., on obtient:

- $E_{Hr,Mono}$ = { $x=x'$ / x et x' des variables }
(car $\bigwedge_{j\in\emptyset} u_j(\ldots) \Rightarrow x=x'$ est équivalente à $x=x'$!)

- $E_{Hr,Sr} = E_{Hr,Sm}$ = {$x=x'$/x,x' des variables} $\cup$ {$u(x_1,\ldots,x_p)$/ les x_i des variables et $u\in L$ }

(même remarque que précédemment)

- $E_{Iso,Mono} = E_{Hc,Mono}$ = { $\bigwedge_{j\in J} u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)}) \Rightarrow x=x'$/J ensemble, les x,x',x_{ji} des variables, les $u_j\in L$ }

- $E_{Iso,Sr}=E_{Iso,Sm}=E_{Hc,Sm}$={ $\bigwedge_{j\in J} u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)}) \Rightarrow x=x'$/ J ensemble, $u\in L$, les x,x',x_{ji} des variables }

$\cup$ { $\bigwedge_{j\in J} u_j(x_{j1},\ldots,x_{jp(j)}) \Rightarrow u(x_1,\ldots,x_p)$/J ensemble, les $u,u_j\in L$, les x_k,x_{ji} variables }

- $E_{Hm,Mono}$ est la sous-classe de $E_{Iso,Mono}$ où l'on impose:
"$x_{ji}\neq x_{kh}$ ssi $(i,j)\neq(h,k)$",

- $E_{Hm,Sr} = E_{Hm,Sm}$ est la sous-classe de $E_{Iso,Sr}$ où l'on impose:
"$x_{ji}=x_{kh}$ ssi $(i,j)=(h,k)$".

3. LE THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE FINITAIRE.

3.1. FINITUDE.

3.1.1. Position du problème.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, Andréka et Németi n'ont abordé le "problème de la finitude" (des formules) que dans le cadre spécifique des algèbres totales, des algèbres partielles ou des modèles. Ils l'ont exposé, dans ce cadre particulier, de la manière suivante:

- les formules de la classe primitive $\mathbf{E}_{H,S}$ ayant été décrites sous la forme

$$\bigwedge_{j\in J} (\text{formule atomique})_j \Rightarrow (\text{formule atomique})$$

(ces formules atomiques étant, bien entendu, de telles ou telles formes, selon les valeurs particulières de H et S), comment transformer l'énoncé du théorème de Birkhoff, si l'on se limite aux seules formules *finitaires*, i. e. à celles pour lesquelles J est fini ?

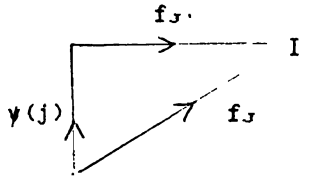
La réponse est obtenue en "gonflant" la classe $H\,S\,P\,A$.

Nous montrons ici qu'il est tout à fait possible de ne pas se limiter aux seules catégories particulières $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ et de donner, ainsi, une version catégorique (qui complète la précédente) de ce théorème de Birkhoff *finitaire*. Pour ce faire, il suffit d'utiliser une formalisation convenable de ce que peut être un objet "finitaire" dans une catégorie: c'est justement la notion d'*objet finiment présentable* de Gabriel-Ulmer (in "Locally α-presentable and locally α-generated categories", Lecture Notes in Math. 195, Springer, 1971) qui la fournit.

3.1.2. Objets finiment présentables.

Rappelons d'abord qu'une catégorie $\mathbf{I}$ est dite (*finiment*) *filtrante* si, et seulement si, tout sous-diagramme fini de cette catégorie possède un "majorant", i. e. si et seulement si:

- pour toute catégorie finie J, pour tout foncteur $\varphi: J\to\mathbf{I}$, il existe (au moins) un objet I de $\mathbf{I}$ et (au moins) une famille $(f_J:\varphi(J)\to I)_{J\in Ob\ J}$ de flèches de $\mathbf{I}$ tels que:
  + pour toute flèche $j:J\to J'$ de J, on a $f_{J'}.\varphi(j)=f_J$, i. e. le diagramme ci-dessous commute:



Rappelons aussi qu'une limite inductive (d'un foncteur $F:I\to C$) est dite *filtrante* si, et seulement si:
- la catégorie d'indexation I est filtrante.

Rappelons, enfin, qu'une catégorie C est dite *localement petite* si, et seulement si:
- pour tous objets C et C' de C, la classe $Hom(C,C') = \{f\in Mor\ C / f:C\to C'\}$ est un ensemble (i. e. est petite).

Dans ces conditions, à tout objet C de C, on associe le foncteur:

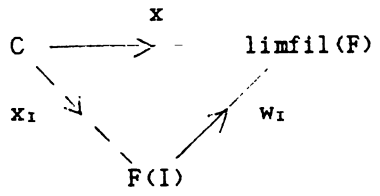
$$Hom(C,-):C\to Ens$$

tel que:
- pour tout objet C' de C, on a $Hom(C,-)(C')=Hom(C,C')$,
- pour tout morphisme $g:C'\to C''$ de C, on a

$$Hom(C,-)(g)=Hom(C,g):Hom(C,C')\to Hom(C,C'')$$
$$f \to g.f$$

Alors, si C est une catégorie localement petite, on dit qu'un objet C de C est *finiment présentable* (ou finitaire) si, et seulement si:
- le foncteur $Hom(C,-):C\to Ens$ commute aux limites inductives filtrantes (i. e. si, et seulement si, pour toute catégorie filtrante I, pour tout foncteur $F:I\to C$ admettant une limite inductive - qui est donc filtrante - notée $limfil(F)$ - on a: $Hom(C,limfil(F))=limfil(Hom(C,F(-)))$, où l'on pose $Hom(C,F(-))=Hom(C,-).F:I\to Ens$).

Dans ces conditions, sans entrer dans les détails, notons qu'alors, en désignant par $(w_I)_{I\in Obj\,I}$ la famille des coprojections d'une telle limite inductive filtrante, tout objet finiment présentable C sera tel que:
- pour tout morphisme $x:C\to limfil(F)$ de C, il existe (au moins) un objet I de I et (au moins) un morphisme $x_I:C\to F(I)$ de C vérifiant $w_I.x_I=x$, i. e. rendant commutatif le diagramme suivant:



3.1.3. **Exemples.**

On a rappelé en 2.3.2. que, dans toute catégorie algébrique (en particulier dans T, P, M) tout objet peut se présenter comme le quotient d'une structure libre sur un ensemble Gén de générateurs par un ensemble Rel de "relations". Il est facile d'établir qu'un objet d'une telle catégorie y est finiment présentable si, et seulement si, les ensembles Gén et Rel peuvent être choisis finis.

3.2. LE CADRE CATEGORIQUE DU THEOREME DE BIRKHOFF FINITAIRE.

3.2.1. Bonnes classes d'épimorphismes finitaires.

Soit $(C, H, \langle H, S\rangle)$ une bonne catégorie.

Nous dirons qu'un épimorphisme e de C est *finitaire* si, et seulement si:
- dom(e) est un objet finiment présentable de C.

Alors, on note Epif la sous-classe de Epi constituée de ces épimorphismes finitaires.

En désignant toujours par E'_{HS} la bonne classe canonique d'épimorphismes de la bonne catégorie C (voir 1.4.1.), on pose:

$$E'^{\omega}_{HS} = E'_{HS} \cap \text{Epif}$$

et on l'appelle *bonne classe canonique d'épimorphismes finitaires de la bonne catégorie* C .

Maintenant, si E_{HS} est *une* bonne classe primitive d'épimorphismes de la bonne catégorie C (voir 1.4.2.), on pose:

$$E^{\omega}_{HS} = E_{HS} \cap \text{Epif},$$

et on dit que c'est *une bonne classe primitive (associée) d'épimorphismes finitaires de la bonne catégorie* C .
Clairement, elle dom-engendre encore la bonne classe canonique d'épimorphismes finitaires.

3.2.2. Propriété fondamentale de Mod(E) si $E \subset E'^{\omega}_{HS}$.

Proposition. *Si* $(C, H, \langle H, S\rangle)$ *est une bonne catégorie, si* C *est une catégorie localement petite et si* E *est une sous-classe de* E'^{ω}_{HS} *, alors la classe* Mod(E) *est stable sous l'action de* H , S , P *et* limfil.

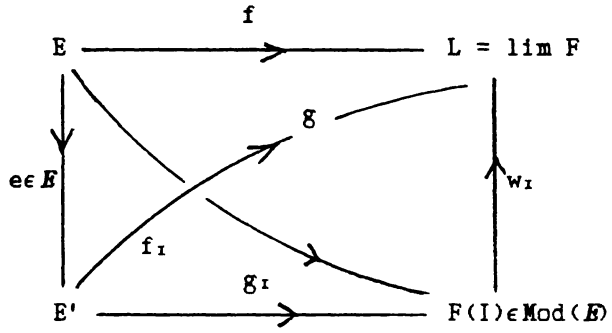
Preuve. Comme il est clair que limfil Mod(E) $\supset$ Mod(E) , il ne reste à vérifier que la stabilité de Mod(E) par limfil .

Soit $F: I \to C$ un foncteur à valeurs dans Mod(E) , où I est une catégorie filtrante, et supposons que L en est une limite inductive (donc filtrante), avec $(w_i)_{i \in Ob\ I}$ pour famille de coprojections.

Soit $e: E \to E'$ un élément quelconque de E et prouvons qu'alors L valide e .
Soit $f: E \to L$. Comme E est finiment présentable (par hypothèse), on en déduit (voir 3.1.2.) que f se factorise par l'une (au moins) des coprojections: il existe donc un objet I de I et un morphisme $f_I: E \to F(I)$ de C vérifiant $f = w_I . f_I$. Or, F(I) est (par hypothèse) un modèle de E et il existe donc un morphisme g_I de C tel que $f_I = g_I . e$. Posant $g = w_i . g_I$, g vérifie:

$$g.e=w_I.g_I.e=w_I.f_I=f\ .$$

Donc L valide e .



Fin de la preuve.

3.3. VERSION FINITAIRE DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE.

3.3.1. Enoncé du théorème de Birkhoff catégorique finitaire.

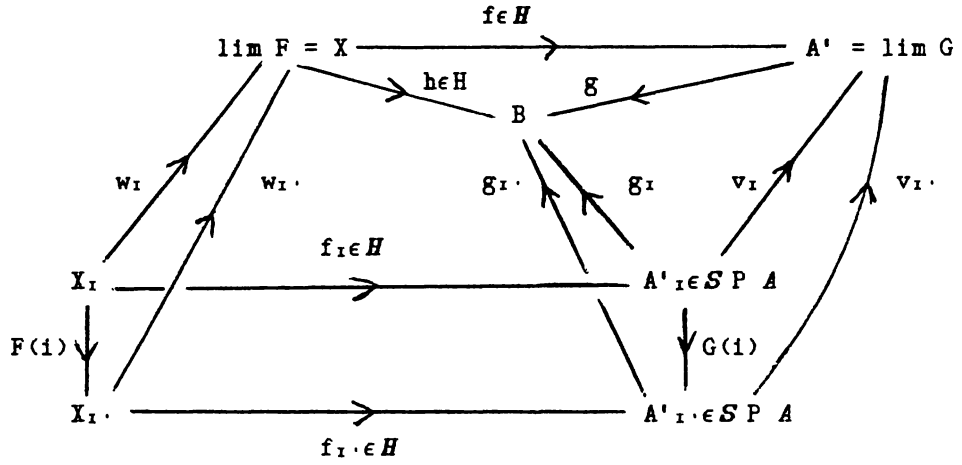
Si $(C,H,\langle H,S\rangle)$ *est une bonne catégorie, si* C *est une catégorie localement petite, si* C *est à (petites) limites inductives filtrantes, si tout objet* H*-projectif de* C est limite inductive filtrante (petite) d'objets H*-projectifs et finiment présentables de* C, *si* H *est stable par limites inductives filtrantes (petites), si* E_{HS} *est une bonne classe primitive d'épimorphismes de* C *et si* A *est une classe d'objets de* C , *alors:*

$$\mathrm{Mod}(E_{HS}(A)) = H\ \mathrm{limfil}\ S\ P\ A$$

(où l'on désigne par $E_{HS}(A)$ *la sous-classe de la classe primitive d'épimorphismes finitaires constituée de ceux de ses épimorphismes validés par tout* $A\in A$ *).*

3.3.2. Preuve du théorème de Birkhoff catégorique finitaire.

On se reportera au diagramme qui suit.



Comme dans la preuve du théorème de Birkhoff catégorique (non finitaire) de la section 1, mais en utilisant cette fois-ci la proposition de 3.2.2., il nous faut prouver seulement que, B étant un modèle de $E^{\flat}{}_{Hs}(A)$, alors B est élément de H limfil $\mathcal{S}$ P A .

Comme C a suffisamment d'objets H-projectifs, il existe un tel objet X et un morphisme $h: X \to B$, appartenant à H .

· X étant H-projectif, désignons par $F: I \to C$ un foncteur, où I est une catégorie (petite) filtrante, tel que:

- pour tout objet I de I , F(I) est un objet H-projectif finiment présentable de C (alors, on note $F(I)=X_I$),
- X , muni de la famille de coprojections $(w_I)_{I \in Ob\ I}$, est limite inductive (donc filtrante) de F .

Comme C est une bonne catégorie, tout X_I engendre une H-extension libre:

$$f_I = fr_{X_I}{}^{H} A : X_I \to A'_I \in \mathcal{S} \text{ P } A .$$

On définit alors un foncteur $G: I \to C$ dont la valeur sur les objets de I est donnée par:

$$G(I) = A'_I$$

(en effet, il est facile de vérifier que $fr_C{}^{H} A = fr_C{}^{H} \mathcal{S}$ P A , pour tout objet C de C et on détermine alors, pour tout $i: I \to I'$ le morphisme G(i) par:

$$G(i).f_I = f_{I'}.F(i)).$$

Comme C est à (petites) limites inductives filtrantes, G en possède une, notée A' , dont on désigne par $(v_I)_{I \in Ob\ I}$ la famille des coprojections.

Soit alors f "le passage à la limite" de la famille $(f_I: F(I) \to G(I))_{I \in Ob\ I}$, i. e. l'unique morphisme tel que:

- pour tout objet I de I , $f.w_I = v_I.f_I$.

Par hypothèse, f est encore élément de H .

Remarquons maintenant que, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, f_I est élément de la classe $E'^{\omega}{}_{HS}$; on prouve alors que, f_I étant une extension libre relative à A, les épimorphismes de sa classe de décomposition $Déc(f_I)$ sont éléments de $E^{\omega}{}_{HS}(A)$, puis on en déduit que B valide f_I (car on a rencontré une situation similaire dans la preuve du théorème de Birkhoff catégorique non finitaire de la section 1).

Soit alors, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, $g_I : A'_I \to B$ vérifiant:

$$g_I . f_I = h . w_I .$$

La famille $(g_I)_{I \in Ob\ \mathbf{I}}$ vérifie:

-pour tout morphisme $i : I \to I'$ de $\mathbf{I}$, $g_I \cdot . G(i) = g_I$,

(puisque $g_I \cdot . G(i) . f_I = g_I \cdot . f_I \cdot . F(i) = h . w_I \cdot . F(i) = h . w_I = g_I . f_I$ et f_I, élement de H, est un épimorphisme).

Cette famille définit donc un unique morphisme:

$$g : A' = \lim G = \mathrm{limfil}(A'_I)_{I \in Ob\,\mathbf{I}} \to B$$

vérifiant:

- pour tout objet I de $\mathbf{I}$, $g . v_I = g_I$.

Pour tout objet I de $\mathbf{I}$, on a donc:

$$g . f . w_I = g . v_I . f_I = g_I . f_I = h . w_I .$$

On en déduit que $g . f = h$. Or, $f \in H$ et $h \in H$: la condition (DIAG) assure alors que $g \in H$ et ainsi $B \in H\ \mathrm{limfil}\ S\ P\ A$.

Fin de la preuve.

3.3.3. **Commentaire.**

La version finitaire que nous avons donnée ici est, comme nous l'avons déjà signalé, une version catégorique du théorème (spécifique à T , P , M) d'Andréka et Németi: il répond donc complètement à leur motivation initiale.

En outre, il est plus précis que leur version spécifique puisqu'il assure que "la plus petite classe stable sous l'action de H , S , P et limfil et contenant A " (cf. Andréka-Németi, corollaire 1, p. 40) est exactement:

$$H\ \mathrm{limfil}\ S\ P\ A .$$

[Signalons, de plus, que seules les limites inductives filtrantes doivent intervenir et donc que leur référence à la notion de colimite (i. e. de limite inductive) chez MacLane est erronée.]

4. TRADUCTION DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE FINITAIRE DANS LA CATEGORIE DES ALGEBRES TOTALES, LA CATEGORIE DES ALGEBRES PARTIELLES, LA CATEGORIE DES MODELES.

4.1. CLASSES PRIMITIVES DE FORMULES FINITAIRES.

4.1.1. Le théorème de Birkhoff catégorique finitaire s'applique à T , P , M .

Nous avons donné en 2.4.1. différentes structures de bonnes catégories sur T , P , M . Il est connu, ou facile (mais fastidieux) de vérifier, que toutes ces structures de bonnes catégories satisfont les hypothèses du théorème de Birkhoff catégorique finitaire.

Ainsi, notamment, un objet H-projectif quelconque de ces catégories, qui s'écrit (voir 2.3.2.):

$$X = \mathrm{Libre}(\mathrm{Gén})/\bigwedge_{k\in K} F_k$$

est finiment présentable si, et seulement si, on peut choisir Gén et K finis. Alors, c'est l'égalité:

$$\mathrm{Libre}(\mathrm{Gén})/\bigwedge_{j\in J} F_j \;=\; \operatorname*{limfil}_{\substack{G\in P_f(\mathrm{Gén})\\ K\in P_f(K_G)}} (\mathrm{Libre}(G)/\bigwedge_{k\in K} F_k)$$

(où:
- $P_f(\mathrm{Gén})$ désigne l'ensemble des parties finies de Gén ,
- pour toute telle partie finie G de Gén , K_G désigne l'ensemble des $j\in J$ tels que toutes les variables de F_j appartiennent à G ,
- $P_f(K_G)$ désigne l'ensemble des parties finies d'un tel K_G),

qui assure que tout objet H-projectif est bien limite inductive filtrante d'objets H-projectifs finiment présentables.

4.1.2. Description des classes primitives de formules finitaires.

Nous considérons une quelconque des structures de bonnes catégories sur T , P ou M ainsi que les classes primitives d'épimorphismes $\mathcal{E}_{Hs}$ et de formules $\mathbf{E}_{Hs}$ introduites et décrites dans la section 2 dont nous reprenons les notations et les résultats.

Nous constatons ainsi que la sous-classe $\mathcal{E}^{\omega}_{Hs}$ primitive d'épimorphismes finitaires (associée) s'obtient exactement en imposant que l'ensemble J (de 2.5.1.) est fini.
De même la sous-classe $\mathbf{E}^{\omega}_{Hs}$ de formules, dites *finitaires*, qui sont les traductions de cette sous-classe d'épimorphismes finitaires, se décrit comme suit:

$$\mathbf{E}^{\omega}_{Hs} = \{\ (\bigwedge_{j\in J} F_j \Rightarrow \psi) \in \mathbf{E}_{Hs} \ /\ J \text{ ensemble fini }\}$$

On se reportera donc à 2.5. pour avoir la description détaillée, dans chaque cas, de ces formules finitaires.

Ainsi, la formalisation donnée dans la section 3 répond bien au problème posé en 3.1.1. .

4.2. COROLLAIRES DE L'APPLICATION DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE FINITAIRE A T , P , M .

4.2.1. Corollaire 1.

Pour toute structure de bonne catégorie sur T , P *ou* M , *donnée dans la section 2 et pour toute sous-classe d'objets* A , *si la classe* $B = H\,S\,P\,A$ *est stable par (petites) limites inductives filtrantes, alors on a:*

$$B = \mathrm{Mod}\,E^{\omega}{}_{HS}(A) = \text{Modèles de } E^{\omega}{}_{HS}(A)$$

Preuve. Le résultat est évident puisque $H\,S\,P\,A$ sera alors la plus petite classe stable sous l'action de H , S , P et limfil et contenant A . **Fin de la preuve.**

Remarquons que, plus généralement, le résultat est encore vrai pour toute structure de bonne catégorie (sur une catégorie quelconque!) satisfaisant les hypothèses du théorème de Birkhoff catégorique finitaire!

4.2.2. Corollaire 2.

Pour toute structure de bonne catégorie sur T , P *ou* M *donnée dans la section 2 et pour toute sous-classe d'objets* A , *si la classe* $B = H\,S\,P\,A$ *est axiomatisable (i. e. est la classe des modèles d'une théorie finitaire quelconque du 1er ordre), alors:*

$$B = \mathrm{Mod}\,E^{\omega}{}_{HS}(A) = \text{Modèles de } E^{\omega}{}_{HS}(A)$$

Preuve. Le résultat se déduit du corollaire 1, puisqu'une telle classe axiomatisable est nécessairement stable par limites inductives filtrantes. **Fin de la preuve.**

4.3. COMPLEMENTS SPECIFIQUES A T , P , M .

4.3.1. Préliminaires.

Nous faisons figurer dans ce 4.3 une propriété supplémentaire *spécifique* à T , P ou M : en ce sens qu'elle n'est pas établie, par Andréka et Németi, dans un cadre catégorique "général" . Cela nous entraînerait trop loin de détailler un cadre convenant à une généralisation de ce résultat spécifique, mais signalons simplement qu'il existe!

En tout état de cause, nous dirons dans la suite qu'une signature (resp. un langage) Σ (resp. L) est *dégénérée* (resp. *dégénéré*) si, et seulement si:
- Σ (resp. L) est fini et ne contient que des symboles fonctionnels (resp. relationnels) d'arité 0 (resp. 1).

4.3.2. Propriété complémentaire.

On considère l'une quelconque des structures de bonne catégorie de la section 2 sur T , P ou M.

Proposition. *(1) Dans les trois cas suivants:*

- *si* $'H = H_r$,
- *si* $H = H_m$ *et si la signature* Σ *(resp. le langage* L *) est finie (resp. fini),*
- *si la signature* Σ *(resp. le langage* L *) est dégénérée (resp. dégénéré),*

alors on a:

$$H\ \mathcal{S}\ P\ A = \mathrm{Mod}(\mathbb{P}'_{Hs}(A))$$

pour toute sous classe A *d'objets.*
(2) Dans tout autre cas, il existe une sous-classe A *d'objets vérifiant:*

$$H\ \mathcal{S}\ P\ A \subsetneq \mathrm{Mod}(\mathbb{P}'_{Hs}(A)).$$

La preuve de cette proposition, qui repose sur des raisonnements "non catégoriques" se trouve dans Andréka-Németi. Nous nous contentons d'en donner le principe.

Le (1) s'établit en prouvant, dans chaque cas, que:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{P}'_{Hs}(A)) = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{Hs}(A))$$

ou plus exactement que:

$$\text{Modèles de } \mathbf{E}^{\omega}{}_{\mathrm{HS}}(A) = \text{Modèles de } \mathbf{E}_{\mathrm{HS}}(A)$$

c'est-à-dire que pour toute formule du type:

$$\bigwedge_{j \in J} (\text{formule atomique})_j \Rightarrow (\text{formule atomique})$$

on peut se ramener, dans le membre de gauche, à une "conjonction finie".
Ceci se fait "à la main" (le premier cas, par exemple, est trivial ... puisque l'on sait que les conjonctions sont indexées par $\emptyset$).

Le (2) s'établit, lui aussi, "à la main" en exhibant une classe A et une famille d'objets de $\mathrm{H}\,\mathcal{S}\,\mathrm{P}\,A$ dont la (petite) limite inductive filtrante n'est pas dans $\mathrm{H}\,\mathcal{S}\,\mathrm{P}\,A$.

5. COMPLETUDE.

5.1. LA COMPLETUDE EN TERMES DE FORMULES, POUR LES ALGEBRES TOTALES, LES ALGEBRES PARTIELLES ET LES MODELES.

5.1.1. Position du problème.

On se donne l'une des structures de bonnes catégories (définies dans la section 2) sur **T** , **P** ou **M** , ainsi qu'une partie **E** de la classe primitive de formules (qui sont toutes des implications particulères) correspondante $\mathbf{E}_{\vdash\models}$ (choisie dans la section 2).

Cette classe **E** engendre la sur-classe:

$$\mathbf{E}_{\vdash\models}(\text{Modèles de } \mathbf{E}) \quad (\subset \mathbf{E}_{\vdash\models})$$

de toutes les formules appartenant à $\mathbf{E}_{\vdash\models}$ et validées par tout modèle de **E** .
Ainsi, définit-on une *déduction sémantique* par:

$$\mathbf{E} \models (\Delta \Rightarrow p)$$
si, et seulement si,
$$(\Delta \Rightarrow p) \in \mathbf{E}_{\vdash\models}(\text{Modèles de } \mathbf{E}).$$

Le problème, tout à fait classique, qui se pose alors est celui de la *complétude*, i. e. le suivant:

- peut-on construire à partir de la classe de formules **E** , et si oui par quelles *règles d'inférences* (i. e. syntaxiques), toute $(\Delta \Rightarrow p)$ telle que $\mathbf{E} \models (\Delta \Rightarrow p)$?

Autrement dit, peut-on, et si oui comment, construire à partir de **E** la classe $\mathbf{E}_{\vdash\models}(\text{Modèles de } \mathbf{E})$ qu'elle engendre ?

5.1.2. Résolution du problème.

La classe $\mathbf{E}_{\vdash\models}(\text{Modèles de } \mathbf{E})$ est engendrée à partir de **E** par règles d'inférences standard (ou "relativement" standard dans certains cas, tout comme les formules de $\mathbf{E}_{\vdash\models}$). Quant aux démonstrations, "non catégoriques" (et spécifiques à **T** , **P** , **M**) qui le prouvent, elles sont tout à fait classiques.

Il nous semble donc inutile de reproduire purement et simplement, ici, ce qui se trouve dans Andréka-Németi (§4, pp. 40 à 46).

5.2. LA COMPLETUDE EN TERMES CATEGORIQUES.

5.2.1. Position du problème.

Ayant fourni un cadre totalement catégorique au théorème de Birkhoff, nous pouvons poser, en termes catégoriques, le problème de la complétude.

Nous nous donnons une structure de bonne catégorie $(C, H, \langle \mathcal{H}, \mathcal{S} \rangle)$ (sur une catégorie quelconque C) ainsi qu'une partie $\mathcal{E}$ d'une bonne classe primitive $\mathcal{E}_{+s}$ d'épimorphismes de C.
Cette classe $\mathcal{E}$ engendre la sur-classe

$$\mathcal{E}_{+s}(\mathrm{Mod}(\mathcal{E})) \quad (\subset \mathcal{E}_{+s})$$

(constituée, rappelons-le, de tous les épimorphismes de $\mathcal{E}_{+s}$ validés par tout modèle de $\mathcal{E}$).
Le problème qui se pose alors est celui de la *complétude catégorique*, i. e. le suivant:

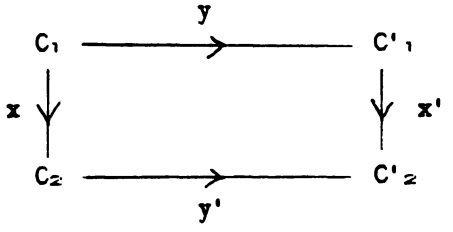
- peut-on, et si oui comment, construire "catégoriquement" à partir de $\mathcal{E}$ la classe $\mathcal{E}_{+s}(\mathrm{Mod}(\mathcal{E}))$ qu'elle engendre ?

[Il est, bien entendu, possible de calquer complètement la version "logique" du problème donnée en 5.1.1 en introduisant une *déduction sémantique relative* à C par:

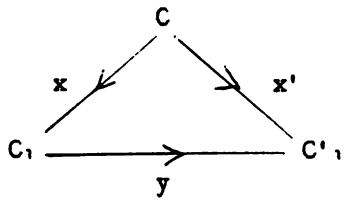
$$\mathcal{E} \models_C (e: E \to E')$$
si, et seulement si,
$$(e: E \to E') \in \mathcal{E}_{+s}(\mathrm{Mod}(\mathcal{E})) .]$$

5.2.2. Remarques et suggestions pour la résolution du problème.

Notons $\mathrm{Sq}(C)$ la *catégorie des carrés commutatifs de* C, i. e. la catégorie telle que:
- ses objets sont les flèches $x: C_1 \to C_2$ de C,
- ses flèches sont les $(y, y'): (x: C_1 \to C_2) \to (x': C'_1 \to C'_2)$ tels que le carré suivant est commutatif dans C:



Pour tout objet C de **C** , notons aussi C/C la *catégorie des triangles de sommet* C , i. e. la catégorie telle que:
- ses **objets** sont les flèches $x: C \to C_1$ de **C** ,
- ses **flèches** sont les $y: (x: C \to C_1) \to (x': C \to C'_1)$ tels que le diagramme suivant est commutatif dans **C** :



Alors, les règles d'inférence fournies par Andréka-Németi suggèrent que, pour obtenir $\mathbb{K}_{HS}(\mathrm{Mod}(E))$ à partir de E , il suffit de:

- saturer E , vue comme classe d'objets de Sq(C), dans Sq(C),
- pour tout objet E de **C** , saturer $E/E = \{ e \in E \ / \ \mathrm{dom}(e)=E \}$, vue comme classe d'objets de E/C , dans E/C ,

par des opérateurs, sur ces deux types de catégories, "sommes" , "images" (associé à H) et "sous-objets" (associé à S).
Ainsi, le problème de la "complétude catégorique" fait apparaître un processus de complétion exactement dual de celui qui apparaît dans le théorème de Birkhoff catégorique (qu'il suffirait donc d'appliquer purement et simplement aux catégories duales des catégories Sq(C) et E/C) .

TABLE DES MATIERES.

INTRODUCTION ..... p. 3

0. PRELIMINAIRES ..... p. 9

0.0. CONSIDERATIONS DE "TAILLES". ..... p. 11

0.0.1. Classes et ensembles. ..... p. 11
0.0.2. Petites catégories. ..... p. 11

0.1. NOTATIONS GENERALES POUR LES CATEGORIES. ..... p. 11

0.1.1. Objets, morphismes et composition. ..... p. 11
0.1.2. Classes d'objets et de morphismes. ..... p. 12

0.2. SYSTEMES DE FACTORISATION. ..... p. 12

0.2.1. Définition des systèmes de factorisation. ..... p. 12
0.2.2. Propriétés générales des systèmes de factorisation. ..... p. 13
0.2.3. Exemple. ..... p. 14
0.2.4. Remarque. ..... p. 14

0.3. CLASSES REMARQUABLES D'EPIMORPHISMES ET DE MONOMORPHISMES. ... p. 14

0.3.1. Les épimorphismes clos. ..... p. 14
0.3.2. Les épimorphismes forts. ..... p. 15
0.3.3. Epimorphismes relatifs et monomorphismes relatifs. ..... p. 15
0.3.4. Les monomorphismes forts. ..... p. 16
0.3.5. Quelques propriétés de ces classes remarquables. ..... p. 16

0.4. GENERATION. ..... p. 17

0.4.1. Catégorie de décomposition. ..... p. 17
0.4.2. Sous-classe dom-engendrant une classe d'épimorphismes. ..... p. 17

1. LE THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE ..... p. 19

1.1. VALIDATION. ..... p. 21

1.1.1. Validation d'un épimorphisme. ..... p. 21
1.1.2. Modèles. ..... p. 21

1.1.3. Exemples (où l'on voit apparaître des formules). ..... p. 21
1.1.4. Exemple (où l'on continue à voir apparaître des formules). .... p. 22
1.1.5. Exemple (où l'on voit apparaître des formules un peu particulières)... p. 23

1.2. PROPRIETES DE LA CLASSE Mod($\mathcal{E}$). .... p. 24

1.2.1. Propriété 1 . ..... p. 24
1.2.2. Propriété 2 . ..... p. 24
1.2.3. Objets H-projectifs. ..... p. 25
1.2.4. Propriété 3 . ..... p. 26
1.2.5. Propriété fondamentale de Mod($\mathcal{E}$). ..... p. 26

1.3. BONNES CATEGORIES ET EXTENSIONS LIBRES. ..... p. 27

1.3.1. Catégories à peu d'objets quotients. ..... p. 27
1.3.2. Catégories ayant suffisamment d'objets projectifs. ..... p. 27
1.3.3. Bonnes catégories. ..... p. 27
1.3.4. Extensions libres. ..... p. 28
1.3.5. Proposition (existence d'extensions libres dans une bonne catégorie). p. 29

1.4. BONNES CLASSES D'EPIMORPHISMES DANS UNE BONNE CATEGORIE..... p. 30

1.4.1. La bonne classe canonique d'épimorphismes. ..... p. 30
1.4.2. Bonnes classes primitives d'épimorphismes. ..... p. 30
1.4.3. Exemple. ..... p. 31
1.4.4. Proposition. ..... p. 31

1.5. LE THEOREME DE BIRKHOFF DANS UNE BONNE CATEGORIE. .... p. 32

1.5.1. Enoncé du théorème de Birkhoff catégorique. ..... p. 32
1.5.2. Preuve du théorème de Birkhoff catégorique. ..... p. 32

**2. INTERPRETATION DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE
DANS LA CATEGORIE DES ALGEBRES TOTALES,
LA CATEGORIE DES ALGEBRES PARTIELLES,
LA CATEGORIE DES MODELES.** ..... p. 35

2.1. DEFINITION DES CATEGORIES T , P , M . ..... p. 37

2.1.1. La catégorie T des algèbres totales. ..... p. 37
2.1.2. La catégorie P des algèbres partielles. ..... p. 37
2.1.3. La catégorie M des modèles. ..... p. 38

2.2. CARACTERISATION DANS T, P, M DES CLASSES REMARQUABLES DEFINIES EN 0.3. ..... p. 38

2.2.1. Caractérisation intrinsèque. ..... p. 38
2.2.2. Exemple. ..... p. 41
2.2.3. Présentation en termes de "passages aux quotients" des éléments de $H_{=}$, H_{r}, Epi. ..... p. 41

2.3. CARACTERISATION DANS T, P, M DES OBJETS H-PROJECTIFS, POUR H = Iso, H_{c}, $H_{=}$, H_{r}. ..... p. 43

2.3.1. Tableau de caractérisation. ..... p. 43
2.3.2. Présentation des objets H-projectifs de T, P, M (pour H = Iso, H_{c}, $H_{=}$, H_{r}) comme quotients. .... p. 45

2.4. STRUCTURES DE BONNES CATEGORIES SUR T, P, M ET BONNES CLASSES D'EPIMORPHISMES ASSOCIEES. ..... p. 48

2.4.1. Choix de structures de bonnes catégories sur T, P, M. ..... p. 48
2.4.2. Caractérisation dans T, P, M des bonnes classes canoniques d'épimorphismes et choix de bonnes classes primitives d'épimorphismes. ..... p. 48

2.5. TRADUCTION EN TERMES DE FORMULES. ..... p. 50

2.5.1. Considérations préliminaires. ..... p. 50
2.5.2. Classes primitives de formules pour les algèbres totales (i. e. T). .. p. 51
2.5.3. Classes primitives de formules pour les algèbres partielles (i. e. P). p. 51
2.5.4. Classes primitives de formules pour les modèles (i. e. M) ..... p. 53

3. LE THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE FINITAIRE. ..... p. 55

3.1. FINITUDE. ..... p. 57

3.1.1. Position du problème. ..... p. 57
3.1.2. Objets finiment présentables. ..... p. 57
3.1.3. Exemples. ..... p. 58

3.2. LE CADRE CATEGORIQUE DU THEOREME DE BIRKHOFF FINITAIRE. .. p. 59

3.2.1. Bonnes classes d'épimorphismes finitaires. ..... p. 59
3.2.2. Propriété fondamentale de $Mod(E)$, si $E \subset E^{\omega}{}_{HS}$. ..... p. 59

3.3. VERSION FINITAIRE DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE. ... p. 60

3.3.1. Enoncé du théorème de Birkhoff catégorique finitaire. ..... p. 60

3.3.2. Preuve du théorème de Birkhoff catégorique finitaire. ..... p. 60
3.3.3. Commentaire. ..... p. 62

4. TRADUCTION DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE FINITAIRE DANS LA CATEGORIE DES ALGEBRES TOTALES, LA CATEGORIE DES ALGEBRES PARTIELLES, LA CATEGORIE DES MODELES. ..... p. 63

4.1. CLASSES PRIMITIVES DE FORMULES FINITAIRES. ..... p. 65

4.1.1. Le théorème de Birkhoff catégorique finitaire s'applique à T, P, M.... p. 65
4.1.2. Description des classes primitives de formules finitaires. .... p. 65

4.2. COROLLAIRES DE L'APPLICATION DU THEOREME DE BIRKHOFF CATEGORIQUE FINITAIRE A T, P, M. ..... p. 66

4.2.1. Corollaire 1 . ..... p. 66
4.2.2. Corollaire 2 . ..... p. 66

4.3. COMPLEMENTS SPECIFIQUES A T, P, M . ..... p. 67

4.3.1. Préliminaires. ..... p. 67
4.3.2. Propriété complémentaire. ..... p. 67

5. COMPLETUDE. ..... p. 69

5.1. LA COMPLETUDE EN TERMES DE FORMULES, POUR LES ALGEBRES TOTALES, LES ALGEBRES PARTIELLES ET LES MODELES. ..... p. 71

5.1.1. Position du problème. ..... p. 71
5.1.2. Résolution du problème. ..... p. 71

5.2. LA COMPLETUDE EN TERMES CATEGORIQUES. ..... p. 72

5.2.1. Position du problème. ..... p. 72
5.2.2. Remarques et suggestions pour la résolution du problème. ..... p. 72