DIAGRAMMES

LAURENT COPPEY

Esquisses et types

Diagrammes, tome 27 (1992), exp. n° 2, p. LC1-LC33

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1992__27__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 27, 1992

ESQUISSES ET TYPES

Laurent Coppey

Ce texte est le développement d'une conférence faite à l'Université de Limoges le 26/03/1991.

On suppose le lecteur suffisamment familier avec les esquisses, telles qu'introduites par C. Ehresmann en 1966 (voir [I.T.S.C.]) et en 1968 (voir [E.T.S.A.]) , au point de concevoir, de manière plus ou moins explicite, quelques esquisses standard, parmi lesquelles des esquisses d'esquisses, de prototypes ou de types. On pourra aussi se reporter utilement aux Leçons de Théorie des Esquisses (voir [L.T.E.S.]).

Nous allons faire quelques suggestions, à partir d'exemples simples, concernant les possibles ***structures des types*** et le rôle qu'elles ont dans la ***structure des démonstrations***. Disons d'emblée qu'a priori ***tout serait possible***, c'est-à-dire que les types envisageables pourraient avoir toutes sortes de structures, dont il ne serait nullement nécessaire qu'elles prolongent d'une manière ou d'une autre (encore moins qu'elles coïncident) avec des structures d'esquisses supposées déjà fournies (que celles-ci soient plus ou moins classiques, enrichies ou non, etc...). Cependant, nous nous limiterons, ici, au cadre d'application d'un résultat

A.M.S. SUB. CLASS. : 18 C 10, 18 D 35, 03 F 99

assez général concernant la possibilité d'engendrer, à partir d'une esquisse, un type ou un diagramme de types représentant (une part de) ce qui peut être ***déduit*** de cette esquisse.

Précisons ce cadre en supposant que $\mathbb{E}_{\mathbb{E}}$ est une première esquisse (au sens tout à fait classique) d'esquisses telles que $\mathbb{E}$ (elles, pas forcément classiques ...) et que $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ est une deuxième esquisse (au sens tout à fait classique) de types tels que $\mathbb{T}$ (eux, pas forcément classiques ...).

Dans un premier temps, ce qu'on demande habituellement est que :
- $\mathbb{E}_{\mathbb{E}}$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ soient petites,
- $\mathbb{E}_{\mathbb{E}}$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ soient projectives (et c'est bien le cas la plupart du temps, comme on le sait depuis longtemps même pour des structures "$\mathbb{E}$" et "$\mathbb{T}$" dites *mixtes*, dès lors que les diverses données de nature plus ou moins spécifiée - par exemple de cônes projectifs ou inductifs, limites ou non - ont fait l'objet de ***choix fonctionnels*** - voir [C.E.T.G.] et [E.C.L.Q.]),
- on ait un homomorphisme $p : \mathbb{E}_{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ (au sens classique).
Alors, on dispose du foncteur d'oubli $U_p : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathbb{T}}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathbb{E}})$, de la catégorie des types (tels que $\mathbb{T}$) vers la catégorie des esquisses (telles que $\mathbb{E}$). Il associe à un type $\mathbb{T} : \mathbb{E}_{\mathbb{T}} \to \mathbb{ENS}$, modèle de $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ dans une catégorie d'ensembles, l'esquisse $\mathbb{E} = U_p(\mathbb{T}) = \mathbb{T} \circ p : \mathbb{E}_{\mathbb{E}} \to \mathbb{ENS}$, modèle de $\mathbb{E}_{\mathbb{E}}$ dans la même catégorie d'ensembles.
Dans ces conditions, on sait que $U_p : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathbb{T}}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathbb{E}})$ possède un adjoint à gauche L_p (et $L_p(\mathbb{E})$ est donc le U_p-type libre engendré par $\mathbb{E}$).

Dans un deuxième temps, on peut ne pas prescrire que $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ est

une esquisse ***projective***, mais seulement supposer que c'est une esquisse ***mixte*** : ce peut être naturellement nécessaire si, par exemple, les structures de types (projectifs, mixtes, ou autres ...) qu'elle définit ne sont pas assez fonctionnelles (par exemple, si l'on prescrit seulement l'existence - sans les choisir - de limites ou/et colimites de toutes sortes - sur ce point, voir [L.T.E.S.]). Mais même dans ce cas, le théorème d'existence de petits diagrammes localement libres de C. Lair et R. Guitart (voir [E.D.L.L.]) permet d'affirmer qu'à toute esquisse $\mathbb{E}$ (modèle de $\boldsymbol{E}_{\mathbb{E}}$) est associé un petit diagramme localement libre de types $(\mathbb{T}_I)_{I \in \mathbb{I}}$ (modèles de $\boldsymbol{E}_{\mathbb{T}}$) qui se "substitue" au type libre $L_p(\mathbb{E})$ ci-dessus. Souvent (ainsi, par exemple, lorsqu'on se préoccupe "d'évaluation dynamique d'expressions" comme en [E.S.C.A.]), ce diagramme est discret (on dit alors *famille localement libre* de types) ou encore - un peu moins particulièrement - indexé par une somme de groupes : nous renvoyons ici aux textes originaux sur le sujet, à savoir [C.S.M.F.] , [E.D.L.L.] , [C.M.C.E.]).

A partir de maintenant, dans le seul but de ne pas trop alourdir (compliquer) les quelques considérations générales que nous avons en vue, nous nous plaçons dans le cadre précisé ci-dessus et même dans le cas ("simplifié") où $p : \boldsymbol{E}_{\mathbb{E}} \to \boldsymbol{E}_{\mathbb{T}}$ est un homomorphisme entre esquisses ***projectives***, donc dans le cas où le foncteur d'oubli $U_p : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}_{\mathbb{T}}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}_{\mathbb{E}})$ admet un adjoint à gauche, supposé choisi, $L_p : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}_{\mathbb{E}}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}_{\mathbb{T}})$.

Ainsi, "naturellement" en toute esquisse $\mathbb{E}$ (i. e. en tout modèle de $\boldsymbol{E}_{\mathbb{E}}$ vers ENS) et en tout type $\mathbb{T}$ (i. e. en tout modèle de $\boldsymbol{E}_{\mathbb{T}}$ vers ENS) on dispose d'une bijection de l'ensemble (de flèches de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}_{\mathbb{E}})$) $\mathrm{Hom}(\mathbb{E}, U_p(\mathbb{T}))$ vers l'ensemble (de flèches de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}_{\mathbb{T}})$) $\mathrm{Hom}(L_p(\mathbb{E}), \mathbb{T})$.

En particulier, si "la" catégorie **Ens** (supposée de taille convenable) des ensembles (de taille convenable) peut être munie, plus ou moins canoniquement, d'une structure de type $\mathbb{T}_{Ens}$ (modèle de $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ dans $\mathcal{ENS}$) alors, pour toute esquisse $\mathbb{E}$ (modèle de $\mathbb{E}_{\mathbb{E}}$ dans $\mathcal{ENS}$), l'ensemble $Hom(\mathbb{E}, U_p(\mathbb{T}_{Ens}))$, qu'on peut donc appeler *l'ensemble des modèles de* $\mathbb{E}$ *dans* **Ens** , est en bijection naturelle avec l'ensemble $Hom(L_p(\mathbb{E}), \mathbb{T}_{Ens})$, qu'on peut appeler *l'ensemble des modèles du type de* $\mathbb{E}$ *dans* **Ens** . Si on désigne par $i_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to U_p(L_p(\mathbb{E}))$ la flèche canonique d'adjonction, cette bijection permet d'associer à tout modèle $h: \mathbb{E} \to U_p(\mathbb{T}_{Ens})$, de $\mathbb{E}$ vers **Ens** , un unique modèle $k: L_p(\mathbb{E}) \to \mathbb{T}_{Ens}$, du type de $\mathbb{E}$ vers **Ens** , qui le prolonge, i. e. tel que $U_p(k) \circ i_{\mathbb{E}} = h$. Ceci précisé, il faudrait approfondir un peu plus les choses pour obtenir un isomorphisme entre d'éventuelles ***structures de catégories*** ayant repectivement pour objets les modèles de $\mathbb{E}$ vers **Ens** et les modèles de son type $L_p(\mathbb{E})$ vers **Ens** (dans la suite, on ne fera allusion qu'à des structures ***naturelles*** de catégories, i. e. dont les flèches sont les transformations naturelles entre modèles).

Pour procéder maintenant par l'exemple (comme annoncé), nous partirons des deux définitions usuelles (ensemblistes et / ou logiques) suivantes de la structure de **monoïdes** :

Définition 1 . Un monoïde (M, . , e) est un ensemble M muni d'une loi binaire "." partout définie, associative, et d'un élément distingué e , qui est neutre pour la loi "." .

Définition 2 . Un monoïde (M, .) est un ensemble M muni d'une loi binaire "." partout définie, associative, pour laquelle il

existe un élément neutre.

On peut constater que :
- ces énoncés sont (pour l'instant) ensemblistes,
- la langue courante permet de faire la différence (voulue) entre les deux définitions,
- il faut s'y reprendre à deux fois pour apercevoir cette différence, dont on ne sait pas trop, a priori si elle porte à conséquences ou non,
- la notation ramassée (usuelle) employée rappelle (pour l'instant) que les deux options (M, . ,e) et (M, .) sont structurellement différentes,
- en termes logiques, un argument banal de skolémisation permet de comparer ces deux définitions.

Nous allons construire (au § 1) une esquisse (classique) $\mathbb{E}_1$ pour les monoïdes au sens de la définition 1.
Puis (au § 2) nous détaillerons le montage, à partir de $\mathbb{E}_1$, d'une esquisse (classique) $\mathbb{E}'_1$ qu'on interprétera comme une première étape de la ***progression*** qui partirait de $\mathbb{E}_1$ pour aboutir à une certaine structure de type qu'elle engendrerait librement. Ainsi, les étapes successives qui pourraient être choisies pour cette progression (dont la structure même - différente de celle du type - pourrait être esquissée) contribueraient à préciser aussi la structure du type recherché. Si l'on préfère, chaque telle étape (en particulier cette première, présentée à titre d'exemple générique) constitue le montage d'une ***démonstration*** (d'une propriété particulière déduite de celles spécifiées dans l'esquisse initiale).
Ensuite (au § 3), nous construirons une esquisse (classique) $\mathbb{E}_2$ pour les monoïdes au sens de la définition 2 . Cette construction demande un peu plus d'efforts que celle de $\mathbb{E}_1$, en raison de la spécification de la seule ***existence*** d'un élement neutre non

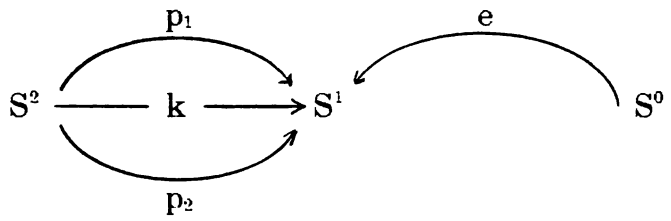
choisi : avant même ce que nous avons en vue dans la suite (au § 4), le détail que nous en donnons doit aussi être considéré comme un exemple générique dans une telle situation ("existentielle").
Enfin (au § 4), nous établissons que les deux esquisses $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$, si elles ont évidemment les mêmes (catégories de) modèles ensemblistes, n'ont pas les mêmes (catégories de) modèles dans la catégorie des espaces vectoriels sur un (quelconque) corps commutatif K . Ainsi, leurs types ne sont pas isomorphes quelles que soient leurs structures préfixées (par exemple, leurs types classiques ne le sont certainement pas).

1 . L'esquisse $\mathbb{E}_1$.

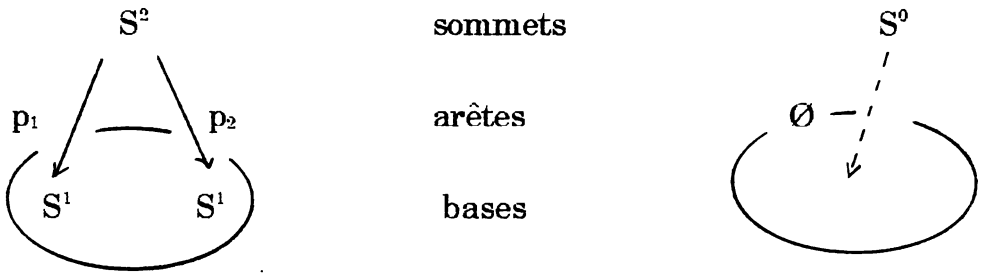
Le langage, au sens banal (i. e. classique) des monoïdes comporte:
- une loi binaire k (symbolisant une application de la forme $(x,y) \mapsto k(x,y) = x.y$),
- une loi 0-aire e (symbolisant une application de la forme $\emptyset \mapsto e$).

En termes d'esquisses, cela se traduit en disant que l'esquisse $\mathbb{E}_1$ des monoïdes (au sens de la définition 1) contient au moins l'esquisse $\mathbb{E}_0$ (qui représente seulement son langage) définie comme suit :
- le graphe sous-jacent à $\mathbb{E}_0$, qui possède trois objets et 4 flèches non triviales (parmi lesquelles on remarque la présence des deux flèches p_1 et p_2 qui ne sont pas des symboles fonctionnels du

langage précédent) , est ainsi fait:

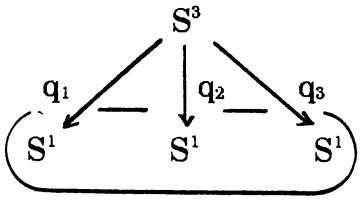


- il n' y a que des composés triviaux (avec les identités),
- il y a deux cônes (projectifs) distingués, dont les images sont les suivantes:



(et c'est la distinction de ces deux cônes - en particulier l'intervention de p_1 et p_2, symbolisant les deux projections - qui traduit les arités prescrites dans le langage précédent).

Pour parler d'associativité (sous sa forme ternaire usuelle), on voit, maintenant, qu'il convient d'étendre le langage de base (c'est-à-dire l'esquisse $\mathbb{E}_0$), en y ajoutant, au moins:
- un objet S^3 (devant représenter l'objet des (x,y,z)),
- trois flèches q_1, q_2, q_3, de S^3 vers S^1,
et de distinguer un nouveau cône projectif:



(distinction dont la seule fonction est justement d'exprimer que S^3 est bien l'objet des (x,y,z) !). On obtient ainsi une esquisse $\mathbf{E}_c'$.

Pour exprimer l'associativité, nous devons alors introduire, dans un certain ordre, certaines flèches (auxiliaires) et certaines égalités entre composés de flèches déjà introduites (ceci correspondant à la construction - usuelle - des termes spécifiques utiles à l'écriture, sous forme d'une égalité de termes, de l'axiome d'associativité). L'exemple étant assez générique de ce qui se passe, nous allons le traiter de manière un peu systématique.

On a constitué ci-dessous un tableau à deux colonnes, (i. e. de dimension 2) **F** (comme "flèches" ajoutées) et **E** (comme "égalités" ajoutées), qu'on parcourera en alternance, selon le schéma "fléché" dont voici comment il convient de le décoder:
- RIEN signifie qu'à l'étape où on en est, on ajoute rien, mais on note ce fait,
- $\text{—DEF}_c\rightarrow$ signifie que les égalités ajoutées immédiatement après certaines flèches sont destinées à *définir* celles-ci en spécifiant les valeurs (supposées déjà apparues) de leurs composés avec toutes les projections (ou coprojections) d'un cône distingué (l'emploi du mot *définir* étant un peu abusif, l'unicité n'étant requise, en principe, qu'au niveau de la structure de type),
- —NOM→ signifie que certains composés ont été définis (voir colonne **E**) et simplement nommés (voir colonne **F**),
- —AXIOME→ signifie que les égalités écrites sont ***données*** comme axiomes,
- ↵ signifie qu'il faut "passer à la ligne"... (la présence de ce symbole n'ayant pas d'autre prétention que d'améliorer la lisibilité!).

Ainsi, nous obtenons:

F		E
r_1 , r_2	—DEF_e→	$p_1.r_1 = q_1$, $p_2.r_1 = q_2$ $p_1.r_2 = q_2$, $p_2.r_2 = q_3$
	↵	
l_1 , l_2	—NOM→	$k.r_1 = l_1$ $k.r_2 = l_2$
	↵	
k_1 , k_2	—DEF_e→	$p_1.k_1 = l_1$, $p_2.k_1 = q_3$ $p_1.k_2 = q_1$, $p_2.k_2 = l_2$
	↵	
K_1 , K_2	—NOM→	$k.k_1 = K_1$ $k.k_2 = K_2$
	↵	
RIEN	—AXIOME→	$K_1 = K_2$

Pour exprimer l'unitarité, en partant encore de E_o' (i. e. indépendamment de l'associativité, ou encore sans ordre de préférence de l'une des propriétés sur l'autre), nous suivons une procédure analogue. Ainsi, nous constituons le tableau suivant :

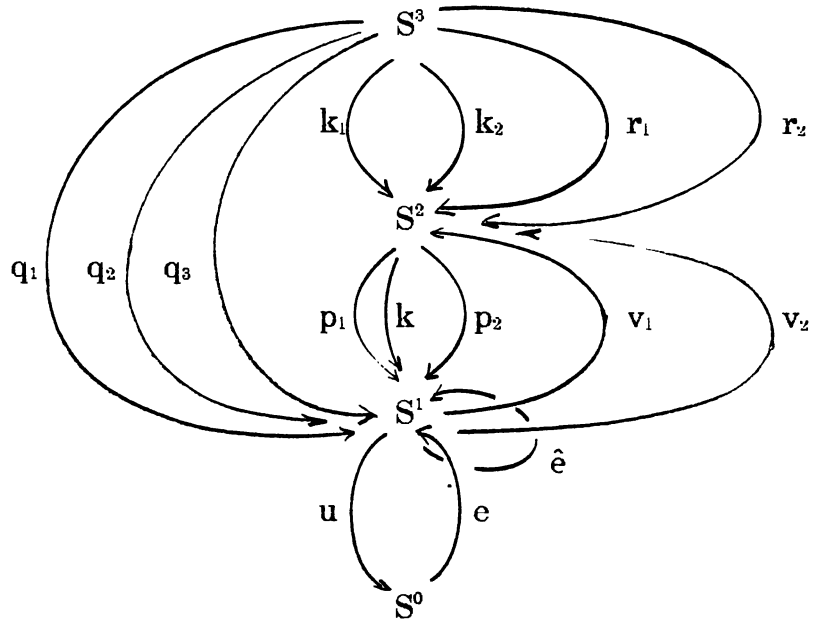
F		E
u	—DEF_e→	RIEN
	↵	
ê	—NOM→	$\hat{e} = e.u$
	↵	
v_1 , v_2	—DEF_e→	$p_1.v_1 = 1_s$, $p_2.v_1 = \hat{e}$ $p_1.v_2 = \hat{e}$, $p_2.v_2 = 1_s$
	↵	

V_1 , V_2	—NOM→	$k.v_1 = V_1$
		$k.v_2 = V_2$
	↵	
RIEN	—AXIOME→	$V_1 = 1_S$
		$V_2 = 1_S$

Bien sûr, pour constituer ces deux tableaux, nous avons procédé à certains regroupements pour ne pas trop alourdir la présentation des montages considérés. Mais, il est bien clair que, si l'on voulait développer la théorie de tels montages d'esquisses (i.e. en rechercher ... des esquisses), on aurait au contraire intérêt à réduire chaque étape du montage à son expression la plus squelettique possible, quitte à procéder aux itérations nécessaires dans chaque cas. Alors, il conviendrait d'ajouter *au moins* deux autres "colonnes" (dans un tableau de dimension 4) : une colonne **O** (comme "objets") et une colonne **C** (comme "cônes"), et d'ajouter également d'autres "constructeurs" aux précédents (tels —DEF_e→, —NOM→, ou —AXIOME→) fournissant le "sens" des divers montages élémentaires envisagés (notons que les positionnements - ou "incidences" - graphiques - tels les opérateurs domaines et co-domaines ... - se gèreraient à ce niveau). Sans aller trop loin dans cette voie (ces questions devant être reprises dans un article séparé), précisons que, de la sorte, ces colonnes apparaitraient comme autant de fibres d'une fibration au-dessus d'une certaine esquisse (ayant, entre autres, des objets **F** , **E** , **O** , **C** ... et des flèches —DEF_e→, —NOM→, —AXIOME→ ... et contenant l'esquisse - classique - d'esquisses - classiques ou non), qu'il conviendrait d'appeler l'***esquisse*** (classique) ***de montages d'esquisses*** (classiques ou non).

En tout état de cause, en rassemblant ces montages partiels (étant entendu qu'on peut évidemment permuter les deux montages partiels précédents et, pour effectuer le deuxième montage, partir de l'esquisse obtenue ***après*** le premier plutôt que de ***re-partir*** de $\mathbb{E}_0$), on obtient l'esquisse $\mathbb{E}_1$ des monoïdes (au sens de la définition 1). Finalement, elle se présente donc (globalement) comme suit :

- son graphe orienté sous-jacent est :

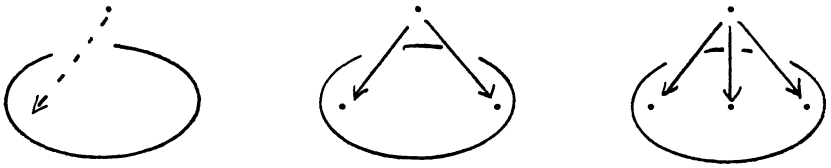


(les identités en les divers objets n'étant pas dessinées),

- sa table de composition est constituée de tous les composés triviaux (avec les identités) et de toutes les égalités introduites lors du montage, dans les deux tableaux précédents (il n'est donc pas très utile de les recopier ici),

- ses cônes (projectifs) distingués sont les trois cônes, à bases discrètes, déjà dessinés précédemment (ce qui nous dispensera de les re-préciser complètement), de sommets respectifs S^0, S^2, S^3

(notations bien suggestives) et ayant donc les formes suivantes :



Ainsi, nous venons de construire une esquisse $\mathbb{E}_1$ dont les modèles ensemblistes sont les monoïdes au sens de la définition 1 et, pour ce faire, nous avons utilisé une procédure (à vocation générale) de montage.

Simultanément, nous avons indiqué, ne serait-ce que pour partir d'un point de vue bien habituel, que l'on pouvait voir $\mathbb{E}_1$ comme ***associée*** à une théorie (égalitaire) du 1er ordre, sur le langage rappelé au début de ce § 1 . Cependant, une telle association ***théorie*** $\mapsto$ ***esquisse*** résulte d'une systématique (qui n'est que suggérée ici).

A l'inverse, on peut maintenant associer à $\mathbb{E}_1$ la théorie (multisorte) du 1er ordre suivante :
- les sortes de son langage sont tous les objets de $\mathbb{E}_1$,
- les symboles fonctionnels de son langage, tous d'arité 1 , sont ***toutes*** les flèches non triviales de $\mathbb{E}_1$ et, si $f : X \to Y$ est une telle flèche, le symbole fonctionnel f a pour sorte d'entrée X et pour sorte de sortie Y ,
- ses axiomes sont successivement :
  + la formule :

$$\forall x : X \quad f''(f'(x)) = g(x) ,$$

  dès que f'' , f' , g sont trois flèches non triviales, X est le domaine de f' et $f''.f' = g$ dans $\mathbb{E}_1$,
  + la formule :

$$\forall x : X \quad f''(f'(x)) = x ,$$

dès que f'' , f' sont deux flèches non triviales, X est le domaine de f' et $f''.f' = 1_X$ dans $\mathbb{E}_1$,

+ la formule :

$$\forall x : X \quad f''(f'(x)) = g''(g'(x)) ,$$

dès que f'' , f' , g'' , g' sont trois flèches non triviales, X est le domaine de f' , $f''.f' = F = G = g''.g'$ dans $\mathbb{E}_1$,

+ les formules :

$$\forall s_1 : S^1 \ \forall s_2 : S^1 \ \forall s_3 : S^1 \ \exists u : S^3 \ (u=u) \Rightarrow (q_1(u)=s_1 \wedge q_2(u)=s_2 \wedge q_3(u)=s_3) ,$$

$$\forall u : S^3 \ \forall u' : S^3 \ (u=u \wedge q_1(u)=q_1(u') \wedge q_2(u)=q_2(u') \wedge q_3(u)=q_3(u')) \Rightarrow (u=u') ,$$

+ les formules :

$$\forall s_1 : S^1 \ \forall s_2 : S^1 \ \exists t : S^2 \ (t=t) \Rightarrow (p_1(t)=s_1 \wedge p_2(t)=s_2)$$

$$\forall t : S^2 \ \forall t' : S^2 \ (t=t \wedge p_1(t)=p_1(t') \wedge p_2(t)=p_2(t')) \Rightarrow (t=t') ,$$

+ les formules :

$$\exists v : S^0 \ (v=v)$$

$$\forall v : S^0 \ \forall v' : S^0 \ (v=v) \Rightarrow (v=v') .$$

Alors, on peut noter que :

- à la signification des arités , devenues manifestement inutiles, se subsitue celle des sortes (qui permettent, ou permettraient, un typage des termes et des expressions)
- les nouveaux axiomes représent tant les anciens axiomes que les montages évoqués précédemment et les distinctions de cônes ... mais que cette "analyse" des (nouveaux) axiomes n'est possible que si l'on connait ... l'esquisse de départ,
- cette association ***esquisse*** $\mapsto$ ***théorie*** relève manifestement (car nous pensons avoir suffisamment détaillé les choses pour qu'il en soit ainsi) d'une deuxième systématique,
- les deux associations théorie $\mapsto$esquisse puis esquisse $\mapsto$ théorie ne sont évidemment pas "inverses" l'une de l'autre ...

Il est clair que le langage logique utilisant des variables (pourtant "mutifiées") peut être plus lisible (cn fonction des habitudes .... et surtout si l'on parle du premier des deux langages logiques

introduits précédemment), mais évidemment le but poursuivi ici n'est pas du tout d'établir quelque performance d'ordre esthétique du langage des esquisses sur celui des langages logiques (et théories du premier ordre) ou inversement. D'ailleurs, même si tel était le cas, on devrait pouvoir convenir que l'aspect géométrique des esquisses (graphe orienté + cônes distingués) est tout à fait agréable à l'oeil et informatif : par exemple, c'est bien lui qui contient "par nature" le typage des variables, sans les variables ...

2 . Exemple de démonstration relative à $\mathbb{E}_1$.

Analysons la démonstration (fort banale) du fait que l'associativité portant sur 3 variables entraîne l'associativité sur 4 variables.

Du point de vue habituel (des langages et théories du 1er ordre), il suffit d'établir que l'on a (notamment) :

$$\forall x \ \forall y \ \forall z \ \forall t \ \ (x.(y.z)).t = x.(y.(z.t)) .$$

Pour ce faire, on introduit de nouveaux termes et on procède par substitution.

Du point de vue des esquisses, nous voulons montrer (sur cet exemple trivial mais générique) qu'il convient, d'abord, d'***agrandir*** l'esquisse de départ $\mathbb{E}_1$ puis de préciser vers quelle structure de type on souhaite ainsi progresser par agrandissement.

Commençons par ajouter à $\mathbb{E}_1$ les ingrédients qui permettent "d'esquisser" les nouveaux termes en cause (x.(y.z)).t , x.(y.(z.t)) ... Ainsi, on introduit :

- un objet S^4,
- de nouvelles flèches (de projections) :

$$s_1, s_2, s_3, s_4 : S^4 \to S^1,$$
$$d_1, d_2, d_3 : S^4 \to S^2,$$
$$t_1, t_2 : S^4 \to S^3,$$

- de nouvelles flèches (de compositions déduites) :

$$k'_1, k'_2, k'_3 : S^4 \to S^3,$$

- les égalités de définition des k'_i, soit :

$$q_1.k'_1 = k.d_1 \ , \ q_2.k'_1 = s_3 \ , \ q_3.k'_1 = s_4 \ ,$$
$$q_1.k'_2 = s_1 \ , \ q_2.k'_2 = k.d_2 \ , \ q_3.k'_2 = s_4 \ ,$$
$$q_1.k'_3 = s_1 \ , \ q_2.k'_3 = s_2 \ , \ q_3.k'_3 = k.d_3 \ ,$$

- des égalités entre les s_i, d_j, t_k, du genre :

$$q_2.t_2 = s_3 \ , \ p_2.d_3 = s_4$$
$$\text{etc...} \ ,$$

(évitant ainsi d'introduire trop de cônes distingués empilés les uns sur les autres),

- le cône (projectif) distingué de sommet S^4 , de base "4 fois S^1", d'arêtes s_1, s_2, s_3, s_4 .

Ainsi, nous obtenons une nouvelle esquisse $\mathbb{E}'_1$ contenant $\mathbb{E}_1$ et ayant manifestement "mêmes modèles".

Parvenus à ce point, nous devons constater que l'agrandissement $\mathbb{E}'_1$ de $\mathbb{E}_1$ est obtenu par des montages supplémentaires guidés par la structure même de la formule à démontrer. Cependant, $\mathbb{E}'_1$ ne permet pas, à elle seule, de représenter (encore moins d'établir) la véracité de cette formule. Tout au plus, elle prépare une éventuelle démonstration en en "esquissant" (ou contenant) des fragments nécessaires, ne serait-ce que les trois chemins (représentant, respectivement, les trois termes

(x.(y.z)).t , x.((y.z).t) et x.(y.(z.t))) :

$$S^4 \xrightarrow[k'_2]{} S^3 \xrightarrow[k_1]{} S^2 \xrightarrow[k]{} S^1$$

$$S^4 \xrightarrow[k'_2]{} S^3 \xrightarrow[k_2]{} S^2 \xrightarrow[k]{} S^1$$

$$S^4 \xrightarrow[k'_3]{} S^3 \xrightarrow[k_2]{} S^2 \xrightarrow[k]{} S^1$$

Mais rien, ni dans $\mathbb{E}_1$ ni dans le montage qui a permis de l'agrandir en $\mathbb{E}'_1$, ne spécifie (ou ne permet de ***déduire***) qu'on peut ne serait-ce que composer les flèches de ces différents chemins et, a fortiori, que les résultats en seraient égaux. Pourtant, tout modèle ensembliste de $\mathbb{E}'_1$ fournit des chemins images dont les flèches se composent et donnent des résultats égaux ...

Pour achever la démonstration, il nous faut donc préciser vers quel type nous progressons, via $\mathbb{E}'_1$, en partant de $\mathbb{E}_1$: c'est la fonction même de la structure du type envisagé que d'indiquer quelles sont les identifications qu'on souhaite ajouter à $\mathbb{E}'_1$ afin d'obtenir une esquisse $\mathbb{E}''_1$, ayant même type (et donc mêmes modèles) mais contenant cette fois la démonstration voulue.

Une première étape de la démonstration usuelle consiste à montrer la véracité de la formule auxiliaire:

$$\forall x \ \forall y \ \forall z \ \forall t \ \ (x.(y.z)).t = x.((y.z).t) ,$$

qui correspond, en termes d'esquisses, à l'égalité :

$$k.(k_1.k'_2) = k.(k_2.k'_2) .$$

Cette dernière résulte "formellement" des deux égalités:

- $k.k_1 = k.k_2$, vraie dans $\mathbb{E}_1$,
- $k.(k_1.k'_2) = (k.k_1).k'_2$, vraie non dans $\mathbb{E}'_1$ mais dans toute

structure (librement engendrée par $\mathbb{E}'_1$) où l'on requiert que la composition des flèches est associative et où deux flèches consécutives sont nécessairement composables.
On conçoit donc que, si l'on requiert de la structure du type recherché(e) que ce soit (au minimum ?) une ***catégorie***, on peut déduire de l'associativité à 3 variables (i. e. "de $\mathbb{E}_1$ " , mais plus précisément de $\mathbb{E}'_1$) la formule auxiliaire précédente (i. e. l'égalité $k.(k_1.k'_2) = k.(k_2.k'_2)$). C'est d'ailleurs bien pourquoi tout modèle de $\mathbb{E}'_1$, dans une ***quelconque catégorie*** (en particulier dans celle des ensembles) vérifie cette formule.

Une deuxième étape de la démonstration usuelle consiste à établir la véracité de la deuxième formule auxiliaire:

$$\forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad \forall t \quad x.((y.z).t) = x.(y.(z.t)) .$$

qui correspond, en termes d'esquisses, à l'égalité :

$$k.(k_2.k'_2) = k.(k_2.k'_3) .$$

Celle-ci résulte évidemment de l'égalité :

$$k_2.k'_2 = k_2.k'_3 ,$$

qui résulte elle-même des égalités suivantes, pourvu qu'on raisonne dans une catégorie (ce qui s'impose, vu ce qui précède) mais qui soit ***à*** (choix de) ***produits finis*** :

$$p_1.r_2.k'_2 = q_2.k'_2 = k.d_2 \quad , \quad p_1.k_1.t_1 = k.r_1.t_1 = k.d_2 ,$$
$$p_2.r_2.k'_2 = q_3.k'_2 = s_4 \quad , \quad p_2.k_1.t_1 = q_3.t_1 = s_4 ,$$
$$\text{d'où (par unicité) } r_2.k'_2 = k_1.t_1 ,$$
$$p_1.r_2.k'_3 = q_2.k'_3 = s_2 \quad , \quad p_1.k_2.t_1 = q_1.t_1 = s_2 ,$$
$$p_2.r_2.k'_3 = q_3.k'_3 = k.d_3 \quad , \quad p_2.k_2.t_1 = k.r_2.t_1 = k.d_3 ,$$
$$\text{d'où (par unicité) } r_2.k'_3 = k_2.t_1 ,$$
$$p_1.k_2.k'_2 = q_1.k'_2 = s_1 \quad , \quad p_1.k_2.k'_3 = q_1.k'_3 = s_1 \quad ,$$
$$p_2.k_2.k'_2 = k.r_2.k'_2 = k.k_1.t_1 \quad , \quad p_2.k_2.k'_3 = k.r_2.k'_3 = k.k_2.t_1 \quad ,$$
$$\text{d'où (par unicité) } k_2.k'_2 = k_2.k'_3 .$$

Finalement, on peut donc démontrer, en termes d'esquisses, que l'associativité à 4 variables se déduit de l'associativité à 3, par une ***progression*** (partant de $\mathbb{E}_1$, passant par $\mathbb{E}'_1$ puis par $\mathbb{E}''_1$) ***vers la catégorie, avec choix de produits finis, librement engendrée par l'esquisse*** $\mathbb{E}_1$ ***des monoïdes.***

3. L'esquisse $\mathbb{E}_2$.

Esquissons, maintenant, les monoïdes au sens de la définition 2 précédente : il s'agit donc des ensembles munis d'une loi binaire, associative et unitaire, c'est-à-dire pour laquelle ***il existe*** un élément neutre (non prescrit - ou non choisi -, l'unitarité s'entendant donc ici comme une propriété de la loi de composition et non comme la donnée d'une loi 0-aire).

Pour constituer l'esquisse $\mathbb{E}_2$ de ces monoïdes, on réalise un montage à partir de l'esquisse $\mathbb{S}$ des semi-groupes. Décrivons le brièvement.

L'esquisse $\mathbb{S}$ n'est autre que l'esquisse $\mathbb{E}_1$ (du § 1) privée de tout ce qui concerne l'unitarité au sens de la définition 1. Par conséquent, dans $\mathbb{S}$ il n'y a plus d'objet S^0, plus de flèches u, e, ê, v_1, v_2, etc ... et, pour obtenir $\mathbb{E}_2$, il reste à adjoindre à $\mathbb{S}$ ce qui permet ***d'esquisser la formule d'unitarité*** suivante :

$$\exists\, e \quad \forall\, x \quad x.e = e.x = x .$$

Pour ce faire, nous prenons le parti d'interpréter une formule du

genre $\forall x\ \Phi(x,e,\dots)$ comme pure abréviation de la formule (considérée, elle, comme plus "licite") $\neg \exists x \neg \Phi(x,e,\dots)$. De ce point de vue, pour construire $\mathbb{E}_2$, il nous suffira alors de savoir appliquer les trois genres de montages (généraux) suivants :

- une conjonction $\Phi(x,e,\dots)$ de formules atomiques étant donnée, montage d'une esquisse $\mathbb{S}_\Phi$ (ayant mêmes modèles que $\mathbb{S}$) qui contient un objet Φ représentant l'ensemble des $(x,e,\dots)$ tels que $\Phi(x,e,\dots)$ soit vérifiée (alors, dans le cas particulier qui nous intéresse, il suffit d'appliquer ce montage à :

$$\Phi(x,e) = (\ x.e = e.x = e\ ),$$

- montage d'un objet $\neg\Psi$ représentant la formule $\neg\Psi(\dots,y,\dots)$, à partir d'un objet Ψ représentant la formule $\Psi(\dots,y,\dots)$ (alors, dans le cas particulier qui nous intéresse, il suffit de prendre successivement :

  + après application particulière du premier montage :

$$\Psi(x,e) = (\ x.e = e.x = x\ ),$$

  + après application particulière du troisième montage ci-dessous :

$$\Psi(e) = (\ \exists x \neg\ x.e = e.x = x\ )\ ),$$

- montage d'un objet $\exists y\,\Theta$ représentant la formule $\exists y\,\Theta(\dots,y,\dots)$, à partir d'un objet Θ représentant $\Theta(\dots,y,\dots)$ (alors, dans le cas particulier qui nous intéresse, il suffit de prendre successivement :

  + après application particulière du premier montage, puis du deuxième :

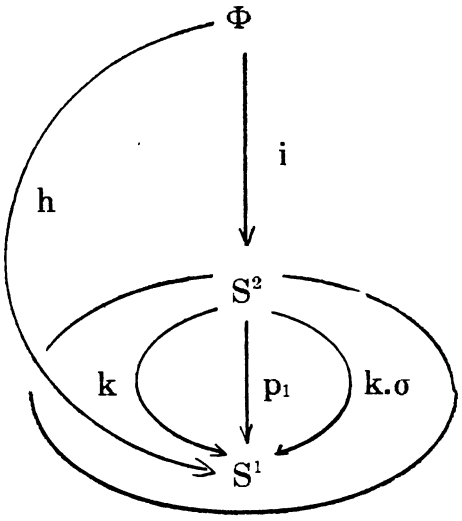
$$\Theta(x,e) = (\ \neg\ x.e = e.x = x\ ),$$

  + après application particulière du deuxième montage :

$$\Theta(e) = (\ \neg\ \exists x \neg\ x.e = e.x = x\ )\ ).$$

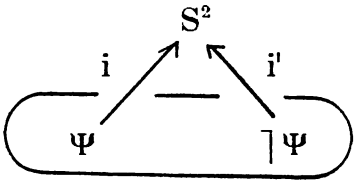
Le (premier genre de) montage de l'objet Φ des (x,e) tels que $x.e = e.x = x$ consiste à ajouter à $\mathbb{S}$ un cône projectif

distingué de sommet Φ et de type "noyau" (donc de base non discrète). Plus précisément, on procède comme suit :
- on introduit d'abord la flèche $\sigma : S^2 \to S^2$, de "permutation", "définie" par les égalités $p_1.\sigma = p_2$ et $p_2.\sigma = p_1$,
- puis, on introduit les flèches $i : \Phi \to S^2$ et $h : \Phi \to S^1$ et les égalités $h = p_1.i = k.\sigma.i = k.i$,
- enfin, on ajoute le cône projectif distingué représenté ci-dessous :



Ainsi, tout modèle de $\mathbb{S}$ se prolonge (de manière "unique") en un modèle de cette nouvelle esquisse $\mathbb{S}_\Phi$ qui transforme Φ (et la flèche i) en un noyau des trois flèches p_1, k et $k.\sigma$.

Le (deuxième genre de) montage de l'objet $\neg\Psi$, à partir de Ψ, (i. e. en "complétant" une certaine esquisse $\mathbb{S}_\Psi$) consiste à représenter $\neg\Psi$ comme "le" sous-objet de S^2 complémentaire de Ψ (supposé introduit antérieurement - avec une flèche $i : \Psi \to S^2$). Une manière naturelle de traiter la question est d'introduire un cône inductif distingué Σ de type "somme de 2 objets". Précisément, on procède comme suit :
- on introduit une nouvelle flèche $i' : \neg\Psi \to S^2$,
- on ajoute le cône inductif distingué Σ suivant :



Ainsi, tout modèle ***ensembliste*** de l'esquisse antérieurement donnée $\mathbb{S}_{\Psi}$ se prolonge en un "unique" modèle de cette nouvelle esquisse $\mathbb{S}_{\Psi,\neg\Psi}$, de sorte que S^2 devient un ensemble muni d'une ***partition*** en les deux sous-ensembles (images de) Ψ et $\neg\Psi$, puisque c'est de cette manière que se calculent les sommes ensemblistes : ils sont donc bien complémentaires l'un de l'autre.

Le (troisième genre de) montage de l'objet $\exists y\ \Theta$, à partir de l'objet Θ (et de la flèche $j : \Theta \to ... \times Y \times ...$), consiste à interpréter (en faisant référence à la situation ensembliste) $\exists y\ \Theta(... ,y, ...)$ comme ***l'image*** de $\Theta(... ,y, ...)$ par la projection "oubliant" y . Précisément, on procède comme suit :

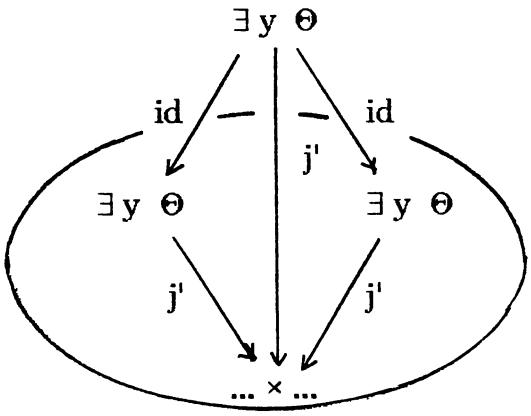
- on dispose, tout d'abord, de la flèche $j : \Theta \to ... \times Y \times ...$,
- ensuite :
    + s'il figure dans $\Theta (... ,y, ...)$ d'autres variables libres que y , on dispose d'une flèche $p : ... \times Y \times ... \to ... \times ...$ qui représente la "projection oubliant" y (les " ... " représentant les sortes des variables libres autres que y),
    + s'il ne figure pas dans $\Theta(...,y, ...) = \Theta(y)$ d'autres variables libres que y , on utilise (en les ajoutant, si nécessaire) :
        * un objet 1 , sommet d'un cône projectif distingué de base Ø (on peut donc encore noter, ou considérer que, $1 = ... \times ...$),
        * une flèche (encore notée) $p : Y \to 1$ qui représente (encore) la "projection oubliant" y ,
- on introduit une nouvelle décomposition du composé p. j , c'est-à-dire deux flèches :

$$p' : \Theta \to \exists\, y\ \Theta \text{ et } j' : \exists\, y\ \Theta \to \ldots \times \ldots ,$$

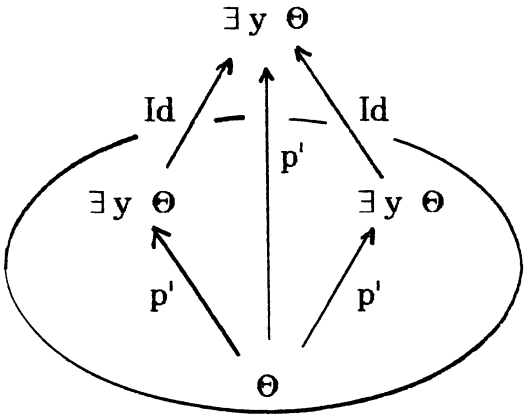
de sorte que :

$$j'.p' = p.\, j ,$$

- on ajoute le cône projectif distingué J' représenté par :



- on ajoute le cône inductif distingué P' représenté par :



Ainsi, tout modèle transforme p' en un épimorphisme et j' en un monomorphisme. Par conséquent, tout modèle ***ensembliste*** transforme bien p' en une surjection et j' en une injection, i. e. $\exists\, y\ \Theta$ en l'image de Θ par la projection oubliant y.

En résumé, avant d'achever le montage complet de l'esquisse $\mathbb{E}_2$, il faut d'abord introduire (en posant $\Phi(x,e) = (\, x.e = e.x = x\,)$) :

- Φ comme sous objet de S^2 (grâce à $i : \Phi \to S^2$),
- $\neg \Phi$ comme autre sous-objet de S^2 ("complémentaire" de Φ, grâce à une $i' : \neg \Phi \to S^2$),
- $\exists x \neg \Phi$ comme sous-objet de S^1 ("image" de $p_1.i' : \neg \Phi \to S^1$, grâce à une nouvelle décomposition:

$$\neg \Phi \xrightarrow[p'_1]{} \exists x \Phi \xrightarrow[j'_1]{} S^1$$

de $p_1. i'$),
- $\neg \exists x \neg \Phi$ comme sous-objet de S^1 ("complémentaire" de j'_1, grâce à une $j''_1 : \neg \exists x \neg \Phi \to S^1$),
- $S^0 = 1$, comme sommet d'un cône projectif de base $\emptyset$, et $p : S^1 \to 1$, représentant la projection "oubliant" toutes les variables,
- $\exists e \neg \exists x \neg \Phi$ comme sous-objet de 1 ("image" de $p. j''_1 : \neg \exists x \neg \Phi \to 1$, grâce à une nouvelle décomposition:

$$\neg \exists x \neg \Phi \xrightarrow[p']{} \exists e \neg \exists x \neg \Phi \xrightarrow[j']{} 1$$

de $p. j''_1$).

Alors, pour achever le montage complet de l'esquisse $\mathbb{E}_2$, il nous reste à exprimer que "la formule $\exists e \neg \exists x \neg \Phi(x,e)$ est vraie" : par exemple, en écrivant que j' est inversible, i. e. en ajoutant une flèche $j'' : 1 \to \exists e \neg \exists x \neg \Phi$ et les équations :
$j'. j'' = 1_1$ et $j''. j' = 1_{\exists e \neg \exists x \neg \Phi}$.

Bien entendu, pour justifier complètement l'utilisation (fréquente) du mot "montage" dans cette description de l'esquisse $\mathbb{E}_2$, nous aurions pu (plus longuement) constituer un tableau détaillé comme au § 1 (pour l'esquisse $\mathbb{E}_1$) .

Par exemple, il y figurerait une ligne telle que :

F		**E**
u	—DEF$_c$→	RIEN

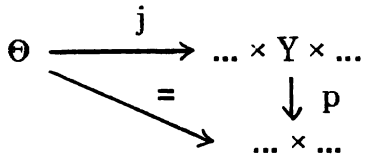
Mais il faut insister ici sur le fait qu'il serait bien ***nécessaire*** d'utiliser dans ce tableau, outre les "constructeurs" —DEF→, —NOM→ et —AXIOME→ (seuls utilisés ***explicitement*** au § 1), d'autres constructeurs plus complexes (comme cela est seulement ***suggéré*** au § 1).

D'abord, en utilisant la colonne **F** ("des flèches") et une colonne **C** ("des cônes - inductifs - distingués"), nous avons besoin d'un "constructeur de négations" (qui associe à une flèche un cône inductif distingué - de base discrète - dont cette flèche est une arête - i. e. une co-projection):

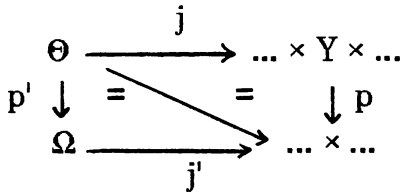
F		**C**
i	—NEG→	Σ

(en reprenant les notations précédentes).

De même, il nous faudrait introduire (en reprenant les notations qui précèdent) :
- une colonne **T** des (sous-)esquisses "triangulaires" de la forme :



- une colonne **Q** des (sous-)-esquisses de la forme :



(où sont distingués un cône projectif J' et un cône inductif P').

Ceci permettrait alors de faire figurer dans le tableau le "constructeur d'existences" (qu'il est ***nécessaire*** d'utiliser), c'est-à-dire des lignes du genre de celle qui suit :



Dans tous ces cas, on remarque que la ***nature*** de la source et du but des constructeurs utilisés ("simples" comme au § 1, plus "compliqués" ou inhabituels, comme ici) est finalement d'être un diagramme, ou un diagramme "plus précis" (comme une esquisse ...). C'est le point de vue des ***systèmes de trames***, développé en [T.S.C.S.].

Pour conclure ce § 3, évoquons quelques variantes pour les interprétations, dans la catégorie des ensembles, ou même dans une catégorie quelconque, des formules (et constructions de formules) utilisées, et donc pour les "esquisser".

Par exemple, une variante pour traduire les formules existentielles consisterait à ***distinguer*** des décompositions (i. e. à introduire une nouvelle colonne **D** et un nouvel opérateur) :

F		**D**
f	—DECOMP→	(f_2 , f_1)

(f_1 jouant le rôle d'un épi "potentiel" et f_2 celui d'un mono "potentiel" - sans que soient distingués les cônes inductif et projectif correspondants - tels les P' et J' précédents).
Ceci supposerait une modification de la structure même

d'esquisse (classique) : il faudrait prendre des graphes avec composition partielle, où sont distingués des cônes projectifs et des cônes inductifs et - indépendamment - des triangles de décomposition. Alors, on calculerait logiquement les modèles dans des catégories à limites et colimites, munies de plus d'une structure de décomposition (non nécessairement universelle, i. e. non nécessairement de la forme épi-mono-factorisation) au sens de [C.A.D.E .] ou [D.A.S.P.]. Cela signifie, aussi, que le type d'une telle esquisse (non classique) serait ***a priori*** supposé muni d'une telle structure.

De même, il n'est nullement nécessaire d'imposer que le "constructeur de négations" associe à un sous-objet un autre sous-objet (unique, à bijection près, et dont la somme avec le premier redonne l'objet total) : ce n'est que le contexte ensembliste (et / ou booléen) qui inspire cette ***forme*** au résultat d'une telle construction. Il eût été loisible d'en envisager d'autres formes : par exemple, en prescrivant que le "constructeur de négations" associe à un sous-objet tout un ***diagramme complémentaire*** (non nécessairement indexé par 1 - sauf pour des modèles ensemblistes, justement) de sous-objets (dont chacun ne serait que "partiellement" ou "localement" complémentaire).

Enfin, on aurait même pu choisir de regarder une formule telle que $\forall x\ \Phi(x,e,\dots)$ "en elle-même" comme licite (et non en tant que pure abréviation de $\neg \exists x \neg \Phi(x,e,\dots)$). Cela supposerait qu'on sache décrire la ***nature*** (dans le même sens que précédemment) des diagrammes source et but d'un certain constructeur —QUELQUESOIT→ : de nouveau, le point de vue des trames et systèmes de trames (par exemple) le permettrait.

4 . Modèles de $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$ dans K-Vect.

Dans toute la suite, on suppose que K est un corps commutatif et on désigne par K-Vect la catégorie dont les objets sont les K-espaces vectoriels et dont les flèches sont les applications K-linéaires.

Supposons que (M , k , e) est un monoïde (au sens de la définition 1) "interne aux K-espaces vectoriels", i. e. un modèle de $\mathbb{E}_1$ dans la catégorie K-Vect .
Cela signifie, en particulier, que :
- M est un K-espace vectoriel,
- "l'élément" neutre $e : M^0 \to M$ est une application K-linéaire,
- la loi de composition $k : M \times M \to M$ est une application K-linéaire.

On en déduit que :
- puisque M^0 est le K-espace vectoriel nul, l'élément neutre (repéré par) e est nécessairement le vecteur nul de M ,
- pour tous $x,y \in M$, puisque $(x,y) = (x,0) + (0,y)$, on a (en raison de l'axiome d'unitarité - au sens de la définition 1) :

$$\begin{aligned} k((x,y)) &= k((x,0) + (0,y)) \\ &= k((x,0)) + k((0,y)) \\ &= k((x,e)) + k((e,y)) \\ &= x + y . \end{aligned}$$

Ainsi, sur un K-espace vectoriel donné M , il y a ***exactement une structure de monoïde, au sens de la définition 1*** (interne aux K-espaces vectoriels) possible : c'est celle fournie par l'addition des vecteurs de M !

Supposons que (M, k) est un monoïde (au sens de la définition 2) "interne aux K-espaces vectoriels", i. e. un modèle de $\mathbb{E}_2$ dans la catégorie K-Vect .

Cela signifie, en particulier, que:

- M est un K-espace vectoriel
- la loi de composition $k : M \times M \to M$ est une application K-linéaire.

On en déduit immédiatement que :

- on a déjà $k((0,0)) = 0$,
- on a, de plus (en raison de l'axiome d'associativité) :

$$k((k((x,0)),0)) = k((x,k((0,0)))) = k((x,0)) .$$

Par conséquent, l'application $\lambda : M \to M$, qui à un quelconque $x \in M$ fait correspondre $\lambda(x) = k((x,0))$, est une application idempotente et K-linéaire : c'est donc un projecteur. De même, l'application $\mu : M \to M$, qui à un quelconque $y \in M$ fait correspondre $\mu(y) = k((0,y))$, est un projecteur.

Maintenant, on voit que, pour tous $x,y,z \in M$, on a :

$$\begin{aligned} k((k((x,y)),z)) &= \lambda(\lambda(x) + \mu(y)) + \mu(z) \\ &= \lambda^2(x) + (\lambda.\mu)(y) + \mu(z) \\ &= \lambda(x) + (\lambda.\mu)(y) + \mu(z) , \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} k((x,k((y,z)))) &= \lambda(x) + \mu(\lambda(y) + \mu(z)) \\ &= \lambda(x) + (\mu.\lambda)(y) + \mu^2(z) \\ &= \lambda(x) + (\mu.\lambda)(y) + \mu(z) , \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (en utilisant l'axiome d'associativité générale à trois variables) que $\lambda.\mu = \mu.\lambda$.

On peut donc affirmer que la loi de composition $k : M \times M \to M$ est de la forme $k = \lambda.p_1 + \mu.p_2$, où $p_1, p_2 : M \times M \to M$ sont les deux projections et $\lambda, \mu : M \to M$ sont deux projecteurs qui commutent.

Réciproquement, on vérifie facilement que, si M est un K-espace vectoriel et si $(\lambda,\mu : M \to M)$ est un couple de projecteurs qui commutent, alors (M, k) est (au moins) un "semi-groupe interne aux K-espaces vectoriels", i. e. un modèle de $\mathbb{S}$ dans K-Vect, lorsqu'on définit la loi de composition $k : M \times M \to M$ en posant :

- $k((x,y)) = \lambda(x) + \mu(y)$, pour tous $x,y \in M$.

Les calculs précédents ne faisant nullement intervenir l'unitarité (sous quelque forme que ce soit), il apparaît que, sur un K-espace vectoriel donné M, ***il y a autant de structures de semi-groupes*** (internes aux K-espaces vectoriels) ***que de couples de projecteurs qui commutent.***

Plus précisément encore, ***la seule structure de monoïde, au sens de la définition 1, possible sur*** M ***est aussi une (parmi toutes les possibles) structure(s) de monoïde, au sens de la définition 2***, (c'est celle qui correspond au choix $\lambda = \mu = Id_M$, pour laquelle on vérifie que 0 est bien un élément neutre et que c'est le seul possible). Mais c'est dire que, pour tout autre choix du couple de projecteurs qui commutent, il ne peut y avoir, éventuellement, de structure de monoïde sur M qu'au sens de la définition 2.

Il y a mieux : si M est un K-espace vectoriel, ***il existe des monoïdes, au sens de la définition 2, sur*** M, ***qui sont non isomorphes entre eux et qui ont pourtant même structure de semi-groupe sous-jacente.***

Par exemple, choisissons $\lambda = Id_M$ et $\mu = 0$, de sorte que $k = p_1$. Le semi-groupe trivial (M, p_1) est muni de *deux* structures de monoïdes (au sens de la définition 2) non isomorphes. En effet, on voit successivement que (en reprenant les montages et notations du § 3):

- Φ est la diagonale de M^2,
- $\neg\, \Phi$ est ***un*** supplémentaire de cette diagonale (c'est là un des arbitraires de l'interprétation fournie au § 3),
- $\exists\, x\ \neg \Phi$ est alors isomorphe soit à M , soit à {0} , selon le ***choix*** (qu'on a toute latitude de faire) du supplémentaire précédent (soit différent de $p_2(M^2)$, soit égal à $p_2(M^2)$),
- $\neg\, \exists\, x\ \neg\, \Phi$ est alors égal soit à {0}, soit à M, toujours selon le choix précédemment effectué,
- $\exists\, e\ \neg\, \exists\, x\ \neg\, \Phi$ est toujours "vraie", puisque tout sous-K-espace vectoriel de {0} est ... {0} .

Ainsi, pour peu que M soit différent de {0} , on vient bien de mettre en évidence ***deux*** modèles de $\mathbb{E}_2$ vers K-Vect qui sont non isomorphes mais qui prolongent le même modèle (à savoir celui qui s'identifie à (M , p_1)) de $\mathbb{S}$.

On observera que les monoïdes considérés, au sens de la définition 2 (par exemple), qui sont donc unitaires (au sens de cette définition 2), sont également ***non unitaires***, en ce sens qu'ils se prolongent, en tant que modèles de $\mathbb{E}_2$ dans K-Vect , en des modèles d'une sur-esquisse de $\mathbb{E}_2$ contenant un objet représentant $\neg\, \exists\, e\ \neg \exists\, x\ \neg\, \Phi(x,e)$! Cette remarque ne fait que confirmer une chose que nous avons déjà soulignée , à savoir que l'interprétation ***choisie*** (au § 3) pour la négation est "ensembliste" (et/ou booléenne). Cependant, il n'y a pas plus de contradiction ici que dans l'égalité "0 = 1", vraie dans toute catégorie pourvue d'un objet ***nul*** : par exemple, dans K-Vect , ou dans la structure - à laquelle on imposerait cette prescription a priori - du type (non classique) engendré par $\mathbb{E}_2$.

Le calcul précédent, qui permet d'établir que toute loi k d'un semi-groupe (M , k), interne à K-Vect , s'écrit de manière

unique sous la forme $k = \lambda.p_1 + \mu.p_2$, où $\lambda^2 = \lambda$, $\mu^2 = \mu$ et $\lambda.\mu = \mu.\lambda$, pourrait tout aussi bien faire l'objet d'une démonstration (au sens du § 2) dans le ***type additif*** engendré par $\mathbb{S}$.

Comme il y a "plus" de modèles de $\mathbb{E}_2$ dans K-Vect que de modèles de $\mathbb{E}_1$, ces deux esquisses n'ont pas même type (classique) . Ainsi, on peut affirmer qu'il n'est pas possible de prouver (au sens du § 2 , à partir de $\mathbb{E}_2$ et en progressant vers son type) une formule d'***unicité*** du genre :

$$(\exists\, e\ \forall\, x\ \Phi(x,e)\ ) \rightarrow (\exists\, !\ e\ \ \forall\, x\ \Phi(x,e)\ )$$

ou encore une propriété de "représentabilité" (correspondant à la skolémisation de la formule d'unitarité) exprimant que certains épi sont scindés.

Bibliographie.

[C.A.D.E.] L. Coppey :
Catégories à décompositions,
Esquisses Mathématiques 24, Amiens, 1976.

[C.E.T.G.] C. Lair :
Construction d'esquisses et transformations naturelles généralisées,
Esquisses Mathématiques 2, Paris, 1970.

[C.M.C.E.] C. Lair :
Catégories modelables et catégories esquissables,
Diagrammes 6, Paris, 1981.

[C.S.M.F.] R. Guitart et C. Lair :
Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes,
Diagrammes 4, Paris, 1980.

[D.A.S.P.] L. Coppey :
Décomposition algébrique des structures en produits,
Esquisses Mathématiques 14, Paris, 1971.

[E.C.L.Q.] A. Burroni :
Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies,
Esquisses Mathématiques 5, Paris, 1970.

[E.D.L.L.] R. Guitart et C. Lair :
Existence de diagrammes localement libres,
Diagrammes 6, Paris, 1981.

[E.S.C.A.] D. Duval et J.-C. Reynaud :
Sketches and computation,
(Esquisses et calcul),
Rapport de Recherche RR 871-I-IMAG-123-LIFIA,
Institut I.M.A.G., Grenoble, 1991.

[E.T.S.A.] C. Ehresmann :
Esquisses et types des structures algébriques,
Bul. Instit. Polit., Iasi, XIV, 1968.

[I.T.S.C.] C. Ehresmann :
Introduction to the theory of structured categories,
Techn. Rep. 10, Univ. of Kansas, Lawrence, 1966.

[L.T.E.S.] L. Coppey et C. Lair :
Leçons de théorie des esquisses, I et II
Diagrammes 12 et 19, Paris, 1984 et 1988.

[T.S.C.S.] C. Lair :
Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames,
Diagrammes 18, Paris, 1987.

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5ème Etage

2, place JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE