DIAGRAMMES

CHRISTIAN LEGER
JEAN-CLAUDE TERRASSON

Les cinq métamorphoses des surfaces pavées

Diagrammes, tome S18 (1987), p. 1-48
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1987__S18__1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES CINQ METAMORPHOSES DES SURFACES PAVEES

Christian LEGER et Jean-Claude TERRASSON

Nous décrivons un groupe symétrique S3 de transformations agissant sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de pavages de surface fermée, le groupe des métamorphoses. Une métamorphose involutive est la classique dualité de Poincaré, tandis que les deux autres modifient en général la surface sous-jacente. Les métamorphoses permutent trois attributs auxquels nous donnons un statut algébrique homogène : les faces, les sommets, les polygones de Petrie, composantes d'une certaine projection d'entrelacs sur la surface. Nous démontrons que le groupe des métamorphoses est essentiellement le groupe d'automorphisme d'une catégorie abritant les pavages.

We describe an action of S3 on the set of isomorphism classes of tesselations of surfaces : we call this group the group of metamorphoses. One particular involutory metamorphosis is the classical Poincaré duality, whereas in general the remaining two involutions alter the underlying surface. The metamorphoses permute three features : faces, vertices and Petrie polygons (which are components of a certain link projection on the surface). We prove that the group of metamorphoses is essentially the automorphism group of a category of surface tesselations.

TABLE DES MATIERES

0 Introduction.....2
1 Les surfaces pavées.....4
2 Les graphes de bandes.....7
3 Les métamorphoses.....11
4 Les pavois.....16
5 Tout venant.....34
6 Remarques historiques.....38
Annexe.....40
Bibliographie.....44

INTRODUCTION

Une note (1986) formule, dans un ordre logique différent, les resultats du présent texte.

Dans le monde des pavages de surface fermée intrinseque, outre la classique dualité de Poincaré, il existe deux involutions non standard. L'une a été définie par H. S. M. Coxeter dans le cadre des pavages réguliers à l'exclusion de certains cas dégénérés. Il appelle "polygone de Petrie" d'un pavage tout polygone en zig-zag dont les côtés sont des arêtes du pavage tels que deux côtés consécutifs mais jamais trois bordent une même face. Une involution non standard consiste alors à conserver le graphe des sommets et arêtes du pavage d'origine, à en evider les faces et à leur substituer des disques qui comblent les polygones de Petrie. L'autre involution non standard se conçoit plus facilement. Elle consiste à associer à tout pavage le pavage ayant les mêmes arêtes et les mêmes faces, mais recollées tête-bêche le long de leurs côtés communs, de sorte que l'endroit de chacune se trouve mis en continuité avec l'envers de chacune de ses voisines.

Les pavages s'interprètent aussi comme graphes de bandes en trouant leurs faces et en ne conservant que le voisinage bidimensionnel du graphe des sommets et arêtes. Les métamorphoses involutives se traduisent alors à l'aide de la transformation élémentaire de torsion qui consiste à couper transversalement chacune des bandes puis à les recoller après avoir effectué un demi-tour de torsion.

Il est assez étonnant de constater que ces trois involutions engendrent un groupe symétrique S3 de transformations. Nous l'appelons groupe des métamorphoses. Ce groupe est essentiellement le groupe d'automorphisme d'une catégorie due à A. Grothendieck et ses élèves (Y. Ladegaillerie, C. Voisin et J. Malgoire, P. Damphousse), catégorie abritant les pavages de surface et les revêtements ramifiés.

Les sections 1, 2, 3 présentent pavages, graphes de bandes et métamorphoses de façon heuristique, la section 4 donne un fondement algébrique.

On fait une connexion, section 5, avec la théorie des surfaces de Seifert et de Reidemeister.

Felix Klein, Max Dehn et surtout Hugo Steinitz ont anticipé plusieurs de ces notions. Nous donnons des repères historiques, section 6, et rappelons notamment les énoncés de H. S. M. Coxeter qui ont été à l'origine de notre élaboration.

Après avoir terminé ce manuscrit nous avons appris l'existence des travaux de S. E. Wilson (1979), de S. Lins (1982) et de G. A. Jones et J. S. Thornton (1983). En particulier, le premier auteur remarque l'action de S3 sur les pavages réguliers et donne une description géométrique des trois métamorphoses involutives, le second établit cette action dans le cas des pavages quelconques, les deux derniers auteurs montrent que ce groupe S3 est le groupe des automorphismes extérieurs du groupe de Grothendieck (notre lemmme 12). A la suite d'un exposé sur les métamorphoses que nous avons donné, à l'invitation de L. Siebenmann, à la faculté d'Orsay, en avril 1984, H. Chaltin souligne le role du graphe des arêtes (voir le point 6 ci-dessous), il construit notamment pour tout graphe quadrivalent les pavages l'admettant pour graphe des arêtes, et montre que tout trio de surfaces est réalisable comme trio des surfaces sous-jacentes aux pavages d'une même orbite du groupe des métamorphoses. L. Guibas et J. Stolfi (1985) discutant un problème combinatoire donnent un modèle algébrique des pavages (Edge Algebras) proche de celui de Grothendieck. Dans des articles à paraître, L. D. James et J. Tits montrent enfin que, pour toute dimension supérieure, un analogue du groupe des métamorphoses est un groupe dihédral D4.

Toutefois, les résultats algébriques et topologiques suivants sont, à notre connaissance, originaux.

1 La définition géométrique des polygones de Petrie est générale : elle ne souffre pas d'exception dans le cas de pavages dégénérés (p. 11, p. 20, p. 38).

2 Un théorème (ouvrant sur des conjectures), caractérise les métamorphoses comme les seules bonnes transformations du monde des pavages (p. 23, pp. 26-33). Le contexte est une catégorie définie par Grothendieck et ses élèves, dont les objets s'interprètent comme des pavages et des généralisations naturelles.
3 La définition des pavois, modèle algébrique de pavages et pavages généralisés, donne lieu à une interprétation topologique immédiate (p. 18, 20, 21).
4 La considération des pavois met en évidence l'association à tout pavage, outre son groupe d'automorphisme, d'un second groupe, son groupe de dislocation (p. 19).
5 La classification des pavages est réduite à celle des classes de conjugaison des sous groupes libres d'indice fini du groupe de Grothendieck, produit libre du groupe de Klein à 4 éléments par le groupe à 2 éléments (p. 25).

A ces résultats centraux, et grâce au point de vue qu'ils fournissent, s'ajoutent les points suivants :
6 Définition du graphe des arêtes (p. 14, 22), graphe quadrivalent canoniquement attaché à chaque pavage, et invariant sous le groupe des métamorphoses.
7 Isomorphisme pour tout pavage - vu comme espace homogène des pavillons sous l'action du groupe de Grothendieck - du stabilisateur d'un pavillon et du groupe fondamental du graphe des arêtes (p. 24). Damphousse (1981) mentionne un énoncé équivalent et le vérifie dans deux cas particuliers.
8 Correspondance biunivoque entre pavages et graphes de bandes (ou handle bodies de dimension 2) (pp. 7-10).
9 Description des métamorphoses involutives à l'aide de l'opération topologique de torsion de graphe de bandes (p.8,15).
10 Traduction en termes de graphes de bandes de la construction aboutissant à la surface de Seifert d'un entrelacs donné (p. 36).
11 Exemples montrant l'existence de toutes les sortes d'orbites a priori envisageables du groupe des métamorphoses (pp. 40-43).

Que les personnes qui nous ont aidées dans notre travail trouvent ici l'expression de notre gratitude :

Hendrick CHALTIN, Jacques EMSALEM, Françoise GONON, Alexandre GROTHENDIECK, Philip HIGGINS, Claudine MAERTEN, Bernard MORIN, Thomas PETERFALVI, Marie-France RAGUET, Daniel SCHNITZPAHN, Carsten SCHUTT, Peter SCOTT et Laurent SIEBENMANN.

Nous remercions notamment Michel EMSALEM qui nous a fourni la démonstration du lemme 12 et Christian LAIR qui nous a donné la démonstration des étapes (24) à (29) du théorème 11.

Nous devons à Jean BRETTE le plongement représenté par la figure liminaire, et à Bernard BESNIER la traduction du texte cité de Platon.

Enfin, nous voulons rendre hommage à la mémoire de Pierre SOURY.

1 LES SURFACES PAVEES

Une surface pavée ou pavage est un patchwork d'un seul tenant, fait de faces, en nombre fini, cousues ensemble selon un schéma de montage.

Les faces d'un pavage sont des disques compacts polygonaux disjoints deux à deux (fig. 1).

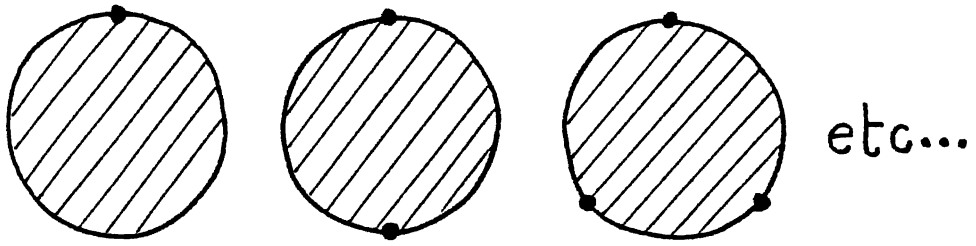


figure 1
Les faces, constitutives des pavages, sont les disques polygonaux.

Les bords des faces sont subdivisés par des sommets (au moins un) en autant de côtés. Les côtés sont des segments curvilignes compacts sauf pour les faces qui n'ont qu'un sommet et dont l'unique côté est un cercle S1.

Selon les indications du schéma de montage, chaque côté de face est cousu à un unique autre côté de face. Le schéma de montage spécifie notamment de laquelle des deux manières a priori possibles, tête-bêche l'une de l'autre, la couture est faite (fig 2, 3. 4).

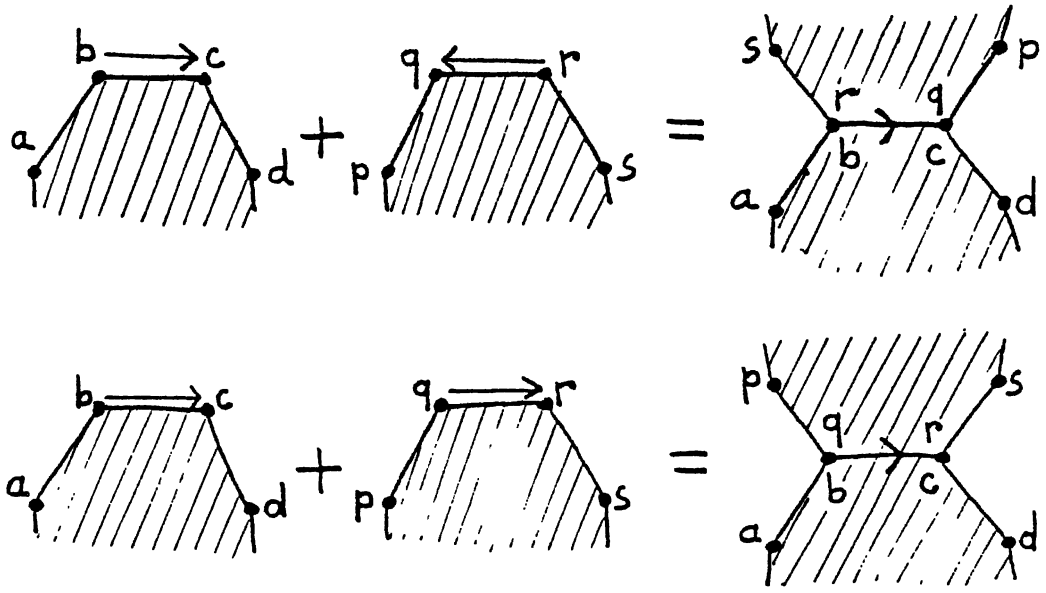


figure 2
Les deux manières, tête-bêche, de coudre des faces entre elles.

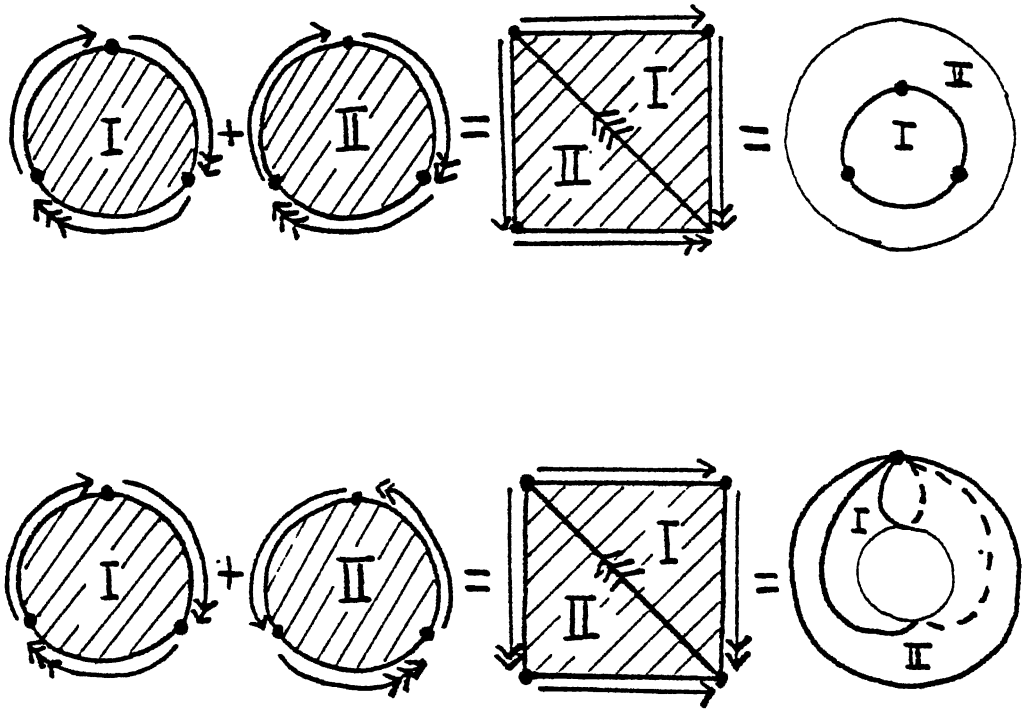


figure 3
Deux pavages constitués par deux faces triangulaires, chaque côté de l'une étant cousu avec un côté de l'autre: (i) sphère, deux faces hémisphériques, trois sommets, trois arêtes. (ii) tore de genre 1, deux faces, un sommet, trois arêtes.

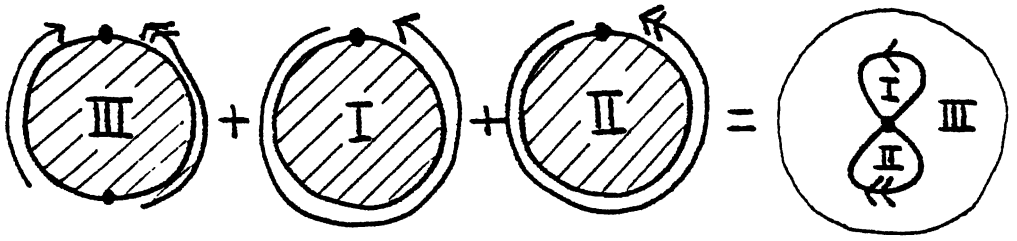


figure 4
Le pavage de la sphère par un "huit" en trois faces, un sommet, deux arêtes.

La surface obtenue est intrinsèque. Sa topologie est la topologie quotient du système des faces qui l'ont constituée, compte tenu de l'identification par couture de leurs côtés deux à deux.

Les agglutinements de sommets cousus ensemble sont les sommets du pavage. Les paires de côtés cousus ensemble sont les arêtes du pavage.

Nous construisons ainsi les pavages au sens de A. L. EDMONDS, J. H. EWING, et S. KULKARNI (1982, pp. 115-116) : la surface, compacte, connexe, sans bord, est munie d'un graphe fini (au sens très général de CW-complexe) tel que les composantes connexes du complémentaire soient homéomorphes à des disques ouverts. Toutefois la sphère munie d'un point n'est pas un pavage à notre sens.

2 LES GRAPHES DE BANDES

A tout pavage on associe deux graphes. Le graphe des sommets a pour sommets les sommets du pavage et a pour arêtes les arêtes du pavage. Le graphe des faces est le graphe des sommets du pavage dual.

A tout pavage on associe deux graphes de bandes (ou corps d'anses, ou handle bodies de dimension 2). Ce sont des (classes d'isomorphisme de) surfaces intrinsèques, compactes, avec bord, munies d'un graphe, montages de disques appelés rondelles attachés entre eux par des bandes.

Le graphe de bandes des sommets d'un pavage est le voisinage régulier du graphe des sommets. Les rondelles sont des voisinages des sommets du pavage, les bandes sont des voisinages des arêtes.
L'âme du graphe de bandes est le graphe des sommets.

Le graphe de bandes des faces d'un pavage est le graphe de bandes des sommets du pavage dual.

Le graphe de bandes des sommets d'un pavage s'obtient en trouant et évidant chacune des faces du pavage. Inversement on reconstitue (la classe d'isomorphisme d') un pavage d'une surface fermée à partir d'un graphe de bandes en bouchant par des disques chacun de ses bords, l'âme du graphe de bandes définissant alors un pavage de la surface fermée obtenue (fig. 5, 6, 7).

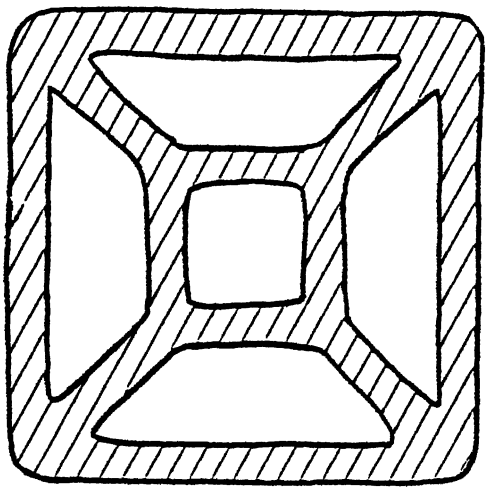


figure 5
Le graphe de bandes des sommets associé au pavage cubique de la sphère.

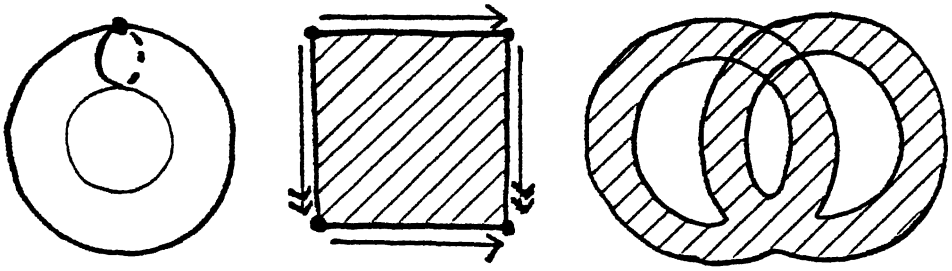


figure 6
Pavage du tore de genre 1 en une face carrée (dessin perspectif et schéma), et le graphe de bandes des sommets associé.

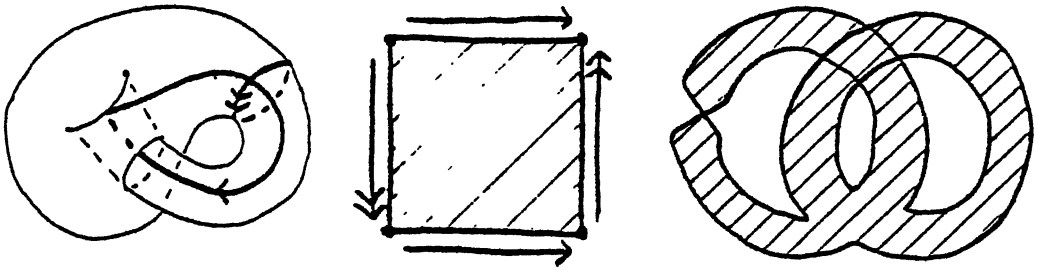


figure 7
Pavage standard de la bouteille de Klein en une face carrée (dessin perspectif et schéma), et le graphe de bandes des sommets associé.

Le tordu d'un graphe de bandes est le graphe de bandes obtenu en coupant transversalement chacune de ses bandes en deux tronçons puis en les recousant après avoir effectué sur chacun d'eux et en sens inverse un quart de tour de torsion (fig. 8). La torsion des graphes de bandes, surfaces intrinsèques, est une transformation involutive.

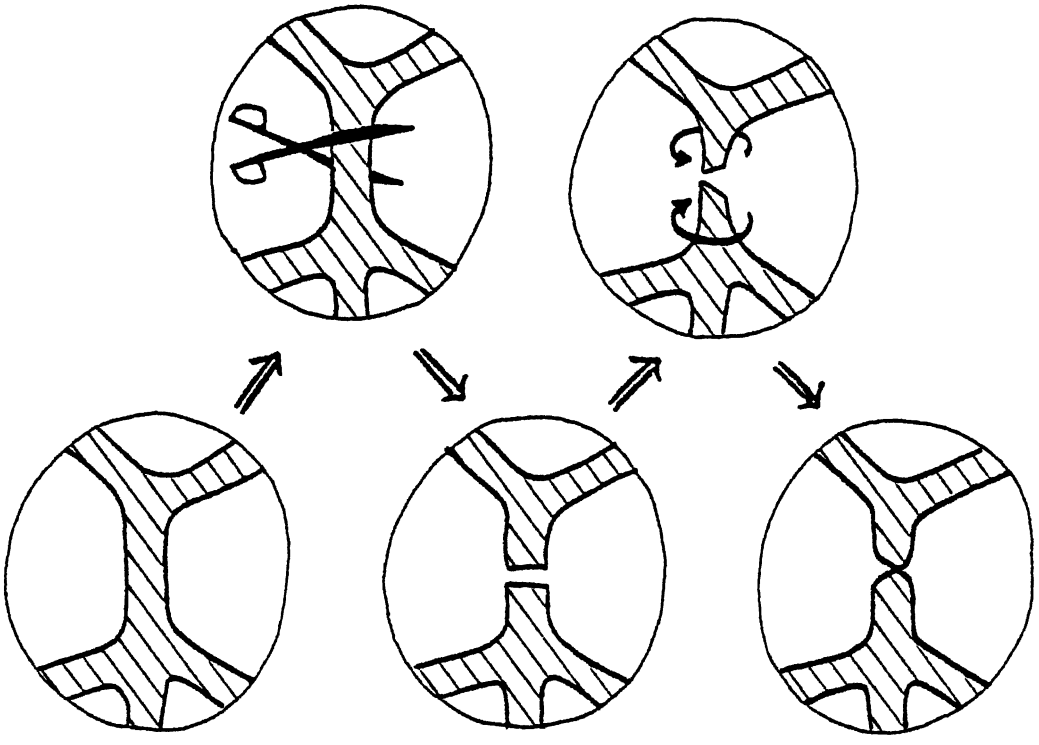


figure 8
La torsion d'un graphe de bandes (détail).

Dans nos dessins, les rondelles de valence au moins 3 sont simplement représentées comme carrefours de bandes, celles de valence 1 ou 2 sont elles explicitement indiquées (fig. 9, 10). Les graphes de bandes sont des surfaces intrinsèques. Pour dessiner un graphe de bandes, nous prenons deux couleurs, l'une appelée "vue" et l'autre "cachée", et nous faisons le choix, pour chaque rondelle, de colorier ses faces, chacune d'une couleur. Les bandes mettant en

continuité des faces de couleur différente sont alors représentées par des chemins dont les bords se croisent une (ou un nombre impair de) fois, et celles mettant en continuité des faces de même couleur par des chemins dont les bords se croisent zéro (ou un nombre pair de) fois (fig. 11). Lorsque deux chemins représentant des bandes se traversent, nous n'indiquons pas de "dessus-dessous" (fig. 6, 7, 11, 12).

Un dessin du tordu d'un graphe de bandes s'obtient en ajoutant ou retranchant une (ou un nombre impair de) croix à chaque chemin.

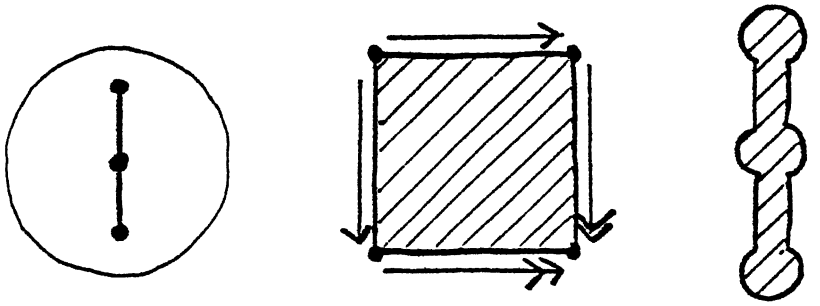


figure 9
Pavage de la sphère en une face carrée, trois sommets, deux arêtes (dessin perspectif et schéma), et le graphe de bandes des sommets associé.

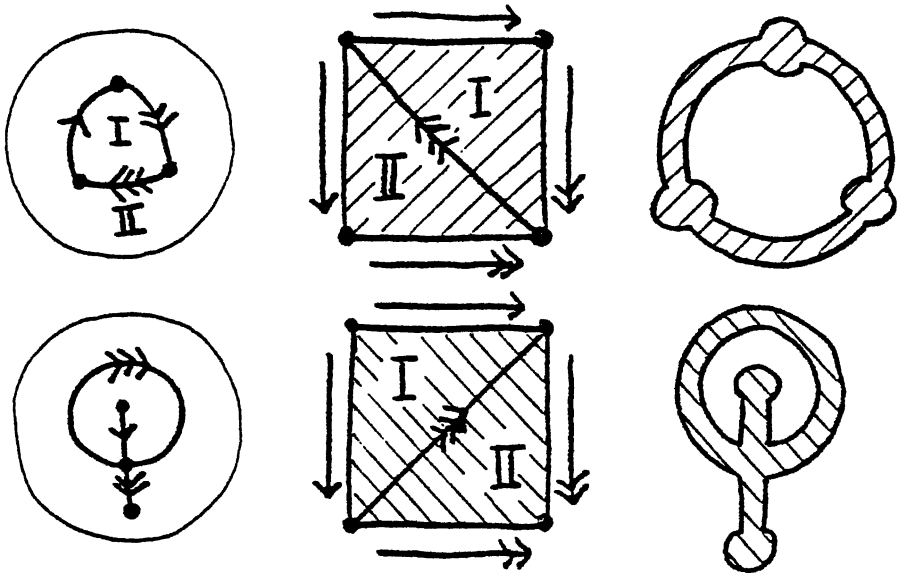


figure 10
Deux pavages de la sphère en deux faces triangulaires, trois sommets, trois arêtes (dessin perspectif et schéma), et les graphes de bandes des sommets associés

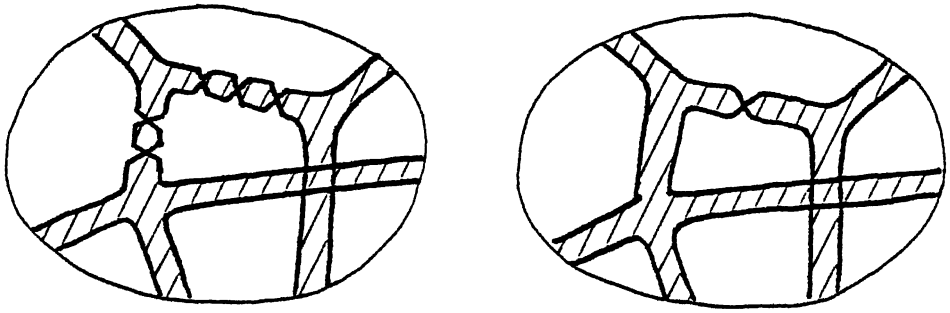


figure 11
Les graphes de bandes sont des surfaces intrinsèques : dessins représentant un même graphe de bandes (détails).

EXEMPLES. --- Les graphes de bandes des sommets, l'un du pavage non standard de la bouteille de Klein en une face carrée (fig. 12), l'autre du pavage de la sphère par un "huit" en deux 1-gones et un 2-gone (fig. 4, 13), sont tordus l'un de l'autre.

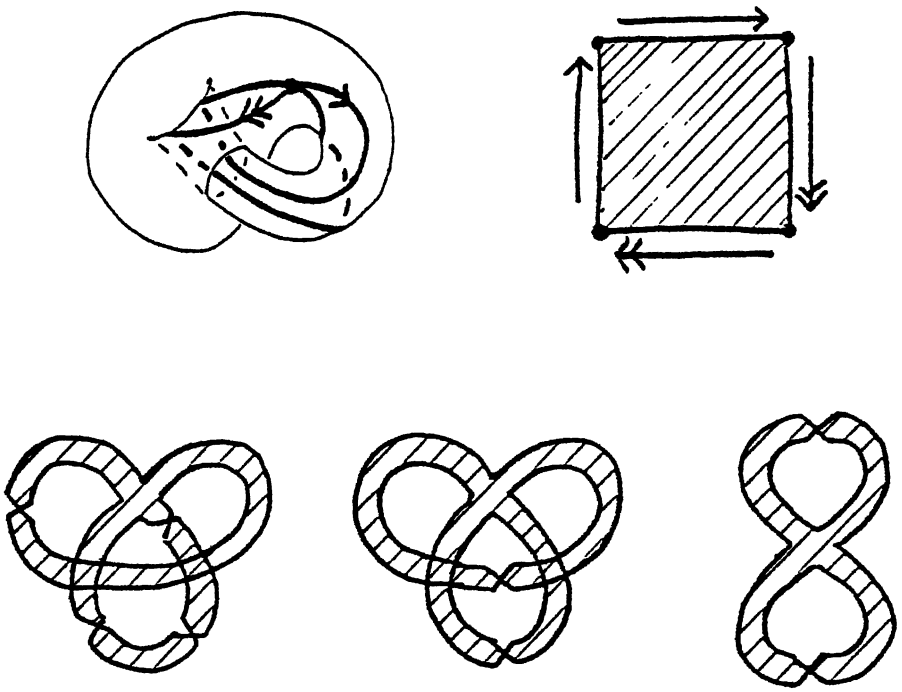


figure 12
Pavage non standard de la bouteille de Klein en une face carrée (dessin perspectif et schéma), et plusieurs dessins du graphe de bandes des sommets associé.

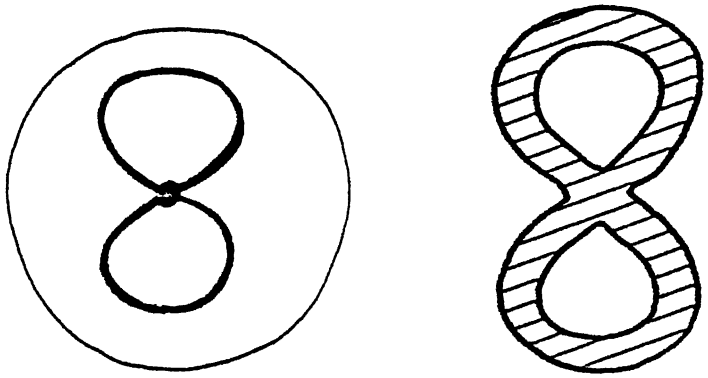


figure 13
Pavage de la sphère par un "huit" (dessin perspectif), et le graphe de bandes des sommets associé.

Un dessin représente un graphe de bandes orientable si et seulement si le nombre de croix de chaque circuit est pair.

Un autre style de dessin, oubliant l'ordre cyclique des bandes attachées à chaque rondelle, utilise les graphes pondérés : ce sont des graphes (les ames des graphes de bandes) dont les arêtes sont pondérées par des entiers modulo 2. Un dessin de graphe pondéré représente un graphe de bandes orientable si et seulement si chaque circuit est de poids total nul.

3 LES METAMORPHOSES

Il existe une action du groupe symétrique S3 sur les (classes d'isomorphisme de) pavages de surface. Nous appelons métamorphoses les transformations de pavages définies par cette action, transformations que nous décrivons de plusieurs points de vue.

Une des trois métamorphoses involutives est la classique transformation par dualité de Poincaré des pavages, transformation que nous notons D.

Les deux autres métamorphoses involutives échangent entre eux des pavages de surface en général différentes.

L'une, que nous appelons facialité et notons F, associe à tout pavage le pavage ayant les mêmes arêtes, et constitué des mêmes faces, recousues tête-bêche le long de chacun de leurs côtés communs (fig. 2).

EXEMPLES. — Les deux pavages en deux faces triangulaires (fig.3), l'un de la sphère et l'autre du tore de genre 1, sont transformés par facialité l'un de l'autre. Le transformé par facialité du pavage standard de la bouteille de Klein en une face carrée est (à isomorphisme près) ce pavage lui-même (fig. 14). Le transformé par facialité du pavage non-standard de la bouteille de Klein en une face carrée est le pavage de la sphère en une face carrée (fig. 12, 9).

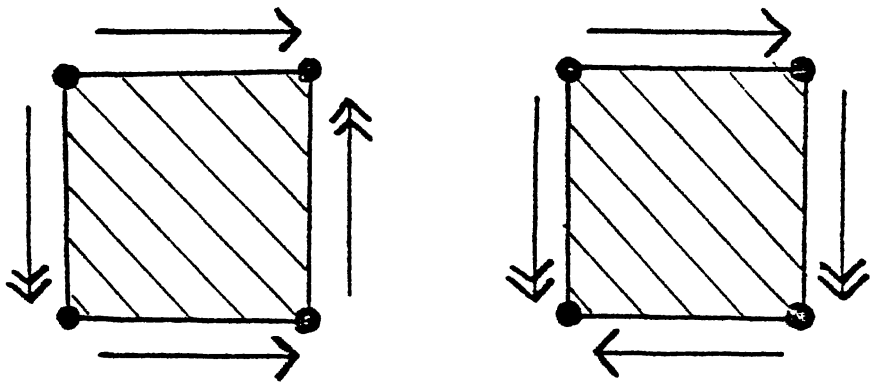


figure 14
Schéma du pavage standard de la bouteille de Klein en une face carrée, et schéma du pavage transformé par facialité.

En même temps que la dernière métamorphose involutive, que nous appelons sommitalité et notons S, nous définissons une métamorphose J d'ordre 3. H. S. M. COXETER (1950, p. 420) définit la sommitalité pour les pavages réguliers à l'exclusion de certains cas dégénérés (voir section 6, Remarques historiques). Appelons polygone de Petrie d'un pavage toute (classe d'isotopie de) courbe polygonale fermée immergée dans la surface, qui effectue un slalom entre les sommets du pavage, chacun de ses côtés longeant, en la traversant une fois, une arête du pavage (fig. 12, 15), (fig. 10, 16, 17).

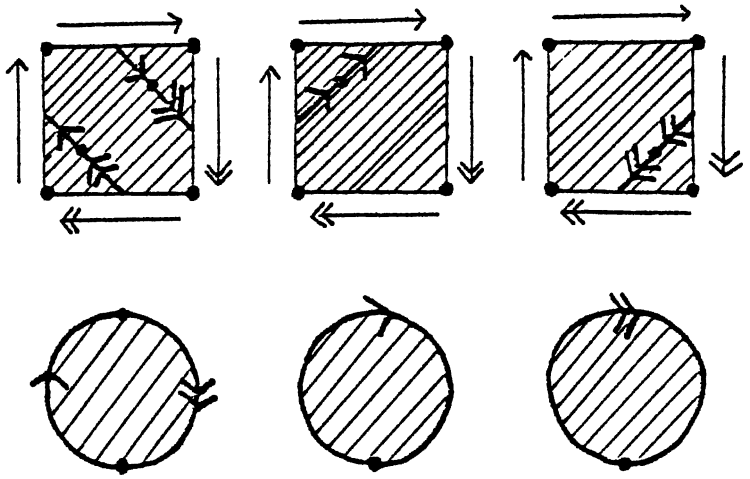


figure 15
Les trois polygones de Petrie du pavage non-standard de la bouteille de Klein en une face carrée (schéma), et les trois faces constituant le pavage transformé par sommitalité.

