DIAGRAMMES

G. PALIAS

Structures quasi-métriques (suite)

Diagrammes, tome 21 (1989), exp. n° 5, p. P1-P28

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1989__21__A5_0>

© Université Paris 7, UER math., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 21 , 1989

STRUCTURES QUASI-METRIQUES (SUITE)

G. Palias

Avertissement

Ce texte est une suite naturelle de [4], article paru dans le Volume 6 de Diagrammes, en 1981, et qui s'intitulait également "Structures quasi-métriques".

Signalons tout de suite deux coquilles qui subsistent dans notre article original [4]:

page 17, ligne 10:
lire "...$U_0^i \cap \Delta E_j \neq \emptyset$..." au lieu de "...$U_0^i \cap \Delta E_j = \emptyset$..."

page 23, ligne 16, le mot "symétrique" manque:
lire "...$V \in \phi(i)$ *symétrique* est un connecteur..."

Dans ce texte, on discutera le théorème 1 de [4] (énoncé p.16) en montrant que l'hypothèse (III) dite de *symétrie* y est indispensable; nous exhiberons un contre-exemple à cet effet. De plus, on montrera que l'hypothèse (I) de *finitude partitive* peut être affaiblie en une hypothèse (I') de *finitude connective* portant sur la quasi-uniformité donnée.

Cette première partie sur les structures quasi-métriques est enrichie d'un théorème de *complétion*. La notion de *filtre de Cauchy* se généralise aux quasi-uniformités (cf. [2]), et on proposera une construction explicite de la complétée d'une quasi-uniformité *quasi-artinienne*.

A.M.S. SUB CLASS. : 54 E 15 , 54 E 99 .

I. Retour sur le Théorème 1 (cf. [4], p.16) (quasi-écarts sous-jacents à certaines quasi-uniformités)

En vue de l'étude des multiples exemples de quasi-uniformités que nous construirons, nous allons d'abord rendre la définition de structure quasi-uniforme plus "maniable" (cf. définition 0 de [4], page 10, axiomes (A) et (B)). La terminologie ci-dessous est introduite à cet effet, sous forme de définitions partielles.

Définition 10. Un ensemble E muni d'une partition $(E, (E_i)_{i\in I})$ sera appelé *structure partitive* sur E.

Définition 11. Une structure partitive sur E munie en plus d'une famille de filtres, soit $((E_i)_{i\in I}, \phi)$, vérifiant l'axiome (A) rappelé ci-dessous, sera dite *structure filtrée partitive* sur E. Rappelons donc l'axiome (A):

(A) Pour tout $i \in I$, $\phi(i)$ est un filtre sur $E \times E$ admettant une base symétrique et tout $U \in \phi(i)$ contient la diagonale correspondante $\Delta E_i = \{ (x, x) \mid x \in E_i \}$.

Soit une structure filtrée partitive donnée $u = ((E_i)_{i\in I}, \phi)$ sur un ensemble E, et soient $i \in I$ et $J \subset I$.

Définition 12. On dira que J est $\phi(i)$-*transitif* (ou plus simplement i-*transitif*) si et seulement si, quel que soit $U \in \phi(i)$, il existe un élément (*symétrique*) U' de $\phi(i)$ tel que, pour tout $j \in J$, la condition $U' \Delta E_j \neq \emptyset$ entraîne l'existence d'un élément (*symétrique*) V de $\phi(j)$ vérifiant $U' \circ V \subset U$.

Un élément *symétrique* U' par l'intermédiaire duquel les $\phi(j)$, $j \in J$, seront *transitivement connectés vers* U sera appelé J-*transconnecteur pour* U. Si $J = I$, on dira simplement *transconnecteur pour* U. On notera U' un tel élément, conformément à la notation utilisée dans [2] et dans [3]. U' pourra d'ailleurs être choisi de manière à avoir: $U' \circ U' \subset U$.

Nous pouvons alors rappeler la définition d'une *quasi-uniformité* (cf. définition 0 de [4]) : c'est une structure filtrée

partitive $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$ sur E (axiome (A)) telle que, pour tout $i \in I$, I est $\phi(i)$-transitif (axiome (B)).

Nous devons encore rappeler la définition 8 de [4] (page 23), corrigée (cf. l'avertissement) . Soit donc $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$ une quasi-uniformité sur E et soit $i \in I$.

Définition 08. Un élément $V \in \phi(i)$, symétrique, est un *connecteur pour* $\phi(i)$, si la condition $U \cap \Delta E_j \neq \emptyset$ entraîne que j est *bien connecté à* i. On dit que u est *connectif* si pour tout $i \in I$, $\phi(i)$ admet des *connecteurs*.

Revenons alors au *Théorème* 1 de [4] (page 16). Pour montrer qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse (III) dite de *symétrie*, nous allons fournir un contre-exemple, c'est-à-dire une quasi-uniformité $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$ qui ne vérifie que les hypothèses (I) et (II) du Théorème 1 , et pour laquelle le *quasi-écart* construit à la manière du Théorème ne vérifiera pas l'axiome de *Q-triangularité*. Ainsi, on pourra conclure que la construction du quasi-écart proposée dans le Théorème nécessite effectivement l'hypothèse supplémentaire de *symétrie*.

Construction du contre-exemple.

Définissons l'ensemble sous-jacent à la quasi-uniformité $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$ comme étant :

$$E = q(u) = \{ 0 \} \cup \{ 3^{-n} \mid n \geq 0 \}$$

Nous choisissons pour I un ensemble à 2 éléments: $I = \{ 0, 1 \}$, et nous posons $E_0 = \{ 0, 1 \}$ et $E_1 = \{ 3^{-n} \mid n \geq 1 \}$.
Définissons maintenant les filtres $\phi(i)$ par des bases B_i :

$$B_0 = \{ U_n \mid n \geq 0 \} ,$$

où on a posé:

$$U_0 = E \times E ,$$
$$U_1 = \{ (x, y) \mid |x - y| \leq 2/3 \}$$

et pour $n \geq 2$,

$$U_n = \{ (x, y) \mid |x - y| \leq 3^{-n+1} \} .$$

$$B_1 = \{ V_n \mid n \geq 0 \} ,$$

où on a posé, pour $n = 0, 1, 2, 3$:

$$V_n = E_1 \times E_1$$

et pour $n \geq 4$,

$$V_n = \{ (x, y) \in E_1 \times E_1 \mid |x - y| < 3^{-n+2} \} .$$

Cette structure u, ainsi définie, est-elle bien une quasi-uniformité ? Evidemment c'est une structure filtrée partitive, puisque

a) Tout élément de B_i, $i = 0, 1$, contient bien la diagonale correspondante ΔE_i.

b) Les B_i sont des bases *connectées* (cf. définition 4 de [4], page 12), ce qui signifie que les éléments U des B_i ont les deux propriétés suivantes, quel que soit $(y, z) \in U$:
   1) il existe $x \in E_i$ tel que (y, x) et $(z, x) \in U$;
   2) (y, y) et $(z, z) \in U$.

Regardons maintenant si $I = \{ 0, 1 \}$ est 0-transitif. Soit donc $U \in \phi(0)$: il existe $U_n \in B_0$ tel que $U_n \subset U$. Constatons que pour $m \geq n+2$, U_m est un transconnecteur pour U (cf. définition 12 ci-dessus). En effet, on a:

$$U_{n+2} \circ U_{n+2} \subset U_{n+2} \subset U_n \subset U ,$$

L'indice 1 étant bien connecté à l'indice 0 (i.e. tout élément V de $\phi(1)$ coupe la diagonale ΔE_0 : $V \cap \Delta E_0 \neq \emptyset$), exhibons un élément symétrique V de $\phi(1)$ tel que $U_m \circ V \subset U$: l'élément $V = V_{n+4} \in B_1$ convient car $V_{n+4} \subset U_{n+2}$. Il reste à démontrer que $I = \{ 0, 1 \}$ est 1- transitif. Si $V \in \phi(1)$, il existe $V_n \in B_1$ tel que $V_n \subset V$, qui va bien servir de transconnecteur pour V. En effet, on a:

$$V_n \circ V_n \subset V_n \subset V ,$$

et d'autre part, $V_n \cap \Delta E_0 = \emptyset$. Ainsi, u est bien une quasi-uniformité satisfaisant aux deux premières hypothèses du Théorème, à savoir:

Hypothèse (I): la partition sous-jacente est finie;

Hypothèse (II): les B_i sont de *bonnes* bases dénombrables.

Par contre, l'*hypothèse* (III) n'est pas vérifiée, car la relation de *bonne connection* entre les deux indices n'est pas *symétrique*. L'indice 1 est effectivement bien connecté à 1. Cependant, l'indice 0 n'est pas bien connecté à l'indice 1.

Vérifions maintenant que les bases génératrices B_i des $\phi(i)$, $i = 0, 1$, sont effectivement des *bonnes bases*, i.e. des bases vérifiant les conditions (b1) et (b2) que nous allons rappeler. Etant donnée une quasi-uniformité $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$, nous disons qu'elle admet de bonnes bases si, pour tout $i \in I$, le filtre $\phi(i)$ possède une base dénombrable $(U_0^i)_{n > 0}$, ces bases devant vérifier:

(b1) $U_0^i \cap \Delta E_j \neq \emptyset$ si et seulement si j est bien connecté à i;

(b2) $U_{n+1}^i \circ U_{n+1}^j \circ U_{n+1}^k \subset U_n^i$, si j est bien connecté à i et k est bien connecté à j.

Rappelons ici la définition de la *bonne connection* (cf. définition 5 de [4], page 15). Soit $((E_i)_{i \in I} , \phi)$ une quasi-uniformité, et soit $i \in I$ et $j \in I$. On dit que l'indice j est *bien connecté* à l'indice i, si l'intersection $U \cap \Delta E_j$ est non vide, quel que soit $U \in \phi(i)$.

Vérification des conditions (b1) et (b2).

pour (b1) : les deux indices 0 et 1 sont bien connectés à 0, et, comme le prévoit la condition, $V_0 \cap \Delta E_i \neq \emptyset$, pour $i = 0, 1$. L'indice 0 n'étant pas bien connecté à 1, on a, comme l'exige la condition : $V_0 \cap \Delta E_0 = \emptyset$.

pour (b2) : d'une part, on a: $U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U_0$, et $U_n \circ U_n \circ U_n \subset U_n \subset U_{n-1}$, pour $n \geq 2$; d'autre part, $V_n \subset V_n \circ V_n \subset V_n \circ V_n \circ V_n \subset V_n$ et $V_{n+1} \subset U_n$, pour $n \geq 0$ avec $V_2 \subset U_2$. Ainsi, on a les inclusions suivantes:

$U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ V_{n+1} \subset U_n$ et
$U_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset U_n$, pour $n \geq 0$,

ce qui achève de prouver que les conditions (b1) et (b2) sont bien vérifiées.

Poursuivons maintenant les constructions effectuées dans le Théorème. Soit $d_0 : U_0 \to R^+$ défini par:

$$d_0(x, y) = 2^{-n} ,$$

si et seulement si il existe un entier n tel que:

$$(x, y) \in U_n - U_{n+1} ;$$

sinon , on prend:

$$d_0(x, y) = 0 , \text{ i.e., } (x, y) \in U_n \text{ pour tout } n.$$

On définit de même $d_1 : V_0 \to R^+$.

Notons que l'on a l'inclusion : $dom(d_1) \subset dom(d_0)$ et que pour $(x, y) \in dom(d_1)$, on a:

$$d_0(x, y) = 2 \times d_1(x, y) .$$

Ce sera, en effet, cette *disparité* entre d_0 et d_1 qui conduira à l'inégalité suivante:

$$\delta_0(0, 1) > \delta_0(0, 3^{-k}) + \delta_0(3^{-k}, 1), \text{ pour } k \geq 3$$

contredisant l'axiome de *Q-triangularité* (les quasi-métriques δ_i $i = 0, 1$, seront définies comme dans le Théorème - cf. la suite).

Introduisons, sous forme de définitions, deux notions à propos d'une quasi-uniformité donnée $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$, munie de bonnes bases, telles que celles figurant dans le Théorème, et, par suite, munie des applications

$$d_i : U_0^i \to R^+ , \quad i \in I ,$$

définies comme ci-dessus.

Définition 13. Soient x et y des points de l'ensemble $q(u)$ sous-jacent à u. Une suite finie de couples indexés:

$$(z_0, z_1)_{\alpha(0)} , (z_1, z_2)_{\alpha(1)} , \ldots , (z_{n-1}, z_n)_{\alpha(n-1)}$$

sera appelée un *i-chemin de* x *vers* y , si les deux conditions ci-dessous sont vérifiées :

1) $\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-1)$, avec $\alpha(0) = i$, est une suite *Q-connexe (pour u)* ;

2) $(z_i, z_{i+1}) \in dom(d_{\alpha(i)})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, avec $z_0 = x$ et $z_n = y$.

Rappelons (cf. définition 5 de [4], page 15) qu'une suite d'indices $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est dite *Q-connexe* si chaque indice qui la compose est *bien connecté* à l'indice précédent (sauf pour i_0 bien sûr). On dit alors que i_n *est connecté à* i_0.

Définition 14. Le nombre suivant:

$$\lambda = d_{\alpha(0)}(z_0, z_1) + d_{\alpha(1)}(z_1, z_2) + \ldots + d_{\alpha(n-1)}(z_{n-1}, z_n)$$

sera appelé la *longueur du* i-*chemin* ci-dessus.

Remarque: la longueur d'un i-chemin (d'un point x à un point y) ne dépend pas uniquement de la suite des couples de points composant ce chemin, mais elle est aussi fonction de la suite Q-connexe (d'indices) sous-jacente.

La i-*distance non symétrique de* x *à* y , soit $\delta'_1(x, y)$, sera donc la borne inférieure des longueurs de tous les i-chemins de x à y (cf. Théorème 1 de [4], page 18)) .

Revenons à notre contre exemple de quasi-uniformité, dont nous rappelons les principales notations:

$u = ((E_i)_{i\in I}, \phi)$, et $I = \{0, 1\}$
$E_0 = \{0, 1\}$ et $E_1 = \{3^{-n} \mid n \geq 1\}$
bases B_i des filtres $\phi(i)$:

$B_0 = \{U_n \mid n \geq 0\}$

$U_0 = E \times E$,
$U_1 = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 2/3\}$
$U_n = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 3^{-n+1}\}$, $n \geq 2$.

$B_1 = \{V_n \mid n \geq 0\}$

$V_n = E_1 \times E_1$, $n = 0, 1, 2, 3$;
$V_n = \{(x, y) \in E_1 \times E_1 \mid |x - y| \leq 3^{-n+2}\}$, $n \geq 4$.

Observons alors que les suites Q-connexes (pour u) n'admettent qu'une des trois formes possibles ci-dessous :

$0, 0, \ldots, 0, 0$ / $1, 1, \ldots, 1, 1$ / $0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 1$.

En effet, 0 ne peut pas suivre 1 dans une suite Q-connexe (pour u) , car l'indice 0 n'est pas bien connecté à l'indice 1. Dès l'apparition de la valeur 1 dans une suite Q-connexe, celle-ci devient obligatoirement stationnaire.

Soit *ch* un 0-chemin de x à 1. Sa suite Q-connexe sous-jacente ne peut pas se terminer par un 1, car $dom(d_1)$ ne comporte pas de couples de la forme (z, 1). Ainsi, la suite Q-connexe sous-jacente à *ch* ne comporterait que des zéros.

Tachons maintenant d'évaluer $\delta'_0(x, 1)$. Les 0-chemins de x à 1 qui ont un intérêt en vue d'en trouver le plus court, ont donc la forme suivante:

$$(x, 3^{-n})_0 , (3^{-n}, 3^{-m})_0, \ldots, (3^{-1}, 3^{-k})_0 , (3^{-k}, 1)_0 ,$$

où $x < 3^{-n}$ et $n > m > 1 > k \geq 1$.
Soit $x = 0$; y en a-t-il un qui soit le plus court ? Voyons celui à 1 élément : $(0, 1)_0$. Sa longueur est $d_0(0, 1) = 2^{-0} = 1$. Considérons ensuite le 0-chemin à deux éléments : $(0, 1/3)_0$, $(1/3, 1)_0$. Sa longueur est :

$$d_0(0, 1/3) + d_0(1/3, 1) = 2^{-2} + 2^{-1} = 3/4 ,$$

Les autres 0-chemins à deux éléments sont du type:

$$(0, 3^{-n})_0 , (3^{-n}, 1)_0 , \text{ où } n \geq 2 ,$$

et ont pour longueur $2^{-(n+1)} + 1 > 1$. Evidemment, les autres 0-chemins de 0 à 1 seront aussi plus longs que le deuxième, qui donc est le plus court. D'où $\delta'_0(0, 1) = 3/4$.
Evaluons maintenant $\delta'_0(3^{-n}, 1)$ pour $n > 1$. Evidemment le 0-chemin le plus court de 3^{-n} à 1 sera:

$$(3^{-n}, 1/3)_0 , (1/3, 1)_0,$$

dont la longueur est:

$$d_0(3^{-n}, 1/3) + d_0(1/3, 1) = 2^{-2} + 2^{-1} = 3/4.$$

Ainsi, $\delta'_0(3^{-n}, 1) = 3/4$.
Considérons maintenant les 0-chemins d'un point x à 0. On constate d'abord que la suite Q-connexe sous-jacente à un 0-chemin d'un point x à 0 ne peuvent comporter que des zéros. En effet, $dom(d_1)$ ne comporte pas de couples de la forme (z, 0), et, par suite, la suite Q-connexe sous-jacente doit se terminer avec un 0. Par conséquent, des trois formes de suite Q-connexe admissibles (pour u), il ne nous reste que celle composée de

zéros (même raisonnement que pour les 0-chemins de x à 1). Pour déterminer les 0-chemins les plus courts de x à 0, les mêmes raisonnements s'appliquent que dans le cas des 0-chemins de x vers 1. Ceci nous donne comme 0-chemin le plus court de x à 0.

$(1, 1/3)_0$, $(1/3, 0)_0$, si $x = 1$,
$(3^{-n}, 0)_0$, si $x = 3^{-n}$, avec $n > 0$.

Ainsi, on obtient:

$\delta'_0(1, 0) = d_0(1, 1/3) + d_0(1/3, 0) = 3/4 = \delta'_0(0, 1)$, et
$\delta'_0(3^{-n}, 0) = d_0(3^{-n}, 0) = 2^{-(n+1)}$.

Evaluons ensuite $\delta'_0(0, 3^{-n})$, $n > 0$. Comme on a:

$d_1(x, y) = 1/2\ d_0(x, y)$ pour tout $(x, y) \in dom(d_1)$,la borne inférieure des longueurs des 0-chemins de 0 à 3^{-n} est manifestement:

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} [d_0(0, 3^{-k}) + d_1(3^{-k}, 3^{-n})]\\ &= \lim_{k\to\infty} d_0(0, 3^{-k}) + \lim_{k\to\infty} d_1(3^{-k}, 3^{-n})\\ &= 0 + 2^{-(n+2)}\\ &= \delta'_0(0, 3^{-n}).\end{aligned}$$

Il reste maintenant à évaluer $\delta'_0(1, 3^{-n})$, et c'est ici en fait que réside l'essence du contre-exemple.

Vu que $d_1(x, y) = 1/2\ d_0(x, y)$, pour $(x, y) \in dom(d_1)$, le 0-chemin de 1 à 3^{-n} le plus court est donné par:

$(1, 1/3)_0$, $(1/3, 3^{-n})_1$,

il vient:

$$\begin{aligned}\delta'_0(1, 3^{-n}) &= d_0(0, 1/3) + d_0(1/3, 1)\\ &= 2^{-2} + 2^{-1} = 3/4.\end{aligned}$$

Voici maintenant les 0-distances:

de 0 à 3^{-n}:

$$\begin{aligned}\delta_0(0, 3^{-n}) &= 1/2\ [\delta'_0(0, 3^{-n}) + \delta'_0(3^{-n}, 0)]\\ &= 1/2\ [\ 2^{-(n+2)} + 2^{-(n+1)}\ ]\\ &= 3 \times 2^{-(n+3)}.\end{aligned}$$

de 0 à 1 :

$$\delta_o(0, 1) = 1/2\ [\delta'_o(0, 1) + \delta'_o(1, 0)]$$
$$= 1/2\ [3/4 + 3/4]$$
$$= 3/4\ .$$

de 3^{-n} à 1 :

$$\delta_o(3^{-n}, 1) = 1/2\ [\delta'_o(3^{-n}, 1)) + \delta'_o(1, 3^{-n})]$$
$$= 1/2\ [3/4 + 3/4]$$
$$= 3/4\ .$$

Voici l'inégalité qui contredit l'axiome de Q-triangularité:

$$\delta_o(0, 3^{-n}) > \delta_o(0, 3^{-n+k}) + \delta_o(3^{-n+k}, 3^{-n})],$$

car $3 \times 2^{-(n+3)} > 3 \times 2^{-(n+k+3)} + 2^{-(n+2)}$ $(k \geq 3)$.

Ainsi, quelles que soient les conditions de *petitesse* requises pour la validité de l'axiome de Q-triangularité (déterminé par ε_o) , il existe toujours des n assez grands pour que:

$$\delta_o(0, 3^{-n+3}) < \varepsilon_o$$

En conclusion, le quasi-écart construit ci-dessus, à la manière du Théorème, ne vérifie pas l'axiome de Q-triangularité. La construction d'un quasi-écart associé à une quasi-uniformité, comme dans le Théorème nécessite ainsi l'hypothèse de symétrie.

Par contre, l'hypothèse (I) peut être affaiblie en (I'):

hypothèse (I') : la quasi-uniformité u est connective et finiment connectée.

Elucidons tout d'abord ces notions de connectivité par quelques exemples (cf. définitions, rappelées ci-dessus, N° 8 et 9 de [4], page 23). Toute quasi-uniformité à partition finie admet trivialement les deux propriétés. Voici cependant un exemple de quasi-uniformité u à partition sous-jacente infinie, et qui admet toujours ces deux propriétés.

$$u = (([r]_{r \in R})\ ,\ \phi)\ ,$$

partition en *singletons*. Prenons les ensembles {{ (r, r) }} pour engendrer les filtres $\phi(r)$. Cette quasi-uniformité triviale est notée $\Upsilon(R_d)$, la topologie sous-jacente étant la topologie discrète sur R, notée R_d. Cette quasi-uniformité u est connective, car { (r, r) }, qui est l'élément générateur des filtres $\phi(r)$, peut servir de connecteur pour $\phi(r)$. Tout indice $r \in R$ n'étant bien connecté qu'à lui-même, $\Upsilon(R_d)$ est également finiment connectée.

Construisons ensuite, à titre d'exemple, une quasi-uniformité u qui n'est ni connective ni finiment connectée. Considérons toujours la droite réelle R, mais maintenant avec sa topologie naturelle qu'on va rendre plus grossière en ajoutant à tout ouvert l'ensemble de tous les rationnels. Nous appellerons cette topologie la topologie *engrossie (par les rationnels)* et nous la noterons *T*. Considérons l'unique quasi-uniformité $u = \Upsilon(T) = (((r))_{r \in R} , \phi)$, qu'elle engendre (notation de [4], page 10). Soit r un réel quelconque; montrons que $\phi(r)$ ne peut pas admettre de connecteurs. En effet, d'une part, tout $U \in \phi(r)$ contient (i, i) pour une infinité d'irrationnels i . D'autre part, quel que soit l'irrationnel $i \neq r$, il existe $V \in \phi(r)$ ne contenant pas (i, i) . Ainsi, $\phi(r)$ n'admet pas de connecteurs et par conséquent, $\Upsilon(T)$ n'est pas connective. Par contre, tout $U \in \phi(r)$ contient tout élément de la diagonale des rationnels: ΔQ , d'où il s'en suit que tout indice rationnel est bien connecté à r . Ainsi, $\Upsilon(T)$ n'est pas finiment connectée.

Nous énonçons donc une *généralisation du Théorème* 1 :

La conclusion du Théorème 1 reste valide si on substitue à l'hypothèse (I) l'hypothèse (I') plus faible:

$u = ((E_i)_{i \in I}, \phi)$ est connective et finiment connectée.

Nous allons constater que la démonstration du Théorème est toujours applicable avec (I') au lieu de (I). En effet, reportons-nous au debut de la démonstration, i.e. à la construction des bases emboitées:

$(U_n^i)_n$ pour les $\phi(i)$, $i \in I$.

L'hypothèse (II) du Théorème permet de construire, pour les $\phi(i)$ des bases dénombrables emboitées, soient $(T_n^i)_n$.
Remarquons que, grâce à la convention établie en [4] , toute base est supposée connectée, i.e. tout élément U de la base est symétrique et quel que soit $(x, y) \in U$, alors on a:

1) $(x, x) \in U$ et $(y, y) \in U$,
2) il existe $z \in \Delta E_i$ tel que $(x, z) \in U$ et $(y, z) \in U$.

Comme tout $\phi(i)$ admet des connecteurs, à partir d'un certain indice m_i , tout T_p^i sera un connecteur pour $\phi(i)$, pourvu que $p \geq m_i$.
Prenant pour U_0^i un connecteur quelconque, par exemple, posant

$$U_0^i = T_p^i \quad \text{avec} \quad p \geq m_i \ ,$$

la condition (b1) sera vérifiée. Pour construire la suite des

$$U_n^i \quad \text{pour} \quad n > 0 \ ,$$

de manière à ce que la condition (b2) soit vérifiée: , le procédé entamé dans le Théorème conviendra encore, puisque u est finiment connectée. Ceci nous assure en effet que l'entier

$$q_i = \sup \{i, \sup p_{ij} \mid j \in I\}$$

(cf. [4], page 18) est toujours bien défini. Ceci nous assure de l'existence de l'entier n_i tel que les ensembles :

$$U_1^i = T^i_{2(p+q)} \ , \quad i \in I \quad \text{avec} \quad q \geq n_i ,$$

vérifient les propriétés (b1) et (b2) vis à vis des U_0^i , $i \in I$.

Ainsi, à chaque étape de la récurrence sur n , on est assuré de l'existence de l'entier n_i tel que les ensembles :

$$U_n^i = T^i_{2(r+q)} \ ,$$

où

$$U_{n-1}^i = T_{2r}^i \quad \text{et} \quad q \geq n_i \ ,$$

II. Complétion.

(construction explicite de la complétion d'une quasi-uniformité quasi-artinienne.

Dans ce que suit, $u = ((E_i)_{i \in I}, \phi)$ va toujours, sauf mention explicite du contraire, désigner une quasi-uniformité quelconque sur un ensemble E quelconque. Conformément aux notations utilisées dans [2], [3] et [4], $\tau(u)$ dénotera la topologie sous-jacente à la quasi-uniformité u.
Etendons la notion de filtre de Cauchy à une quasi-uniformité .

Définition 15. Un *filtre de Cauchy* pour une quasi-uniformité u est un filtre F sur l'ensemble E sous-jacent à u, vérifiant la condition suivante:

> il existe $i \in I$ tel que pour tout $U \in \phi(i)$, l'on touve $F \in F$ vérifiant $F \times F \subset U$.

Précisant l'indice i , on dira que F est un i-filtre de Cauchy pour u.
La quasi-uniformité u sera dite *complète*, si tout filtre de Cauchy pour u converge dans $\tau(u)$ (topologie sous-jacente à u).

Dans le cas, où u se réduit à une uniformité, c'est-à-dire que I est réduit à un singleton {i}, les filtres de Cauchy pour u se ramènent aux filtres de Cauchy usuels. Si, par contre, la partition associée à u est une partition en singletons, donc du type $(E_i)_{i \in I} = (\{x\})_{x \in E}$, en ce cas-là u est obligatoirement *complète*. En effet, soit F un x-filtre de Cauchy pour u. Par la proposition 4 (cf. [4], page 14), $\phi(x)$ admet une base de la forme $\{V_\alpha \times V_\alpha \mid V_\alpha \in \mathcal{V}(x)\}$, où $\mathcal{V}(x)$ est le filtre des voisinages du point x. Alors, par définition d'un x-filtre de Cauchy), pour tout $V_\alpha \in \mathcal{V}(x)$, il existe $F \in F$ tel que $F \times F \subset V_\alpha \times V_\alpha$. Autrement dit, $F \subset V_\alpha$, soit F converge vers x. Ainsi, tout filtre de Cauchy pour u converge dans $\tau(u)$ et, par conséquent, u est *complète*.

Revenons au cas général. Soit F un filtre sur E qui converge dans $\tau(u)$ vers un point $a \in E_i$. Alors, F est un i-filtre de Cauchy pour u. En effet, par définition de la

convergence d'un filtre F vers un point a, F est plus fin que le filtre des voisinages du point a. Celui-ci est un i-filtre de Cauchy *minimal* pour u (corollaire 1 de la proposition 7.1 de [3]). Ainsi, F est un i-filtre de Cauchy pour u. Rappelons ici la définition d'une application quasi-uniforme f de u dans v, où $v = ((F_j)_{j \in J}, \psi)$ est une quasi-uniformité sur l'ensemble F: f est une application de E dans F satisfaisant les conditions suivantes:

(a) pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que l'on ait l'inclusion $f(E_i) \subset F_j$;

(b) quel que soit $V \in \psi(j)$, il existe $U \in \phi(i)$ tel que $(f \times f)(U) \subset V$.

Soit alors $f : u \to v$ une application quasi-uniforme. Par la proposition 7.0 de [3], l'image par f d'un i-filtre de Cauchy pour u, engendre un j-filtre de Cauchy pour v, où $j \in J$ est tel que $f(E_i) \subset F_j$. Contrairement au cas d'une uniformité, un filtre de Cauchy pour une quasi-uniformité peut admettre des points adhérents, qui ne sont pas des points limites. En voici un exemple: soit la quasi-uniformité u telle que l'ensemble sous-jacent E est le segment $[0, 1]$, l'ensemble d'indices I a seulement deux éléments : $(0, 1)$, et la structure partitive sous-jacente est la suivante:

$$E_0 = [0, 1[\quad , \quad E_1 = (1) \ .$$

Définissons ensuite les filtres $\phi(i)$, pour $i = 0, 1$:

$\phi(0)$ est le filtre des voisinages de ΔE dans la topologie naturelle sur le carré $[0, 1]^2$

$\phi(1)$ est l'ultrafiltre sur $[0, 1]^2$ engendré par $\{\{(1, 1)\}\}$.

Montrons que u est une quasi-unifomité. Manifestement, u est une structure filtrée partitive. Il reste donc à démontrer que I est $\phi(i)$-transitif, quel que soit l'indice $i \in I$. Montrons tout d'abord que l'indice 0 est $\phi(0)$-transitif. Grâce au théorème 1 de [1] (§ 4, chapitre 2), le filtre $\phi(0)$ définit une uniformité sur $[0, 1]$. D'où, pour tout $U \in \phi(0)$, il existe

$V \in \phi(0)$ tel que $V \circ V \subset U$. Ainsi, l'indice 0 est 0-transitif. Vu que $\{(1, 1)\} \in \phi(1)$, on a:

1) l'indice 1 est 0-transitif, car pour tout $U \in \phi(0)$, $U \circ \{(1, 1)\} \subset U$.

2) l'indice 1 est 1-transitif, puisque pour tout $W \in \phi(1)$, $\{(1, 1)\} \circ \{(1, 1)\} \subset W$.

Ceci achève la preuve que I est $\phi(i)$-transitif, quel que soit $i \in I$. Donc u est bien une quasi-uniformité. Elle induit la topologie naturelle sur le sous-espace E_0, tandis que le point 1 est un point isolé dans la topologie sous-jacente $\tau(u)$. Donc le filtre des voisinages du point 1 dans la topologie naturelle sur $[0, 1]$ n'est plus le filtre des voisinages de ce point dans $\tau(u)$. Cependant, ce filtre des voisinages naturels du point 1 est un 0 filtre de Cauchy pour u admettant 1 comme point adhérent, et qui pourtant ne converge pas vers ce point.

En général, pour qu'un i-filtre de Cauchy admettant un point $a \in E_j$ comme point adhérent converge vers ce point, il suffit que l'indice i soit bien connecté à l'indice j. Cette affirmation sera une conséquence de propositions qui vont suivre. Cette condition suffisante n'est cependant pas nécessaire. Un i-filtre de Cauchy pour u peut bien converger vers un point $a \in E_j$ sans que l'indice i soit bien connecté à l'indice j.

Définition 16. Soient F et G deux filtres sur un même ensemble. On dira que F et G *se coupent* si, pour tout $F \in F$ et pour tout $G \in G$, l'intersection $F \cap G$ est non-vide.

Proposition 7. Soient $i,j \in I$, F un i-filtre de Cauchy pour u et G un j-filtre de Cauchy pour u. Si les conditions suivantes sont satisfaites:

a) l'indice i est bien connecté à l'indice j,

b) les filtres F et G se coupent,

alors F est aussi un j-filtre de Cauchy pour u.

En effet, soit $U \in \phi(j)$. Nous allons exhiber un $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \times F \subset U$. Comme convenu dans la définition 12 , soit U' un transconnecteur pour U et $V = (U')'$ un transconnecteur pour U' . L'indice i étant bien connecté à l'indice j , il existe un élément symétrique $W \in \phi(i)$ tel que $V \circ W \subset U'$. Il suffit de prendre $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \times F \subset W$. $\mathcal{F}$ étant un i-filtre de Cauchy, un tel élément F existe en effet. D'autre part, $\mathcal{G}$ étant un j-filtre de Cauchy, il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $G \times G \subset V$. Comme les deux filtres se coupent, il existe $x \in F \cap G$, d'où:

$(x, x) \in V$ et (x, a) , $(x, b) \in W$, pour tout a et $b \in F$,

Par suite, on a:

$$(x, a) = (x, x) \circ (x, a) \in V \circ W \subset U' .$$

Pareillement, $(x, b) \in U'$ et finalement:

$$(a, b) = (a, x) \circ (x, b) \in U' \circ U' \subset U ,$$

d'où $F \times F \subset U$

Comme U est un élément quelconque de $\phi(j)$, $\mathcal{F}$ est également un j-filtre de Cauchy pour u . C.Q.F.D.

Proposition 8. Si $\mathcal{F}$ est un i-filtre de Cauchy pour u , il existe un i-filtre de Cauchy minimal $\mathcal{F}_{min} = \mathcal{F}_{min}(\mathcal{F})$, moins fin que $\mathcal{F}$.
Un tel filtre $\mathcal{F}_{min}$ sera appelé filtre de Cauchy i-*minimal* . $\mathcal{F}_{min}$ est le filtre engendré par:

$$\mathcal{B} = \{ U(F) \mid U \in \phi(j), \ F \in \mathcal{F} \mid F \times F \subset U \} .$$

On utilisera aussi la notation:

$$U(F) = \{ x \mid \text{il existe } y \in F \mid (x, y) \in U \}.$$

Tout élément de $\mathcal{F}_{min}$ a un intérieur non-vide. Si l'indice $j \in I$ est bien connecté à i , $\mathcal{F}_{min}$ est également moins fin que tout j-filtre de Cauchy qui le coupe.

Preuve: soit $i \in I$; donnons nous un i-filtre de Cauchy F pour u . Montrons, premièrement, que F_{min} est bien un i-filtre de Cauchy. Autrement dit, pour tout $U \in \phi(i)$, il existe un élément $V(F)$ de la base B de F_{min} tel que $V(F) \times V(F) \subset U$. Il suffit, en effet, de prendre pour V un élément symétrique de $\phi(i)$ tel que $V \circ V \circ V \subset U$. F étant un i-filtre de Cauchy, il existe $F \in F$ tel que $F \times F \subset V$, d'où :

$$V(F) \in B \subset F_{min} \ .$$

Soient $a, b \in V(F)$, ce qui veut dire qu'il existe $x, y \in F$ tels que $(x, a), (y, b) \in V$. Comme $F \times F \subset V$, il s'en suit que $(x, y) \in V$, d'où V étant symétrique,

$$(a, b) = (a, x) \circ (x, y) \circ (y, b) \in V \circ V \circ V \subset U \ ,$$

soit

$$V(F) \times V(F) \subset U \ .$$

Ainsi, F_{min} est bien un i-filtre de Cauchy. Soit $j \in I$ un indice bien connecté à i. Montrons maintenant que F_{min} est moins fin que tout j-filtre de Cauchy G qui le coupe, où l'indice j est bien connecté à l'indice i. Ceci aura d'ailleurs pour conséquence que F_{min} est un i-filtre de Cauchy minimal. Montrons alors que, quel que soit l'élément $U(F)$ de la base B de F_{min} , il existe un élément $G \in G$ tel que $G \subset U(F)$. Supposons que U est symétrique. L'indice j étant bien connecté à i, l'intersection $U' \cap \Delta E_j$ est non vide (comme convenu, U' dénote toujours un transconnecteur pour U) ; ceci entraîne l'existence d'un élément symétrique W de $\phi(j)$ tel que $U' \circ W \subset U$. Soit $F' \in F$ tel que $F' \times F' \subset U'$ et $F' \subset F$, d'où $U'(F') \in B$. Il suffit maintenant de choisir $G \in G$ tel que $G \times G \subset W$. Comme G est un j-filtre de Cauchy, un tel élément $G \in G$ existe. Montrons que $G \subset U(F)$: comme F_{min} et G se coupent, il existe $a \in G \cap U'(F')$, d'où l'existence de $b \in F'$ tel que $(a, b) \in U'$. Ainsi, $(b, a) \in U'$, car tout transconnecteur est symétrique. Comme $G \times G \subset W$, pour tout élément x de G , on a: $(a, x) \in W$. Par conséquent:

$$(b, x) = (b, a) \circ (a, x) \in U' \circ W \subset U \ ,$$

et, U étant symétrique, $(x, b) \in U$, d'où:

$$x \in U(F') \subset U(F) \ .$$

Mais x étant un élément quelconque de G, il s'en suit que $G \subset U(F)$, et alors le filtre $\mathcal{F}_{min}$ est bien moins fin que le filtre $\mathcal{G}$. Il reste encore à démontrer que l'intérieur de tout élément de $\mathcal{F}_{min}$ est non-vide. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $\phi(i)$ (comme convenu dans [4], toute base est supposée symétrique et connectée) ; alors $\mathcal{F}_{min}$ est aussi engendré par

$$\mathcal{B}_{min} = \{ B(F) \mid B \in \mathcal{B}_i \ , \ F \in \mathcal{F} \mid F \times F \subset B \}.$$

Montrons tout d'abord que tout élément $B(F) \in \mathcal{B}_{min}$ a un intérieur non-vide. Soit $x \in B(F)$; alors il existe $a \in F$ tel que $(x, a) \in B$. Toute base considérée étant supposée connectée, il existe $y \in E_i$ tel que $(y, a) \in B$. Ainsi, l'intersection $B(F) \cap E_i$ est non-vide, quel que soit $B(F)$ dans $\mathcal{B}_{min}$. Par conséquent, quel que soit l'élément F de $\mathcal{F}_{min}$, l'intersection $F \cap E_i$ est aussi non-vide, $\mathcal{B}_{min}$ étant une base de $\mathcal{F}_{min}$. Cependant, comme on vient de le démontrer, $\mathcal{F}_{min}$ admet aussi comme base:

$$\mathcal{B}'_{min} = \{ B(F) \mid B \in \mathcal{B}_i, \ F \in \mathcal{F}_{min} \mid F \times F \subset B \}.$$

Soit $B(F) \in \mathcal{B}'_{min}$; comme l'intersection $F \cap E_i$ est non-vide, il existe $a \in F \cap E_i$. Ainsi, $B(a)$ est un voisinage de a, d'où $B(F)$ en est un aussi, car $B(a) \subset B(F)$. $B(F)$ a donc l'intérieur non-vide et, $B(F)$ étant un élément quelconque d'une base de $\mathcal{F}_{min}$, il s'en suit que tout élément de $\mathcal{F}_{min}$ a l'intérieur non-vide. C.Q.F.D.

Corollaire 1. Soient $i,j \in I$ et soient $\mathcal{F}_{min}$ un i-filtre de Cauchy i-minimal, $\mathcal{G}_{min}$ un j-filtre de Cauchy j-minimal. Alors, si j est bien connecté à i, cela entraîne

soit (1): $\mathcal{F}_{min}$ est moins fin que $\mathcal{G}_{min}$;

soit (2): $\mathcal{F}_{min}$ et $\mathcal{G}_{min}$ ne se coupent pas, i.e. il existe $F \in \mathcal{F}_{min}$ et $G \in \mathcal{G}_{min}$ tels que l'intersection $F \cap G$ est vide.

Ceci résulte en effet directement de la proposition.

Corollaire 2. Soient les filtres $\mathcal{F}_{min}$ et $\mathcal{G}_{min}$ définis comme dans le corollaire 1. Si $\mathcal{F}_{min}$ est moins fin que $\mathcal{G}_{min}$, alors l'indice j est bien connecté à i.

Supposons en effet que F_{min} est moins fin que G_{min} . Soit $U \in \Phi(i)$ quelconque, nous allons montrer que $U \cap \Delta E_j$ est non-vide. F_{min} étant un i-filtre de Cauchy, il existe $F \in F_{min}$ tel que $F \times F \subset U$. Comme G_{min} est un j-filtre de Cauchy j-minimal, il admet, selon la proposition, comme base:

$$B''_{min} = \{ B(G) \mid B \in B_j \ , \ G \in G_{min} \mid G \times G \subset B \},$$

où B_j est une base (connectée) de $\Phi(j)$. Par hypothèse, F_{min} est moins fin que G_{min} , il existe donc $B(G) \in B''_{min}$ tel que $B(G) \subset F$, d'où $B(G) \times B(G) \subset U$. Pour tout $x \in B(G)$ il existe $a \in G$ tel que $(x, a) \in B$. Cependant, B est un élément d'une base (connectée), il existe donc $y \in E_j$ tel que $(y, a) \in B$. D'où, $y \in B(G)$, et, par conséquent:

$$(y, y) \in B(G) \times B(G) \subset U \ .$$

Ainsi, l'intersection $U \cap \Delta E_j$ est non-vide. Il s'en suit que l'indice j est bien connecté à l'indice i . C.Q.F.D.

Introduisons la notion de quasi-uniformité *quasi-artinienne*. Notons F_{min} l'ensemble des filtres de Cauchy i-minimaux pour u , $i \in I$, qui ne convergent pas.
Munissons F_{min} de l'ordre défini par l'inclusion ; autrement dit F est plus petit que G si et seulement si F est moins fin que G . Si F est un filtre de Cauchy i-minimal et G est un filtre de Cauchy j-minimal, alors, d'après le corollaire 2 ci-dessus, $F < G$ implique que j est bien connecté à i . Ainsi, à toute partie totalement ordonnée dans F_{min} , on peut associer une suite d'indices *pleinement transconnexe*, i.e. telle que tout élément de la suite est bien connecté à tout élément qui le précède dans la suite (bien sûr, la suite peut éventuellement être infinie).

Définition 17. On dira que u est une quasi-uniformité *quasi-artinienne* si toute partie totalement ordonnée d'éléments de F_{min} se prolonge, en descendant, en une chaîne maximale admettant un premier élément (élément minimal). Vu le corollaire 2 ci-dessus, toute quasi-uniformité à partition finie (resp. toute quasi-uniformité finiment connectée) est quasi-artinienne.

Il suffirait en effet que toute suite d'indices pleinement transconnexe prolongeant à gauche devienne soit stationnaire soit cyclique.

Voici un exemple de quasi-métrique qui n'est pas quasi-artinienne:

$$s = ((E_p)_{p \in P} , \delta) ,$$

où P est l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in P$, E_p = {fractions irréductibles de la forme k/p^m | $k , m \geq 1$ }; $dom(\delta_p) = (E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_p)^2$ et $\delta_p(x, y) = |x - y|$ pour $(x, y) \in dom(\delta_p)$. Evidemment, s vérifie bien les axiomes des quasi-métriques, l'axiome de Q-triangularité étant globalement vérifié. Soit F_p le filtre engendré par:

$$\mathcal{B}_p = \{]0, 1/n[\cap (E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_p) ; n > 1 \} .$$

Manifestement F_p est un filtre de Cauchy p-minimal. Comme 0 n'appartient pas à l'ensemble sous-jacent à s, les filtres F_p ne convergent pas. Voici alors une chaîne de filtres strictement décroissante:

$$\ldots < F_p < \ldots < F_3 < F_2 \quad ;$$

ce sont des filtres de Cauchy p-minimaux, $p \in P$, qui ne convergent pas. Par conséquent, la quasi-métrique s n'est pas quasi-artinienne.

Théorème 2. Soit $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$ une quasi-uniformité sur l'ensemble E, ayant la propriété d'être quasi-artinienne. Alors, u admet une complétée Q.

Démonstration. Notons, comme ci-dessus, par F_{min} la famille de tous les filtres de Cauchy i-minimaux, $i \in I$, qui ne convergent pas. Munissons F_{min} de l'ordre défini par l'inclusion. La quasi-uniformité u étant quasi-artinienne, toute partie totalement ordonnée de F_{min} se prolonge, en descendant, en une partie (totalement ordonnée) maximale se terminant par un plus petit élément (premier élément). Extrayons de F_{min} la sous-famille $F_{prem} = (F_k)_{k \in K}$ composée exclusivement de tous ces premiers éléments.

Nous allons alors :

construire une quasi-uniformité complète $\mathcal{Q} = ((E'_m)_{m\in M}, \psi)$ sur l'ensemble $E' = E \cup K$, avec $M = I \cup K$;

supposer que l'*ensemble d'indices* K, ci-dessus, est disjoint de l'ensemble E ainsi que l'ensemble d'indices I.

Si $m = i \in I$, posons $E'_i = E_i$; pour $m = k \in K$, posons, par contre, $E'_k = \{ k \}$. La famille de filtres ψ (sur $E' \times E'$) est définie ci-dessous: si $m = i \in I$, $\psi(i)$ est le filtre engendré par $\phi(i)$. Pour $m = k \in K$, $\psi(k)$ est le filtre engendré par $\{ (F \cup \{ k \})^2 \mid F \in \mathcal{F}_k \}$.
La structure construite ci-dessus est-elle bien une quasi-uniformité?
Manifestement $\mathcal{Q}$ est structure filtrée partitive. En effet, tout $U \in \psi(m)$ contient la diagonale correspondante, $\Delta E'_m$. Tout $\psi(m)$, $m \in M$, admet des bases symétriques. Il ne reste qu'à constater que M est $\psi(m)$-transitif pour tout $m \in M$. Soit $m = i \in I$; les $\psi(i)$ étant engendrés par les $\phi(i)$ respectifs, I est évidemment $\psi(i)$-transitif. Comme tout élément de $\phi(i)$ est disjoint de K^2, K est aussi $\psi(i)$-transitif. Ainsi, M est $\psi(i)$-transitif pour tout $i \in I$. Soit $m = k \in K$. Montrons tout d'abord que I est $\psi(k)$-transitif. Soit en effet $U \in \psi(k)$. Supposons que $\mathcal{F}_k$ est i-minimal, $i \in I$. D'après la proposition 8 ci-dessus $\mathcal{F}_k$ admet une base de la forme:

$$\mathcal{B}_k = \{ W(F) \mid W \in \phi(i),\ F \times F \subset W \text{ et } F \in \mathcal{F}_k \},$$

d'où $\psi(k)$ admet une base de la forme :

$$\{ (W(F) \cup \{k\})^2 \mid W \in \phi(i),\ F \times F \subset W \text{ et } F \in \mathcal{F}_k \}.$$

Ainsi il existe un élément de $\psi(k)$ contenu dans U de la forme:

$$(W(F') \cup \{k\})^2,$$

avec $W \in \phi(i)$, $F' \times F' \subset W$ et $F' \in \mathcal{F}_k$. Soit W' un transconnecteur pour W, qui est également un élément d'une base connectée de $\phi(i)$ (i.e., pour tout $(x, y) \in W'$, $(x, x) \in W'$). Supposons en plus $W' \subset W$. Soit $W'(F)$ un élément de $\mathcal{B}_k$ tel que $F \subset F'$. Nous allons montrer que $U' = (W'(F) \cup \{k\})^2$ est effectivement un transconnecteur pour

U (d'où l'anticipation de notation). Soit $j \in I$ tel que l'intersection $U' \cap \Delta E_j$ soit non vide. Alors l'intersection $W'(F) \cap E_j$ est non vide, et alors l'intersection $W' \cap \Delta E_j$ est non vide, car W' est élément d'une base connectée (i.e. pour tout $(x, y) \in W'$, $(x, x) \in W'$). Cependant, W' est un transconnecteur pour W, d'où l'existence de $T \in \phi(j)$ symétrique tel que $W' \circ T \subset W$. Montrons que $U' \circ T \subset U$:
soient $(x, y) \in U'$ et $(y, z) \in T$. Comme $\phi(j)$ est un filtre sur $E \times E$ et $T \in \phi(j)$, il s'en suit que y n'appartient pas à K, d'où $y \in W'(F)$, par suite, il existe $a \in F$ tel que $(y, a) \in W'$. W' étant symétrique (par définition d'un transconnecteur), on a: $(a, y) \in W'$, d'où:

$$(a, y) \circ (y, z) \in W' \circ T \subset W.$$

Par conséquent, $z \in W(F) \subset W(F')$,, vu que:

$$(x, y) \in U' = (W'(F) \cup (k))^2 ,$$

soit $x \in W'(F)$, soit $x = k$; quel que soit le cas, on a:

$$(x, z) \in (W(F) \cup (k))^2, \text{ car } W' \subset W .$$

D'où: $(x, z) \in (W(F) \cup (k))^2 \subset (W(F) \cup (k))^2 \subset U$,
car $F \subset F'$. Il s'en suit que $U' \circ T \subset U$. On vient donc de démontrer que U admet U' comme I-transconnecteur.
U' peut-il aussi servir de K-transconnecteur pour U ?
Comme on a:

$$U' \cap \Delta K = \{ (k, k) \} \text{ et } U' \circ U' \subset U' \subset U,$$

la réponse est positive. Donc K est bien $\psi(k)$-transitif, quel que soit $k \in K$. Nous avons ainsi démontré que $M = I \cup K$ est $\psi(k)$-transitif quel que soit $k \in K$. Ceci achève de prouver que M est $\psi(m)$-transitif quel que soit $m \in M$. Ainsi Q vérifie les axiomes des quasi-uniformités. On a donc démontrer que U admet U' comme I-transconnecteur.
U' peut-il aussi servir de K-transconnecteur pour U ?
Comme $U' \cap \Delta K = \{ (k, k) \}$ et $U' \circ U' \subset U' \subset U$,
la réponse est positive. Donc, K est bien $\psi(k)$-transitif, quel que soit $k \in K$. Nous avons ainsi démontré que $M = I \cup K$ est $\psi(k)$-transitif quel que soit $k \in K$. Ceci achève de prouver que

M est $\psi(m)$-transitif quel que soit $m \in M$. Donc, Q vérifie bien les axiomes des quasi-uniformités.

La quasi-uniformité Q est-elle complète ?
Soit en effet G un m-filtre de Cauchy pour Q , et $m \in M$. Nous allons montrer que G converge nécéssairement.

Cas 1. $m = i \in I$. Considérons le filtre suivant : $H = (G \cap E \mid G \in G)$, formé des restrictions des éléments de G à l'ensemble E . Comme les filtres $\psi(i)$, pour $i \in I$, sont engendrés par des filtres $\phi(i)$, H est un i-filtre de Cauchy pour u, et il engendre le filtre G sur E'. Donc, si H converge dans u vers un point $x \in E$, G converge dans Q vers le même point. Supposons par contre que H ne converge pas dans u. Alors, grâce à l'hypothèse que u est quasi-artinienne, il existe un filtre de Cauchy i-minimal, soit $F = F_k$, $k \in K$, dans u ,moins fin que H. Dans ce cas, G est plus fin que le filtre des voisinages du point k, qui est engendré par:

$$\{ F \cup \{k\} \mid F \in F_k \},$$

Ainsi, G converge vers le point $k \in K$.

Cas 2. $m = k \in K$. Comme $E'_k = \{ k \}$, G est obligatoirement plus fin que le filtre des voisinages du point k. En effet, le filtre $\psi(k)$ est engendré par $\{ V_k \times V_k \mid V_k$ voisinage du point k $\}$ (cf. proposition 4 de [4], page 14) . Par conséquent, dans ce cas-là aussi le filtre G converge; il converge bien sûr vers le point k.

Est-ce que Q est une complétion de u ?
Autrement dit, est-ce que toute application quasi-uniforme:

$$f : u \to v,$$

où $v = ((D_p)_{p \in P} , \alpha)$ est une quasi-uniformité complète, factorise à travers Q, c'est-à-dire est-ce qu'il existe une application quasi-uniforme (unique) g telle que $g \circ \Phi = f$ où Φ est le plongement canonique de u dans Q? Bien sûr, Φ est une application quasi-uniforme; en effet, pour $m = i \in I$, $E'_i = E_i$ et $\psi(i)$ est engendré par $\phi(i)$. Construisons donc une application $g: E' \to D$, où $D = q(v)$ est l'ensemble sous-jacent à v. Pour $x \in E$, soit $g(x) = f(x)$. Pour $x = k \in K$,

constatons que $f(\mathcal{F}_k)$ engendre un filtre de Cauchy, soit G, pour v. Cependant, v est une quasi-uniformité complète; par conséquent, G admet des points limites. Choisissons un de ces points limites, soit a_k, et posons $g(k) = a_k$. L'application g est ainsi bien définie. Est-ce bien une application quasi-uniforme? Soit $m \in M$, et examinons les deux cas suivants:

Cas 1. $m = i \in I$. Alors il existe $p \in P$ tel que $f(E_i) \subset D_p$, d'où $g(E'_i) = f(E_i) \subset D_p$. Soit $U \in \alpha(p)$; f étant une application quasi-uniforme, il existe $V \in \phi(i)$ tel que $(f \times f)(V) \subset U$. Or, $\phi(i) \subset \psi(i)$, d'où $V \in \psi(i)$, et par suite, $(g \times g)(V) \subset U$.

Cas 2. $m = k \in K$. Soit $p \in P$ tel que $a_k \in D_p$; alors $g(\{ k \}) = \{ a_k \} \subset D_p$. Soit $U \in \alpha(p)$; nous allons exhiber un élément $W \in \psi(k)$ tel que $(g \times g)(W) \subset U$. Prenons $V \in \alpha(p)$ symétrique tel que $V \circ V \subset U$. Alors, $V(a_k)$ est un voisinage du point a_k, et $V(a_k) \times V(a_k) \subset U$. Comme a_k est un point limite du filtre de Cauchy, engendré par $f(\mathcal{F}_k)$, il existe $F \in \mathcal{F}_k$ tel que $f(F) \subset V(a_k)$. Soit $W = (F \cup \{ k \})^2$; on a bien $W \in \psi(k)$, ainsi que $(g \times g)(W) \subset U$. Nous en concluons que g est bien une application quasi-uniforme. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Corollaire 1. Supposons que la quasi-uniformité $u = ((E_i)_{i \in I} , \phi)$ du théorème admette en plus les propriétées suivantes:

1) u est accessible;

2) les filtres de Cauchy pour u, qui ne convergent pas, n'admettent pas non plus de points adhérents.

Alors, Ω est aussi accessible.

Preuve. Soient a et b des points distincts de E'. Il s'agit de montrer que chacun des deux points admet un voisinage ne contenant pas l'autre. Examinons les trois cas suivants:

Cas 1. $a \in E'_i$ et $b \in E'_j$, avec $i,j \in I \subset M$. Le sous-espace $\Theta(u)$ de Ω étant homéomorphe à u, est accessible. En effet, le filtre $\psi(i)$ étant engendré par $\phi(i)$, il existe un élément U dans $\psi(i)$ tel que b n'est pas dans $U(a)$, et vice versa.

Cas 2. a est toujours un élément de E'_i, avec $i \in I$, alors que $b = k \in K$. Prenons $U \in \phi(i) \subset \psi(i)$ quelconque; alors

$U \subset E \times E$, d'où $U(a) \cap K$ est vide. D'autre part, par hypothèse, les filtres de Cauchy pour u non convergents n'admettent pas de points adhérents. Ainsi, le filtre de Cauchy $F_k \in \mathcal{F}_{prem}$ n'en admet point. Il existe donc $F \in F_k$ tel que le point a n'est pas contenu dans F. Cependant, le point $b = k$ admet comme voisinage $F \cup \{ k \}$, qui ne contient donc pas le point a.

Cas 3. $a = k \in K$ et $b = k' \in K$, distinct de a. Le filtre $\psi(k)$ étant engendré par $\{F \cup \{ k \} \times F \cup \{ k \} \mid F \in F_k \}$, il existe des voisinages de a ne contenant pas d'élément de K distinct de $a = k$, par exemple, $F \cup \{ k \}$, où $F \in F_k$. Ainsi, Q est bien accessible.

Corollaire 2. Supposons que la quasi-uniformité u du corollaire 1 soit en plus séparée. Alors, la projection séparée Q^* de Q est toujours complète; c'est la complétée séparée de u.

Preuve. Contrairement au cas uniforme, le fait que u soit séparée n'entraîne pas obligatoirement que sa complétée Q le soit. Il se peut par exemple que deux filtres de Cauchy F_k et F_l de $\mathcal{F}_{prem}$ (i.e., deux filtres de Cauchy minimaux et non-convergents) se coupent, sans que l'un soit contenu dans l'autre. Dans ce cas-là, les points k et l de E' n'admettront pas de voisinages disjoints et, par conséquent, Q ne sera pas séparée. D'autre part, la question se pose de savoir si la projection séparée de Q est obligatoirement complète (cf. proposition 6.2 de [3]). D'après la proposition citée ci-dessus, la projection séparée de Q est la quasi-uniformité quotient par l'équivalence r sur E' la plus grossière possible rendant la topologie sous-jacente séparée: $Q^* = Q/r$. D'après la dite proposition, la relation r existe. En effet, caractérisons dans notre cas particulier cette relation d'équivalence r. Notons a la classe d'équivalence du point $a \in E'$. Deux points a et b de E' seront équivalents s'ils n'admettent pas de voisinages disjoints. Examinons alors les trois cas suivants:

Cas 1. Soient a et b deux points distincts de E. Alors, il existe $i, j \in I$ tels que $a \in E_i$ et $b \in E_j$. La quasi-uniformité u étant séparée, il existe $U \in \phi(i)$ et $V \in \phi(j)$ tels que $U(a)$ et $V(b)$ soient disjoints. Cependant, les $\psi(i)$, pour $i \in I$, sont engendrés par les $\phi(i)$ respectifs. Ainsi, $U \in \psi(i)$ et $V \in \psi(j)$, d'où $U(a)$ et $V(b)$ sont des voisinages

de a (resp. de b) dans Q aussi. Par conséquent, a et b admettent des voisinages disjoints dans Q également. Ainsi donc, la classe d'équivalence d'un point $a \in E$ est $\{ a \}$. Nous allons la désigner aussi par a.

Cas 2. $a \in E$ et $b = k \in K$. Par hypothèse, le filtre de Cauchy F_k pour u n'admet pas de points adhérents. Il existe donc dans u un voisinage du point a, soit U(a), et un élément $F \in F_k$ disjoints l'un de l'autre. Cependant, U(a) et $F \cup \{ k \}$ sont des voisinages dans Q des points a et k respectivement. Par suite, les points a et b admettent des voisinages disjoints dans Q.

Cas 3. $a = k \in K$ et $b = l \in K$. Alors les points a et b admettent des voisinages disjoints si et seulement si les filtres de Cauchy F_k et F_l ne se coupent pas. Autrement dit, il existe $F \in F_k$ et $G \in F_l$ tels que $F \cap G$ est vide. En effet, $(F \cup \{k\} \mid F \in F_k)$ et $(G \cup \{l\} \mid G \in F_l)$ constituent des bases de voisinages dans Q des points k et l, respectivement. Le filtre $\psi(k)$ étant engendré par:

$$\{ (F \cup \{k\}) \times (F \cup \{k\}) \mid F \in F_k \},$$

nous en concluons que la classe d'équivalence d'un point $k \in K$ est donnée par $\{ l \mid l \in K$ et $F_k \cap F_l \neq \emptyset \}$. Cette classe d'équivalence est désignée par k. Ainsi, u se plonge canoniquement dans $Q^* = ((E_m)_{m \in M}, \alpha)$ en composant le passage au quotient $\rho : Q \to Q^*$ avec le plongement $\Phi : u \to Q$. Alors, identifiant toute classe d'équivalence singleton à son unique élément, on obtient: $M = I \cup K$, où K est l'ensemble quotient de K par la relation d'équivalence ci-dessus. Pour $m = i \in I$, $E_i = E_i$, et pour $m = k \in K$, $E_k = \{ k \}$.
La projection séparée Q^* est-elle *complète* ?
Etant donné un m-filtre de Cauchy, soit G, pour Q^*, $m \in M$, est-ce que G *converge* obligatoirement ?

Cas 1. $m = i \in I$. Comme u est homéomorphe à la sous-quasi-uniformité Q^*/E de Q^*, $(\rho \circ \Phi)^{-1}(G)$ définit un i-filtre de Cauchy F pour u.
Sous-cas a) Si F converge dans u, $\rho \circ \Phi$ étant une application quasi-uniforme, le filtre engendré par $(\rho \circ \Phi)(F)$, qu'est G, va également converger dans Q^*.

Sous-cas b) Si F ne converge pas dans u, il existe $k \in K$ tel que le filtre $F_k \in F_{prem}$ soit moins fin que F. Comme le filtre engendré par $\Phi(F_k)$ dans Ω converge vers le point k, le filtre engendré par $\Phi(F)$ dans Ω va converger vers le même point. Ainsi, $\rho(\Phi(F))$, qui engendre notre filtre initial G dans Ω^*, va converger vers le point k.

Cas 2. $m = k \in K$. Comme $E_k = (k)$ est un singleton, $\alpha(k)$ est engendré par $\{ V_k \times V_k \mid V_k$ voisinage de $k \}$. Par conséquent, tout k-filtre de Cauchy pour Ω^* est nécessairement plus fin que le filtre des voisinages du point k. Ainsi, le filtre de Cauchy G converge dans Ω^* vers le point k. En somme, tout filtre de Cauchy pour Ω^* converge, et par conséquent, Ω^* est bien complète.
Montrons finalement que Ω^* est la projection séparée complétée de u. Soit $f : u \to v$ une application quasi-uniforme, où v est une quasi-uniformité séparée et complète. Montrons que f factorise à travers $\rho \circ \Phi$, i.e. qu'il existe une application quasi-uniforme $h : \Omega^* \to v$ unique telle que $h \circ (\rho \circ \Phi) = f$.
Puisque Ω est la complétée de u, on sait déjà qu'il existe une unique application uniforme $g : \Omega \to v$ qui factorise à travers Φ, i.e. telle que $g \circ \Phi = f$ (tout filtre de Cauchy pour v admet un unique point limite !). D'autre part, Ω^* est une projection séparée de Ω, aussi l'application quasi-uniforme g factorise-t-elle de manière unique à travers ρ, i.e. il existe une unique $h : \Omega^* \to v$ telle que $h \circ \rho = g$, d'où l'on déduit que $f = g \circ \Phi = (h \circ \rho) \circ \Phi = h \circ (\rho \circ \Phi)$. Ceci achève la preuve du corollaire 2.

Voici encore deux problèmes ouverts:

1) peut-on construire une complétion d'une quasi-uniformité quelconque non nécessairement quasi-artinienne ?

2) dans le cas général, la projection séparée d'une quasi-uniformité complète est-elle encore complète ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki : *Topologie Générale , Eléments de Mathématiques, Livre* III, Hermann, 1951 .

[2] C. Ehresmann :*Catégories Topologiques*, Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Series A, 69, No. 1 et Indag Math. 28, No. 1, 1966 .

[3] G. Palias : *Sur la Catégorie des Applications Quasi-Uniformes*, Thèse de 3-ième Cycle, Université de Paris, 1967 .

[4] G. Palias : *Structures Quasi-Métriques*, Diagrammes, Volume 6, 1981, Université Paris VII .

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. DE MATHEMATIQUES
TOURS 45-55-5ème ETAGE

2 PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE