DIAGRAMMES

JUAN-JOSÉ ARRABAL

Note sur un résultat dans l'homologie sectionnelle

Diagrammes, tome 27 (1992), exp. n° 1, p. JA1-JA11

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1992__27__A1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 27 , 1992

NOTE SUR UN RÉSULTAT DANS L'HOMOLOGIE SECTIONNELLE

Juan-José Arrabal

En 1977, Shih [4] a introduit, pour l'étude des sections d'une application $f:Y\longrightarrow X$ de classe C^k, où Y et X sont des espaces de classe C^k avec $0\leq k\leq\infty$, une nouvelle "homologie" appelée homologie sectionnelle

Cette homologie, introduite d'abord dans le cadre de la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles, intervient également dans les problèmes liés aux singularités des applications différentiables.

Dans le cas d'une application $f:Y\longrightarrow X$ de classe C^k avec $k>0$, un q-simplexe sectionnel de f, k-fois différentiable, est un couple (σ,γ) formé d'un plongement $\sigma:\Delta_q\longrightarrow X$ de classe C^k et d'une application de la même classe $\gamma:\Delta_q\longrightarrow Y$ tels que l'on ait $\sigma=f\gamma$. Ces simplexes constituent les générateurs du complexe $C(f)_k$

A.M.S. SUB. CLASS. : 55 N 35 , 35 A 30 , 57 R 45 , 55 S 35.

des chaînes sectionnelles dont l'homologie, notée $H_*(f)_k$, est appelée homologie sectionnelle de classe C^k de f. Lalonde a établi le résultat fondamental suivant:

THÉORÈME S [3]: Il existe un morphisme canonique $(p_2)_*:H_*(f)_k \longrightarrow H_*(X)$ qui, pour toute submersion f, est un isomorphisme en dimensions $* < n = \dim X$ et une surjection pour $* = n$.

Dans ce travail on donne un exemple qui montre que ce résultat est faux sans l'hypotèse de différentiabilité. On prouve, en effet, que $H_1(f) \neq 0$ pour $f = id: S^2 \longrightarrow S^2$. On a donc aussi un contre-exemple à l'affirmation de Shih (voir [5]) sur l'homologie sectionnelle continue de l'identité d'un C.W. complexe fini.

1.- DEFINITIONS.

Soit $f:Y \longrightarrow X$ une application continue d'un espace Y dans un autre X. Notons Δ_q le q-ième simplexe standard de $\mathbb{R}^{q+1}$, defini par

$$\Delta_q = \{ (x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} ; x_i \geq 0, \ \sum x_i = 1 \},$$

et considérons les couples (σ, γ) d'applications continues

$$\sigma:\Delta_q \longrightarrow X, \quad \gamma:\Delta_q \longrightarrow Y \qquad (1)$$

telles que σ soit injective et $f\circ\gamma=\sigma$. Dans [5], on désigne par $\mathcal{G}_q(f)$ le groupe abélien libre engendré par ces couples.

Les projections $p_1:(\sigma,\gamma)\longrightarrow\sigma$ et $p_2:(\sigma,\gamma)\longrightarrow\gamma$ induisent des homomorphismes du groupe $\mathcal{G}_q(f)$ dans les groupes libre des chaînes singulières $S_q(X)$ et $S_q(Y)$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G}_q(f) & \\ {\scriptstyle p_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_2} \\ S_q(X) & \xleftarrow{\ f\ } & S_q(Y) \end{array} \qquad (2)$$

Soit Sd l'homomorphisme de Subdivision barycentrique, défini dans les complexes de chaînes $S_*(X)$ et $S_*(Y)$. Si pour l'application $\gamma:\Delta_q\longrightarrow Y$ on a Sd $\gamma = \sum\delta_i\gamma_i$ $(\delta_i=\pm1)$, alors Sd σ = Sd $f\gamma = \sum\delta_i f\gamma_i$.

On peut donc définir Sd dans $S_*(f)$ par

$$Sd(\sigma,\gamma) = \sum\delta_i(f\gamma_i,\gamma_i)$$

Pour $c\in\mathcal{G}_q(f)$ on a évidemment

$$p_1Sd(c) = Sd(p_1(c)) \quad \text{et} \quad p_2Sd(c) = Sd\ p_2(c) \qquad (3)$$

Les q+1 faces ∂_i de Δ_q nous permettent d'introduire un homomorphisme

$$d_q = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\partial_i = \mathcal{G}_q(f)\longrightarrow \mathcal{G}_{q-1}(f).$$

Comme dans la théorie d'homologie singulière, on a $d_{q-1}\circ d_q=0$, et aussi $Sd_{q-1}d_q=d_qSd_q$.

Considérons les groupes quotients

$$C_q(f) = \frac{\mathcal{S}_q(f)}{\text{Ker } Sd_q} \quad .$$

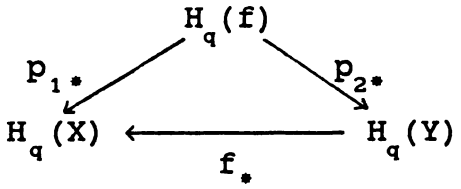
Si $a-b \in \text{Ker } Sd_q$, alors $Sd_q(a-b)=0$. Donc, $0=d_q(0)= d_q Sd_q(a-b) = Sd_{q-1}(d_q(a)-d_q(b))$; C'est à dire, si $a-b \in \text{Ker } Sd_q$, $d_q(a)-d_q(b) \in \text{Ker } Sd_{q-1}$. Par conséquent, d_* induit un morphisme sur $C_*(f)$, que l'on notera aussi par d_* et qui vérifie $d_{q-1} \circ d_q = 0$. Les groupes d'homologie du complexe $\{C_q(f), d_q\}$ sont appelés <u>groupes d'homologie sectionnelle de</u> f.

Un cycle de $C_q(f)$ est représenté par une chaîne $c \in \mathcal{S}_q(f)$ telle que $Sd_{q-1}(d_q(c))=0$. Si c et c' sont deux représentants de $z \in C_q(f)$, alors $Sd(c) = Sd(c')$ et $p_i Sd(c) = p_i Sd\ c'$, où p_i (i=1,2) sont les projections définies dans (2). Donc, les applications

$$p_1 : z \in C_q(f) \longrightarrow p_1 Sd(c) \in S_q(X)$$

$$p_2 : z \in C_q(f) \longrightarrow p_2 Sd(c) \in S_q(Y)$$

sont des morphismes de complexes de chaînes, et ils induisent le diagramme commutatif suivant



2.- CONTRE-EXEMPLE

Montrons maintenant qu'en général

$$p_{i_*}: H_{n-1}(id)_s \longrightarrow H_{n-1}(X)$$

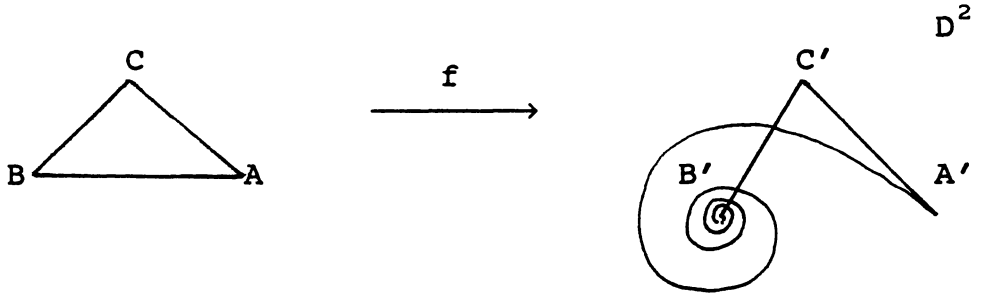
n'est pas un isomorphisme, X étant un CW-complexe fini de dimension n et id:X⟶X l'application identique.

En effet, prenons pour X la boule fermée de dimension 2, D^2, et considérons dans X la chaîne sectionnelle

$$c_1 = (\sigma_1,\sigma_1) + (\sigma_2,\sigma_2) + (\sigma_3,\sigma_3)$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 sont les 1-simplexes singuliers injectifs suivants:

Soit s_1, s_2 et s_3 les 1-simplexes affines qui forment le bord orienté du triangle ABC de la figure,



et f une application continue de ABC sur D^2 telle que f envoie AB sur une spirale infinie autour de B'=f(B), et les arêtes BC et CA sur les segments rectilignes B'C' et C'A' respectivement. Alors, $\sigma_i=f(s_i)$ (i=1, 2, 3). Evidemment, c_1 représente un cycle.

Supposons par absurde que pour $X = D^2$ on vérifie $p_1:H_1(id)\simeq 0$. Alors, la classe d'homologie sectionnelle représentée par c_1 est la classe nulle. Donc, il existe une 2-chaîne sectionnelle c_2, telle que $Sd\circ d_2\circ c_2= Sd\circ c_1$. On applique p_1 et on obtient

$$p_1\circ Sd\circ d_2\circ c_2 = p_1\circ Sd\circ c_1.$$

Alors

$$d_2\circ p_1\circ Sd\circ d_2\circ c_2 = p_1\circ Sd\circ c_1, \qquad (*)$$

$p_1\circ Sd\circ c$ étant la chaîne $f\circ Sd(s_1+s_2+s_3) = \sum_{i=1}^{6} f\circ s'_i$, où $\{s'_1,\ldots,s'_6\}$ est l'ensemble des simplexes affines de la subdivision barycentrique du bord du triangle ABC.

Si l'on écrit $\sum\pm\delta_i$ pour la chaîne $p_1\circ Sd\circ c_2$ (on rappelle que les simplexes δ_i sont injectifs), on a

$$d_2\Big(\sum_i \pm\delta_i\Big) = \sum_{j=0}^{2}\Big(\sum_i (-1)^j\ (\pm\partial_j\delta_i)\Big)$$

et on désignera par $\sum\pm\nu_j$ cette dernière somme formelle.

D'après les techniques de Dominguez [2] on construira une 2-pseudovariété N pour représenter la relation (*) par un bordisme.

On notera R^+(resp., R^-) l'ensemble des simplexes qui ont le signe + (resp., -) dans $\sum\pm\nu_j$. On supposera données des "ordinations" sur R^+ et R^-. Soit $R^+= \{\tau_1,\ldots,\tau_r\}$ et soit $R^-= \{\omega_1,\ldots,\omega_{r'}\}$, avec $r\leq r'$. On définit une application injective $h:R^+\longrightarrow R^-$ de la façon suivante:

1) $h(\tau_1)= \omega_k$ si $\tau_1= \omega_k$ et $\tau_1\neq \omega_{k'}$ pour tout $k'<k$.

2) Supposons qu'on a déjà défini l'image de $\{\tau_1,\ldots,\tau_l\}$. Alors, posons $h(\tau_{l+1})=\omega_i$ si $\tau_{l+1}=\omega_i$ avec $\omega_i\notin h(\{\tau_1,\ldots,\tau_l\})$ et, pour tout $i'<i$, $\tau_{l+1}\neq\omega_{i'}$ si $\omega_{i'}\notin h(\{\tau_1,\ldots,\tau_l)\}$.

Soit A l'ensemble obtenu en prenant une copie Δ_2^i du 2-simplexe standard Δ_2 pour chaque terme δ_i de la somme $\sum\pm\delta_i$. On munit Δ_2^i de l'orientation + où -, selon le signe de δ_i. Donc, chaque 1-simplexe singulier de $d_2(\sum\pm\delta_i)=\sum\pm\nu_j$ est defini sur une 1-face d'un élément de A, et son signe dans $\sum\pm\nu_j$ coïncide avec l'orientation induite sur cette face par le 2-simplexe auquel elle appartient.

Si l'on identifie les éléments de A qui correspondent à τ_k et $h(\tau_k)$, on obtient un polyèdre $N=|L|$ qui est une pseudovariété à bord au sens de [1].

Désignons par $\dot{L}$ le sous-complexe de L tel que

$|\dot{L}|=\partial N$. Soit $\bar{g}:N\longrightarrow D^2$ l'application quotient induite par les simplexes singuliers δ_i, et $\bar{f}=\bar{g}|_{\partial N}$. Alors, $\bar{g}$ et $\bar{f}$ sont des applications injectives sur chaque simplexe de L et $\dot{L}$ respectivement. De même, on vérifie que les points A', B' et C' sont des images par $\bar{f}$ de certains sommets de $\dot{L}$.

Le support de la chaîne $d(\sum\pm\delta_i)$ coïncide avec l'image de la chaîne

$$p_1\circ Sd\circ c_1 = f\circ Sd(s_1+s_2+s_3) = \sum_{i=1}^{6} f\circ s_i'$$

Donc, il coïncide avec l'image de l'application f.

D'après la définition de c_1, l'image du simplexe Δ_1 par les simplexes singulièrs de la chaîne $p_1\circ Sd\circ c_1$ est:

a) Un segment rectiligne, si cette image est contenue dans les segments B'C' ou C'A';

b) Un segment curviligne, si elle est contenue dans la spirale infinie A'B'.

Il en va de même pour les images par $\bar{f}$ des 1-simplexes de $\dot{L}$. De plus, l'image par $\bar{f}$ du complexe obtenu en enlèvant un 1-simplexe de $\dot{L}$, ne coïncide pas avec celle de $\dot{L}$.

Le point final de la spirale A'B', B', est aussi l'image par $\bar{f}$ du sommet $B\in\dot{L}$, et le point initial du

segment B'C'. Donc, il n'y a que deux 1-simpexes de $\dot{L}$, l_1 et l_2 , qui contiennent le sommet B. De plus, l'image de l_1 est contenue dans le segment B'C', et celle de l_2 est une spirale infinie. Par conséquent, il n'y a qu'une composante connexe Q de lk(B,L) dont le bord est non vide. Soit V le cône B*Q. Il est clair que l_1 et l_2 sont contenues dans V, aussi que V est une 2-boule.

Alors, il existe une chaîne de 2-simplexes de V

$$t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k$$

satisfaisant les conditions suivantes

a) $t_i \cap t_{i-1}$ est une 1-face commune qui contient le sommet B,

b) l_1 est une face de t_1, et l_2 est une face de t_k.

L'intersection de $\bar{g}(t_k \cap t_{k-1})$ et $\bar{g}(l_2)$ est le point B' puisque $\bar{g}|_{t_k}$ est injective. Donc $\bar{g}(t_k \cap t_{k-1})$ et $\bar{g}(l_2)$ sont des spirales infinies. Si on procède de même pour les simplexes $t_{k-1}, \ldots, t_2, t_1$, on obtient que $\bar{g}(l_1)$ est aussi une spirale infinie. Ceci contredit le fait que cette image est contenue dans le segment B'C'.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Agoston, M. K.

Algebraic Topology. Marcel Dekker, Inc. New York. 1976.

[2] Dominguez, E.

"Interpretación geométrica de la homología singular". Revista Real Academia de Ciencias 69. Madrid, 1975, 149-156.

[3] Lalonde, F.

Homologie de Shih d'une submersion. (Homologies non singulières des varietés feuilletées). Bull. Soc. Math. France. 1987. Memoire n. 30.

[4] Shih, W.

"Un invariant algébrique associé à une application continue et le problème de Cauchy global". C.R.A.S., t.285, série A, p.333, Paris. 1977.

[5] Shih, W.

"Un invariant algébrique associé à une application continue". Diagrammes 15, Paris 1986.

Juan-José Arrabal

Departamento Alg. Comp. Geom. y Top.

Facultad de Matemáticas

Universidad de Sevilla

Apdo. 1160

41080 Sevilla

Espagne.

L'auteur a bénéficié d'un financement dans le cadre du programme "Plan Andaluz de Investigación" (JUNTA DE ANDALUCIA. ESPAGNE).