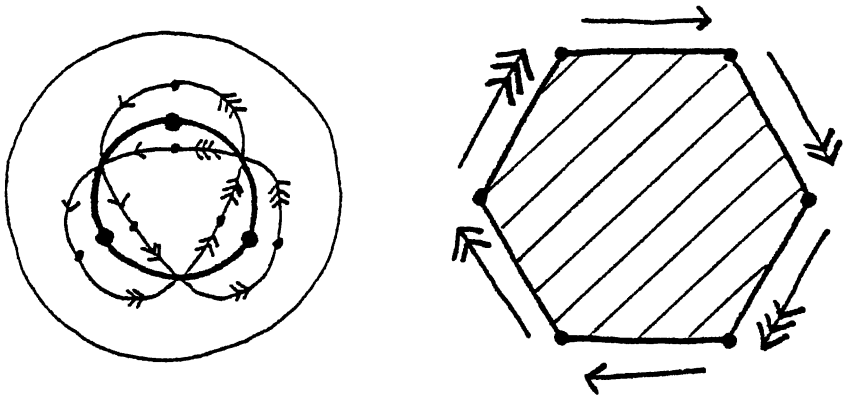


figure 16
Le polygone de Petrie du pavage standard de la sphère en deux faces triangulaires, et la face constituant le pavage transformé par sommitalité.

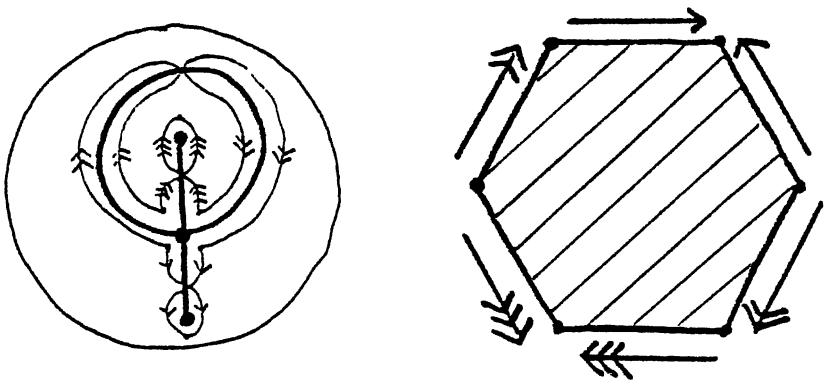


figure 17
Le polygone de Petrie du pavage non-standard de la sphère en deux faces triangulaires, et la face constituant le pavage transformé par sommitalité.

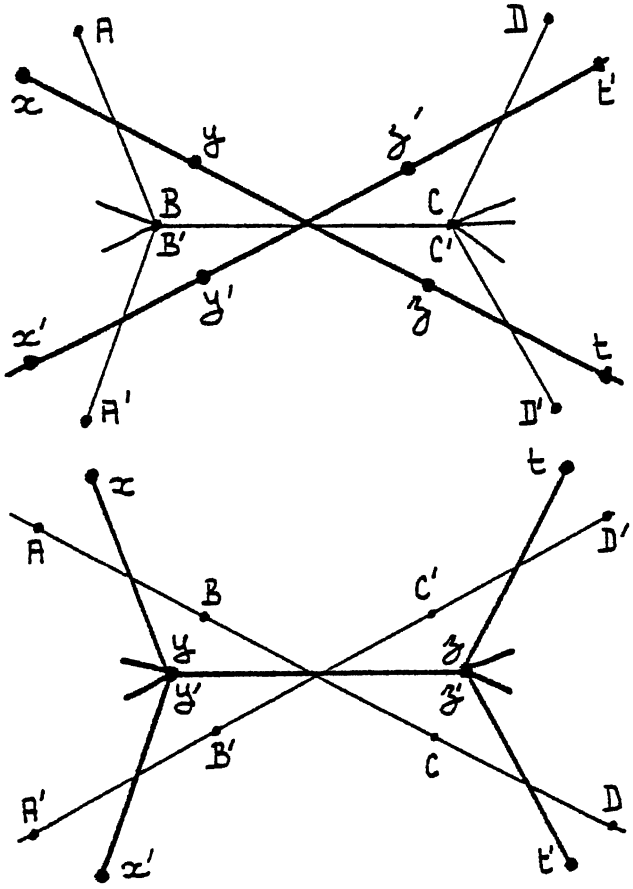


figure 18
La transformation par sommitalité est involutive : les deux fragments de face et les deux fragments de polygone de Petrie aux alentours d'une arête (détail).

La métamorphose S (resp. J), d'ordre 2 (resp. 3) associe à tout pavage le pavage constitué des faces ayant pour bords les polygones de Petrie, deux côtés de faces étant cousus ensemble si et seulement si ils longent une même arête, ces côtés étant alors cousus en parallèle (resp. en anti-parallèle) (fig. 18,19).

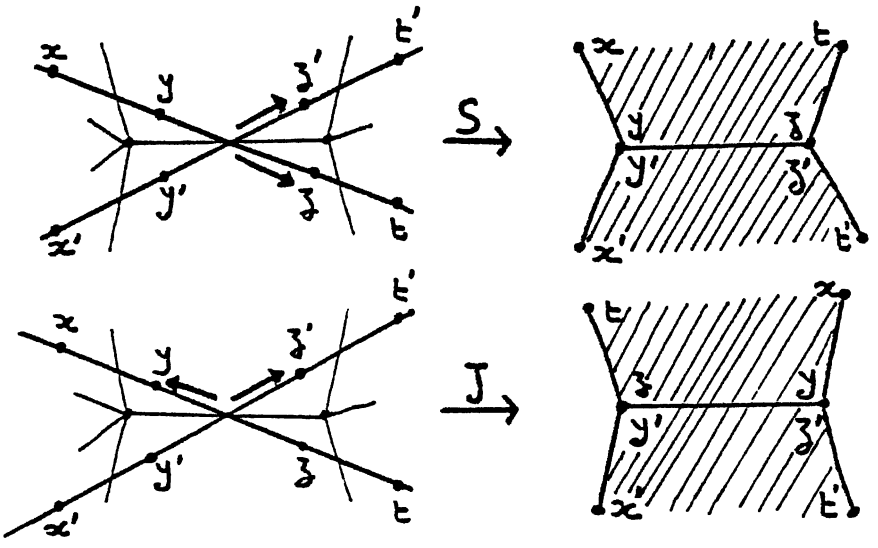


figure 19
Couture des faces (disques bordés par les polygones de Petrie) lors de la transformation d'un pavage par la métamorphose S (d'ordre 2) et par la métamorphose J (d'ordre 3).

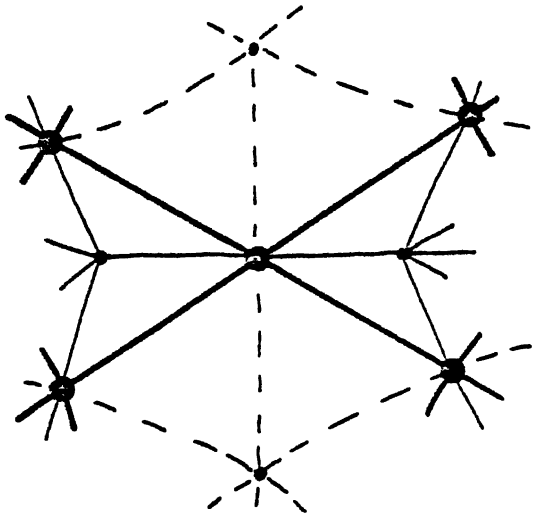


figure 20
Le graphe des arêtes de deux pavages duaux (détail).

Chaque arête est traversée par deux côtés de polygone de Petrie. Choisissons (dans leurs classes d'isotopie respectives) des polygones de Petrie tels que chaque arête soit traversée, en un unique point, à la fois par les deux côtés de polygone de Petrie, et tels que les polygones de Petrie ne se rencontrent nulle part ailleurs. On définit alors un pavage (à isomorphisme près), appelé pavage de Petrie. Tous ses sommets sont d'ordre 4, un par arête. Ils sont liés (par une arête du pavage de Petrie) lorsque les arêtes correspondantes (du pavage d'origine) sont images de deux côtés consécutifs d'une des faces ayant constitué le pavage d'origine. Les pavages de Petrie sont bi-colorables : leurs faces, ou bien contiennent un sommet, ou bien sont contenues dans une face du pavage d'origine. Deux pavages duaux ont le même pavage de Petrie. Le cuboctaèdre d'Archimède est le pavage de Petrie associé aux pavages sphériques cubique et octaédrique. On appelle graphe des arêtes le graphe des sommets du pavage de Petrie (fig. 20). Il est la réunion des (courbes sous-jacentes aux) polygones de Petrie.

EXEMPLES. — Le transformé par sommitalité du pavage non-standard de la bouteille de Klein en une face carrée est le pavage de la sphère par un "huit" (fig. 12, 15), (fig. 4, 13). Le transformé par sommitalité du pavage standard de la sphère en deux faces triangulaires est le pavage standard du plan projectif en un hexagone (fig. 16). Le transformé par sommitalité du pavage non-standard de la sphère en deux faces triangulaires est un pavage non-standard du plan projectif en un hexagone (fig. 17).

Nous appelons facial (resp. sommital) d'un pavage, le transformé par facialité (resp. sommitalité) de ce pavage.

La section 4 rend évidentes les affirmations suivantes.

Chacune des trois métamorphoses involutives est la conjuguée d'une quelconque autre par la troisième. Les deux dernières métamorphoses, inverses l'une de l'autre, $J = FoS = SoD = DoF$ (fig. 19) et $J^{-1} = FoD = DoS = SoF$ sont d'ordre 3, et complètent la description de la symétrie que nous déclarons de la classe des pavages.

La dualité échange le graphe de bandes des sommets et le graphe de bandes des faces. La facialité remplace le graphe de bandes des faces par son tordu. La sommitalité remplace le graphe de bandes des sommets par son tordu. Le graphe de bandes des sommets du facial et le graphe de bandes des faces du sommital sont tordus l'un de l'autre.

Les métamorphoses conservent le graphe des arêtes.

La dualité conserve les polygones de Petrie, et échange faces et sommets. La facialité conserve les faces, et échange sommets et polygones de Petrie. La sommitalité conserve les sommets, et échange polygones de Petrie et faces.

L'éminence historique de la relation d'Euler consacre le trio des faces, arêtes, et sommets des pavages d'une surface. Le groupe des métamorphoses impose le trio des faces, sommets, et polygones de Petrie des pavages des surfaces.

4 LES PAVOIS

Nous décrivons les métamorphoses d'un troisième point de vue, algèbrique. P. DAMPHOUSSE (1981) a construit une catégorie abritant tous les pavages de surface, les flèches étant les (classes d'isotopie de) revêtements ramifiés (fig. 21, 22). Dans ce contexte, le groupe des métamorphoses est essentiellement le groupe d'automorphisme de la catégorie.

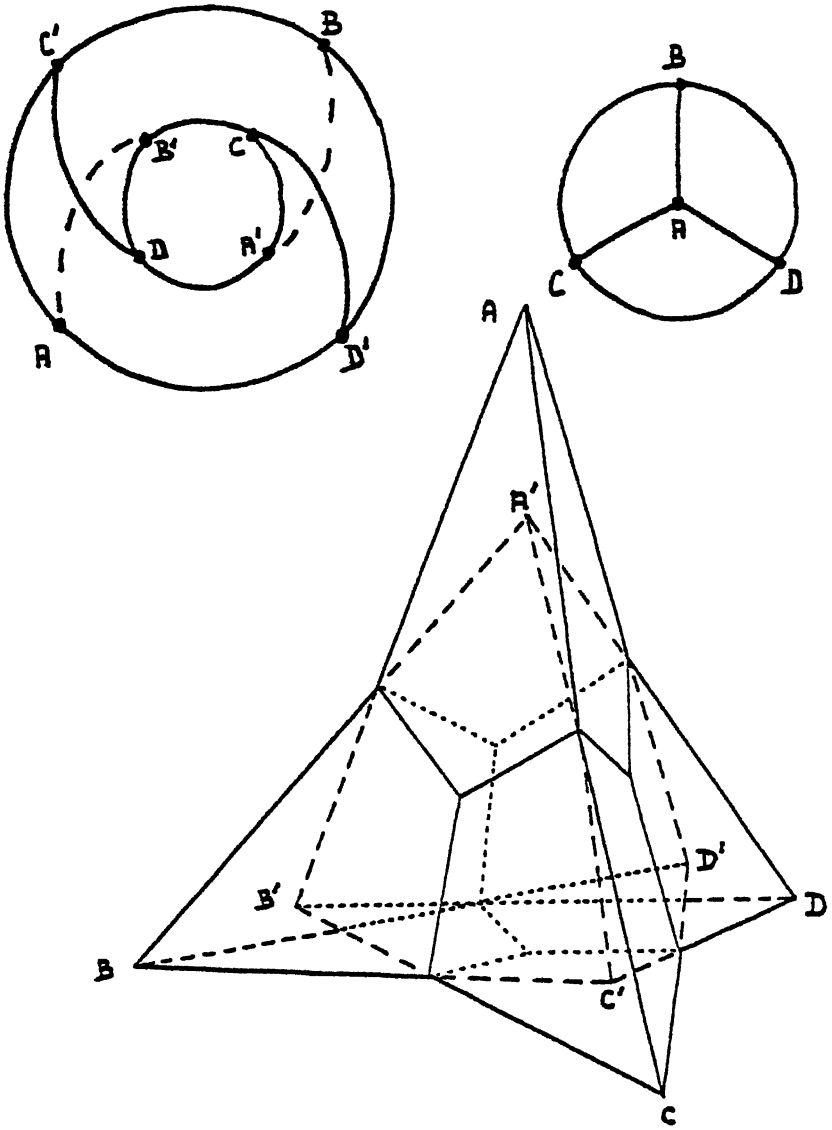


figure 21
Pavage du tore de genre 1 en 4 hexagones, et revêtement à 2 feuillets par ce pavage de la sphère tétraèdrique avec 4 points de ramification, sommets de cône en huit placés au milieu des faces du tétraèdre, (dessin perspectif du tore de genre 1 revêtant, projection du tétraèdre revêtu et dessin perspectif avec catastrophes du revêtement).

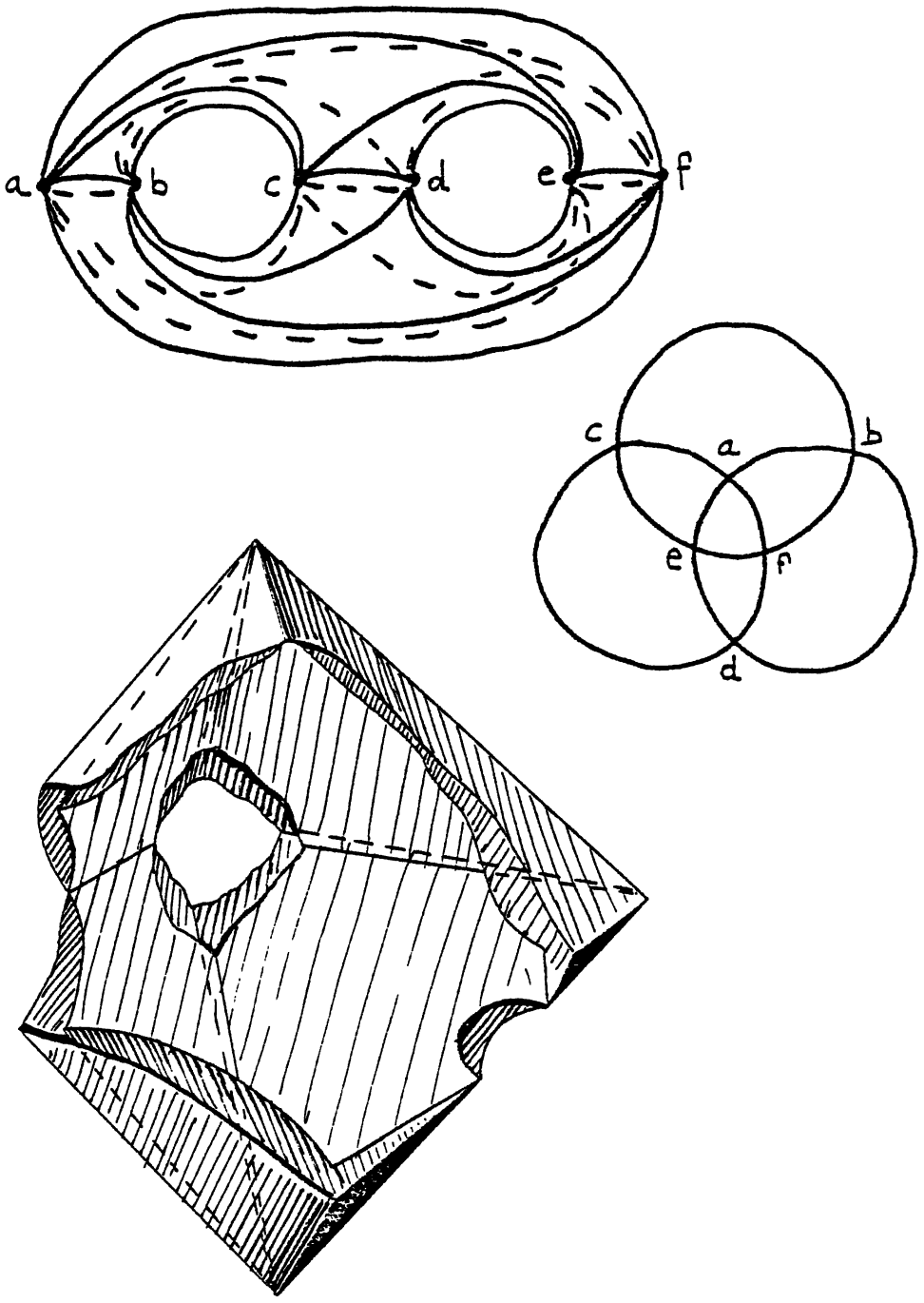


figure 22
Pavage régulier par W. BURNSIDE (1911, p.396) du tore de genre 2 en 16 triangles, et revêtement à 2 feuillets par ce pavage de la sphère octaédrique avec 6 points de ramification, sommets de cône en huit placés aux sommets de l'octaèdre, (dessin perspectif du tore de genre 2 revêtant, projection de l'octaèdre revêtu et dessin perspectif éclaté avec catastrophes du revêtement).

On associe à tout pavage un objet plus riche, le pavois fondamental. C'est un pavage plus fin, subdivision barycentrique du précédent, constitué de faces triangulaires appelées pavillons. Les trois côtés de chaque pavillon, nommés hypoténuse, apothème, et corde, sont opposés à des sommets du pavillon qui sont respectivement, un point intérieur à une arête, un sommet, un point intérieur à une face (fig. 23). Le schéma de montage identifie des côtés de même nom, et des sommets opposés à des côtés de même nom.

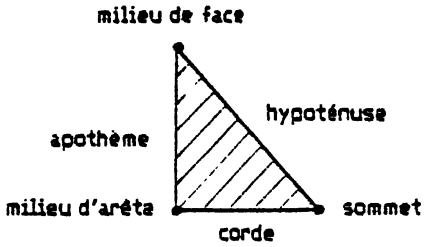


figure 23
Un pavillon d'un pavois fondamental.

Inversement, on peut reconstituer de façon canonique le pavage d'origine en se donnant l'ensemble P de ces pavillons, et les règles de leur recollement mutuel, à savoir l'involution T (resp. X, Y) qui échange les pavillons qui se côtoient par une hypoténuse (resp. une apothème, une corde).

Les pavois fondamentaux associés à des pavages duaux l'un de l'autre sont composés du même ensemble P de pavillons, ont les mêmes hypoténuses et les apothèmes de chacun sont les cordes de l'autre. L'involution T est la même, tandis que les involutions X et Y sont elles échangées.

Il n'est pas étonnant que, recensant les contraintes que doivent satisfaire les involutions T, X, et Y pour être les règles de recollement des pavillons d'un pavois fondamental, une symétrie apparaisse entre les deux involutions X et Y. En fait, une non moins complète symétrie apparaît entre les trois involutions X, Y et celle Z qui échange les pavillons qui ont pour seul sommet commun celui opposé à leur hypoténuse. C'est sur cette symétrie que nous fondons l'existence du groupe symétrique S3 des métamorphoses.

La discussion précédente laissait sous-entendre que chaque face d'un pavage a une structure linéaire, ce qui n'est pas le cas. Plutôt que d'introduire une structure linéaire on renonce à identifier canoniquement la surface pavée de départ et la surface sous-jacente à une subdivision barycentrique. Il y a une équivalence canonique et fonctorielle démontrée par P. DAMPHOUSSE entre une catégorie abritant les pavages, et une catégorie que nous redéfinissons, sous le nom de catégorie des pavois, de la façon formelle suivante:

DEFINITION 1. --- On appelle pavois les systèmes ordonnés (P, T, X, Y, Z), où P est un ensemble non vide, et où T, X, Y, et Z sont des involutions sans point fixe de l'ensemble P, engendrant un groupe agissant transitivement sur l'ensemble P, telles que l'une, et par suite chacune, des involutions X, Y, et Z soit la bijection composée des deux autres.

On appelle pavillons les éléments de l'ensemble P.

Les morphismes d'un pavois (P, T, X, Y, Z) sur un pavois (P', T', X', Y', Z') sont les applications R de l'ensemble P sur l'ensemble P' telles que l'on ait les relations :

$RoT = T'oR$, $RoX = X'oR$, $RoY = Y'oR$, et $RoZ = Z'oR$.

On appelle catégorie des pavois la catégorie dont les objets sont les pavois et les flèches sont les morphismes.

Dans le cas du pavois fondamental associé à un pavage, l'ensemble des pavillons est fini, la liberté de l'action des involutions T, X, Y, et Z assure que la surface est sans bord, et la transitivité de l'action du groupe qu'elles engendrent assure que la surface est connexe.

A tout pavois on associe deux groupes qui rendent compte de sa régularité (voir aussi proposition 15 et 16 et lignes suivantes).

DEFINITION 2. --- On appelle groupe de dislocation d'un pavois (P, T, X, Y, Z) le groupe des dislocations ou bijections de l'ensemble P engendré par les involutions T, X, Y, et Z.

On appelle groupe d'automorphisme d'un pavois le groupe des automorphismes ou morphismes inversibles de ce pavois sur lui-meme.

Le groupe d'automorphisme est le groupe des bijections de l'ensemble des pavillons qui commutent avec toutes les dislocations. Le groupe de dislocation agit transitivement par définition. Le groupe d'automorphisme agit par conséquent librement. Interprétant des résultats classiques sur les actions de groupes, on a :

PROPOSITION-DEFINITION 3. --- Soit un pavois.

On dit que le pavois est régulier s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) Le groupe de dislocation agit transitivement, librement.

(ii) Le groupe d'automorphisme agit transitivement, librement.

Si le pavois est régulier, alors les deux groupes sont isomorphes.

Si le pavois est régulier, alors le groupe de dislocation est le groupe des bijections de l'ensemble des pavillons qui commutent avec tout automorphisme.

Démonstration.

(1) La condition (i) est conséquence immédiate de la condition (ii).

(2) Supposons réciproquement que le groupe de dislocation agit transitivement et librement, démontrons que le groupe d'automorphisme agit transitivement. Soit des pavillons a et b. On vérifie que l'application h de l'ensemble des pavillons dans lui-même, définie par,
pour tout x, $h(x) = K(b)$ où K est l'unique dislocation telle que $K(a) = x$,
transforme a en b, est une bijection, commute avec toutes les dislocations et donc est un automorphisme.

(3) Supposons que le pavois est régulier. Choisissant un pavillon a, un-isomorphisme fait correspondre à tout automorphisme h, l'unique dislocation K telle que $hK(a) = a$.

(4) Supposons encore que le pavois est régulier. Soit une bijection K de

l'ensemble des pavillons qui commute avec tous les automorphismes. Soit un pavillon a. Il existe une dislocation K' telle que K'(a) = K(a). On a, pour tout automorphisme h, Kh(a) = hK(a) = hK'(a) = K'h(a) . Donc, le groupe d'automorphisme agissant transitivement, on a K = K' et K est une dislocation.

DEFINITION 4. --- Soit un pavois (P, T, X, Y, Z).

On appelle face (resp. sommet, polygone de Petrie) de ce pavois les cycles de pavillons images successives les uns des autres par, alternativement, X (resp. Y, Z) et T.

On appelle côté d'une face (resp. d'un sommet, d'un polygone de Petrie) les paires de pavillons, contenus dans la face (resp. le sommet, le polygone de Petrie), et échangés par X (resp. Y, Z).

On appelle coin les paires de pavillons échangés par T.

On appelle arête les orbites, constituées de 4 pavillons, du groupe dont les éléments sont X, Y, Z, et la bijection identique.

Ce lexique, qui enrichit et déplace le sens usuel, demeure sous-tendu par l'intuition que l'on a des pavages (fig. 24, 25, 26, 27).

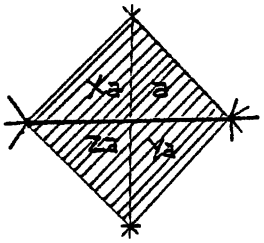


figure 24
Les quatre pavillons d'une arête d'un pavois fondamental.

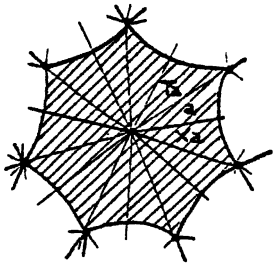


figure 25
Les pavillons d'une face d'un pavois fondamental.

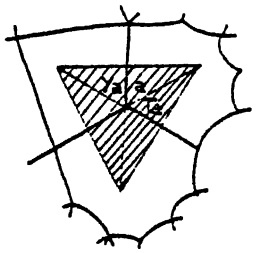


figure 26
Les pavillons d'un sommet d'un pavois fondamental.

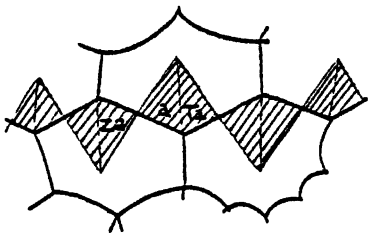


figure 27
Les pavillons d'un polygone de Petrie d'un pavois fondamental.

Soit un pavage muni d'une subdivision barycentrique ou pavois fondamental. Utilisant le vocabulaire des pavois, on associe à ce pavage un autre pavage de la même surface, le pavage en arêtes. Le pavage de Petrie (voir section 3) du pavage d'origine est le pavage dual du pavage en arêtes.

PROPOSITION 5. --- Soit un pavois.
Chaque coté de face (resp. de sommet, de polygone de Petrie) est coté d'une unique face (resp. d'un unique sommet, d'un unique polygone de Petrie).
Chaque coin est contenu dans une unique face, un unique sommet, un unique polygone de Petrie.
Chaque arete contient deux cotés de face, deux cotés de sommet, deux cotés de polygone de Petrie.

Les faces (resp. sommets, polygones de Petrie, arêtes) de tout pavois constituant une partition de l'ensemble de ses pavillons, on a :

DEFINITION-PROPOSITION 6. --- Soit un pavois.
On appelle valence d'une face (resp. d'un sommet, d'un polygone de Petrie) le nombre, fini ou infini, de ses cotés, et celui, égal, de ses coins.
La somme des valences des faces, celle des valences des sommets, et celle des valences des polygones de Petrie, sont égales entre elles et chacune est égale au double du nombre des aretes.

DEFINITION 7. --- On appelle groupe des métamorphoses le groupe des automorphismes de la catégorie des pavois (P, T, X, Y, Z) définis par permutation des involutions X, Y, et Z, et action triviale sur les flèches.
On appelle dualité (resp. facialité, sommitalité), et on note D (resp. F, S), la métamorphose définie par transposition des involutions X et Y (resp. Y et Z, Z et X).

Les attributs de pavois congrus par le groupe des métamorphoses, et dont la définition fait intervenir de façon symétrique les involutions X, Y et Z, sont inchangés. On a ainsi :

PROPOSITION 8. --- Le groupe des métamorphoses conserve les pavillons, les coins, les aretes, conserve le groupe d'automorphisme, le groupe de dislocation, et conserve la régularité des pavois.

On a encore (comparer avec la définition de la page 14):

DEFINITION-PROPOSITION 9. --- Soit un pavois.

On appelle graphe des arêtes du pavois, le graphe dont les sommets sont les aretes du pavois, et les aretes sont les coins du pavois. Des sommets du graphe sont liés par une arete du graphe si et seulement si la réunion des aretes correspondantes contient le coin correspondant.

Le groupe des métamorphoses conserve le graphe des arêtes.

Par contre, le bouleversement des pavillons provoqué par chaque permutation des involutions X, Y et Z, qui règlent leur recollement mutuel, entraine une nouvelle consistance des faces, sommets, ou polygones de Petrie. On a :

DEFINITION-PROPOSITION 10. --- Soit un pavois.

On appelle graphe des sommets (resp. des faces, des polygones de Petrie) du pavois, le graphe dont les sommets sont les sommets (resp. les faces, les polygones de Petrie) du pavois, dont les aretes sont les aretes du pavois, les sommets du graphe étant liés par une arete du graphe si et seulement si leur réunion contient l'arete.

La dualité conserve le graphe des polygones de Petrie, et échange le graphe des faces et celui des sommets.

La facialité conserve le graphe des faces, et échange les graphe des sommets et celui des polygones de Petrie.

La sommitalité conserve le graphe des sommets, et échange le graphe des polygones de Petrie et celui des faces.

Les métamorphoses sont des automorphismes substantiels de la catégorie des pavois (voir sections 3, 5, et annexe).

Les automorphismes équivalents naturellement au foncteur identique sont, eux, topologiquement insignifiants : ils reviennent à modifier les noms des objets considérés.

Il n'y a pas d'autres automorphismes dans le sens suivant (il est fait ici un abus de langage (groupes non ensemblistes) qui peut être évité grâce à l'énoncé plus général des auteurs (1986), démontrable de façon analogue) :

THEOREME 11. --- Le quotient du groupe d'automorphisme de la catégorie des pavois par le sous-groupe des automorphismes équivalents naturellement au foncteur identique, est un groupe symétrique S3 , isomorphe canoniquement au groupe des métamorphoses.

Nous déduisons ci-dessous (p. 26) le théorème du lemme suivant concernant le groupe de Grothendieck G, produit libre du groupe à deux éléments par le groupe de Klein à quatre éléments.

LEMME 12. --- Soit le groupe G , d'élément neutre noté e, défini par générateurs et relations :

$$G = \langle t, x, y, z \;/\; t^2 = x^2 = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$$

Les éléments d'ordre 2 du groupe G sont les conjugués des générateurs du groupe G .

Le groupe Out G quotient du groupe d'automorphisme du groupe G par le sous-groupe des automorphismes intérieurs du groupe G est un groupe symétrique S3 , isomorphe canoniquement au sous-groupe d'automorphisme de G défini par les permutations des générateurs x, y, z.

Démonstration (due à Michel EMSALEM).

(1) Les éléments du groupe G ont une forme canonique : ils sont (représentés biunivoquement par) les mots en t, x, y, z qui sont succession de, alternativement, la lettre t et une lettre prise parmi les lettres x, y, z.

(2) Les éléments d'ordre 2 du groupe G sont les mots symétriques de longueur (nécessairement) impaire, d'où la première partie du lemmme.

(3) Soit un automorphisme v de G. Montrons que, à automorphisme intérieur près, v fixe t et permute x, y, z. On peut supposer, d'après (2), que v(x) est un mot d'une lettre.

(4) Les mots v(x), v(y), v(z) sont des mots d'une lettre. En effet, si par exemple v(y) était un mot (de longueur impaire, d'après (2)) d'au moins trois lettres, alors selon que la lettre composant le mot v(x) et la lettre terminant le mot v(y) appartiennent simultanément ou non à l'un des ensembles $\{t\}$ et $\{x, y, z\}$, alors le mot v(z) = v(y) v(x) ne serait pas symétrique ou ne serait pas de longueur impaire, ce qui est absurde d'après (2).

(5) L'automorphisme v permute x, y, z. En effet, si par exemple v(x) = t, alors le mot v(z) = v(xy) = t v(y) ne serait pas symétrique.

(6) On peut supposer que la lettre g qui commence le mot v(t) est la lettre g = t . En effet, si cette condition n'est pas vérifiée par l'automorphisme v, elle l'est par l'automorphisme v' = g v g , automorphisme qui permute encore, d'après (5), x, y, z puisque g est alors égal à x, y ou z.

(7) Ainsi, supposons que v permute x, y , z et que le mot v(t) commence par la lettre t. Si v ne fixait pas t, alors le mot v(t) serait, d'après (2), de longueur au moins trois, commencerait et donc, d'après (2), finirait par la lettre t. L'automorphisme v augmenterait strictement la longueur de tout mot comportant la lettre t. Notamment, l'image inverse par v du mot composé de la seule lettre t devrait être de longueur strictement inférieure à 1, ce qui est absurde.

C. Q . F. D.

A tout pavois (P, T, X, Y, Z) on associe l'action à gauche * du groupe G sur l'ensemble P définie par :
pour tout a dans P, t * a = T(a) , x * a = X(a) , y * a = Y(a) , z * a = Z(a).

Dans tout ce qui suit, nous adoptons le point de vue développé par P. DAMPHOUSSE (1981) et redéfinissons ainsi la catégorie des pavois (voir p. 18):

DEFINITION 13 . --- On appelle pavois les
G- ensembles à gauche transitifs non vides, tels que les générateurs t, x, y, z agissent librement.
La catégorie des pavois a pour flèches les
G- applications (nécessairement) surjectives.

P. DAMPHOUSSE affirme que le stabilisateur d'un quelconque pavillon est isomorphe au groupe fondamental d'une certaine surface non fermée attachée au pavois et le vérifie dans deux exemples. On a l'énoncé équivalent suivant où l'on munit le graphe des arêtes de sa topologie canonique (voir MASSEY (1984, p. 190)) :

PROPOSITION 14. --- Soit un pavois. Le stabilisateur d'un quelconque pavillon est isomorphe au groupe fondamental du graphe des arêtes associé.

Soit un pavois (P, T, X, Y, Z) et soit le stabilisateur H d'un pavillon p. Soit la famille éventuellement infinie indexée par P de pavillons standard Δi (chacun muni d'un homéomorphisme sur un triangle euclidien de référence de côtés nommés hypoténuse, apothème, corde). Soit le "pavage" construit par recollement des Δi selon les règles T, X, Y. Alors, le groupe H est canoniquement isomorphe au groupe fondamental (qui est libre), en un point intérieur à Δp, de la surface non fermée Σ obtenue par trouage du "pavage" en chaque sommet et au milieu de chaque face.

Cette surface Σ est en effet le quotient du "modèle universel" (plan hyperbolique muni d'un certain pavage) dû à P. DAMPHOUSSE par un groupe agissant librement isomorphe au groupe H. Il existe un isomorphisme, noté $g \mapsto g'$, du groupe de Grothendieck G sur un groupe noté G' d'automorphismes du plan hyperbolique (représenté par le disque de Poincaré, intérieur du disque unité): aux générateurs t, x, y de G on fait correspondre les réflexions t', x', y' par rapport aux côtés $]1,i[$, $]i,0]$, $[0,1[$ d'un triangle hyperbolique Δ (privé de sommets aux angles aigus qui sont nuls). Ce triangle Δ est un domaine fondamental pour l'action de G' sur le disque de Poincaré, pavé par les images de Δ . Au sous-groupe H de G correspond un sous-groupe isomorphe H' de G'. Le groupe H' agit librement, les triangles images de Δ par les seuls éléments t', x', y', z' et identité de G' rencontrant Δ, et les générateurs t, x, y, z de G et donc leurs conjugués agissant librement sur P. Soit une famille standard

(compatible avec l'identification ci-dessus de chaque Δi au pavillon euclidien de référence) indexée par P d'homéomorphismes φi de Δ sur Δi privé de ses deux sommets aigus. On a pour finir le revêtement de la surface Σ par le disque de Poincaré qui, au point de la forme g'(a), pour g' dans G' et a dans Δ, associe le point φi (a) de Δi avec $i = g^{-1} p$. La surface Σ est le quotient du disque par H'. On conclut en remarquant que la surface Σ se rétracte sur le graphe des arêtes du pavois.

On en déduit la classification suivante des pavois :

PROPOSITION 15. --- <u>On a la bijection de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes libres de</u> G <u>sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de pavois induite par l'application qui à</u> H <u>associe le pavois</u> G/H <u>(muni de l'action à gauche canonique de</u> G).

En effet, les groupes fondamentaux de graphe sont libres, et réciproquement les sous-groupes libres H de G déterminent des pavois G/H. Enfin, les sous-groupes H et H' de G sont conjugués si et seulement si les espaces homogènes G/H et G/H' sont isomorphes. En effet, pour tout automorphisme intérieur $v : x \longmapsto a^{-1}xa$ de G, on a l'isomorphisme $gH \longmapsto gHa$ de G/H sur G/v(H). Réciproquement, soit f un isomorphisme de G/H sur G/H'. Alors, choisissant a dans G tel que f(H) = aH', on a f(gH) = gaH' pour tout g dans G. D'où a-1Ha est contenu dans H' parceque gaH' = aH' pour tout g dans H et a-1Ha contient H' parceque f est injective.

Les pavois réguliers reçoivent dans ce contexte une définition élégante:

PROPOSITION 16. --- <u>Un pavois est régulier si et seulement si il est isomorphe à un pavois de la forme</u> G/H <u>où</u> H <u>est un sous-groupe libre distingué de</u> G.

Soit H un sous-groupe libre de G. Le groupe de dislocation (resp. automorphisme) du pavois G/H est le groupe des bijections de la forme $aH \longmapsto gaH$ (resp. $aH \longmapsto agH$) pour g dans G (resp. pour g dans le sous-groupe N(H) normalisateur de H dans G), groupe canoniquement isomorphe au groupe $G/\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ (resp. N(H)/H).

Il existe une famille de pavois réguliers à valences finies indexée par trois paramètres entiers. Tout pavois régulier à valences finies est quotient de l'un d'eux. En effet, les faces (resp. sommets, polygones de Petrie) de tout pavois régulier ont une même valence m (resp. n, p). La permutation de l'ensemble des pavillons définie par $(tx)^m$ (resp. $(ty)^n$, $(tz)^p$) est la permutation identique. Ce pavois est ainsi quotient du pavois défini par l'action du groupe G sur (l'ensemble sous-jacent à) le groupe $G^{m,n,p}$ défini par générateurs et relations :

$G^{m,n,p} = \langle t, x, y, z \,/\, t^2 = x^2 = y^2 = z^2 = xyz = (tx)^m = (ty)^n = (tz)^p = e \rangle$.

Nous reconnaissons la famille des groupes ainsi notés définis par H. S. M. COXETER (1939, p. 74) :

$G^{m,n,p} = \langle a, b, c \,/\, a^m = b^n = c^p = (ab)^2 = (bc)^2 = (ca)^2 = (abc)^2 = e \rangle$.

En effet, des isomorphismes réciproques entre les groupes admettant respectivement ces présentations sont définis par, d'une part a = xt, b = ty, c = ytx, d'autre part x = bc, y = ca, z = ab, t = bca .

On a ainsi, pour le plaisir du rapprochement :

PROPOSITION 17. --- <u>Le groupe de Grothendieck</u> G <u>admet la présentation finie</u> $G = \langle a, b, c \,/\, (ab)^2 = (bc)^2 = (ca)^2 = (abc)^2 = e \rangle$ <u>et s'interprète comme groupe de Coxeter</u> $G^{m,n,p}$ <u>dans le cas extrapolé où les trois paramètres sont infinis.</u>

Démontrons finalement le théorème 11 (p. 23).

Démonstration du théorème.
(les étapes (24) à (29) sont dues à Christian LAIR)

Nous établissons un isomorphisme canonique entre le groupe Out G et le groupe quotient du groupe des automorphismes de la catégorie des pavois par le sous-groupe des automorphismes équivalents naturellement au foncteur identique et concluons, étape (22), en utilisant la deuxième partie du lemme. Entretemps, nous utilisons la première partie du lemme lors des étapes (4) et (5).

(1) Nous notons (P, *) le pavois défini par une action à gauche * du groupe G sur un ensemble P.
Une flèche f d'un pavois (P1, *1) vers un pavois (P2, *2) est une G-application surjective de l'ensemble P1 sur l'ensemble P2. On a:
pour tout g dans G et tout a dans P1, f(g *1 a) = g *2 f(a)

(2) Notons K la catégorie des pavois.
Notons Aut G (resp. Aut K) le groupe des automorphismes du groupe G (resp. de la catégorie K).
Notons Int G (resp. Int K) le sous-groupe des automorphismes intérieurs du groupe G (resp. des automorphismes équivalents au foncteur identique de la catégorie K).
Le groupe Int G (resp. Int K) est un sous groupe distingué du groupe Aut G (resp. Aut K).
Notons Out G (resp. Out K) le groupe quotient Aut G / Int G (resp. Aut K / Int K).

(3) Nous présentons les étapes de la démonstration.
On a le diagramme commutatif suivant (diag 1) :

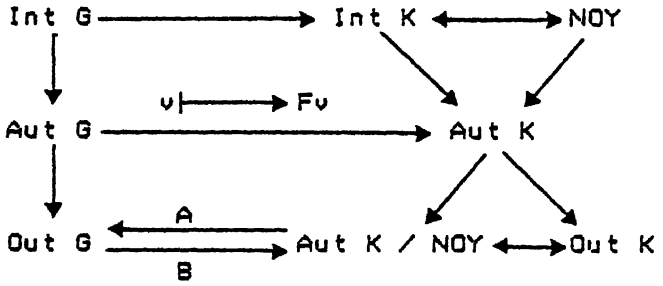


diagramme 1

De (4) à (8) : définition d'un homomorphisme de Aut G dans Aut K.
De (9) à (13) : définition d'un pavois privilégié. Les automorphismes de la catégorie transforment ce pavois en un pavois isomorphe.
De (14) à (16) : définition d'un homomorphisme de Aut K dans Out G.
En (17) : description du noyau NOY de l'homomorphisme ci-dessus, et définition de l'homomorphisme induit A de Aut K / NOY dans Out G.
En (18) : Int K est contenu dans NOY.
De (18) à (19) : définition de l'homomorphisme B de Out G dans Aut K / NOY.
De (20) à (21) : A et B sont des isomorphismes réciproques.
De (23) à (29) : NOY est contenu dans Int K.

(4) L'ensemble des éléments d'ordre 2 du groupe G contient les générateurs du groupe G, est stable par les automorphismes du groupe G et d'après le lemme 12 ci-dessus, pour tout pavois, ses éléments agissent sans point fixe.

(5) A tout automorphisme v du groupe G on associe un automorphisme Fv de la catégorie K des pavois. Au pavois (P, *1) l'automorphisme Fv associe le pavois (P, *2), ayant même ensemble sous-jacent, et tel que, pour tout g dans G et tout a dans P, g *2 a = v(g) *1 a. L'automorphisme Fv agit trivialement sur les flèches.

L'énoncé (4) assure que (P, *2) est un pavois : les générateurs de G agissent encore sans point fixe.

Pour tout v' et tout v" automorphismes de G, on a :
$Fv' \circ Fv'' = F(v''ov')$

(6) Les métamorphoses en particulier sont les automorphismes Fv où v est un automorpisme du groupe G défini par permutation des générateurs x, y, z.

(7) Lorsque v est un automorphisme intérieur du groupe G, alors Fv est un automorphisme équivalent naturellement au foncteur identique.

(8) D'après (5), on a l'homomorphisme du groupe Aut G dans le groupe (dual du groupe) Aut K : $v \longmapsto Fv$.

D'après (7), cet homomorphisme induit un homomorphisme du groupe Out G dans le groupe Out K .

(9) La catégorie K comporte un objet privilégié, appelé pavois universel, noté (G, *). L'ensemble sous-jacent est l'ensemble sous-jacent au groupe G et l'action * est la translation à gauche. Pour tout g dans G et tout a dans G, on a : $g * a = ga$.

(10) Pour tout pavois (P, *), il existe des flèches $(G, *) \longrightarrow (P, *)$. Soit a un élément de P. Alors, une flèche est l'application, notée Sa, de G sur P qui à tout g associe $Sa(g) = g * a$. Pour tout g dans G et tout a dans P, on a le diagramme commutatif suivant (diag. 2) :

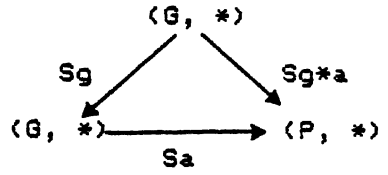


diagramme 2

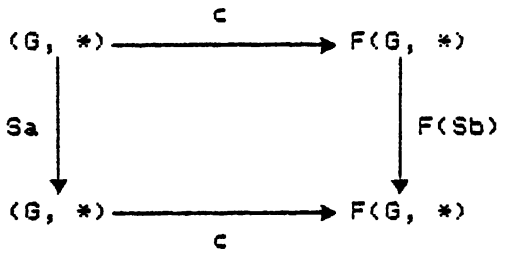
(11) Les flèches de (G, *) dans (G, *) sont, pour a dans G, les translations à droite Sa .

On a, pour tous g' et g" dans G, $Sg' \circ Sg'' = Sg''g'$.

(12) Toute flèche f d'un pavois (P, *) vers le pavois universel (G, *) est un isomorphisme. En effet :
Soit f' une flèche (il en existe d'après (10)) de (G, *) vers (P, *).
Il existe a dans P tel que $f(a) = e$. Il existe g dans G tel que $f'(g) = a$.
Soit la flèche de (G, *) vers (P, *), $f'' = f' \circ Sg$. Alors :
$f \circ f''(e) = f \circ f'(Sg(e)) = f \circ f'(g) = f(a) = e$. Ainsi $f \circ f''$, flèche du pavois universel vers lui-même fixant e , est l'identité d'après (11).

(13) Soit F un automorphisme de K. Alors il existe un isomorphisme c de (G, *) vers F(G, *). En effet, F étant inversible, il existe un pavois (P, *) tel que F(P, *) = (G, *) . Or il existe une flèche de (G, *) vers (P, *) d'après (10), donc aussi une flèche de F(G, *) vers (G, *). Celle-ci est un isomorphisme d'après (12).

(14) Soit F un automorphisme de la catégorie K. Il existe d'après (13) un isomorphisme c de (G, *) vers F(G, *). Pour tout a dans G, il existe d'après (11) un unique b dans G rendant le diagramme suivant commutatif (diag. 3) :



$w(F, c)(a) = b$

diagramme 3

L'application, notée $w(F, c)$, qui à tout a dans G associe cet élément b dans G, est un automorphisme de G.

(15) Soit F un automorphisme de la catégorie K. Soit c' et c" deux isomorphismes de (G, *) vers (F, *). Alors $w(F, c')$ et $w(F, c")$ sont congrus dans Aut G modulo Int G.

En effet, d'après (11) il existe g dans G, tel que : $c' = c" \circ Sg$. Alors, d'après le diagramme commutatif ci-dessous (diag. 4), où toutes les flèches sont des isomorphismes, et d'après la définition des automorphismes $b' = w(F, c')(gag^{-1})$ et $b" = w(F, c")(a)$, on a, pour tout a dans G, $w(F, c")(a) = w(F, c')(gag^{-1})$.

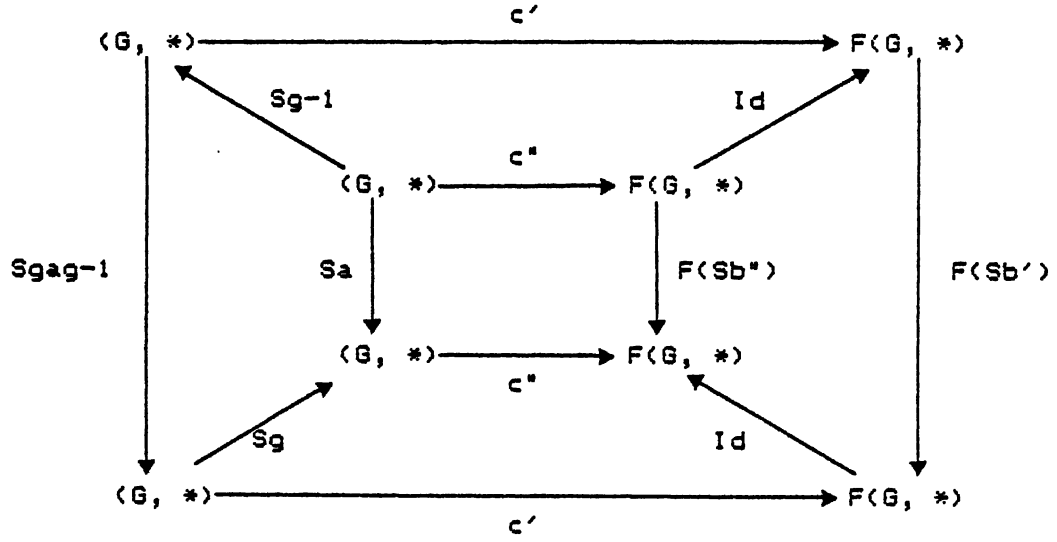


diagramme 4

(16) On déduit de (14) et (15) un homomorphisme qui à tout F dans Aut K associe l'élément de Out G, classe des $w(F, c)$ pour c isomorphisme de (G, *) vers F(G, *).

(17) Notons NOY le noyau de l'homomorphisme ci-dessus de Aut K dans Out G. Un automorphisme F est dans NOY si et seulement si pour tout c (resp. pour un c) isomorphisme de (G, *) vers F(G, *), $w(F, c)$ est dans Int G (resp. est l'élément neutre de Aut G). Deux automorphismes F' et F" sont congrus dans Aut K modulo NOY si et seulement si pour un isomorphisme c' de (G, *) vers F'(G, *) et un isomorphisme c" de (G, *) vers F"(G, *), $w(F', c')$ et $w(F", c")$ sont congrus dans Aut G modulo Int G.

Soit alors l'homomorphisme $A : Aut K / NOY \longrightarrow Out G$, défini par $A(\underline{F}) = \underline{w(F, c)}$.

On indique par des soulignements les classes dans les quotients.

(18) Int K est contenu dans NOY. En effet, soit un foncteur F équivalent naturellement au foncteur identique, et soit l'isomorphisme (de l'équivalence naturelle) c de (G, *) vers F(G, *). On a, pour tout g dans G, le diagramme commutatif suivant (diag. 5) :

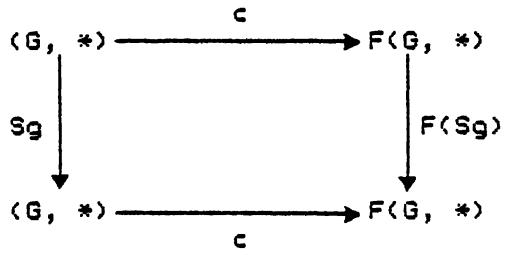


diagramme 5

Alors, d'après (14), w(F, c) est l'élément neutre de Aut G , et donc, d'après (17), F est dans NOY .

(19) Ainsi, on a un homomorphisme du groupe Out K dans le groupe Aut K / NOY , et donc, d'après (8) on a un homomorphisme
B : Out G ⟶ Aut K / NOY , défini par B($\underline{v}$) = $\underline{Fv}$.

(20) Tout automorphisme v du groupe G définit canoniquement une flèche, encore notée v, qui est un isomorphisme de (G, *) vers Fv(G, *) .

Pour tout v dans Aut G , on a : w(Fv, v) = v . En effet, on a, pour tout g dans G, le diagramme commutatif suivant (diag. 6) :

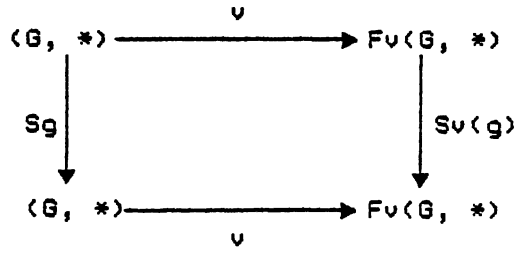


diagramme 6

D'où, Fv agissant trivialement sur les flèches et d'après (14), on a : pour tout g dans G, Sw(Fv, v)(g) = Sv(g) .

(21) Ainsi, d'après (17), (19) et (20), A o B est l'application identique de Out G dans lui-même.

B o A est l'application identique de Aut K / NOY dans lui-même, et donc les groupes Out G et Aut K / NOY sont isomorphes. En effet, soit un foncteur F dans Aut K, il existe, d'après (10), un isomorphisme c de (G, *) vers F(G, *). D'après (20), pour v = w(F, c), on a w(Fv, v) = w(F, c) , et donc Fv et F sont, d'après (17), congrus dans Aut K modulo NOY.

(22) Il suffit enfin de montrer que NOY est contenu dans Int K : ceci achèvera, grace au lemme, la démonstration du théorème, puisqu'alors, d'après (18), on a NOY = Int K , d'où, d'après (21), l'homomorphisme
B : $\underline{v}$ ⟼ $\underline{Fv}$ est un isomorphisme de Out G sur Out K .

(23) Ainsi, soit F dans NOY et montrons que F est dans Int K .

D'après (14) et (17), il existe un isomorphisme c tel que, pour tout g dans G, on ait le diagramme commutatif suivant (diag. 7) :

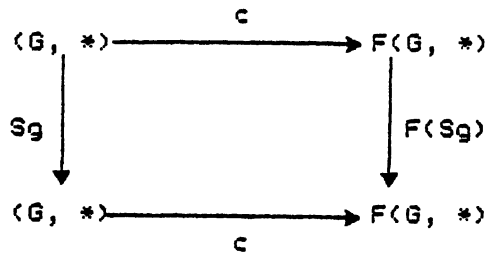


diagramme 7

A partir de maintenant, par abus de notation, P désigne tout pavois dont l'ensemble des pavillons est noté P.

Il s'agit de montrer qu'il existe une équivalence naturelle e : ID ⟹ F du foncteur identique vers le foncteur F.

Pour toute flèche f d'un pavois P1 vers un pavois P2, on doit avoir le diagramme commutatif suivant (diag. 8) :

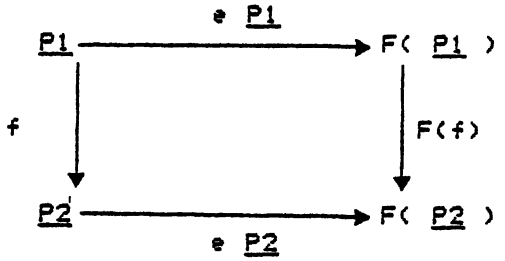


diagramme 8

Nous montrons, de (24) à (29), qu'il existe une (unique) transformation naturelle e : ID ⟹ F telle que e G = c, puis que cette transformation naturelle est une équivalence.

(24) Associons, à tout pavois P, la catégorie H P dont les objets sont les éléments de P, et dont les flèches sont les couples (a, g), de source a, et de but g * a.

Associons au pavois P, le foncteur J P : H P ⟶ K défini par, pour tout a dans P, J P (a) = G, et, pour toute flèche (a, g), J P (a, g) = Sg : G ⟶ G.

Associons enfin, au pavois P, la famille, indexée par a dans P, de flèches (voir l'étape (10)) Sa : G ⟶ P.

(25) Appelons famille J P -compatible, toute famille (Ta : G ⟶ Q, a dans P), où Q est un pavois et où, pour toute flèche (a, g) de la catégorie H P, on a le diagramme commutatif suivant (diag. 9) :

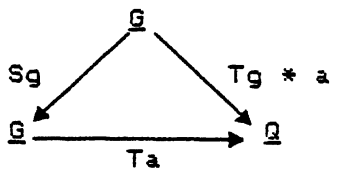


diagramme 9

(26) On a la proposition suivante : tout pavois P est la limite inductive

du foncteur J_P , naturalisée par les Sa, pour a dans P. Autrement dit, la famille (Sa : G ⟶ P , a dans P) est J P -compatible, et, pour toute famille J_P -compatible (Ta : G ⟶ Q , a dans P), il existe une unique flèche h : P ⟶ Q , telle que l'on ait, pour tout a dans P, le diagramme commutatif suivant (diag. 10) :

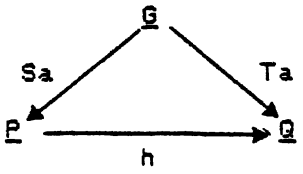


diagramme 10

En effet, la famille (Sa : G ⟶ P , a dans P) est J P -compatible d'après (10), ensuite, l'unicité de h résulte de la surjectivité des flèches Sa, et enfin, posant, pour tout a dans P, h(a) = Ta(e) , alors on a, pour tout g dans G et tout a dans P, d'une part
h o Sa (g) = h(g * a) = Tg * a (e) = Ta o Sg (e) = Ta (g) , d'où, d'autre part, h est un morphisme : h(g * a) = Ta (g) = g * Ta (e) = g * h (a) .

(27) Posons, pour tout a dans P, Ta = F(Sa) o c : G ⟶ F(P). La famille (Ta : G ⟶ F(P), a dans P) est, d'après (23), J P -compatible.
Ainsi, d'après (26), il existe une unique flèche h : P ⟶ F(P) telle que, pour tout a dans P, on ait h o Sa = Ta = F(Sa) o c . Notons e P cette flèche h (diag. 11).

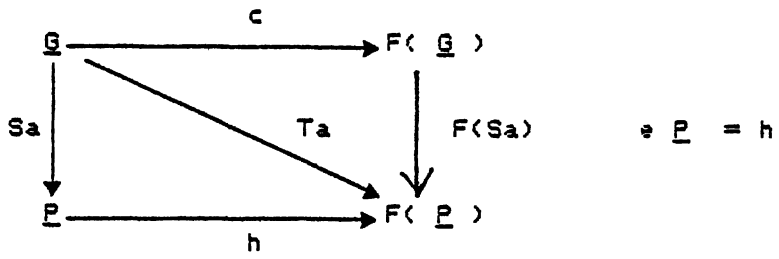


diagramme 11

(28) D'après (18), par unicité, on a e G = c .
Pour tous pavois P1 et P2 et toute flèche f : P1 ⟶ P2 , on a, pour tout a dans P1 le diagramme commutatif suivant (diag. 12) :

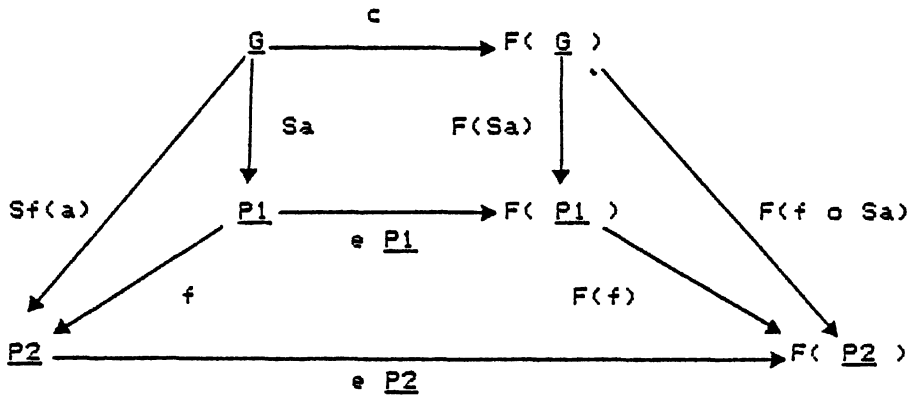


diagramme 12

Nous disposons ainsi d'une transformation naturelle e : ID ⟹ F du foncteur identique vers le foncteur F, qui prolonge l'isomorphisme c : G ⟶ F(G).

(29) F étant un automorphisme, le pavois F(P) est, d'après (26), la limite inductive du foncteur F o J P , naturalisée par les F(Sa), pour a dans P.

Or la famille (Sa o c-1 : F(G) ⟶ P , a dans P) est, d'après (10) et (18), F o J P -compatible : le diagramme ci-dessous est, pour tout g dans G et tout a dans P, commutatif (diag. 13).

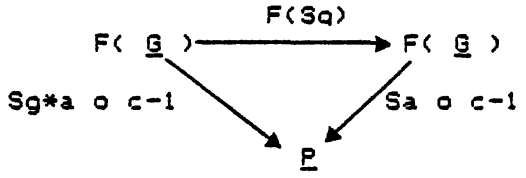


diagramme 13

Il existe donc une (unique) flèche k telle que l'on ait, pour tout a dans P, le diagramme commutatif suivant (diag. 14) :

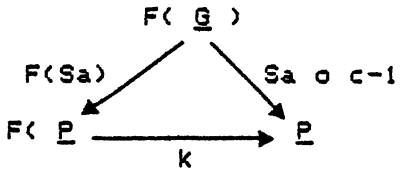
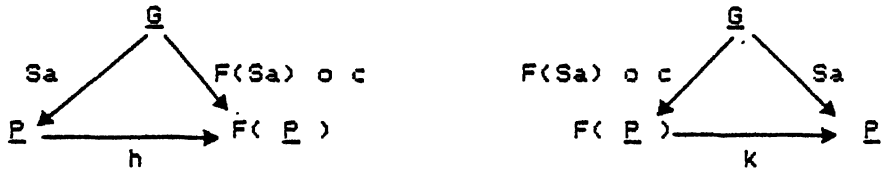


diagramme 14

Il s'ensuit, d'après (27), que l'on a, pour tout a dans P, les diagrammes commutatifs suivants (diag. 15) :



e P = h

diagrammes 15

On en déduit les diagrammes commutatifs suivants (diag. 16) :



diagrammes 16

On déduit des propriétés (voir (26) et (29)) des limites inductives $\underline{P}$ et $F(\underline{P})$, que les flèches h et k sont inverses l'une de l'autre. Enfin, la flèche $e_{\underline{P}}$ (qui est la flèche h) est inversible pour tout pavois $\underline{P}$. La transformation naturelle e est une équivalence.

C. Q. F. D.

CONJECTURES.

Le théorème concerne la catégorie des pavois finis ou infinis. Il est vraisemblable que le théorème analogue existe pour la sous-catégorie pleine des pavois finis (qui correspondent à l'idée classique de polyèdres). La preuve devrait sans doute prendre en compte des propriétés plus fines du groupe G. Les pavois (resp. pavois finis) sont classés par les sous-groupes libres (resp. libres d'indice fini) de G (voir proposition 15). Dans cet esprit notons que l'intersection des sous-groupes libres d'indice fini de G est triviale; en effet, G contient un sous-groupe libre (isomorphe au groupe fondamental du graphe en "huit" ou à celui de la sphère trois fois trouée, correspondant au pavage de la sphère en deux faces, une arête, un sommet; voir proposition 14) d'indice fini (quatre) et, c'est notoire, tout groupe libre est résiduellement fini, c'est-à-dire l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est triviale (le groupe libre étant muni d'une base, tout élément non neutre est représenté par un mot Mn non vide où Mi ($o<i<n$) est une séquence de mots irréductibles telle que Mo est le mot vide et, pour $o<i<n$, Mi est le résultat de la concaténation d'un générateur ou de son inverse Ei et de Mi-1; on choisit alors un homomorphisme f du groupe libre dans le groupe des permutations de l'ensemble des Mi tel que, pour tout i positif, f(Ei) transforme Mi-1 en Mi, et par suite f(Mi) transforme Mo en Mi; enfin le noyau de f est un sous-groupe (distingué) d'indice fini du groupe libre ne contenant pas Mn; un résultat plus fort a été établi par Marshall HALL (1949, pp. 429-430)).

Une même conjecture se pose pour la sous-catégorie pleine des pavois finis réguliers, et pour celle des pavois dont les faces, sommets et polygones de Petrie ont des valences finies.

5 TOUT VENANT

Cette section précise des rapports entre les différents objets (ou points de vue) dont nous avons fait usage, énonce certaines de leurs propriétés, et les met en relation avec des procédés classiques de construction de surfaces bordées par des entrelacs (ROLFSEN, 1976).

A une orbite nous avons associé différents objets : six pavages, six graphes de bandes (trois graphes de bandes et leurs tordus respectifs), trois graphes (les âmes des trois paires de graphes de bandes), trois pavages quadrivalents bi-colorables (les trois pavages de Petrie), un graphe quadrivalent (le graphe des arêtes).

Chaque élément d'une orbite peut être désigné par un pavage, un graphe de bandes (choisi arbitrairement comme graphe de bandes des sommets d'un pavage), une couleur d'un pavage de Petrie. Chaque élément d'une orbite a pour attribut une suite ordonnée de trois graphes (on choisit l'ordre arbitraire : graphe des sommets, graphe des faces, graphe des polygones de Petrie qui est le graphe des sommets du facial et aussi le graphe des faces du sommital).

Il existe des contractions d'orbite du groupe des métamorphoses (voir annexe) : nous appelons orbite à 6 une orbite qui comporte six pavages non-isomorphes; nous appelons orbite à 3 une orbite qui comporte trois paires de pavages isomorphes; nous appelons orbite à 2 une orbite qui comporte deux trios de pavages isomorphes; nous appelons orbite à 1 une orbite qui comporte six pavages isomorphes. Nous appelons auto-tordu un graphe de bandes invariant (à isomorphisme près) par torsion (voir section 2). Nous appelons ambi-colorable un pavage de Petrie invariant (à isomorphisme près) par permutation des couleurs (voir section 3).

Dans une orbite à 3, un graphe de bandes est auto-tordu et les quatre autres sont deux à deux isomorphes sans être auto-tordus, deux des trois graphes sont isomorphes, un pavage de Petrie est ambi-colorable et les deux autres sont isomorphes.

Dans une orbite à 2, trois graphes de bandes (non auto-tordus) sont isomorphes (et leurs trois tordus sont isomorphes), les trois graphes sont isomorphes, les trois pavages de Petrie sont isomorphes et non ambi-colorables.

Dans une orbite à 1, les six graphes de bandes sont isomorphes, les trois graphes sont isomorphes, les trois pavages de Petrie sont isomorphes et ambi-colorables.

La connaissance des nombres d'arêtes, sommets, faces et polygones de Petrie permet de calculer la caractéristique des pavages d'une orbite. Pour déterminer leur orientabilité dans le cas de caractéristiques paires inférieures à 2 il est nécessaire de connaitre les graphes pondérés (voir section 2). Cependant des indications sur l'orientabilité des pavages d'une orbite peuvent être déduites d'objets plus pauvres.

Enonçons deux propositions préalables :

PROPOSITION 18. --- Si un graphe ne contient que des circuits de longueur paire, alors tout graphe de bandes dont il est l'ame a la meme orientabilité que son tordu.

PROPOSITION 19. --- Si un graphe contient au moins un circuit de longueur impaire, alors toute paire constituée d'un graphe de bandes dont il est l'ame et de son tordu contient au moins une surface non orientable.

Un graphe de bandes est graphe de bandes des sommets d'un pavage et graphe de bandes des faces du pavage dual. La proposition 19 implique :

PROPOSITION 20. --- Toute orbite dont un graphe contient au moins un circuit de longueur impaire comporte au moins deux surfaces non orientables.

Soit une orbite comportant deux paires formées chacunes d'un graphe de bandes et de son tordu et telles que l'âme de ces graphes de bandes ne contienne que des circuits de longueur paire. Alors il existe une paire, formée d'un élément de chacune de ces deux paires, constituant les graphes de bandes des faces et des sommets d'un pavage de l'orbite. Ces deux graphes de bandes sont de même orientabilité. Les tordus de ces deux graphes de bandes sont respectivement le graphe de bandes des faces du facial et le graphe de bandes des sommets du sommital du pavage. La proposition 18 implique :

PROPOSITION 21. --- Toute orbite dont deux graphes ne contiennent que des circuits de longueur paire ne comporte que des surfaces de meme orientabilité.

Nous avons joué d'une double interprétation du dessin des polygones de Petrie d'une paire de pavages duaux :

-l'une en termes de courbes immergées dans la surface ou de graphe des arêtes plongé dans la surface ou de graphe des sommets du pavage de Petrie;

-l'autre en termes de graphe de bandes (section 2) qui reconnait dans les croisements de polygones de Petrie des projections de torsions de bandes.

Les algorithmes de Seifert et de Reidemeister utilisent cette même ambivalence pour construire à partir de projections sphériques (ou planes) d' entrelacss des surfaces bordées par ces entrelacss. Ces surfaces s'interprètent naturellement comme des plongements de graphes de bandes.

La construction de Reidemeister s'appuie sur le fait que toute projection sphérique (ou plane) d'un entrelacs constitue le graphe quadri-valent des sommets d'un pavage bi-colorable. Cette projection détermine le pavage de Petrie commun à une paire de pavages sphériques duaux. Chacune des couleurs du pavage de Petrie représente un plongement du tordu de l'un des graphes de bandes de la paire de pavages duaux associés à ce pavage de Petrie (fig. 28).

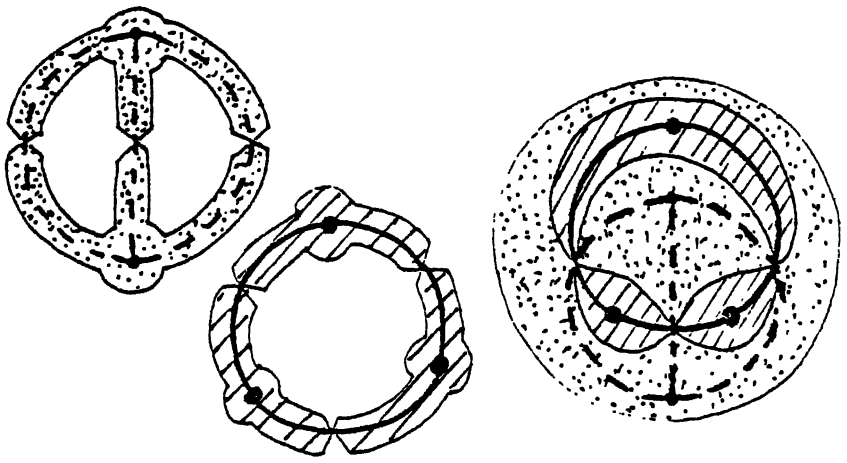


figure 28

Les deux surfaces de Reidemeister associées à la projection standard du noeud de trèfle. La surface rayée est un plongements du graphe de bandes des sommets du sommital du pavage standard de la sphère en deux triangles. La surface pointillée est un plongement du graphe de bandes des faces du facial de ce pavage.

PROPOSITION 22. --- Soit les deux surfaces de Reidemeister construites à partir d'une projection sphérique d'un entrelacs.

Chacune de ces surfaces est un plongement du graphe de bandes des sommets du sommital (ou des faces du facial du dual) du pavage sphérique dont le graphe des sommets est l'ame de ce graphe de bandes.

Soit un pavage ayant F faces, S sommets et A arêtes. La surface fermée obtenue en recollant le tordu de son graphe de bandes des sommets et le tordu de son graphe de bandes des faces a pour caractéristique $X = F + S - 2A$.

En effet, les tordus des graphes de bandes des sommets et des faces, se recollent en créant un cross cap au milieu de chaque arête du pavage (fig. 29). La surface obtenue par recollement des tordus des graphes de bandes a pour caractéristique la caractéristique du pavage diminuée du nombre d'arêtes.

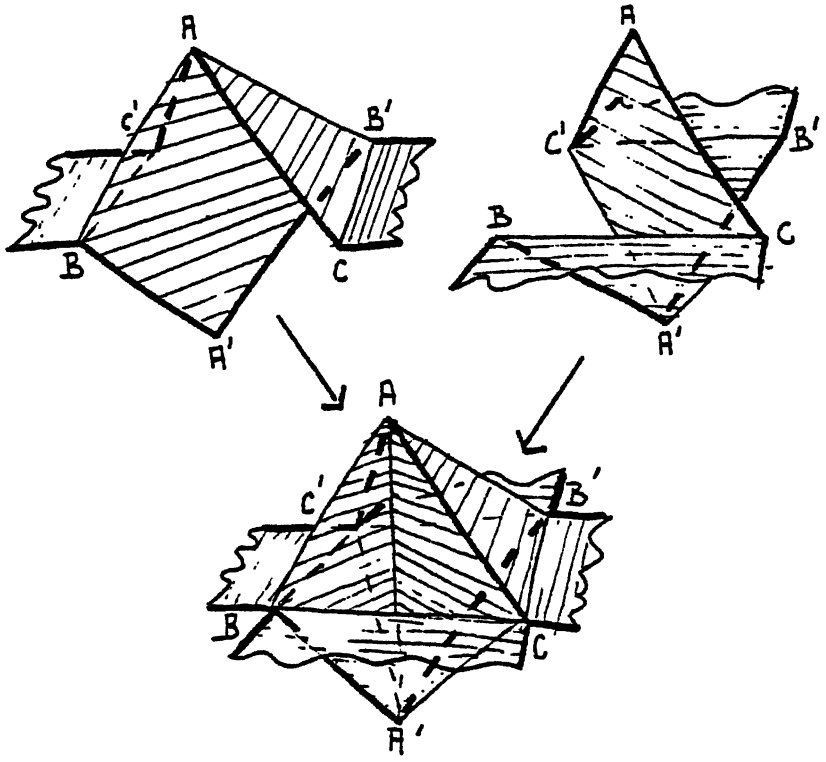


figure 29
Recollement des tordus des graphes de bandes des sommets et des faces.

En particulier :

La surface fermée obtenue par recollement des deux surfaces de Reidemeister construites à partir d'une projection sphérique, ayant A intersections, d'un entrelacs est de caractéristique $X = 2 - A$.

Et, ce qui revient au même :

Soit la projection sphérique ayant A intersections d'un entrelacs à C composantes et, soit les deux surfaces de Reidemeister qu'elle définit. La somme S des caractéristiques des deux surfaces fermées pavées dont ces deux surfaces de Reidemeister constituent les graphes de bandes des sommets (ou bien, les graphes de bandes des faces), est $S = 2 (C + 1) - A$.

TRADUCTION 23. --- Nous traduisons le procédé de Seifert construisant une surface orientable bordée par un entrelacs orienté donné.

Soit un entrelacs orienté et une projection plane. On obtient un graphe de bandes orientable bordé par cet entrelacs. A chaque rond de Seifert on associe une rondelle, à chaque croisement, une bande.

DEFINITION-PROPOSITION 24 --- Soit une projection sphérique d'un entrelacs orienté. Soit la surface de Seifert qu'elle définit.

On appelle anti-rond de Seifert de cette projection, un circuit effectué en parcourant alternativement des segments de la projection dans le sens et à rebours de l'orientation.

L'ensemble des anti-ronds de Seifert est l'ensemble des polygones de Petrie de la paire de pavages duaux dont la surface de Seifert est un plongement de l'un des graphes de bandes.

La valence, toujours paire, du polygone de Petrie représenté par un anti-rond de Seifert est le nombre de segments qui le constituent.

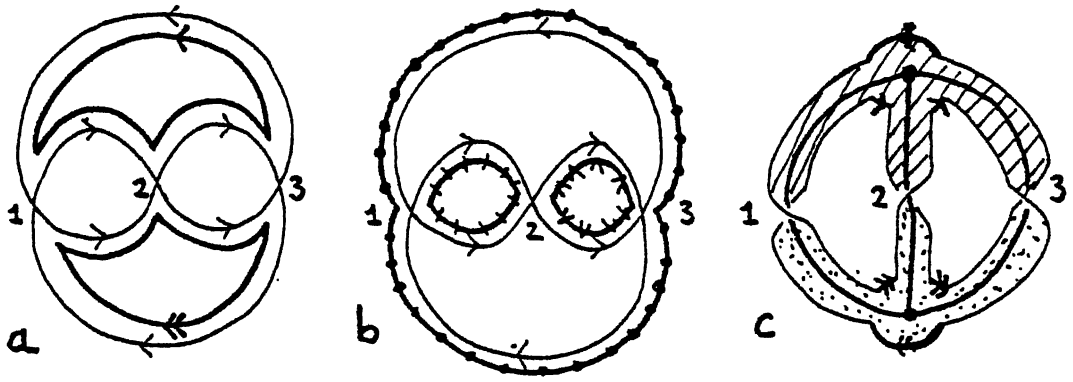


figure 30
La surface de Seifert associée à une projection plane d'un noeud de trèfle.
a/ les deux ronds de Seifert.
b/ les trois anti-ronds de Seifert.
c/ la surface de Seifert comme plongement d'un graphe de bandes.

Soit un graphe de bandes plongeable comme surface de Seifert. Tout circuit sur l'âme de ce graphe de bandes est de longueur paire. Ce graphe de bandes étant orientable son tordu est orientable.

PROPOSITION 25. --- Une orbite, dont l'un des six graphes de bandes est plongeable comme surface de Seifert, comporte au moins quatre pavages orientables.

6 REMARQUES HISTORIQUES

Pierre SOURY est un mathématicien peu connu, qui s'est suicidé le 2 Juillet 1981. Il s'intéressait notamment aux difficultés de représentation par des dessins des objets topologiques en basses dimensions. Il a écrit trois recueils, diffusés de façon privée, deux que l'on peut consulter dans un petit nombre de bibliothèques françaises (à Paris, à Orsay, à Strasbourg) et un troisième aujourd'hui édité. Dans le même esprit des considérations graphiques ont souvent été la source de l'avancée proprement mathématique de notre texte.

Au cours d'un travail sur des procédés de construction de familles de pavages, l'un d'entre nous (C. LEGER) mentionna la fréquence intrigante de la notion de polygone de Petrie dans les textes de H. S. M. COXETER. Notre élaboration provient directement de l'explicitation de cette notion.

Outre un article collectif de 1938 dont il est l'un des auteurs, de John Flinders PETRIE nous ne connaissons que l'hommage constant que lui rend COXETER, le récit que ce dernier fait (1937, p.33) d'un entretien qu'ils ont eu en 1926, et la brève "remarque historique" qu'il lui consacre (1973, p. 32).

COXETER (1939, p. 128) appelle polygone de Petrie d'un pavage tout polygone en zig-zag dont les côtés sont des arêtes du pavage tels que deux côtés consécutifs, mais jamais trois, bordent une même face. COXETER (1950, p. 422) rapporte que J. F. PETRIE avait fait remarquer dès 1931 que les polygones de Petrie étaient singuliers dans certains cas (sommets parcourus plusieurs fois par un même polygone de Petrie).

COXETER (1939) étudie une famille dépendant de trois paramètres entiers de groupes $G^{m,n,p}$ définis par générateurs et relations (voir propositions 16,17). Tout groupe $G^{m,n,p}$ est invariant (à isomorphisme près) par permutation des entiers m, n, et p. Il recense des cas où le groupe $G^{m,n,p}$ est fini et l'interprete alors comme groupe des automorphismes (métriques) d'un pavage très régulier, qu'il note $\{m,n\}_p$. Les faces (resp. sommets, polygones de Petrie) d'un tel pavage sont de valence m (resp. n, p). Les six pavages ayant les mêmes paramètres m, n, p dans un ordre variable ont même groupe d'automorphismes. COXETER (1939, p. 130) les désigne alors comme les "six corresponding regular maps".

Il décrit (1950, p. 420) une transformation involutive entre pavages réguliers : elle consiste à conserver le graphe des sommets d'un pavage, à en évider les faces et leur substituer celles qui comblent les polygones de Petrie du pavage d'origine.

COXETER et MOSER (1957, p. 111) remarquent que la dualité et cette nouvelle transformation involutive engendrent les paquets de six pavages $\{m,n\}_p$ ayant les mêmes paramètres dans un ordre variable.

COXETER (1939, p. 128) définit les pavages semi-réguliers: le pavage semi-régulier noté $\{m/n\}_p$ est ce que nous appelons le pavage de Petrie des pavages (duaux l'un de l'autre) notés $\{m,n\}_p$ et $\{n,m\}_p$. Il souligne (1939, p. 132) l'exemple du groupe $G^{3,4,6}$: les trois pavages semi-réguliers associés sont portés par trois surfaces dont l'une est sphérique, l'autre euclidienne (le tore), la troisième hyperbolique (la surface non-orientable de caractéristique -2). L'un d'eux, noté $\{3/4\}_6$, ou encore $\{4/3\}_6$, est le cuboctaèdre d'Archimède.

COXETER (1932, p. 127) définit le symbole $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}$, qui anticipe les symboles $\{m/n\}_p$.

La définition par COXETER des polygones de Petrie fait obstacle à la généralisation. Par exemple, le pavage standard de la sphère en deux faces triangulaires, trois arêtes et trois sommets, pavage noté $\{3,2\}_6$, n'admet aucun polygone de Petrie au sens de COXETER. COXETER et MOSER (1957, p. 140) citent pourtant le pavage dual $\{2,3\}_6$ dans leur recensement des pavages finis connus $\{m,n\}_p$.

COXETER (1974, p. 20) écrit que les polygones de Petrie ont commencé leur "usefull career" en 1925.

En fait, les polygones de Petrie, le pavois fondamental et le pavage de Petrie d'un pavage ont été reconnus, sous diverses appellations et à diverses fins, par plusieurs auteurs.

C'est à GROTHENDIECK et à ses élèves Y. LADEGAILLERIE (1976), C. VOISIN et J. MALGLOIRE (1977) et P. DAMPHOUSSE (1981) que revient le crédit d'avoir construit une catégorie assez riche pour abriter les pavages.

P. DAMPHOUSSE a introduit l'objet universel (G, *) sous le nom de "Universal model".

Le groupe de Grothendieck G est une extension commune de tous les groupes de Coxeter $G^{m,n,p}$ (voir proposition 17). De ce point de vue, le groupe de Grothendieck G est interprété comme groupe de Coxeter $G^{m,n,p}$ dans le cas extrapolé où les trois paramètres sont infinis.

P. DAMPHOUSSE donne du groupe G une présentation qui favorise deux des trois involutions du groupe de Klein facteur, et reconnait, dans l'échange de ces deux involutions, la dualité comme automorphisme de sa catégorie.

Max DEHN (1936, pp. 152-157) associe à un pavage des "t-graph" qui sont ses polygones de Petrie.

Hugo STEINITZ (1934, p 196 et suivantes) définit le "θ-Prozess" qui, à un pavage, associe son pavage de Petrie.

Felix KLEIN (1879, pp. 458-469; 1923, pp. 123-132) utilise la décomposition barycentrique des pavages. Il trace trois polygones de Petrie du pavage du tore de genre 3 représenté par la Hauptfigur, figure discutée par J. GRAY (1982). Il interprète les 21 (axes de translation laissant stable chacun des 21) polygones de Petrie comme étant les 21 géodésiques les plus courtes de ce tore de genre 3 muni d'une métrique de Riemann (1890, pp. 369-382).

August Ferdinand MOBIUS (1863, 1865) définit les "zones" d'un pavage à faces triangulaires. Chaque zone est une bande, portion de la surface. A chaque zone on peut associer canoniquement un polygone de Petrie. Il compare l'orientabilité et le nombre de côtés d'une zone. Jean-Claude PONT (1974, pp. 88-111) analyse les mémoires où MOBIUS expose ces notions.

Pour autant c'est PLATON qui remporte le prix. Dans le Timée (53 c - 57 d), ayant attribué à chacun des corps simples - terre, eau, air, feu - la configuration d'un polyèdre - cube, icosaèdre, octaèdre, tétraèdre - PLATON établit les règles d'une sorte de chimie des corps simples à l'aide de deux opérations sur les polyèdres, à savoir celles-là même qui ont fondé les métamorphoses: dislocation selon des triangles élémentaires (ceux de la subdivision barycentrique à notre sens de la surface polyédrique, avec la différence qu'ils sont assortis d'une métrique et à l'exception du cube dont la dislocation est plus grossière) puis recombinaison de ceux-ci. Après avoir indiqué que la terre jamais par ces opérations ne peut donner un autre corps qu'elle-même (étant seule associée à un polyèdre à triangles élémentaires rectangles isocèles), PLATON (Timée 56 d-e) donne les règles selon les schémas inverses:
eau ⟶ air + feu ⟶ feu puis feu ⟶ air ⟶ eau .

"Mais l'eau, fragmentée (μερισθέν) par du feu et de l'air, permet, par recomposition (συστάντα), la formation d'un corpuscule de feu plus deux corpuscules d'air. Les corpuscules d'air à leur tour, donnent, pour chaque unité qui subit la dissolution (ἑξ ἑνὸς μέρους διαλυθέντος), deux corpuscules de feu. Dans la direction inverse: lorsqu'une petite quantité [de corpuscules] de feu est entourée de beaucoup de corpuscules d'air, d'eau ou de terre, emportée par leur mouvements, vaincue (νικηθέν) et brisée en morceaux (καταθραυσθῇ) dans le combat, cela aboutit à ce que deux corpuscules de feu donnent, par recomposition (συνίστασθον), un corpuscule d'air. Et l'air à son tour, lorsqu'il est maîtrisé (κρατηθέντος) et brisé en menus morceaux (κερματισθέντος), de deux entiers plus un demi de ses corpuscules, il résultera par agglomération (ἔσται συμπαγές) un corpuscule entier d'eau."

ANNEXE

1. - La famille des cactus.

Nous donnons l'exemple d'une famille assez étonnante de pavages : les cactus constituent une famille infinie de pavages sphériques, stable par métamorphose. Nous les représentons par des pavages planaires.

DEFINITION 26. --- On appelle cactus les pavages de la sphère dont le graphe des sommets réalise un plongement dans la sphère du graphe dédoublé d'un arbre, graphe ayant les mêmes sommets que l'arbre et tel qu'à toute paire de sommets liés par une arête de l'arbre corresponde une paire de sommets liés par exactement deux arêtes du graphe.

On peut montrer par récurrence sur la taille du cactus.

PROPOSITION 27. --- Soit un cactus:
(1) Il admet au moins une face de valence 2 ayant un sommet de valence 2.
(2) Les nombres F, S, P et A de faces, sommets, polygones de Petrie et arêtes vérifient $F = S = P = 1 + A/2$.

En effet, ces propriétés sont vérifiées par le cactus correspondant à l'arbre minimum (fig. 32), et à chaque pas de la démonstration, augmenter le cactus d'une face vérifiant (1) accroit les nombres F, S, P de 1, et A de 2 (fig. 31).

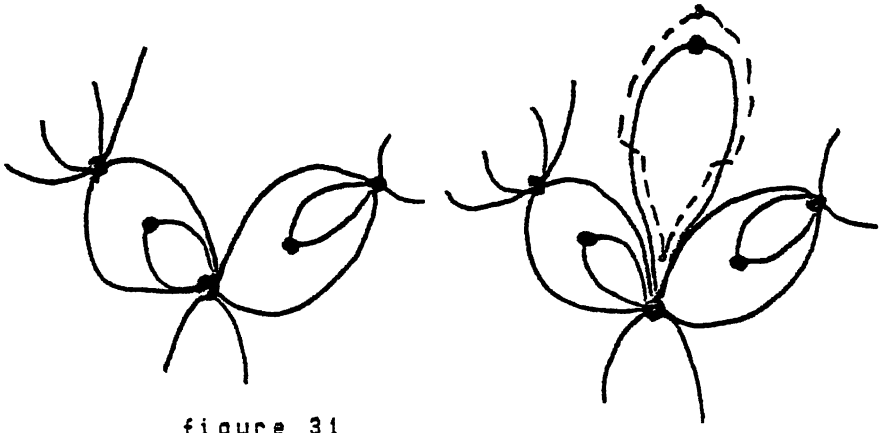


figure 31
Deux cactus (détail). Une face, un sommet, un polygone de Petrie en plus, deux arêtes en plus.

On peut montrer de même par récurrence que le dual et le facial de tout cactus est un cactus, d'où l'on déduit:

PROPOSITION 28. —— La famille des cactus est stable par métamorphoses.

Donnons des exemples de toutes les sortes d'orbites a priori imaginables du groupe des métamorphoses, orbites de cardinal 1, 2, 3 ou 6. Hormis le cas spécial de l'orbite de cardinal 2 (fig. 36), on donne des orbites constituées de cactus.

Dans le cas des orbites de cardinal 3 ou 6, on distingue les pavages par les nombres de faces, sommets et polygones de Petrie dans chaque sorte de valence.



figure 32
Cactus minimum. F = S = P = 2
Orbite de cardinal 1.

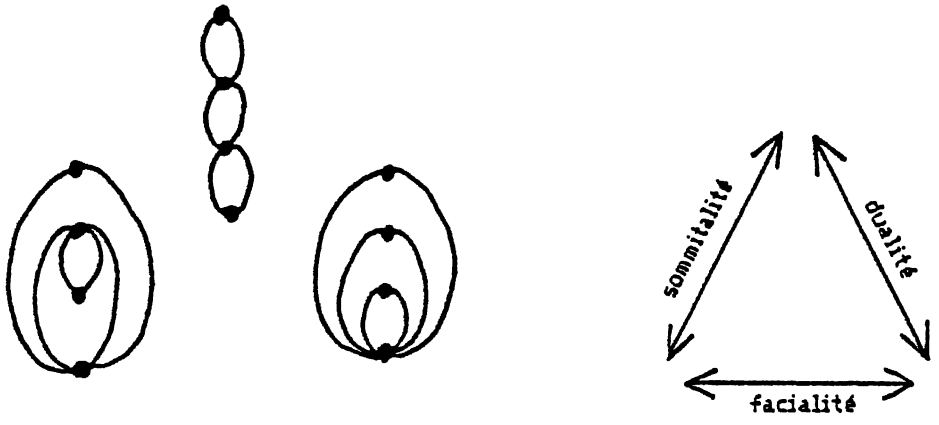


figure 33
Orbite de cardinal 3. Pour le pavage en haut de la figure :
F = 3 (2) + 1 (6)
S = P = 2 (2) + 2 (4)
Les valences sont indiquées entre parenthèses.

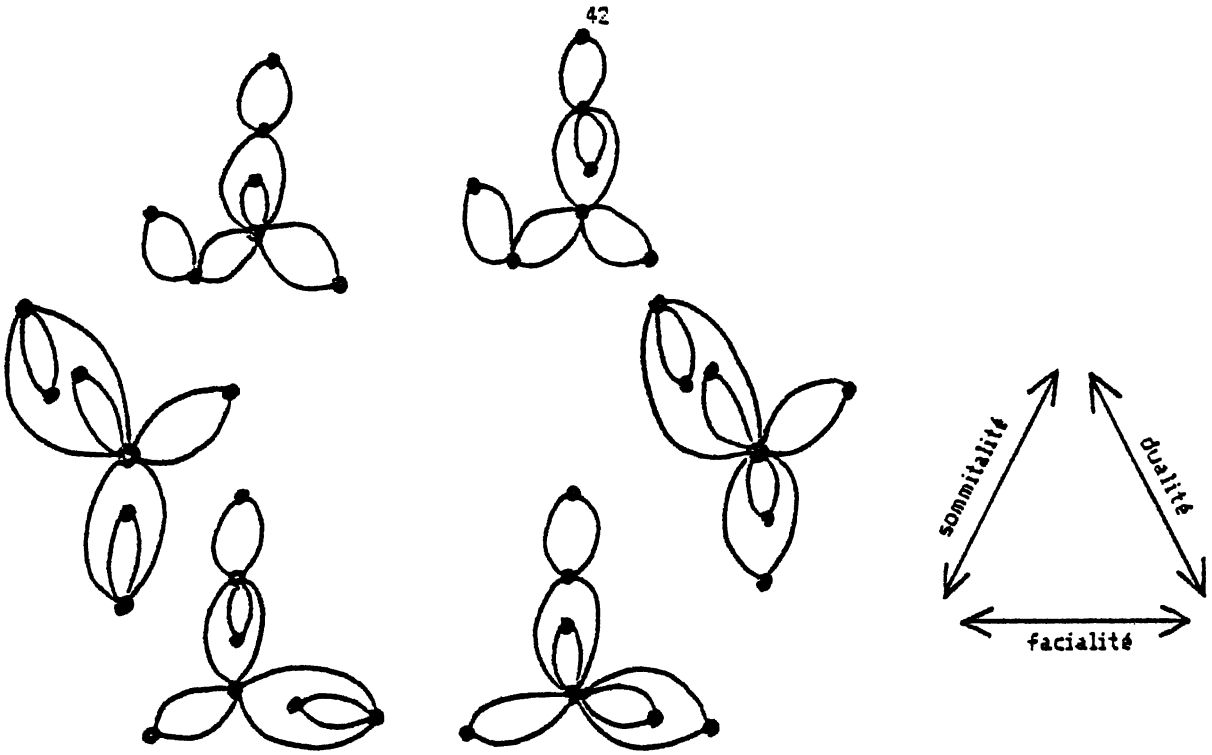


figure 34
Orbite de cardinal 6. Pour le pavage en haut à gauche de la figure :
F = 5 (2) + 1 (4) + 1 (10)
S = 4 (2) + 2 (4) + 1 (8)
P = 4 (2) + 1 (4) + 2 (6)

On donne encore l'exemple (fig. 35) de deux familles infinies d'orbites de cardinal 1.



figure 35
Orbites de cardinal 1.

2. - Une orbite de cardinal 2.

Les pavages de l'orbite de cardinal 2 sont distingués en comparant les cycles de leurs coins autour de leurs faces et de leurs sommets. Il y a pour l'un trois (resp. pour l'autre une) paires exactement de coins voisins sur le pourtour de la face en même temps qu'opposés autour du sommet.

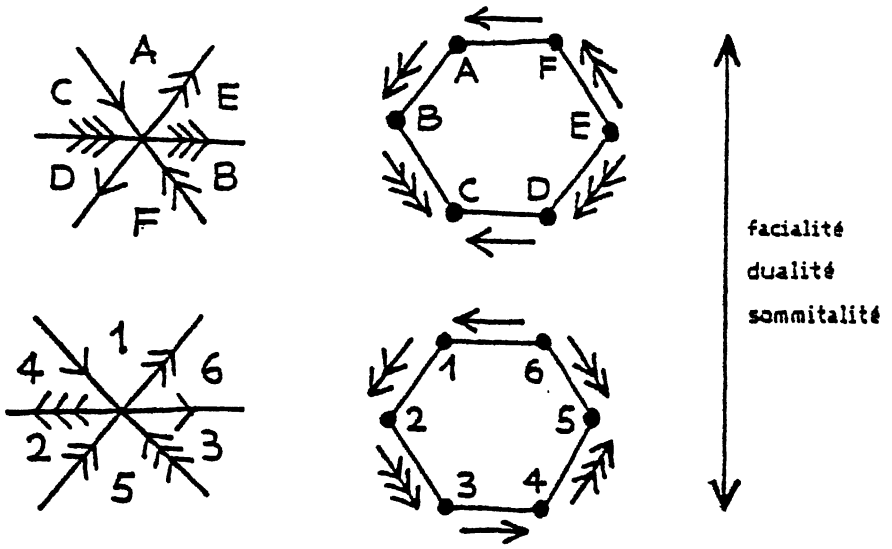


figure 36
Orbite de cardinal 2. Pavages de la surface de caractéristique -1.
Cycle des coins entourant la face et celui des coins entourant le sommet pour chacun d'eux.

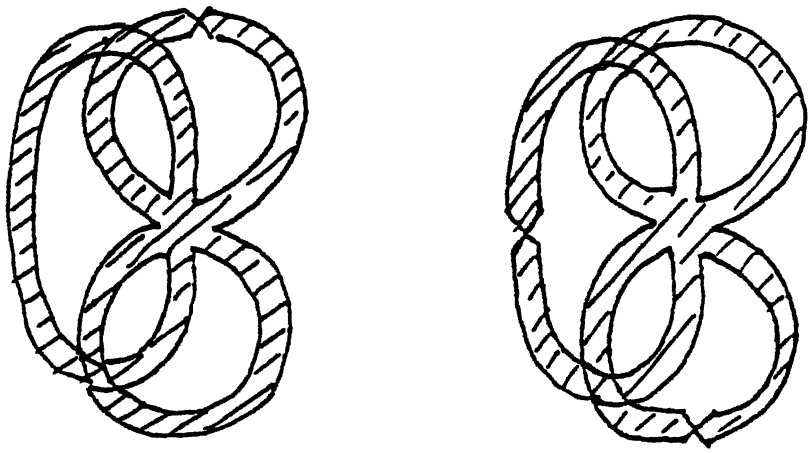


figure 37
Les deux graphes de bandes associés.

BIBLIOGRAPHIE

BURNSIDE W. :

1911 Theory of groups of finite order (2è éd.), Dover Publications

CHALTIN H. :

1984 An S3-action on Petrie graphs and triple Heegaard splittings, preprint

COXETER H.S.M. :

1932 The polytopes with regular-prismatic vertex figures, Proc. of the London Math. Soc., 2nd ser., vol. 34, pp. 126-189

1937 Regular skew polyedra in three and four dimensions, and their topological analogues, Proc. of the London Math. Soc., 2nd ser. vol. 48, pp. 33-62

1939 The Abstract groups $G^{m,n,p}$, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 45, pp. 73-150

1948 Regular polytopes, London

1950 Self-dual configurations and regular graphs, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 56, pp. 413-455

1973 Regular polytopes (3è éd.), Dover Publications, Inc., New York

1974 Regular Complex Polytopes, Cambridge University Press

COXETER H.S.M., DU VAL, FLATHER and PETRIE J.F. :

1938 The Fivty-nine Icosahedra, University of Toronto Studies, Math. Ser., 6, pp. 1-26

COXETER H.S.M. and MOSER W.O.J. :

1957 Generators and Relations for Discrete Groups, (1st ed.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York

DAMPHOUSSE P. :

1981 Topological Cartography, thèse, 153, Université Paris XI

DEHN M. :

1936 Ueber Kombinatorische Topologie, Acta Mathematica, vol. 67, pp. 124-168

EDMONDS A.L., EWINGS J.H., and KULKARNI R.S. :

1982 Regular tesselations of surfaces and (p,q,2)-triangle groups, Annals of Mathematics, vol. 116, pp. 113-132

GRAY J. :

1982 From the History of a Simple Group, The Mathematical Intelligencer, vol. 4, 2, pp. 59-67

GROTHENDIECK A. :

Esquisse d'un programme, note multigraphiée

GUIBAS L. et STOLFI J. :

1985 Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams, ACM Transactions on Graphics, Vol. 4, N°2, april 1985, pp. 74-123

JAMES L.D. :

1985 Maps and Hypermaps - Operations and Symmetry, Thesis, Faculty of Mathematical Studies, Univesity of Southampton

Complexes and Coxeter groups - Operations and Outer Automorphisms, Journal of Algebra, à paraître

JONES G.A. and THORNTON J.S. :

1983 Operations on Maps, and Outer Automorphisms, J. Combin. Theory, Ser. B, 35, pp. 93-103

KLEIN F. :

1879 Ueber die Transformation Siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Mathematische Annalen, Band 14, pp. 428-471

1890 Vorlesungen über der elliptischen Modulfunctionen, vol. 1, Leipzig

1923 Gesammelte Mathematische Abhandlungen, t. 3, Springer, Berlin.

LADEGAILLERIE Y. :

1976 Découpes et isotopies de surfaces topologiques. Thèse de Doctorat d'Etat. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier

LEGER C. et TERRASSON J.-C. :

1986 L'action du groupe symétrique S3 sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de pavages de surface fermée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I, n°1, p. 39-42.

LINS S. :

1982 Graph-encoded maps, J. Combin. Theory, Ser. B 32, pp. 171-181

MASSEY W.S. :

1984 Algebraic Topology : An Introduction, Springer-Verlag

MOBIUS A.F. :

1863 Manuscrit en français présenté en 1861 pour le Grand Prix de Mathématiques de l'Académie des Sciences, Paris

1865 Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders, Ber. Verh. Sachs., t. 17, Leipzig, pp. 31-68

PLATON :

1985 Timée, texte et traduction établis par Albert Rivaud, Collection des Universités de France, Association Guillaume Budé, Edition Les Belles Lettres, 95 bd. Raspail, Paris.

PONT J.-C. :

1974 La topologie algébrique des origines à Poincaré, Presses Universitaires de France, Paris

ROLFSEN D. :

1976 Knots and links, Math. Lect. Ser., 7, Publish or Perish Inc., Berkeley

SOURY P. :

Chaînes et Noeuds, 1ère et 2ème parties, à paraître

1986 Chaînes et Noeuds, 3ème partie, ed. Thomé-Leger, 141 rue Saint-Denis, 75002 Paris

STEINITZ E. :

1908 Beitrage zur Analysis Situs, Archiv der Mathematik und Physik, Band 13, pp. 29-49

1934 Vorlesungen uber die Theorie der Polyeder, Verlag von Julius Springer, Berlin

TITS J. :

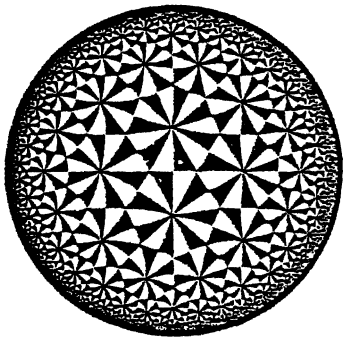
Sur le groupe des Automorphismes de certains Groupes de Coxeter, Journal of Algebra, à paraître

VOISIN C. et MALGOIRE J. :

1977 Cartes cellulaires, cahiers mathématiques, 12, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, U.E.R. de Mathématiques, Place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier CEDEX

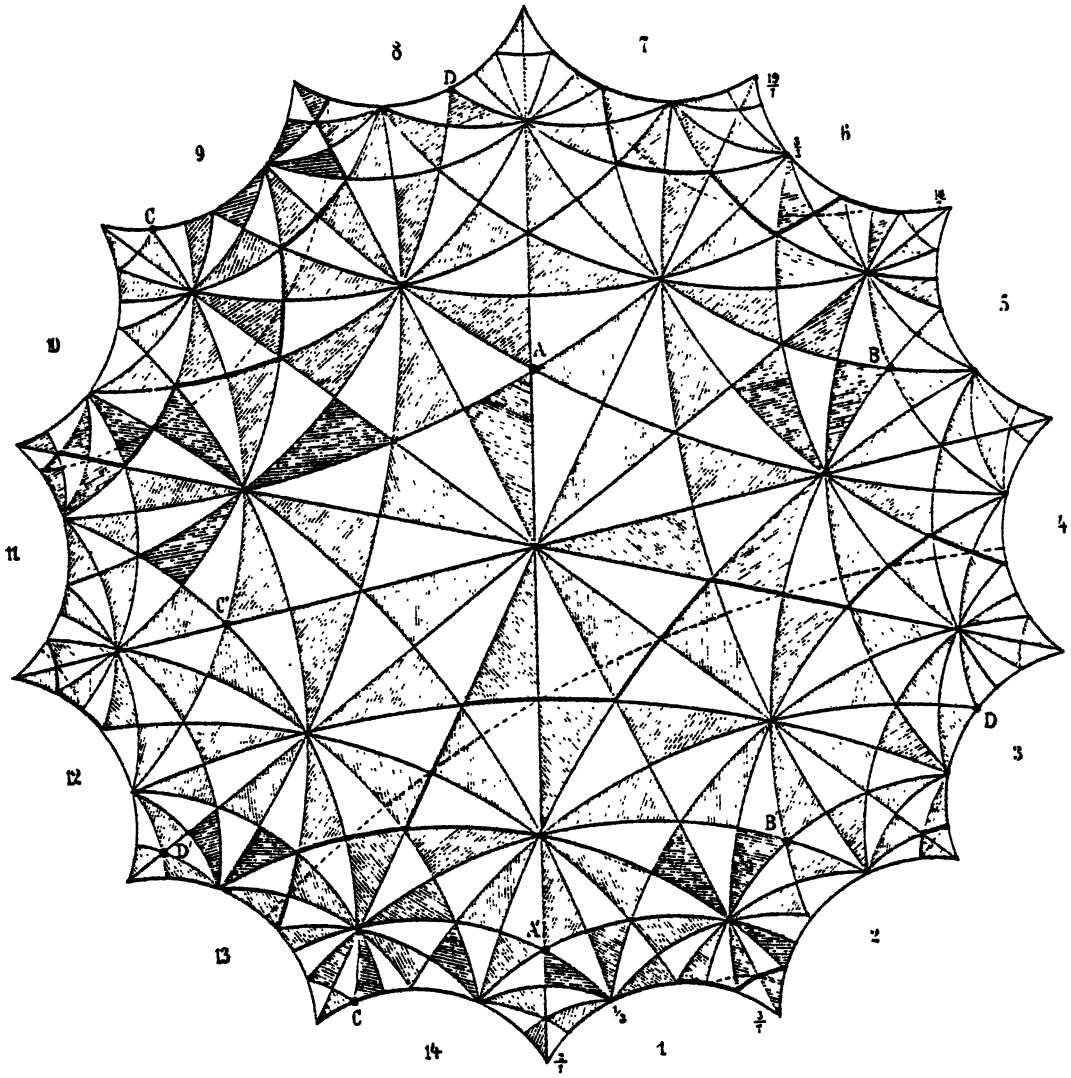
WILSON S.E. :

1979 Operators on regular maps, Pacific J.Math. 81, pp. 559-568



Christian LEGER, U. E. R. de Mathématique et Informatique,
Université PARIS VII.

Jean-Claude TERRASSON, U. E. R. d'Arts Plastiques et Sciences de l'Art,
Université PARIS I.



Zusammengehörigkeit der Kanten

1 an 6
2 „ 8
3 „ 10
4 „ 12
9 „ 14
11 „ 2
13 „ 4

F. Klein. Transformation siebenter Ordnung.
Mathematische Annalen Bd. XV.