DIAGRAMMES

C. LÉGER

Le groupe des métamorphoses d'une catégorie, un exemple

Diagrammes, tome 21 (1989), exp. n° 3, p. L1-L4

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1989__21__A3_0>

© Université Paris 7, UER math., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 21 , 1989

LE GROUPE DES METAMORPHOSES D'UNE CATEGORIE, UN EXEMPLE

C. Léger

Dans cette note nous montrons que, étant donné un groupe G , le groupe (*) des autoéquivalences à équivalence naturelle près de la catégorie des G-ensembles s'identifie au groupe des automorphismes extérieurs de G .

Nous remercions Jacques Emsalem qui, avec la notion d'autoéquivalence de catégorie, a rendu plus pertinent un premier énoncé (cf. <1>, théorème 1 et <2>, théorème 11) et en a considérablement simplifié et resserré la démonstration.
Nous remercions à nouveau Christian Lair qui nous a donné l'idée décisive du lemme.

DEFINITION 1. Soit une catégorie K . On note Equ K le monoïde (*) des équivalences de K dans K ou *autoéquivalences* de K . On note Met K et on appelle *groupe des métamorphoses* de K le groupe (*) quotient de Equ K par la relation d'équivalence naturelle des foncteurs.

On vérifie immédiatement la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Toute équivalence d'une catégorie* K *dans une catégorie* K' *induit un isomorphisme de groupes de* Met K *sur* Met K' .

(*) Nous ne discutons pas le fait qu'ici les supports des groupes et des monoïdes ne sont pas nécessairement des ensembles.

Soit pour toute cette note un groupe G.

On note respectivement $\mathrm{Aut}\,G$, $\mathrm{Int}\,G$, $\mathrm{Out}\,G$ le groupe des automorphismes de G, le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs, le groupe quotient $\mathrm{Aut}\,G / \mathrm{Int}\,G$.

Un G-ensemble X c'est aussi bien une loi de composition externe $G\times X \to X$ satisfaisant aux axiomes usuels qu'un homomorphisme de G dans le groupe $\mathrm{Bij}(X)$ des substitutions de X. On utilise indifféremment un point de vue ou l'autre.

On note C la catégorie des G-ensembles ayant pour flèches les homomorphismes de G-ensemble. Pour tout v dans $\mathrm{Aut}\,G$ et tout objet X de C défini par l'homomorphisme $h:G \to \mathrm{Bij}(X)$, on a l'objet de C noté $Fv(X)$ ayant même ensemble sous-jacent que X et défini par l'homomorphisme $h \circ v^{-1}$.

Pour tout v dans $\mathrm{Aut}\,G$ on a le foncteur $Fv:C \to C$ qui à l'objet X associe l'objet $Fv(X)$ et agit trivialement sur les flèches.

On note encore G l'objet canonique de C défini par l'homomorphisme qui à tout élément g de G associe la translation à droite $Tg:x \to xg$ de G.

On note S la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont ceux isomorphes à l'objet canonique (ce sont ceux sources de flèches vers tout objet de C).

La sous-catégorie S est stable par les autoéquivalences de la catégorie C.

THEOREME 3. *On a l'homomorphisme de* $\mathrm{Aut}\,G$ *dans* $\mathrm{Equ}\,C$ *qui à* v *associe* Fv. *Il induit un homomorphisme de* $\mathrm{Out}\,G$ *dans* $\mathrm{Met}\,C$. *Celui-ci est un isomorphisme de* $\mathrm{Out}\,G$ *sur* $\mathrm{Met}\,C$.

LEMME 4. *La sous-catégorie pleine* S *engendre la catégorie* C *par limites inductives.*

Plus précisément, soit un objet X de C. On lui associe la catégorie W dont les objets sont les éléments x, y, ... de X et les flèches de x dans y sont les triplets (x,y,g) tels que $y = gx$. On lui associe encore le foncteur $J:W \to S$ qui à l'objet x fait toujours correspondre l'objet canonique G et à la flèche (x,y,g) fait correspondre la translation à droite Tg. On a alors l'énoncé suivant:

LEMME 5. *L'objet* X *est limite inductive dans* C *du foncteur* $J:W \to S$.

Soit en effet pour chaque objet x de W la flèche $j(x):J(x) \to X$ définie par $j(x)(g) = gx$. Alors ces flèches définissent un cône de base J .

Ce cône est universel et fait donc de X la limite inductive de J .

La correspondance qui vient d'être définie entre les objets de C d'une part et les catégories W et les foncteurs J d'autre part est fonctorielle. Tout ceci permet d'établir:

PROPOSITION 6. *Soit une catégorie* C' *et des foncteurs* $F_1, F_2 : C \to C'$, *compatibles aux limites inductives. S'il existe une équivalence naturelle de la restriction à* S *de* F_1 *vers celle de* F_2 , *alors il existe une équivalence naturelle de* F_1 *vers* F_2 .

Ainsi, toute autoéquivalence de C , donc compatible aux limites inductives, est déterminée par sa restriction à S :

PROPOSITION 7. *L'opération de restriction définit un homomorphisme injectif de* Met C *dans* Met S .

On note S_o la sous-catégorie pleine de C comportant l'objet canonique G pour seul objet. Le foncteur d'inclusion de S_o dans S est une équivalence de catégorie et induit donc un isomorphisme de Met S_o sur Met S .

Comme il est trivial que Equ S_o s'identifie à Aut G et que la relation d'équivalence naturelle dans Equ S_o s'identifie à la congruence modulo Int G , alors Met S_o , et par suite Met S , s'identifie à Out G .

Ainsi, l'homomorphisme injectif de Met C dans Met S est en fait bijectif, et le théorème 3 annoncé est finalement démontré.

Tous les énoncés de cette démonstration restent vrais en remplaçant C par une quelconque sous-catégorie pleine K comportant l'objet canonique G , et stable par les foncteurs Fv . On a en fait l'énoncé plus général suivant, où l'on note pareillement les foncteurs Fv et les foncteurs de K dans K induits:

THEOREME 8. *Soit une sous-catégorie pleine* K *de* C , *comportant l'objet canonique* G *et stable par les foncteurs* Fv *pour* v *dans* Aut G . *On a l'homomorphisme de* Aut G *dans* Equ K *qui à* v *associe* Fv . *Il induit un homomorphisme de* Out G *dans* Met K . *Celui-ci est un isomorphisme de* Out G *sur* Met K .

Remarque. Un cas particulier géométrique non trivial de la notion de métamorphoses est développé dans <1> et <2>.

Références.

<1> C. Léger et J.-C. Terrasson:
L'action du groupe symétrique S_3 sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de pavages de surface fermée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 302, série I , n°1, pp. 39-42, 1986.

<2> C. Léger et J.-C. Terrasson:
Les cinq métamorphoses des surfaces pavées, Diagrammes, supplément au volume 18, pp. 1-48, Paris, 1987.

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. DE MATHEMATIQUES
TOURS 45-55-5ème ETAGE

2 PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE