DIAGRAMMES

PIERRE AGERON

Les catégories localement (multi)présentables comme domaines de Scott

Diagrammes, tome 21 (1989), exp. n° 2, p. A1-A5

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1989__21__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 21 , 1989

LES CATEGORIES LOCALEMENT (MULTI)PRESENTABLES COMME DOMAINES DE SCOTT

Pierre Ageron

Le but de cette note est d'établir les théorèmes qui suivent, illustrant ainsi une nouvelle fois l'efficacité de la théorie des esquisses.

Soit α un cardinal régulier.

Théorème 1. *La catégorie* $\mathcal{P}$ *, dont les objets sont les catégories localement* α*-présentables (au sens de* Gabriel-Ulmer71*) et les flèches les foncteurs commutant aux limites inductives* α*-filtrantes, est cartésienne fermée.*

Théorème 2. *La catégorie* $\mathcal{D}$ *, dont les objets sont les catégories localement* α*-multiprésentables (au sens de* Diers80*) et les flèches les foncteurs commutant aux limites inductives* α*-filtrantes, est cartésienne fermée.*

(Nous laissons au lecteur le soin de formuler des hypothèses de théorie des ensembles qui lui conviennent et qui donnent un sens à ces énoncés.)

L'essentiel de la démonstration est contenu dans le lemme qui suit.

Lemme. Si $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *sont deux catégories localement* α*-présentables (resp. localement* α*-multiprésentables), alors la catégorie* α-Cont$(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ *, dont les objets sont les foncteurs*

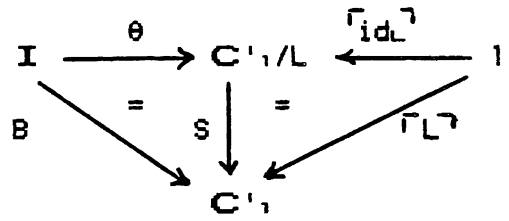
A.M.S. Sub. Class. : 18 D 15 , 18 A 35 .

de C_1 *dans* C_2 *commutant aux limites inductives α-filtrantes et les flèches les transformations naturelles entre ces foncteurs, est encore localement α-présentable (resp. localement α-multiprésentable).*

Démonstration du lemme.

a) CAS DES CATEGORIES LOCALEMENT α-PRESENTABLES.

Rappelons le résultat fondamental suivant:
- une catégorie C est localement α-présentable ssi C est équivalente à la catégorie des modèles d'une petite esquisse α-projective (i. e. dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation $<\alpha$ et sans cône inductif distingué).
Il existe donc deux petites esquisses α-projectives E_1 , E_2 telles que $C_1 \simeq \mathbf{Ens}^{E_1}$ et $C_2 \simeq \mathbf{Ens}^{E_2}$.
D'autre part, on sait qu'il existe une sous-catégorie C'_1 de C_1 qui est petite, pleine, formée d'objets α-présentables et dense dans C_1 . Alors un foncteur de C_1 dans C_2 commutant aux limites inductives α-filtrantes est entièrement déterminé par sa restriction à C'_1 .
De plus, C'_1 ne renferme plus de limite inductive α-filtrante non triviale de C_1 . En effet, supposons qu'il existe une telle limite, de sommet L et de base le foncteur $B: I \to C'_1$, et formons le diagramme suivant, où θ et S sont les foncteurs canoniques et $\ulcorner X \urcorner$ désigne le foncteur sélectionnant un objet X :



On vérifie facilement que les deux foncteurs θ et $\ulcorner id_L \urcorner$ sont *finaux* (pour θ , ceci résulte de l'α-présentabilité des objets de C'_1). Par conséquent $\varinjlim B \cong \varinjlim S \cong \varinjlim L$.
Ainsi, on a:

$$\begin{aligned} \alpha\text{-}\mathrm{Cont}(C_1, C_2) &\simeq C_2^{C'_1} \\ &\simeq (\mathbf{Ens}^{E_2})^{C'_1} \\ &\simeq \mathbf{Ens}^{E_2 \bullet C'_1} , \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_2 \otimes \mathbb{C}'_1$ est encore (par construction, cf. Lair88) une petite esquisse α-projective, $\mathbb{C}'_1$ s'identifiant à une petite esquisse sans cônes distingués.
On en conclut immédiatement que $\alpha\text{-Cont}(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2)$ est localement α-présentable.

b) CAS DES CATEGORIES LOCALEMENT α-MULTIPRESENTABLES.

Rappelons le résultat fondamental suivant (Guitart-Lair80):
- une catégorie $\mathbb{C}$ est localement α-multiprésentable ssi $\mathbb{C}$ est équivalente à la catégorie des modèles d'une petite esquisse dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation $<\alpha$ et dont tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation discrète.
La démonstration est alors tout à fait analogue à celle du cas précédent.

Démonstration des théorèmes 1 *et* 2.

a) CAS DES CATEGORIES LOCALEMENT α-PRESENTABLES.

D'abord, la catégorie $\mathcal{P}$ est cartésienne, puisqu'on établit facilement la formule:

$$\mathbf{Ens}^{\mathbb{E}_1} \times \mathbf{Ens}^{\mathbb{E}_2} \simeq \mathbf{Ens}^{\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2} .$$

Pour montrer que $\mathcal{P}$ est cartésienne fermée, il suffit de vérifier que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathbb{C}_3, \alpha\text{-Cont}(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2)) .$$

Or ceci découle immédiatement du fait que les limites inductives α-filtrantes dans $\alpha\text{-Cont}(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2)$ se calculent comme dans $\mathbb{C}_2^{\mathbb{C}'_1}$, c'est-à-dire objet de $\mathbb{C}'_1$ par objet de $\mathbb{C}'_1$.

b) CAS DES CATEGORIES LOCALEMENT α-MULTIPRESENTABLES.

La démonstration est tout à fait analogue.

Techniquement, la recherche d'(autres) catégories cartésiennes fermées, sous-catégories pleines de la catégorie $\alpha\text{-}\mathbf{Acc}$ des catégories et foncteurs α-accessibles (cf. Makkai-Paré88) passe par la recherche de *formes* d'esquisses $\mathbb{E}$ (dont l'esquisse projective sous-jacente $\mathrm{proj}(\mathbb{E})$ est α-projective) vérifiant la condition suffisante de *conservation* suivante:

- les objets α-présentables de $\mathbf{Ens}^{proj(\mathbb{E})}$ engendrent des diagrammes localement libres (au sens de Guitart-Lair80) dans $\mathbf{Ens}^{\mathbb{E}}$ de même forme que celle des indexations des cônes inductifs distingués de $\mathbb{E}$ et dont les objets sont encore des objets α-présentables dans $\mathbf{Ens}^{\mathbb{E}}$.

Par exemple, on peut se demander si l'on obtient un résultat analogue à ceux des théorèmes 1 ou 2 concernant les catégories localement α-polyprésentables (au sens de Lamarche88).
En reprenant les méthodes de Guitart-Lair80 et de Lair87 (validation de cônes projectifs), on établit facilement que:
- une catégorie $\mathbb{C}$ est localement polyprésentable ssi $\mathbb{C}$ est équivalente à la catégorie des modèles d'une petite esquisse $\mathbb{E}$ dont tous les cônes inductifs distingués sont indexés par un groupoïde.
Malheureusement, contrairement aux deux cas précédents, disposer d'une majoration sur la taille des cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}$ n'implique, en général, aucun contrôle sur le "rang de polyprésentabilité" α de $\mathbf{Ens}^{\mathbb{E}}$. La raison en est que, si l'on peut montrer qu'un quelconque objet α-présentable de $\mathbf{Ens}^{proj(\mathbb{E})}$ engendre un diagramme localement libre dans $\mathbf{Ens}^{\mathbb{E}}$ qui est bien un groupoïde, les objets de ce diagramme ne sont plus nécessairement α-présentables dans $\mathbf{Ens}^{\mathbb{E}}$.
Cependant, il est aisé de montrer qu'il en est bien ainsi dans le cas, plus particulier, où $\mathbb{C} \simeq \mathbf{Ens}^{\mathbb{E}}$ n'a pour morphismes que des monos.
Ainsi, nous pouvons énoncer:

Théorème 3. *La catégorie* $\mathbb{G}$, *dont les objets sont les seules catégories localement α-polyprésentables (au sens de* Lamarche88*), pour lesquelles les morphismes sont nécessairement des monos, et dont les flèches sont les foncteurs commutant aux limites inductives α-filtrantes, est cartésienne fermée.*

Remarquons, pour conclure, que J.-Y. Girard, T. Coquand, F. Lamarche ont obtenu diverses catégories cartésiennes fermées, sous-catégories de $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{G}$ (voir la bibliographie).

Bibliographie,

P. Gabriel et F. Ulmer:
Lokal präsentierbare Kategorien, Lect. Notes in Math. 221, Springer, 1971.

Y. Diers:
Catégories localement multiprésentables, Archiv der Mathematik 34-4, 1980.

R. Guitart et C. Lair:
Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4, 1980.

J.-Y. Girard:
Normal functors, power series and lambda calculus, Annals of pure and applied logic 37-2, 1988.

T. Coquand:
Categories of embeddings, in Logic in computer science (Edinburgh, 1988), Computer Science Press, (1988).

F. Lamarche:
Modelling polymorphism with categories, Thesis, McGill Univ., Montréal, (1988).

M. Makkai et R. Paré:
Accessible categories: the foundations of categorical model theory, Contemporary Mathematics, AMS, Providence RI, (1988).

C. Lair:
Lax-colimites structurées, Diagrammes 20, 1988.
Catégories qualifiables et catégories esquissables, Diagrammes 17, 1987.

UNIVERSITE DE CAEN
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ESPLANADE DE LA PAIX
14032 CAEN CEDEX
FRANCE