DIAGRAMMES

WEISHU SHIH

Une méthode élémentaire pour l'étude des équations aux dérivées partielles

Diagrammes, tome 16 (1986), p. WS1-WS69

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1986__16__1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Lettre de Weishu SHIH aux éditeurs

Ce manuscrit existe depuis huit ans (*), L'auteur a essayé de le publier avec l'appui inlassable de R.Thom, dont l'influence est importante dans ce travail. Les tentatives ont été vaines. Les jugements des personnalités dominantes, bardées de médailles et auréolées de prestige, sont de deux sortes.

D'un côté, les sceptiques : "Il est impossible de faire (surtout un vieux type médiocre !) une étude générale sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, donc c'est un "non-sens" ".

De l'autre, les prétentieux qui n'hésitent pas à taxer ces mêmes travaux de "trivialité", alors qu'ils ont eu l'occasion de montrer leur totale inaptitude à résoudre un petit exercice d'application facile de ces "trivialités", concernant la résolution de l'équation d'Euler !...

Donc la parution d'un tel "non-sens" ou d'une telle "trivialité" dans leur journaux prestigieux serait une insulte inadmissible. Il faut être juste: un éditeur avait accepté à la condition que soient supprimées quelques lignes qui pourraient offenser la classe dominante et superpuissante, mais ces lignes sont aussi importantes que le reste du manuscrit, car lorsqu'on a perdu le chemin, ce n'est surement pas la faute du "pied" (la classe dominée) mais celle de la "tête" (la classe dominante). Cette dernière, confiante dans sa doctrine individualiste, montre au grand jour que "la science sans conscience" (i.e. avec la seule conscience égoïste des médailles et de l'argent) "n'est que ruine de l'âme !" D'ailleurs la crise profonde et durable dans

---

(*) Dans la forme où il est finalement publié ici. Entre temps, quelques notes de Shih aux comptes rendus de l'Académie sont parues. Il estime qu'elles constituent des "développements mineurs" du présent texte, lequel propose l'essentiel des idées, des résultats et de leurs démonstrations détaillées.

laquelle nous nous enfonçons un peu plus chaque jour est une preuve évidente du fait que cette classe dominante ne développe sa science et sa technologie, à court terme, qu'au profit d'une poignée d'exploitants !!...

L'auteur remercie vivement les éditeurs de Diagrammes d'avoir bien voulu accepter de publier un tel "non-sens" ou une telle "trivialité". Et le jour viendra où ce "non-sens" ou cette "trivialité" réapparaîtra sous le nom de quelque seigneur dominant:

"il n'a jamais respiré une fleur
il n'a jamais aimé personne
il n'a jamais rien fait d'autre que des additions
il ignore que le futur n'appartient pas seulement
aux "chiens fidèles des riches et traîtres honteux
des pauvres"
son seul but est d'obtenir des médailles,
la carotte des multinationales..."

PLAN

Introduction	p. 0
1. Notations	p. 5
2. Homologie sectionnaire	p. 9
3. Variétés Grasmanniennes et équations du premier ordre	p.11
4. Le système canonique	p.15
5. Systèmes canoniques associés à D*	p.27
6. Le gradué associé à D	p.31
7. Stratification canonique d'un système d'équations aux dérivées partielles	p.37
8. Equations secondaires d'un système d'équations aux dérivées partielles	p.43
9. Problème de Cauchy et solution locale	p.47
10. Obstruction pour l'existence d'une solution globale	p.55
Appendice	p.59
Bibliographie	p.65

DIAGRAMMES VOLUME 16 , 1986

UNE METHODE ELEMENTAIRE POUR L'ETUDE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Weishu Shih

(C.N.R.S.)

Egalité de consommation pour tous les êtres humains

Ce travail a pour but de proposer une méthode différente de résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles analytiques réelles. Nous allons donc rechercher une fonction analytique $u = (u_1,u_2,\ldots,u_m)$ à valeur réelle, à n variables $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n$, $n \geq 2$, qui vérifie les relations :

$$(1) \qquad f_h(x,u,\delta u/\delta x,\delta^{k'}u/\delta x^{k'}) = 0 \quad , \; h = 1,2,\ldots,m'$$

données par m' fonctions analytiques réelles f_h .

En dépit de récents progrès sur ce sujet, nous souhaitons attirer l'attention sur le fait que cette méthode donne le développement en série des solutions (cf.(51)"), c'est-à-dire une méthode constructive et uniforme. Uniforme signifie qu'elle fonctionne indépendemment du type d'équations, qu'elles soient linéaires, non-linéaires, surdéterminées, etc...

De plus, elle paraîtra élémentaire puisque l'on n'a pas besoin de notions savantes telles que l'involution (resp. théorie de Galois) du système, pseudo-groupe de Lie (resp. différentiel), variété de dimension infinie, résolution de Spencer, méthode variationnelle, hyperfonction, etc...

Enfin, cette méthode semble plus naturellement adaptée aux problèmes avec contraintes, par exemple problème de Cauchy, problème mixte, etc...

La mise en oeuvre de cette méthode fait donc uniquement appel à la notation de Monge, au repère mobile et à quatre idées qui, bien qu'élémentaires, semblent encore inconnues dans la littérature. Il s'agit de l'homologie sectionnaire (§ 2) [26], de la construction d'une suite de variétés (§4) [27] à partir de deux variétés données, du rapport (§3) [27] entre les sous-espaces d'une variété Grasmannienne et les équations aux dérivées partielles, enfin du gradué associé à un système d'équations aux dérivées partielles (§6) [27].

En effet, à l'aide de ces quatre notions, on peut construire canoniquement à partir de (1) un système d'équations aux dérivées partielles à (n-1)-variables dont la résolubilité est nécessaire à la résolution de (1) et suffisante sous certaines conditions supplémentaires. Il s'agit donc d'une méthode par récurrence sur $n \geq 2$.

Ce travail a été exposé au Colloque de Calgary de 1978, mais le manuscrit a été rejeté par l'éditeur Springer-Verlag. Depuis, une partie de ces résultats est parue dans [27], dont on retrouvera ici un complément avec toutefois quelques modifications de terminologie. La présente rédaction était destinée au Colloque International de Marseille de Mai 1982, qui n'a publié que les textes rédigés en langue américaine. C'est une dangereuse menace et une insulte inadmissible faite aux trésors de mathématiques classiques rédigés en langues allemande, française ou italienne, etc... Un tel monopole risquerait bien de ruiner nos civilisations. De plus, la colonisation culturelle, comme toute colonisation, ne fait pas le bonheur du monde. Il est certain que les super cow (resp. play) boys américains ne réussiront pas seuls à redresser la situation de décadence dans le monde.

D'autre part, le travail de Shih Wei Hui sur l'équation d'un fluide général [24] semble montrer que cette étude ne relève pas de la doctrine de l'art pour l'art, mais suit l'enseignement de quelques maîtres français, anciens et contemporains, qui ont prôné l'unité des mathématiques [7], [20]. Cependant, le risque que mon travail ne soit qu'un "pollugraphe" de compétition à l'américaine est très grand. Comme il s'agit de mon tout dernier travail, je ne peux qu'exprimer l'assurance d'avoir fait tous les

efforts qui étaient en mon pouvoir pour éviter ce risque avec la pensée qu'il existe dans le monde des gens qui meurent de faim.

Il me reste à exprimer mes vifs remerciements pour l'encouragement et l'aide que m'ont apportés en particulier, F.Breiner, C.Bruter, H.Cartan, Chang Ho Joai, J.Cerf, Cheng Sho Ming, C.C.Chou, Chuang Yien, A. et G.Didierjean, J.Dieudonné, Ch.Ehresmann, A.et H.Grothendieck, M.H.Jullien, Kiang Shin, Kim How, T.Klemola, Takashi Kotake, F.Lalonde, Lau Ben You, M.Laveille, A. et C.Legrand, J.Leray, Liang Pai Tchein, Liu Shu Lin, J.A.Marti, B.Malgrange, Show Mong, J.Nash, Nguyen Dinh Ngoc, M.Perroud, J.E.A.Shih, Shih Wei Hui, R.Thom, E.Wagneur, Wang Chi Shen , Yeu Che , Chen Yuh Ching et G.Weill.

---

1. Notations

Toutes les variétés sont supposées indéfiniment différentiables ainsi que les applications entre elles. Rappelons que la notation de Monge [32] pour une équation du second ordre à deux variables $(x,y,u,p,q,r,s,t) \in R^8$, où u,p,q,r,s,t correspondent à la fonction inconnue, à ses dérivées premières, secondes, et aux formes $du = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, est généralisée pour deux variétés V, Z par ce qu'on appelle les $k^{ièmes}$ espaces d'Ehresmann(*), $J^k(V,Z)$, espace des k-jets selon [12]. En effet, une carte locale de $J^k(V,Z)$ n'est autre que la notation de Monge : pour des entiers positifs $1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_\lambda \leq n$ et $e_i \geq 1$, on notera en abrégé:

$$j^\sigma = j_0^{e_0} j_1^{e_1} \ldots j_\lambda^{e_\lambda}, \quad \text{et} \quad |e| = e_0 + e_1 + \ldots + e_\lambda,$$

alors les coordonnées de $J^k(R^n,R^m)$ s'écrivent $(x,u,\alpha^\mu_{j^\sigma})$ où μ prend les valeurs 1, 2, ..., m, $|e| \leq k$, et où les formes canoniques de Monge-Ampère s'écrivent:

$$(2) \qquad d\alpha^\mu_{j^\sigma} = \sum_i \alpha^\mu_{i,j^\sigma} dx_i \quad , \quad |e| \leq k-1 .$$

Alors, les formes $d\alpha^\mu_{j^\sigma} - \sum_i \alpha^\mu_{i,j^\sigma} dx_i$ engendrent l'idéal différentiel I_k [13] de Cartan-Ehresmann de $J^k(V,Z)$. Ainsi (1) peut s'écrire alors:

$$(1)' \qquad f_h(x,u,\alpha^\mu_{j^\sigma}) = 0 \quad , \; h = 1,2,\ldots,m', \quad |e| \leq k' .$$

Cette équation définit alors un sous-espace D de $J^{k'}(V,Z)$. On peut donc considérer un sous-espace de $J^k(V,Z)$ comme un système d'équations aux dérivées partielles pour les fonctions f de V à valeurs dans Z. C'est ce que nous entendons faire par la suite. Il faut également remarquer que cette définition implique d'une part que les opérations de réunion, d'intersection, les

---

(*) Les bonnes idées sont rares et les voleurs nombreux

relations d'ordre par inclusion des sous-espaces, s'étendent aux équations aux dérivées partielles , et d'autre part qu'elle contient le cas des inéquations aux dérivées partielles. Par ailleurs, le problème aux limites ou problème mixte est formulé alors de la façon suivante: on se donne un sous-espace $\phi : M \to V$ de la variété V, et un autre sous-espace D" de $J^{k"}(V,Z)|_M$, restriction à M de $J^{k"}(V,Z)$ (i.e. l'espace fibré induit par ϕ de l'application source $J^{k"}(V,Z) \to V$), appelé *équation de contrainte*. Alors pour trouver une solution au problème (D,D") il faut rechercher une fonction $f : V \to Z$ dont les jets d'ordre k et k", $j^k f : V \to J^k(V,Z)$ et $j^{k"} f : V \to J^{k"}(V,Z)$ satisfassent les inclusions $\mathrm{Im}\, j^k f \subset D$ et $\mathrm{Im}\, j^{k"} f - \phi \subset D"$. Désignons par

$$\alpha^k{}_{k"} : J^k(V,Z) \to J^{k"}(V,Z) , \quad -1 \leq k" \leq k$$

(3)

$$\beta_k : J^k(V,Z) \to Z , \quad 0 \leq k$$

les projections canoniques induites par les applications source et but [12], avec la convention $J^{-1}(V,Z) = V$. Dans le cas où Z est une variété algébrique réelle, $\alpha^k{}_{k-1}$ définit une famille de variétés algébriques sur $J^k(V,Z)$ paramétrisée par $J^{k-1}(V,Z)$, en considérant les fibres de $\alpha^k{}_{k-1}$. Une équation aux dérivées partielles d'ordre k : $D \subset J^k(V,Z)$ est dite quasi-algébrique (resp. quasi-linéaire) de degré algébrique d , si la restriction de $\alpha^k{}_{k-1}$ à D : $D \to J^{k-1}(V,Z)$ est une sous-famille algébrique de degré d (resp. de degré 1) . De même, on définit les D quasi-analytiques quand Z est une variété analytique réelle. Dans le cas où V est aussi une variété algébrique (resp. analytique) , D est dite algébrique (resp. analytique) si D est un sous-ensemble semi-algébrique (resp. semi-analytique) de $J^k(V,Z)$. Enfin on notera par

$$e_k : J^{k+1}(V,Z) \to J^1(V,J^k(V,Z)) \tag{4}$$

l'application d'Ehresmann (voir [13]), qui fait correspondre à $f_o \in J^{k+1}(V,Z)$ le 1-jet au point $x_o \in V$ de l'application $f"(x) = j^k f(x)$ où $f : V \to Z$ est un représentant de f_o, i.e. $f_o = j^{k+1} f(x_o)$.

D'autre part, rappelons que les r-repères mobiles d'une variété différentiable X, forment une variété dite de Grasmann [15], $G_r(TX)$ qui est un espace fibré localement trivial sur X :

(5) $$p : G_r(TX) \to X$$

le fibré associé au fibré principal de l'espace tangent TX de X. Si $\alpha : X \to V$ est un espace fibré sur la variété V, nous appellerons *Grasmannienne transverse à* α et désignerons par $G_r^*(TX)$ la sous-variété de $G_r(TX)$ formée par les r-plans, ou sous-espaces de dimension r de TX, qui sont transversaux à l'espace tangent le long des fibres de α ; elle est encore fibrée par p sur X.

Pour un sous-espace A de X, on notera par

(6)' $$TA \ , \ G_r(TA) \ , \ J^k(V,A)$$

les sous-espaces respectifs de TX, $G_r(TX)$, $J^k(V,X)$ formés

pour TA, des vecteurs tangents qui peuvent être représentés par un germe de courbe $g :]-1,+1[\to X$ tel que l'image $g([0,1))$ soit contenue dans A, et on désigne par $T\hat{}A$ le cône engendré par TA : $T\hat{}A = \{ \tau \mid \tau \in TA \text{ ou } -\tau \in TA \}$,

pour $G_r(TA)$, des r-plans qui peuvent être engendrés par les vecteurs de TA,

pour $J^k(V,A)$, des k-jets qui peuvent être définis comme suit : d'abord, pour $k = 1$: un $f \in J^1(V,Z)$ est élément de $J^1(V,A)$ si et seulement si l'application linéaire qu'il définit de $T_{\alpha<f>}V$ dans $T_{\beta<f>}Z$ a son image dans $T\hat{}_{\beta<f>}A$; pour $k > 2$ on définit $J^k(V,A)$ de manière tout à fait semblable, mais nous n'en avons pas besoin pour la suite.

Ces notations sont cohérentes quand A est une sous-variété de X.

Pour une immersion $g : Y \to X$ d'une variété Y de dimension r, on désigne par

(7) $\qquad g^{\sim} : Y \to G_r(TX)$

l'application qui fait correspondre à chaque point y de Y le r-plan $g^{\sim}(y)$ image de l'espace tangent en y à Y par la dérivée de g.

Rappelons maintenant que la stratification canonique d'une application continue $f : X \to Y$ entre deux C-W complexes, notée $Y = Y_0 + Y_1 + \ldots$, est définie comme suit:

Y_0 est le plus grand ouvert de Y tel que la restriction de f à $f^{-1}(Y_0)$: $f^{-1}(Y_0) \to Y_0$ soit une projection d'espace fibré localement trivial (resp.fibré de Serre),

Y_1 est le plus grand ouvert de $Y - Y_0$ tel que la restriction de f à $f^{-1}(Y_1)$: $f^{-1}(Y_1) \to Y_1$ soit une projection d'espace fibré localement trivial (resp. fibré de Serre),

et ainsi de suite ...

Cette définition coïncide avec celle de stratification par le "rang" dans le cas où f est une application différentiable propre entre deux variétés différentiables [31].

2. Homologie sectionnaire

Rappelons quelques notions introduites dans [26] et qui concernent les variétés différentiables. D'abord un q-simplexe sectionnaire (σ,Υ) (différentiable) d'application $f : X \to V$ entre deux variétés est formé par deux plongements (différentiables) du q-simplexe standard Δ_q

$$\sigma : \Delta_q \to V \quad , \quad \Upsilon : \Delta_q \to X \tag{8}$$

tels que $f\cdot\Upsilon = \sigma$. Notons par $S_q(f)$ l'ensemble de tels simplexes muni de la topologie induite par celle de Whitney dans l'espace de toutes les fonctions indéfiniment dérivables de Δ_q dans $V \times X$. Les $(q+1)$-faces δ_i de Δ_q nous permettent d'introduire un homomorphisme d_q du groupe abélien libre engendré par $S_q(f)$ dans celui engendré par S_{q-1} tel que $d_{q-1} \cdot d_q = 0$. On obtient alors , par la méthode habituelle , le q-ième groupe d'homologie sectionnaire de f , noté $H_q(f)_s$.

Pour un idéal différentiel [10] I de X, on définit l'homologie sectionnaire attachée à I : $H_*(f)_{s,I}$ à partir du sous-espace $S_q(f,I)$ de $S_q(f)$ formé par les couples (σ,Υ) tels que Υ soit I-intégrable [29] , i.e. les formes induites sur Δ_q par Υ , soit $\Upsilon^*(\omega)$, vérifiant pour toutes les formes $\omega \in I$, la condition

$$\Upsilon^*(\omega) = 0 \ . \tag{9}$$

On obtient évidemment des homomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} &H_*(f)_s \to H_*(X,\mathbb{Z}) \ , \\ &H_*(f)_s \to H_*(V,\mathbb{Z}) \ , \\ &H_*(f)_{s,I} \to H_*(f)_s \ , \end{aligned} \tag{9)'}$$

où $H_*(X,\mathbb{Z})$ est l'homologie ordinaire à cefficients entiers.

Dans le cas où V est orientée de dimension n , le degré de f (resp.degré de f attaché à I), $\deg f \in \mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$ (resp. $\deg_I f$) , est défini de la manière suivante : c'est le nombre des éléments (cardinal) du groupe quotient $H_n(X,\mathbb{Z})/\mathrm{Im}\ p \sim \mathbb{Z}/\mathrm{Im}\ p$ moins 1, où $p : H_n(f)_s \to H_n(X,\mathbb{Z})$ (resp. $p : H_n(f)_{s,I} \to H_n(X,\mathbb{Z})$) est la projection canonique (cf. (9)') . De même, le

faisceau associé à une théorie d'homologie nous permet de définir le degré local $\deg_x f$ (resp. $\deg_{x,I} f$) au point $x \in V$ [28] . On obtient

(10) $$\sup_{x \in V} \deg_x f \leq \deg_I f \quad , \quad \deg_x f \leq \deg_{x,I} f$$

La nullité du degré (resp. degré local attaché à I) de f est une condition nécessaire à l'existence d'une section $g : V \to X$ telle que $f \circ g = Id_V$. En effet, le cycle sectionnaire défini par $\theta = \Sigma(\sigma_i, g\sigma_i)$, où $\Sigma\sigma_i$ est homologue à la classe d'orientation $[V]$ de V , vérifie $p[\theta] = [\Sigma\sigma_i]$ (resp. pour la section locale, g annule l'idéal I) . En particulier, pour qu'une équation aux dérivées partielles $D \subset J^{k'}(V,Z)$ possède une solution C^∞ (resp. une solution locale), il faut que le degré (resp. degré local) attaché à l'idéal $I_{k'}$ de Cartan-Ehresmann de l'application $\alpha : D \to V$ soit nul . Donc $\deg f = 0$; or ce degré est déterminé par les moyens topologiques.

D'autre part, un q-simplexe sectionnaire (σ, Y) de l'application $\alpha : J^k(V,Z) \to V$ (avec $q < \dim(V)$) intégrable pour I_k , précise la notion de conditions initiales d'une équation aux dérivées partielles sur une sous-variété de dimension q de V , soit $\mathrm{Im}\ \sigma$.

Par exemple, pour une équation du second ordre sur R^2 , la condition initiale sur la droite $y = 0$, soit $u(x,0) = v_0(x)$, $\delta u/\delta y(x,0) = v_1(x)$, correspond à un 1-simplexe sectionnaire (σ, Y) de $J^1(R^2,R) \to R^2$, à savoir $\sigma(x) = (x,0)$, $Y(x) = (x,0,v_0(x),\delta v_0/\delta x(x),v_1(x))$ tel que $Y^*(du-pdx-qdy) = 0$.

De plus, la considération des structures de topologie sur l'espace des fonctions C^∞ de Δ_q dans le produit $J^k(V,Z) \times V$ nous permet d'étudier la déformation des conditions initiales ainsi que le problème de recollement des solutions.

Ceci, ainsi que d'autres avantages que nous verrons plus loin, justifie l'intérêt d'introduire la notion "simpliciale" dans les équations aux dérivées partielles.

3. Variétés Grasmanniennes et équations du premier ordre

Etant données deux variétés différentielles X , Y de dimensions respectives n et $N \geq n$, X orientée, il y a une unique équation aux dérivées partielles [27] du premier ordre, soit $I \subset J^1(X,Y)$, dite équation d'immersion qui possède la propriété suivante : une application différentiable $f : X \to Y$ est une immersion , si et seulement si f est une solution de I.

Pour cela choisissons une métrique Riemannienne sur le n-ième produit extérieur $\Lambda^n TY$ de l'espace tangent de Y ; notons $||x||$ la norme d'un élément x de $\Lambda^n TY$; soit θ une orientation de X. Alors on définit $I \subset J^1(X,Y)$ comme suit : $\mu_o \in I$ si et seulement si il y a une représentation de μ_o, soit g ,(on a donc $\mu_o = j^1g(x_o)$ et $x_o = \alpha(\mu_o)$), telle que $||\Lambda^n Dg(\theta(x_o))||$ soit $\neq 0$, où $\Lambda^n Dg : \Lambda^n TX \to \Lambda^n TY$ est le n-ième produit extérieur de la dérivée Dg de g. Il est clair que ceci ne dépend pas du choix de g , ni de la métrique, ni de l'orientation θ , Donc I est bien définie et possède évidemment la propriété voulue. Ce fait, bien que trivial montre l'existence d'une relation étroite entre l'étude des invariants des immersions en topologie et la recherche des solutions globales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

De même, chaque sous-espace $S \subset G_n(TY)$ détermine une unique équation aux dérivées partielles, dite associée à S :

(11) $\qquad E(S) \subset J^1(X,Y)$

telle que l'application $f : X \to Y$ soit une solution de $E(S)$ si et seulement si f est une immersion, c'est-à-dire $E(S) \subset I$ et l'application canonique définie par f (cf. (7)) , soit $f^\sim : X \to G_n(TY)$, vérifie $\mathrm{Im}\, f^\sim(x) \subset S$. En effet, il suffit de définir $E(S)$ comme étant l'ensemble des $\mu_o \in I \subset J^1(X,Y)$ qui possèdent une représentation g (donc $\mu_o = j^1g(x_o)$ et $x_o = \alpha(\mu_o)$), telle que l'image de $T_{x_o}(X)$ sur $Dg(x_o)$ soit contenue dans S , puisque cette image ne dépend que de μ_o , et non pas de la représentation g . De plus, il est clair que cette construction respecte l'ordre d'inclusion (cf. § 1) , c'est-à-dire que l'on a :

(11)' $\quad S \subset S' \Rightarrow E(S) \subset E(S')$

D'autre part le même raisonnement nous permet d'établir le fait suivant ; soit M une sous-variété de X de codimension 1 pour simplifier les notations. Alors chaque couple de sous-espaces $S_1 \subset G_n(TY) \times G_n(TY)$ et $S_2 \subset G_{n-1}(TY) \times G_n(TY) \times G_n(TY)$ détermine un unique système $E(M,S_1,S_2)$ d'équations aux dérivées partielles avec contraintes (cf. § 1) :

$$D_0 \subset J^0(X,Y\times Y) \quad D_1 \subset J^1(X,Y\times Y)$$

(12) $\quad E(M,S_1,S_2)$:

$$D_2 \subset J^1(X,Y\times Y)|_M$$

Ce système possède les propriétés suivantes : une application $f = (f_1,f_2) : X \to Y \times Y$ est une solution de ce système si et seulement si f_1 et f_2 sont des immersions qui coïncident sur M, soit $f_0 = f_1|_M = f_2|_M : M \to Y$.

De plus, l'image de l'application (cf. (7))

$$f_0^{\sim} \times f_1^{\sim} \times f_2^{\sim} : M \to G_{n-1}(TY) \times G_n(TY) \times G_n(TY)$$

est contenue dans S_2. Enfin l'image de l'application

$$f_1^{\sim} \times f_2^{\sim} : X \to G_n(TY) \times G_n(TY)$$

est contenue dans S_1.

Considérons maintenant deux sous-espaces $S_1 \subset G_n(TX)$ et $S_2 \subset G_n(TY)$; alors ils déterminent une et une seule équation aux dérivées partielles :

(13) $\quad E(S_1,S_2) \subset J^1(X,Y)$

qui possède les propriétés suivantes : $f : X \to Y$ est une solution de $E(S_1,S_2)$ si et seulement si f est une immersion et l'application induite par la dérivée Df sur $G_n(TX)$ notée

(14) $\quad g_n(f) : G_n(TX) \to G_n(TY)$

vérifie

$$\mathrm{Im}\, g_n(f)(S_1) \subset S_2 .$$

Enfin, remarquons que la construction des équations associées peut être appliquée à d'autres situations plus complexes. Dans le cas où X et Y sont des variétés algébriques réelles (resp. analytiques), et où S est semi-algébrique (resp. analytique) , alors les équations associées $E(S)$ sont algébriques (resp. analytiques).

4. Le système canonique

Fixons-nous deux variétés différentiables V et Z de dimensions respectives $n > 2$ et m. Rappelons que l'on a construit dans [27] deux suites de variétés appelées *système canonique de* V *dans* Z, soit

(15) $\qquad E_{r,k}(V,Z)\ ,\ W_{r,k}(V,Z)\ ,\ 0 < r < n+1\ ,\ k \geq 0\ ,$

qui nous permettent de transformer les problèmes d'équations aux dérivées partielles en problèmes géométriques de ces suites de variétés, et vice versa. Voici la construction : remarquons d'abord que $\alpha^{k+1}{}_k : J^{k+1}(V,Z) \to J^k(V,Z)$ (cf. (3)) induit une application que l'on notera par

(16) $\qquad g_{r,k} : G_r{}^*(TJ^{k+1}(V,Z)) \to G_r{}^*(TJ^k(V,Z))$

où $G_r{}^*(TJ^k(V,Z))$ est la grasmannienne transverse à $\alpha^k{}_{-1} : J^k(V,Z) \to V$ (cf. (6)), et par

$$G_r{}^*(TJ^{k+1}(V,Z)) \times J^{k+2}(V,Z)$$

(16)' $\qquad\qquad\qquad\qquad \phi_{r,k} \downarrow$

$$G_r{}^*(TJ^k(V,Z)) \times J^{k+1}(V,Z)$$

l'application produit $g_{r,k} \times \alpha^{k+2}{}_{k+1}$. Alors on définit

(17) $\qquad E_{r,k}(V,Z) \subset G_r{}^*(TJ^k(V,Z)) \times J^{k+1}(V,Z)$

comme étant le sous-espace des couples (τ,y) :

$$(\tau,y) \in G_r{}^*(TJ^k(V,Z)) \times J^{k+1}(V,Z)$$

tels qu'il existe un $\tau' \in G_r{}^*(TJ^{k+1}(V,Z))$ vérifiant les conditions suivantes : $g_{r,k}(\tau') = \tau$, $p_{k+1}(\tau') = y$ et $\langle \omega, v \rangle = 0$ (cf. (5)) pour toute forme $\omega \in I_{k+1}$ et tout vecteur $v \in \tau'$. Alors on pose

(18) $\qquad W_{r,k}(V,Z) \subset G_r{}^*(TJ^k(V,Z))$

comme étant l'image de $E_{r,k}(V,Z))$ par la projection canonique de premier facteur p_1

$$p_1 : G_r^*(TJ^k(V,Z)) \times J^{k+1}(V,Z) \to G_r^*(TJ^k(V,Z))$$

(19)

$$p_2 : G_r^*(TJ^k(V,Z)) \times J^{k+1}(V,Z) \to J^{k+1}(V,Z) \ .$$

On notera par $p : E_{r,k}(V,Z) \to W_{r,k}(V,Z)$ et par $p' : E_{r,k}(V,Z) \to J^{k+1}(V,Z)$ les applications induites par p_1 et p_2 . Il en résulte que $\phi_{r,k}$ et $g_{r,k}$ induisent les applications

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ E_{r,k+1}(V,Z) & \to & E_{r,k}(V,Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & g & \\ W_{r,k+1}(V,Z) & \to & W_{r,k}(V,Z) \end{array} \qquad (19)'$$

qui commutent avec les p.

Remarquons d'abord que $E_{r,o}(V,Z)$ est une sous-variété différentiable de $G_r^*(TJ^o(V,Z)) \times J^1(V,Z)$ de dimension le nombre $n + m + n.m + (n-r).r$, que $W_{r,o}(V,Z) = G_r^*(TJ^o(V,Z))$ est de dimension $n + m + (n+m-r).r$, et que l'application

$$p : E_{r,o}(V,Z) \to W_{r,o}(V,Z)$$

est de rang maximum. Ses fibres constituent une sous-variété de $J^1(V,Z)$ de dimension $(n-r).m$. Comme le problème est local, il suffit d'étudier le cas où $V = R^n$ et $Z = R^m$. Pour ceci, désignons un point t de R^c , où $c = n+m+r.(n-r)+n.m$,par

(20)

$$t = (x_1,..x_n,u_1,..u_m,y^1{}_1,..y^j{}_i,..j^{n-r}{}_r,z^1{}_1,..z^m{}_r,w^1{}_1,..w^k{}_j,..w^m{}_{n-r})$$

$$e_i = (0,...,0,1,0,...,0) \in R^r \ , \quad i = 1,...,r$$

Considérons l'application

$$\psi : R^c \to G_r^*(TJ^o(R^n,R^m)) \times J^1(R^n,R^m) \ ,$$

$\psi(t) = (\tau, f)$, définie de la manière suivante : τ, élément de $G_r^*(TJ^0(R^n,R^m))$ est le r-plan au point $(x,u) = (x_1,..,x_n,u_1,..,u_m)$ ((x,u) est élément de $J^0(R^n,R^m)$) engendré par les r vecteurs

$$(20)' \qquad (y'_1,..,y^{n-r}_1,e_1,z'_1...z^m_1) \quad , \quad i = 1,...,r$$

$f \in J^1(R^n,R^m)$ est le 1-jet d'une application $f = (f_1,..,f_m)$ de R^n dans R^m telle qu'au point $x = (x_1,..,x_n)$ on ait:

$$f(x) = (u_1,..,u_m) \quad ,$$

$$\delta f_k/\delta x_j\ (x) = w^k_j \quad ,$$

$$\delta f_k/\delta x_{n-r+i}\ (x) = z^k_i - \sum_{j=1}^{n-r} w^k_j.y^j_i$$

où $k = 1,...,m$, $i = 1,...r$ et $j = 1,...,n-r$. On vérifie directement que ψ est injective. En déplaçant la position de e_i par rapport aux y^j_i dans (20) on obtient d'autres ψ, soit ψ'. On peut remarquer d'après (2) que l'union des images de ces ψ' forme un recouvrement de $E_{r,0}(R^n,R^m)$, d'où l'on déduit que $E_{r,0}(R^n,R^m)$ est une variété. Comme la restriction de ρ sur l'image de ψ n'est autre que τ , alors ρ est de rang maximal et d'image

$$G_r^*(TJ^0(R^n,R^m)) = W_{r,0}(TJ^k(V,Z)).$$

Ceci dit, considérons le cas où $r = n$. Alors l'application induite par ρ_1 (cf. (19)) est une injection de $E_{n,k}(V,Z)$ dans $G_n^*(TJ^k(V,Z))$, quel que soit $k \geq 0$. Ainsi

$$(21) \qquad \rho : E_{n,k}(V,Z) \xrightarrow{\sim} W_{n,k}(V,Z)$$

est un homéomorphisme, et l'image $W_{n,k}(V,Z)$ est une sous-variété de $G_n^*(TJ^k(V,Z))$ de dimension $n+m.\langle n+k,k\rangle+m.\langle n+k,n-1\rangle$, où l'on note , pour simplifier , le coefficient du binôme de deux entiers n et p par

$$(22) \qquad \langle n,p\rangle = n!/p!(n-p)! \qquad 0 \leq p \leq n \ .$$

Pour établir ceci, il suffit d'étudier le cas où $V = R^n$ et $Z = R^m$ à cause du fait qu'un plongement de Z dans R^p induit plongement de $J^k(V,Z)$ dans $J^k(V,R^p)$. Introduisons d'abord les notations suivantes. On notera un point de R^d , où $d = m\langle n+h-1,n-1\rangle$, soit t_n , par la suite croissante selon l'ordre lexico-graphique des "j" et selon l'ordre croissant des "μ" :

$$(23) \qquad t_n = \alpha^\mu_{[j^*]} = (\alpha^\mu_{j^*}) \in R^d$$

où j^* a la signification indiquée au § 1, et où $|e| = h$ (cf. (2) et (1)'). Ainsi, on écrira un point t de l'espace R^q, où $q = n+m\langle n+k,k\rangle+m\langle n+k,n-1\rangle$, de la manière suivante:

(24)

$$t = (x_1,..,x_n,u_1,..,u_m,\alpha^\mu_{[j^*],1},\alpha^\mu_{[j^*],2},...,\alpha^\mu_{[j^*],k},\alpha^\mu_{[j^*],k+1})$$

$$= (t_o,\alpha^\mu_{[j^*],k+1}) \ .$$

Ceci dit, on peut construire une carte locale pour $E_{n,k}(R^n,R^m)$. A cet effet, considérons l'application :

$$\psi : R^q \to G_n^*(TJ^k(R^n,R^m)) \times J^{k+1}(R^n,R^m)$$

$\psi(t) = (\tau,t)$, définie de la manière suivante : remarquons d'abord que t , dans (24) , représente aussi un élément de l'espace $J^{k+1}(R^n,R^m)$ (cf. (2)). Ensuite $\tau \in G_n^*(TJ^k(R^n,R^m))$ est le n-plan, au point t_o de $J^k(R^n,R^m)$ suivant:

$$t_o = (x_1,..,x_n,u_1,..,u_m,\alpha^\mu_{[j^*],1},\alpha^\mu_{[j^*],2},...,\alpha^\mu_{[j^*],k}) \ ,$$

engendré par les n vecteurs $v_i \in TJ^k(R^n,R^m)$, $i = 1,...,n$

$$v_i = (e_i,Y^\mu_{[j^*],1}(i),Y^\mu_{[j^*],2}(i),...,Y^\mu_{[j^*],k}(i)) \ ,$$

où $e_i = (0,..,0,1,0,..0) \in R^n$, $\mu = 1,...,m$ et où

$$(25) \qquad Y^\mu_{[j^*],h}(i) = (Y^\mu_{j_o e_{o_{j_1}} e_{j_1}\ldots\, j_\lambda e_\lambda}(i))$$

est définie de la manière suivante;

$$(25)' \qquad \gamma^{\mu}_{j_\bullet}(i) = \begin{cases} \alpha^{\mu}_{j_0 e_0 j_1 e_1 \dots j_\lambda e_\lambda\, i} & \text{si } i \geq j_\lambda \\ \alpha^{\mu}_{j_0 e_0 \dots j_q e_q\, i\, j_{q+1} e_{q+1} \dots j_\lambda e_\lambda} & \text{si } j_q \leq i < j_{q+1} \end{cases}$$

Il est clair que ϕ dont l'image est $E_{n,k}(R^n,R^m)$ (cf. (2)) est injective. De plus, la composée $\rho = \rho_1 \cdot \phi$ (cf. (19)) est aussi injective, puisque (25)' et t_0 déterminent de façon unique $\alpha^{\mu}_{[j_\bullet],k+1}$ de (24) , donc t . D'où l'on déduit que $\rho : E_{n,k}(R^n,R^m) \to W_{n,k}(R^n,R^m)$ est un homéomorphisme D'autre part, ceci montre aussi que la projection ρ_2 (cf. (19)) induit également une application bijective ρ' de $E_{n,k}(R^n,R^m)$ sur $J^{k+1}(R^n,R^m)$ (cf. (24)) . Ainsi le cas $r = n$ se résume en le diagramme commutatif suivant :

$$(26) \qquad \begin{array}{ccccc} & & G_n(TJ^k(V,Z)) \times J^{k+1}(V,Z) & & \\ & \swarrow & & \searrow\ \rho_2 & \\ E_{n,k}(V,Z) & & \xrightarrow[\sim]{\rho'} & & J^{k+1}(V,Z) \\ \sim \downarrow \rho & & & & \downarrow \alpha^{k+1}_k \\ W_{n,k}(V,Z) & \to & G_n^*(TJ^k(V,Z)) & \xrightarrow{p_k} & J^k(V,Z) \end{array}$$

En particulier, $W_{n,k}(V,Z) \to J^k(V,Z)$ est un espace fibré.

Ce genre de raisonnement élémentaire nous permet d'étudier les autres variétés E et W . En particulier, le cas $r = n-1$ est donné comme suit. Supposons $n \geq 3$ et $k \geq 1$ (le cas restant est simple !) Alors

$$E_{n-1,k}(V,Z) \subset G_{n-1}^*(TJ^k(V,Z)) \times J^{k-1}(V,Z)$$

$$W_{n-1,k}(V,Z) \subset G_{n-1}^*(TJ^k(V,Z))$$

sont des sous-variétés différentiables de dimensions respectives $2n-1+m\langle n+k+1,n\rangle$ et $2n-1-m+m\langle n+k+1,n\rangle$ (cf. (22)), et l'application induite par ρ_1 (cf. (19))

$$\rho : E_{n-1,k}(V,Z) \to W_{n-1,k}(V,Z) \tag{27}$$

est de rang maximum et ses fibres sont des sous-variétés différentiables de $J^{k+1}(V,Z)$ de dimension m. D'autre part, l'application (16)' induit une application

$$p_k : W_{n-1,k}(V,Z) \to J^k(V,Z) \tag{27)'}$$

qui est surjective de rang maximum et ses fibres sont des sous-variétés différentiables de dimension $m\langle n+k,n-1\rangle+n-m-1$. De même, l'application induite par ρ_2 (cf. (19))

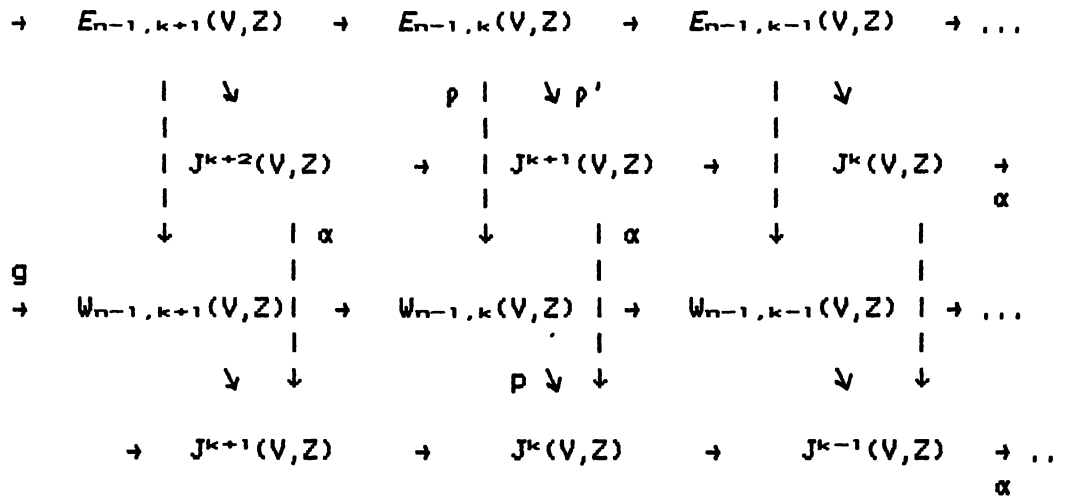
$$\rho' : E_{n-1,k}(V,Z) \to J^{k+1}(V,Z) \tag{27)"}$$

est surjective de rang maximum et ses fibres sont des sous-variétés différentiables de dimension $n-1$. Ainsi, on a un diagramme analogue à celui de (26) pour $r = n-1$. Pour les applications ϕ et g de (19)' quand $r = n-1$, on a

$$\phi : E_{n-1,k+1}(V,Z) \to E_{n-1,k}(V,Z) \tag{28}$$

$$g : W_{n-1,k+1}(V,Z) \to W_{n-1,k}(V,Z)$$

qui sont des applications surjectives de rang maximum dont les fibres sont de même dimension : $m\langle n+k-1,n-1\rangle$ (cf. (22)). Ainsi le cas $r = n-1$, $n \geq 3$, $k \geq 1$ se résume en le diagramme commutatif de variétés différentiables suivant:



où toutes les applications sont surjectives de rang maximum, et dans le cas $Z = \mathbb{R}^m$, ce sont des fibrations.

Maintenant, considérons le cas $n = 2$, $r = 1 = n-1$. Alors on a des variétés différentiables $E_{1,k}(V,Z)$ et $W_{1,k}(V,Z)$ de dimensions respectives $3+m+(m/2)(k+1)(k+4)$ et $3+(m/2)(k+1)(k+4)$. D'autre part , $W_{1,k}(V,Z)$ est égal à l'intersection de $I_1{}^k(V,Z)$ avec $G_1{}^*(TJ^k(V,Z))$ où $I^k(V,Z) \subset G_r(TJ^k(V,Z))$ est l'espace des r-plans τ intégrables par rapport à I_k. C'est-à-dire que $\langle \omega, v \rangle = 0$ pour toute forme $\omega \in I_k$ et $v \in \tau$. Cette particularité est évidemment fausse en général. Par exemple, pour $n > 3$ et $k > 1$, la codimension de $W_{n-1,k}(V,Z)$ dans $I_{n-1}{}^k(V,Z)$ est égale à $m\langle n-1\rangle\langle n+k-1,n-1\rangle - m\langle n+k,n-1\rangle + m$. Mais ces propriétés particulières pour $n = 2$ expliquent la raison pour laquelle certains résultats des équations aux dérivées partielles à deux variables n'admettent pas de généralisations immédiates dans le cas $n > 3$. On peut établir des propriétés similaires (cf. (29)) de $E_{r,k}(V,Z)$ et $W_{p,k}(V,Z)$ pour $0 < r < n-1$.

Enfin, une immersion f de $J^k(V,Z)$ dans $J^k(V',Z')$, où V' et Z' sont deux autres variétés différentiables, est dite r-admissible (cf. transformation de M.Bäcklund [7]) si l'application

$$(30) \qquad g_r(f) : G_r(TJ^k(V,Z)) \to G_r(TJ^k(V',Z'))$$

induite par f (cf. (14)) vérifie : l'image de $W_{r,k}(V,Z)$ par $g_r(f)$ est contenue dans $W_{r,k}(V',Z')$. De même, on définit la notion d'admissibilité pour des sous-variétés du produit $J^k(V,Z) \times J^k(V',Z')$ (cf. [7]) . Dans le cas où la dimension de V' est égale à celle de V , c'est-à-dire à n, il est clair qu'une immersion f , n-admissible de $J^k(V,Z)$ dans $J^k(V',Z')$ détermine de façon unique une application f telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ J^{k+1}(V,Z) & \to & J^{k+1}(V',Z') \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ J^k(V,Z) & \to_{f} & J^k(V',Z') \end{array}$$

soit commutatif (cf. (26)) et compatible avec $g_n(f)$ (cf. (14)).

Ceci dit, nous allons voir le rapport qui existe entre la notion de système canonique de V dans Z et le problème suivant. Soit σ_o et γ_o deux plongements d'une variété différentiable V_o de dimension r dans V et dans $J^{k'}(V,Z)$ respectivement,

$$\begin{array}{ccccc} & J^{k'}(V,Z) & & J^{k'}(V,Z)|V_o & \to & J^{k'}(V,Z) \\ (32) & \gamma_o \swarrow \ \downarrow \alpha & & \gamma_o \uparrow\downarrow \alpha_o & & \downarrow \alpha \\ & V_o \to_{\sigma_o} V & & V_o & \to_{\sigma_o} & V \end{array}$$

tels que $\alpha \cdot \gamma_o$ et γ_o soient $I_{k'}$-intégrables (i.e. remplaçant Δ_q par V_o dans (9)) ou encore tels que γ_o soit une section intégrable de α_o ; l'espace fibré induit par σ_o : $J^{k'}(V,Z)|V_o$. Ainsi le degré attaché à $I_{k'}$ de α_o est nul (cf. (10)) de même que son degré secondaire. Le problème est maintenant de savoir quand existe un plongement

$$\gamma_i : V_o \to J^{k'+i}(V,Z) \quad , \quad i \geq 1$$

(32)'

$$\begin{array}{ccc} J^{k'+i}(V,Z) & & J^{k'+i}(V,Z)|V_o \to J^{k'+i}(V,Z) \\ \gamma_i \not\downarrow \downarrow \alpha_i & & \gamma_i' \uparrow\downarrow \alpha_i' \quad\quad \downarrow \\ V_o \to V & & V_o \to V \\ \quad \sigma_o & & \quad\quad \sigma_o \end{array}$$

tel que $\alpha^{k'+i}{}_{k'} \cdot \gamma_i = \gamma_o$, c'est-à-dire tel qu'un relèvement de γ_o vérifie $\alpha \cdot \gamma_i = \sigma_o$, et tel que γ_i soit $I_{k'+i}$-intégrable . Pour cela ,remarquons d'abord qu'une condition nécessaire est que l'application $\gamma_o^{\sim}$ de V_o dans $G_r(TJ^{k'}(V,Z))$ (cf. (7)) vérifie $\mathrm{Im}\,\gamma_o^{\sim}(V) \subset W_{r,k'}(V,Z)$ qui définit ainsi une application notée encore $\gamma_o^{\sim}$

$$(33) \qquad \gamma_o^{\sim} : V_o \to W_{r,k'}(V,Z) \subset G_r(TJ^{k'}(V,Z)) \ ,$$

En effet, l'existence d'une γ_1 vérifiant (32)' entraîne que le couple $(g_{r,k'} \cdot \gamma_1^{\sim}(x) \ , \ \gamma_1(x))$ appartient à $E_{r,k'}(V,Z)$ pour tout $x \in V_o$ et que l'image de ce couple par ρ (cf. (27)) soit égale à $\gamma_o^{\sim}(x)$, (cf. (7) et (16)) . D'où la nécessité que $\mathrm{Im}\gamma_o^{\sim}(V_o) \subset W_{r,k'}(V,Z)$. De plus, le couple $(g_{r,k'} \cdot \gamma_1^{\sim} \ , \ \gamma_1)$ définit une section ψ de l'espace fibré induit $E_{r,k'}(V,Z)|V_o$ de $E_{r,k'}(V,Z)$ par $\gamma_o^{\sim}$

(33)'

$$\begin{array}{ccc} E_{r,k'}(V,Z)|V_o & \to & E_{rk'}(V,Z) \\ \psi \uparrow\downarrow \rho_o & & \downarrow \rho \\ V_o & \to & W_{r,k'}(V,Z) \\ & \gamma_o^{\sim} & \end{array}$$

i.e. $\rho_o \cdot \psi = 1$. D'autre part, d'après (11) et §3 , cette condition nécessaire équivaut à dire que γ_o est une solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre associée à $W_{r,k'}(V,Z)$

(34) $\quad E(W_{r,k'}(V,Z)) \subset J^1(V_0, J^{k'}(V,Z))$

dont la vérification par γ_0 est en général plus simple.

Supposons maintenant l'existence d'une section différentiable ψ de ρ_0 dans (33)', alors il est clair que l'application composée $\gamma_1 = \rho' \circ \psi$ (cf. (27)") est un relèvement $I_{k'+1}$-intégrable de γ_0 et que $\alpha \circ \gamma_1 = \sigma_0$. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un relèvement γ_1 de γ_0 ,qui soit $I_{k'+1}$-intégrable, est que

(i) γ_0 soit une solution de l'équation (34) ,
(ii) l'application ρ_0 dans (33)' possède une section différentiable.

Autrement dit, la nullité des deux degrés ordinaires de ρ_0 entraîne celle de α_1 par rapport à $I_{k'+1}$. Ainsi la notion de système canonique nous permet de ramener le problème de l'existence d'un relèvement intégrable à celui de l'existence d'une section ordinaire pour laquelle diverses études en topologie (classe d'Euler, théorie des obstructions) peuvent s'appliquer, par exemple pour déterminer le degré, etc...[3]

Enfin le problème local, c'est-à-dire savoir que (σ_0, γ_0) est une germe de σ-simplexe sectionnaire au barycentre de Δ_r, est particulièrement simple. En effet, puisque Δ_r est contractile, on a, avec les notations du §2 (cf. (9)) ; une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $(\sigma_0, \gamma_0) \in S_r(\alpha^{k'-1}, I_{k'})$ soit dans l'image de l'application induite par

$$\alpha^{k'+i}_{k'} : J^{k'+i}(V,Z) \to J^{k'}(V,Z)$$

(35) $$\alpha^{k'+i}_{k'} : S_r(\alpha^{k'+i}, I_{k'+i}) \to S_r(\alpha^{k'-1}, I_{k'})$$

$$i = 1,2,3,\ldots$$

est que γ_0 soit une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$E(W_{r,k'}(V,Z)) \subset J^1(\Delta_r, J^{k'}(V,Z)) \quad \text{(cf. (11))}.$$

Remarque . Comme la construction de $E_{r,k}(V,Z)$ et de $W_{r,k}(V,Z)$ est fonctorielle par rapport à V et à Z , alors elle peut se faire évidemment dans un cas plus général. Par exemple, le cas équivariant par un groupe de transformations, le cas où Z est un espace fibré sur X et celui qui dépend d'un espace de paramètres, etc...Ainsi, la méthode que nous allons décrire et qui dépend essentiellement de cette construction, s'applique aussi aux problèmes des solutions périodiques, aux sections d'un espace fibré et aux problèmes de perturbation.

5. Systèmes canoniques associés à D_*

Rappelons qu'une suite de sous-espaces $D_* = (D_k)$ qui vérifie :

$$(36) \qquad D_k \subset J^k(V,Z) \quad \mathrm{Im}\ \alpha^{k+1}{}_k(D_{k+1}) \subset D_k\ ,\ k \geq -1$$

est appelée pro-ensemble de l'espace d'Ehresmann. Fixons-nous un tel ensemble et définissons le système canonique associé à D_* comme suit:

$$(37) \qquad \begin{aligned} E_{r,k}(D_*) &= E_{r,k}(V,Z) \quad (G_r(TD_k) \times D_{k+1}) \\ W_{r,k}(D_*) &= \mathrm{Im}\ \rho(E_{r,k}(D)) \subset W_{r,k}(V,Z) \end{aligned}$$

(cf. (6)') , et notons plus simplement par

$$(37)' \qquad \rho(D_*) : E_{r,k}(D_*) \to W_{r,k}(V,Z)$$

la restriction de ρ à $E_{r,k}(D_*)$ (cf. (19)') . Désignons dans la suite par $S_{r,k}{}^i = S_{r,k}{}^i(D_*)$ une des strates de la stratification canonique de l'application $\rho(D_*)$ dite stratification canonique associée à D_* (cf. §1) . Appelons le complémentaire de $W_{r,k}(D_*)$ dans $W_{r,k}(V,Z)$ le (r,k)-ième trou de D_* , et désignons-le par

$$(38) \qquad T_{r,k} = T_{r,k}(D_*) = W_{r,k}(V,Z) \setminus W_{r,k}(D_*)$$

Ainsi, par définition même de la restriction de $\rho(D_*)$ au-dessus de $S_{r,k}{}^i$ (cf. §1) , on obtient des fibrations surjectives (cf. (32))

$$\rho^i = \rho_{r,k}{}^i ; E_{r,k}{}^i = E_{r,k}(D_*) | S_{r,k}{}^i(D_*) \to S_{r,k}{}^i(D_*)$$

(39)

$$W_{r,k}(V,Z) = \left(\bigcup_i S_{r,k}{}^i(D_*) \right) \cup T_{r,k}(D_*)$$

Ceci nous permet d'introduire une notion d'équivalence entre les pro-ensembles. Il s'agit d'espaces stratifiés ; par exemple $D_*{}^1$ et $D_*{}^2$ sont de même type topologique si les stratifications $\rho(D_*{}^1)$ et $\rho(D_*{}^2)$ sont topologiquement équivalentes pour tout (r,k) . De même, on peut introduire la notion de stabilité de D_*. Maintenant, si D_* est un pro-ensemble de $J^*(V',Z')$ et f une immersion de $J^k(V,Z)$ dans $J^k(V',Z')$, alors f est dite r-admissible par rapport à D_k et D'_k (resp. par rapport aux strates $S_{r,k}{}^i(D_*)$ et $S_{r,k}{}^j(D'_*)$) si f est r-admissible et si $g_r(f)$ est une application stratifiée entre $W_{r,k}(V,Z)$ et $W_{r,k}(V',Z')$ munie des stratifications de D_* et D'_* respectivement (cf. (30)).

D'autre part, le système canonique associé à D_* nous permet d'associer à D_* des invariants à partir de la stratification associée à D_*. Par exemple le nombre de strates, les dimensions des trous, des strates et des fibres ; les degrés des diverses projections, (ρ^i) , les nombres caractéristiques, les classes d'homologie à support fermé dans $H_*(W_*(V,Z);\mathbb{Z})$ représentées par les $S_{r,k}{}^i(D_*)$ sont des invariants numériques ou topologiques du type de D_*.

Nous dirons par la suite que deux plongements σ_o et Y_o (resp. un r-simplexe de $\alpha^{k'-1}$, soit (σ_o, Y_o)) , d'une variété V_o de dimension r dans V et dans $J^{k'}(V,Z)$ respectivement, est $D_{k'}$-admissible si les conditions (32) sont remplies et si l'image de Y_o , $\mathrm{Im}\, Y_o(V)$ est contenue dans $D_{k'}$. Alors, le problème de la recherche d'un relèvement Y_1 de Y_o qui soit $D_{k'}$-admissible se traite comme suit.

D'abord, considérons le cas particulier où l'image de $Y_o{}^\sim$ se trouve dans une seule strate $S_{r,k'}{}^i(D_*)$. Ceci équivaut à dire que Y_o est une solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre associée à $S_{r,k'}{}^i$

(40) $\qquad E(S_{r,k\cdot i}(D_*)) \subset J^1(V_o, J^{k\cdot}(V,Z))$

donc à l'équation (34) (cf. (11)'). Supposons qu'il en soit ainsi ; alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel γ est que le fibré $E_{r,k\cdot i}|V_o$ induit par γ_o de ρ^i (cf. (39)) possède une section différentiable ψ puisque $\rho^{\prime}\cdot\psi$ est un tel relèvement de γ_o (cf. (27)" et (37)).

$$\begin{array}{ccc} E_{r,k\cdot i}(D_*)|V_o & \to & E_{r,k\cdot i}(D_*) \\ \psi \uparrow\downarrow \rho_o{}^i & & \downarrow \rho^i \\ V_o & \to_{\gamma^{\sim}} & S_{r,k\cdot i}(D_*) \end{array} \qquad (40)'$$

Par exemple, si $S_{r,k\cdot o}(D_*)$ est une strate dont la fibre de ρ^o est discrète, alors (40)' sera satisfaite si la première classe d'obstruction associée à la fibration $\rho_o{}^i$, soit $\theta \in H^1(V_o, \pi_1{}^{\sim}(V_o))$, est nulle , où $\pi_1{}^{\sim}(V_o)$ est l'image de $\pi_1(V_o)$ dans le groupe des automorphismes de la fibre de ρ_o par l'application classifiante [13] . Ainsi, on peut toujours relever γ_o s'il satisfait l'équation $E(S_{r,k\cdot o})$ et si V_o est simplement connexe. En particulier, pour qu'un r-simplexe sectionnaire (σ_o, γ_o) , $D_{k\cdot}$-admissible , possède un relèvement γ_1 , $D_{k\cdot+1}$-admissible , il suffit que γ_o soit une solution de l'équation $E(S_{r,k\cdot i}(D))$ $\subset$ $J^1(\Delta_r, J^{k\cdot}(V,Z))$ pour un certain i (cf. (39)).

6. Le gradué associé à D

Etant donné un sous-espace M c $J^{m'}(V,Z)$,désignons par $G_*(M)$ la réunion des $G_i(M)$ qui sont définis comme suit :

$$
\begin{aligned}
&G_i(M) = \operatorname{Im} \alpha_i^{m'}(M) && \text{si } i \leqslant m' \\
&G_{i+1}(M) = e_i^{-1}(J^1(V, Gi(M))) && \text{si } i \geqslant m' ,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

où e_i^{-1} est l'application image réciproque de l'application d'Ehresmann (cf. (4)) appliquée au sous-espace $J^1(V,G_i(M))$ de $J^1(V,J^i(V,Z))$ (cf. (6)') . Il est clair que $G_*(M)$ est un pro-ensemble (cf. (36)) puisque l'on a la commutativité du diagramme ci-dessous

$$
\begin{array}{ccc}
J^{i+2}(V,Z) & \xrightarrow{e_{i+1}} & J^1(V,J^{i+1}(V,Z)) \\
\downarrow & & \downarrow \alpha \\
J^{i+1}(V,Z) & \xrightarrow[e_i]{} & J^1(V,J^i(V,Z))
\end{array}
$$

Fixons-nous un sous-espace D c $J^{k'}(V,Z)$ et introduisons la notion de gradué (resp. pré-gradué) associé à D , soit D_* (resp. D'_*) réunion des D_i (resp. D'_i) , pro-ensemble défini par saturation de G_*

$$
D_i = \{G_i(.\,.\;\; G_j(G_r(G_k(D)) \quad G_r(G_m(G_k(D))))\,.\,.\}
\tag{44'}
$$

(resp. D'_i = intersection pour $j \leqslant k'$ des $G_i(\operatorname{Im} \alpha_j^{k'}(D))$)

et il est clair que l'on a :

$$
D_{k'} \subset D \quad \text{et} \quad D_i \subset D'_i
$$

Cette construction fonctorielle nous permet d'introduire les notions du §5 pour D, et nous dirons simplement "*système canonique* (resp. *stratification canonique*) *associé(e)* à D" au lieu de dire "associé à son gradué D^*".

Supposons maintenant que D soit défini par les zéros d'une fonction différentiable $F : J^{k'}(V,Z) \to R^N$ (ou définie seulement sur un ouvert de $J^{k'}(V,Z)$, pour lequel le raisonnement est le même). Alors $G_{k'+1}(D)$ peut être décrit comme suit. Considérons l'application induite par F, soit

$$J^1F : J^1(V,J^{k'}(V,Z)) \to J^1(V,R^N)$$

et sa composée par l'application d'Ehresmann

$$(44)'' \qquad J^{k'+1}(V,Z) \xrightarrow{e_{k'}} J^1(V,J^{k'}(V,Z)) \xrightarrow{j^1F} J^1(V,R^N)$$

Alors, $G_{k'+1}(D) = (j^1F \cdot e_{k'})^{-1}(0)$. Cette expression, où 0 est la section zéro dans $J^1(V,R^N)$ ne dépend pas du choix de F. Puis dans le cas où Z est une variété algébrique réelle, $G_{k'+1}(D)$ est quasi-linéaire (cf. §1). En effet, ceci est une conséquence du fait que l'application d'Ehresmann $e_{k'}$ induit une application affine entre les fibres

$$\begin{array}{ccc} J^{k'+1}(V,Z) & \to & J^1(V,J^{k'}(V,Z)) \\ {\scriptstyle \alpha^{k'+1}{}_{k'}} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \beta_1} \\ & J^{k'}(V,Z) & \end{array}$$

(cf. (3)). De même pour J^1F entre les fibres de β_1 et $\alpha^1{}_{-1}$

$$\begin{array}{ccc} J^1(V,J^{k'}(V,Z)) & \to & J^1(V,R^N) \\ \downarrow \beta_1 & & \downarrow \alpha^1{}_{-1} \\ J^{k'}(V,Z) & \underset{\alpha^{k'}{}_{-1}}{\to} & V \end{array}$$

Or l'intersection (cf. §1) d' équations quasi-linéaires est encore quasi-linéaire, donc pour le gradué associé D_* de D

$$(45) \qquad \alpha^i{}_{i-1} : D_i \to J^{i-1}(V,Z) \qquad k'+1 \leqslant i$$

les D_i sont des équations quasi-linéaires. D'autre part, on peut remarquer le fait suivant. Soit W c $J^{k'+1}(V,Z)$ une sous-variété $I_{k'+1}$-intégrable ; alors W c $G_{k'+1}(D)$ si et seulement si l'image $\mathrm{Im}\,\alpha(W)$ est contenue dans D et si les formes induites $\alpha^*(dF_i)$ par $\alpha = \alpha^{k'+1}{}_{k'}$ sont nulles sur W, pour $F = (F_1, F_2, \ldots, F_N)$. Dans une carte locale $J^{k'+1}(R^n,R^m)$ de $J^{k'+1}(V,Z)$, $G_{k'+1}(D)$ s'écrit explicitement comme suit : en remplaçant dans

$$\alpha^*(dF_i) = \sum_j \frac{\delta F_i}{\delta x_j}\, dx_j + \sum_\mu \frac{\delta F_i}{\delta_\mu}\, du_\mu + \sum_r \frac{\delta F_i}{\delta \alpha^\mu{}_{[j]},_r}\, d\alpha^\mu{}_{[j]}$$

où $j = 1,\ldots,n$, $\mu = 1,\ldots,m$, $i = 1,\ldots,N$ et $2 \leqslant r \leqslant k'$, les termes $d\alpha^\mu{}_{[j]}$ par la formule (2) , puis en regroupant les résultats obtenus suivant les dx_i , alors on obtient l'expression suivante (cf. (23))

$$(45)' \qquad A_1{}^i(x,u,\alpha^\mu{}_{[j]},{}_r)dx_1 + \ldots + A_n{}^i(x,u,\alpha^\mu{}_{[j]},{}_r)dx_n$$

où $\mu = 1,\ldots,m$, $i = 1,\ldots,N$ et $1 \leqslant r \leqslant k'+1$.

Alors les $A_p{}^i$ sont des fonctions définies sur $J^{k'+1}(R^n,R^m)$ de même espèce (c'est-à-dire algébriques, analytiques, etc...) que les F_i , et leur zéro commun n'est autre que $G_{k'+1}(D)$. Autrement dit, en remplaçant les $\alpha^\mu{}_{[j=]}$ par

$$\delta^r u_\mu \,/\, \delta x_{j_0}^{e_0} \ldots \delta x_{j_\lambda}^{e_\lambda}$$

dans $A_p{}^i$, on obtient avec F le système d'équations aux dérivées partielles $G_{k'+1}(D)$. En particulier, dans le cas où V et Z sont des variétés algébriques réelles et D est semi-algébrique , alors le théorème de Tarski-Sidenberg montre que le gradué associé à D , soit D_*, est encore semi-algébrique, i.e. chacun des D_i (dont D_* est la réunion) est une sous-variété semi-algébrique de $J^i(V,Z)$.

Enfin, considérons maintenant un $(n-1)$-simplexe sectionnaire (σ,Υ) , qui soit $I_{k'+1}$-intégrable,de $J^{k'+1}(R^n,R^m) \to R^n$ tel que $\Upsilon' = \alpha^{k'+1}{}_{k'} \cdot \Upsilon$ soit D-admissible (cf. §5) . Supposons de plus (ce n'est évidemment pas une restriction) que $\sigma : \Delta_{n-1} \to R^n$ s'écrive de la manière suivante pour $\chi = (\chi_2 , \ldots , \chi_n) \in \Delta_{n-1}$:

$$x_1 = f(\chi_2,\ldots\chi_n) \quad , \quad x_2 = \chi_2, \ \ldots , \ x_n = \chi_n \ .$$

Alors pour que (σ,Υ) soit $G_{k'+1}(D)$-admissible, il suffit que Υ vérifie

(45)" $\qquad A_1{}^i \cdot \Upsilon = 0 \qquad$ pour $\ i = 1,2,\ldots,N$.

En effet, comme $F\cdot\Upsilon' = 0$, on a $d(F_i\cdot\Upsilon') = \Upsilon^*(\alpha^*(dF_i)) = 0$, pour $i = 1,\ldots,N$, sur Δ_{n-1} , donc

$$\sum_{j=2}^{n} \left(A_1{}^i \frac{\delta f}{\delta \chi_j} + A_j{}^i\right) d\chi_j = 0 \quad .$$

Ainsi , $A_1{}^i \cdot Y = 0$ entraîne que $A_j{}^i \cdot Y = 0$ pour tout $j = 1,..,n$. En particulier , dans le cas où D est quasi-linéaire, c'est-à-dire quand F s'écrit

$$(46) \qquad \sum_{k'} B^{\mu,i}{}_{[j-],k'} \cdot \alpha^{\mu}{}_{[j-]} = G_i \quad , \quad i = 1,...,N$$

où $B^{\mu,i}{}_{[j-],k'}$ et C_i sont des fonctions définies sur l'espace $J^{k'+1}(R^n,R^m)$, alors (45)" est donnée par

$$(46)' \qquad \sum_{k'} B^{\mu,i}{}_{[j-],k'} \cdot \alpha^{\mu}{}_{[j-]} = C_i{}^{\sim} \quad , \quad i = 1,...,N \ ,$$

où les $C_i{}^{\sim}$ représentent des fonctions définies sur l'espace $J^{k'}(R^n,R^m)$.

7. Stratification canonique d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Nous allons indiquer quelques propriétés de la stratification canonique [27] d'une équation $D \subset J^{k'}(V,Z)$ par rapport à l'application canonique (cf. (19)')

$$g : W_{r,k+1}(V,Z) \to W_{r,k}(V,Z) ,$$

Nous nous bornerons au cas où $n \geq 3$, $k' \geq 1$, $r = n-1$, et où Z est une variété algébrique réelle . Les autres cas (resp. stratification secondaire) se traitent de la même manière.

Désignons par $S^q_{r,k} = S^q_{r,k}(D)$ la strate de la stratification canonique de D pour laquelle la fibre de l'espace fibré suivant $\rho^q_{r,k} : E^q_{r,k} \to S^q_{r,k}$ est de dimension q. Une strate $S^q_{n-1,k'-1}$ sera dite régulière si sa fibre $F^q_{n-1,k'-1}$ est une variété différentiable ; une strate $S^t_{n-1,k'-1}$ sera dite triviale si en chaque point de $E^t_{n-1,k'-1}(D)$, l'intersection de la fibre de

$$E_{n-1,k'-1} \xrightarrow{\rho} W_{n-1,k'-1}$$

avec $G^*_{n-1}(TD_{k'-1}) \times_{J^{k'-1}(V,Z)} D_{k'}$ est transversale, c'est-à-dire que le seul vecteur le long de la fibre de ρ tangent à $D_{k'}$ est le vecteur nul. Dans le cas où $D_{k'}$ est quasi-algébrique , $S^t_{n-1,k'-1}$ correspond à la strate générique de la stratification standard (cf. Appendice) . En particulier

$$E^t_{n-1,k'-1} \to S^t_{n-1,k'-1}$$

est un revêtement. Alors on a les propriétés suivantes : l'image inverse par g , soit $g^{-1}(S^q_{n-1,k})$ vérifie

$$g^{-1}(S^q_{n-1,k}) \subset S^q_{n-1,k+1} \cup T_{n-1,k+1} \tag{47}$$

pour tout q et $k \geq k'$, et si D est quasi-linéaire, ceci est valable pour $k = k'-1$. Dans le cas où la codimension de

$E_{n-1,k'-1}(D)$ dans $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(V,Z) \quad G^*_{n-1}(TD_{k'-1}))$ est égale à la dimension de Z , c'est-à-dire m , on a alors

$$(47)' \qquad g^{-1}(S^t_{n-1,k}) = S^t_{n-1,k+1} \qquad k \geq k' ,$$

D'autre part, si $S^t_{n-1,k'-1}$ est régulier, on a

$$(47)'' \qquad g^{-1}(S^t_{n-1,k'-1}) \subset S^t_{n-1,k'} \cup T_{n-1,k'} ,$$

Enfin, dans le cas où la codimension de $E_{n-1,k'-1}(D)$ dans $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(V,Z) \cap G^*_{n-1}(TD_{k'-1}))$ est égale à m , on a

$$(47)''' \qquad g^{-1}(S^t_{n-1,k'-1}) = S^t_{n-1,k'}$$

Remarquons d'abord qu'il suffit d'établir ces propriétés dans la carte U_1 de $G^*_{n-1}(TJ^k(R^n, R^m))$ formée par les couples $\theta = (\chi,\tau)$ où

$$\chi = (x_1,..,x_n,u_1,..u_m,\alpha^\mu_{[j=1],1},...,\alpha^\mu_{[j=1],k}) \in J^k(R^n,R^m)$$

(cf. (23)) et où τ est un (n-1)-plan engendré par les n-1 vecteurs

$$v_r = (\delta_r,0,...,0,1,0,...,0,Y_0(r); Y^\mu_{[j=1],1}(r),...,Y^\mu_{[j=1],k}(r))$$
$$r = 2,3,...,n$$

avec $(\delta_r,0,...,0,1,0,...,0) \in R^n$ de 1 à la r-ième coordonnée. Soit donc

$$\theta_0 = (\chi_0,\tau_0) \in S^t_{n-1,k} \subset W_{n-1,k}(R^n,R^m) \text{ et}$$

$$t_0 \in W_{n-1,k+1}(D) \text{ tels que } g(t_0) = \theta_0 .$$

Or la fibre au-dessus de θ_0 de l'espace fibré

$$\rho_k : E^t_{n-1,k} \to S^t_{n-1,k}$$

est en correspondance bi-univoque (cf. (2) et (18)) avec les $\beta^{\mu}_{[j-1],k+1}$ (cf. (23)) qui vérifient les deux systèmes d'équations

$$(48)_k \qquad Y^{\mu}_{j_0 e_0 \ldots j_\lambda e_\lambda}(r) = \beta^{\mu}_{1 j_0 e_0 \ldots j_\lambda e_\lambda} \cdot \delta_r + \beta^{\mu}_{j_0 e_0 \ldots j_\lambda e_\lambda}$$

où $Y^{\mu}_{j_0 e_0 \ldots j_\lambda e_\lambda}(r)$ est le dernier système de coordonnées de V_r , i.e. $Y^{\mu}_{[j-1],k}(r)$,
et le système d'équations qui définit D_{k+1} (cf. (46))

$$(48) \qquad \sum_{\substack{|e|=k+1 \\ \mu}} B^{\mu,i}_{j_0 e_0 \ldots j_\lambda e_\lambda} \cdot \beta^{\mu}_{j_0 - 0 \ldots j_\lambda e_\lambda} = c_i \quad , \; i = 1,..N$$

où $1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_\lambda \leq n$, $|e| = e_0 + \ldots e_\lambda$, $\mu = 1,\ldots,m$.
Puisque $k \geq k'$, D_{k+1} est quasi-linéaire. Les $B^{\mu,i}_{j_0}$ et C_i sont des fonctions définies sur $J^k(R^n,R^m)$, on prendra leur valeur au point θ_0 . D'après (27) et $(48)_k$, on peut déduire

$$(48)'_k \qquad \beta_{[j-1]} = P_{[j-1]}(\delta) \cdot \beta^{\mu}_{1 k+1} + Q_{[j-1]}(\delta, Y)$$

où P (resp. Q) est un polynôme en $\delta_2,\ldots,\delta_n$ (resp. $\delta_2,\ldots,\delta_n$, $Y^{\mu}_{[j-1],k}(2),\ldots,Y^{\mu}_{[j-1],k}(n)$) qui vérifiera la relation

$$(48)'' \qquad P_{1 j_0 e_0 \ldots j_\lambda e_\lambda} = P_{j_0 e_0 \ldots j_\lambda e_\lambda} \; .$$

Donc $(48)_k$ et (48) sont des relations équivalentes à l'équation suivante

$$(49) \qquad \sum_{\mu} B^{\mu,i} \cdot \beta^{\mu}_{1 k+1} = C'_i \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

où

$$B^{\mu,i} = \sum_{|e|=k+1} B^{\mu}_{j_0^{e_0}\ldots j_\lambda^{e_\lambda}} P_{j_0^{e_0}\ldots j_\lambda^{e_\lambda}}(\delta)$$

D'autre part, remarquons que dans la carte U_1, (45)" est valable. Donc la fibre au-dessus de t_0 de l'application

$$\rho : E_{n-1,k+1}(D) \to W_{n-1,k+1}(D)$$

(cf. (37)) est en correspondance bi-univoque avec les solutions $r^{\mu}_{[j=],k+2}$ du système d'équations

$$\sum_{|e|=k+1,\ \mu} B^{\mu,i}_{j_0^{e_0}\ldots j_\lambda^{e_\lambda}} \cdot r^{\mu}_{1 j_0^{e_0}\ldots j_\lambda^{e_\lambda}} = C_i^{\sim} \qquad i = 1,2,..,N$$

et du système $(48)_{k+1}$ (cf. $(46)'_{k+1}$) . Or $(48)'_{k+1}$ pour les $r^{\mu}_{[j=],k+2}$ ainsi que (48)" entraînent

$$\sum B^{\mu}_{[j^i=]} \cdot P_{1[j=]} = \sum B^{\mu}_{[j^i=]} \cdot P_{[j=]} = B^{\mu,i}$$

Donc la fibre au-dessus de t_0 est en correspondance bi-univoque avec les solutions r^{μ}_{1k+2} du système

(49)' $$\sum_{\mu} B^{\mu,i}\, r^{\mu}_{1k+2} = C'_i{}^{\sim} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

Ainsi (49) et (49)' sont définies par la même $m \times N$ matrice $(B^{\mu,i})$. De là on déduit ou bien que la dimension de l'espace des solutions de (49)' est égale à celle des solutions de (49) c'est-à-dire $t_0 \in S^t_{n-1,k+1}$, ou bien que (49)' n'a pas de solutions, et on a alors $t_0 \in T_{n-1,k+1}$. D'où l'on obtient la propriété (47) . Dans le cas où $m = N$ et où le rang de la

matrice $(B^{\mu,i})$ est maximal, (49)' possède toujours une solution unique et on obtient la seconde égalité de (47)" . Les autres propriétés s'établissent de la même manière.

Remarque 1.

Dans le cas où D est quasi-linéaire, on a

$$S^t_{n-1,k'-1} = S^o_{n-1,k'-1} ,$$

et

$$\rho : E^o_{n-1,k'-1}(D) \to S^o_{n-1,k'-1}(D)$$

est bijectif. Si de plus la codimension de $E_{n-1,k'-1}(D)$ dans $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(V,Z) \quad G^*_{n-1}(TD_{k'-1}))$ est égale à la dimension de Z , alors $S^o_{n-1,k'-1}(V,Z)$ est un ouvert, et s'il n'est pas vide il est dense dans $W_{n-1,k'-1}(V,Z)$. Remarquons cependant qu'il existe des équations quasi-linéaires qui ne possèdent pas une telle strate, autrement dit $S^o_{n-1,k'-1}$ peut être vide [9].

Remarque 2.

Dans le cas où D est quasi-algébrique de degré algébrique d fini, la stratification canonique de $W_{n-1,k'-1}(V,Z)$ est induite (localement) par une application de $W_{n-1,k'-1}(V,Z)$ dans la stratification standard de degré d (voir l'appendice) . Comme toutes les fibres de la stratification standard sont des variétés lisses, alors toutes les strates de $W_{n-1,k'-1}(V,Z)$ sont régulières, donc satisfont (47)' . De même, on déduit que le nombre des strates est (localement) fini, si celui de la stratification standard est fini .

Remarque 3.

Les propriétés (47) sont déduites essentiellement à partir de la structure de l'idéal de Cartan-Ehresmann . Il est peu probable qu'on puisse les généraliser au cas d'un idéal différentiel quelconque. Ainsi, il semble que les équations aux dérivées partielles constituent un moyen d'étudier le problème d'intégrabilité d'un système différentiel, mais l'inverse n'est pas vrai contrairement à ce que certains auteurs prétendent !

Remarque 4.

Dans le cas quasi-linéaire, $S^0_{n-1,k'-1}$ ne dépend que des fibres de $\alpha|D_{k'} : D_{k'} \to J^{k'-1}(V,Z)$, mais ceci n'est pas vrai pour les autres strates , i.e. le symbole principal classique ne suffit pas à déterminer les $S^i_{n-1,k'-1}$, pour i différent de 0 , même dans le cas quasi-linéaire.

Remarque 5.

Enfin, les invariants et leurs classifications que l'on peut associer à la stratification canonique d'un pro-ensemble (cf. §5) se généralisent évidemment à un système d'équations aux dérivées partielles, e.g. le système d'équations D est dit elliptique (resp. faible) (cf. §9) si la stratification de

$$E_{n-1,k'-1}(D) \to W_{n-1,k'-1}(V,Z)$$

consiste en une seule strate

$$S^t_{n-1,k'-1} = W_{n-1,k'-1}(V,Z)$$

(resp. $W_{n-1,k'-1}(V,Z) = S^t_{n-1,k'-1} \cup T_{n-1,k'-1}$) .

8. Equations secondaires d'un système d'équations aux dérivées partielles

Etant données une variété différentiable V_o de dimension r, puis $W_{r,k}(V,Z) \subset G_r(TJ^k(V,Z))$ une variété du système canonique de V dans Z (cf. §4), et $D \subset J^{k'}(V,Z)$, on leur associe (cf. §3) une équation unique du premier ordre (cf. §11)

$$\begin{aligned} E_o &= E(W_{r,k}(V,Z)) \subset J^1(V_o,J^k(V,Z)) \\ E_o(D) &= E(W_{r,k}(D)) \subset J^1(V_o,J^k(V,Z)) \end{aligned} \tag{50}$$

qu'on appelle (r,k)-ième équation au départ (resp. de D). Ainsi $Y : V_o \to J^k(V,Z)$ est une solution de E_o si et seulement si Y est une immersion et $\mathrm{Im}\, Y^{\sim} \subset W_{r,k}(V,Z)$ (resp. $\mathrm{Im}\, Y^{\sim} \subset W_{r,k}(D)$). De même l'équation associée à V_o et à une strate $S^q_{r,k} = S^q_{r,k}(D)$ de la stratification canonique (resp. secondaire) d'une équation aux dérivées partielles $D \subset J^{k'}(V,Z)$, soit

$$E_1 = E(S^q_{r,k}(D)) \subset J^1(V_o,J^k(V,Z)) \tag{50}'$$

est appelée équation secondaire (resp. de deuxième espèce) de D par rapport à la strate $S^q_{r,k}$. Il est clair que $E_1 \subset E_o$ et une solution Y de E_1 vérifient en outre $\mathrm{Im}\, Y^{\sim} \subset S^q_{r,k}(D)$. On définit de la même manière l'équation du (r,k)-ième trou (resp. de seconde espèce) de D. Soit Y une solution de E_1 et supposons en plus que Y soit le relèvement d'un plongement $\sigma : V_o \to V$ le long de $\alpha : J^k(V,Z) \to V$. Considérons une section ψ' de l'espace fibré induite par $Y^{\sim}$ (cf. (40)' et (19))

$$
\begin{array}{lccc}
 & E^q_{r,k}(D)|V_o & \to & E^q_{r,k}(D) \subset E_{r,k}(V,Z) \\
(50)'' & \psi' \uparrow \downarrow \rho^q|V_o & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow \rho' \\
 & & \gamma^{\sim} & \\
 & V_o & \to & S^q_{r,k}(D) \qquad J^{k+1}(V,Z)
\end{array}
$$

alors l'application $\gamma' = \rho' \cdot \psi' : V_o \to J^{k+1}(V,Z)$ est encore un relèvement de σ . Ainsi on peut recommencer ce processus qui est particulièrement simple lorsque $V_o = \Delta_{n-1}$. En effet, remarquons d'abord qu'un simplexe sectionnaire pour $\alpha : J^k(V,Z) \to V$, solution de E_o (resp. E_1) implique que γ est I_k-intégrable (cf. (9)) (resp. D_k-admissible) (cf. §5) . D'autre part, le fait que Δ_{n-1} soit contractile fait que $\rho^q|\Delta_{n-1}$ possède toujours une section ψ' ; et on peut montrer que $\gamma' = \rho' \cdot \psi'$ vérifie encore $E(W_{n-1,k+1}(V,Z))$. Fixons-nous un simplexe (σ,γ) D_k-admissible de $\alpha : J^k(V,Z) \to V$, qui soit une solution de $E(S^q_{n-1,k}(D))$, où $k \geq k'$ et q est la dimension de la fibre de

$$\rho^k{}_{n-1,k} : E^q_{n-1,k} \to S^q_{n-1,k} ,$$

alors (cf. (47)) ou bien il existe une section ψ' telle que $\gamma' = \rho' \cdot \psi' \cdot \gamma$ soit une solution de l'équation $E(S^q_{n-1,k+1}(D))$, ou bien $\rho' \cdot \psi \cdot \gamma^{\sim}$ est une solution de l'équation du $(n-1,k+1)$-ième trou pour toutes les sections ψ . Dans le premier cas, on pourrait continuer ce processus. Concernant le second, il est impossible de continuer parce qu'il n'existe aucun simplexe (σ,γ') D_{k+1}-admissible qui soit un relèvement de (σ,γ) . Autrement dit, soit $\gamma^i = \rho' \cdot \psi^i \cdot \gamma^{i-1} : \Delta_{n-1} \to J^{k+i}(V,Z)$ une solution de l'équation $E(S^q_{n-1,k+i})$. Alors les sections ψ^{i+1} de l'espace fibré

$$E^q_{n-1,k+i}(D)|\Delta_{n-1} \to \Delta_{n-1}$$

se divisent en deux sortes: les sections telles que $\gamma^i = \rho' \cdot \psi^{i+1} \cdot \gamma^i$ soit une solution de $E(S^q_{n-1,k+i+1})$ et celles de l'équation du $(n-1,k+i+1)$-ième trou de D . Dans le premier cas, (σ,γ^{i+1}) est un simplexe D_{k+i+1}-admissible qui est un relèvement de (σ,γ^i) avec $\operatorname{Im} \gamma^{i+1} \subset S^q_{n-1,k+i+1}$, et

dans le second cas, un relèvement D_{k+i+1}-admissible de (σ,Y^i) est impossible.

Revenons au cas général d'une variété V_o . Il faut d'abord étudier les diverses obstructions topologiques, e.g. le degré (cf. §2) , la classe d'Euler, etc...dont l'annulation entraîne l'existence d'une section C^∞ de l'espace fibré

$$E^{\Box}_{r,k}(D)|V_o \to V_o \ .$$

Mais les considérations analytiques, c'est-à-dire les raisonnements sur les équations secondaires, sont exactement les mêmes que dans le cas où $V_o = \Delta_{n-1}$.

Dans le cas où Im $Y^\sim$ n'est pas contenue dans une seule strate de la stratification canonique de D ou encore V_o est une variété avec singularités, e.g. variété stratifiée [31] , alors l'équation secondaire de deuxième espèce intervient, i.e. le cas avec contraintes (cf. §3) . Au cas où il y aurait des difficultés pour résoudre les équations secondaires E de D , alors on peut considérer l'équation secondaire de E qu'on appelle équation tierce de D . Il s'agit d'un système à (n-2)-variables et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on obtienne un système d'équations différentielles ordinaires dont dépend l'existence d'un relèvement D-admissible de (σ,Y) (cf. 10).

9. Problème de Cauchy et solution locale

Le problème de Cauchy sur une variété analytique complexe a été étudié dans [21] . Nous nous occupons ici du cas réel. Donnons d'abord quelques précisions sur les notions bien connues. Soient V et Z deux variétés indéfiniment différentiables et $B \subset J^{k''}(V,Z)$, $D \subset J^{k'}(V,Z)$, $k'' \leq k'$, deux sous-espaces différentiables, c'est-à-dire localement définis par des équations et inéquations d'un nombre fini de fonctions différentiables. Soit V_o une variété stratifiée de dimension r (e.g. variété à coins [11] , variété algébrique réelle avec singularités) ; $r < n$ = dimension de V . Désignons par $P(V_o,V)$ l'espace des plongements indéfiniment dérivables $\sigma : V_o \to V$ muni de la topologie C^∞ (resp. C^k) [4] et désignons par $P(V_o,V) \times_\alpha P(V_o,J^{k''}(V,Z))$ le sous-espace du produit formé par les couples (σ,Υ) tels que $\alpha\text{-}\Upsilon = \sigma$, $\mathrm{Im}\,\Upsilon \subset B$. Ainsi $\mathrm{Im}\,\Upsilon$ est le lieu géométrique de contrainte et $\mathrm{Im}\,\Upsilon$ la condition initiale sur $\mathrm{Im}\,\sigma$. Alors le problème de Cauchy local (resp. global) pour (σ,Υ) consiste à trouver une application u définie dans un voisinage tubulaire de $\mathrm{Im}\,\sigma \subset V$ à valeur dans Z tel que $\mathrm{Im}\, j^{k'}u \subset D$ et $j^{k''}u\text{-}\sigma = \Upsilon$. Un tel problème est dit *"bien posé"* ou *"non-caractéristique"*, si un tel u existe et est unique au sens du germe près de $\mathrm{Im}\,\sigma$, et si de plus il vérifie la condition de stabilité , c'est-à-dire que *"l'existence et l'unicité"* restent valables pour les (σ',Υ') suffisamment voisins de (σ,Υ) par rapport à la topologie de $P(V_o,V) \times_\alpha P(V_o,J^{k''}(V,Z))$.

Remarquons d'abord que l'existence de u avec $j^{k''}u\text{-}\sigma = \Upsilon$ implique $\Upsilon^*\omega = 0$ pour tout $\omega \in I_{k''}$. Il s'agit d'une conséquence de la compatibilité des dérivées partielles, et $\mathrm{Im}\, j^{k'}\Upsilon \subset D$ entraîne $\mathrm{Im}\,\Upsilon \subset D_{k''}$. Donc l'espace qu'on doit considérer

$$P(V_o,V) \times_D P(V_o,J^{k''}(V,Z)) \subset P(V_o,V) \times_\alpha P(V_o,J^{k''}(V,Z))$$

est le sous-espace localement fermé formé par des couples (σ,Υ) $D_{k''}$-admissibles (cf. §5) et solutions de l'équation de départ $E(W_{r,k''}(V,Z))$. Ainsi la condition de stabilité dans la

définition du problème bien posé est, elle aussi, considérée par rapport à la topologie de ce sous-espace.

Maintenant nous allons étudier le cas :

$$r = n-1 \quad , \quad k'' = k'-1, \text{ et } \quad B = J^{k'-1}(V,Z).$$

Les autres cas se présentent de la même manière. Prenons une triangulation de V_o compatible [30] avec la stratification induite de $Y^{\sim}$ par la stratification canonique de D sur $W_{n-1,k'-1}(V,Z)$. Alors, du fait que l'intérieur d'un simplexe d'une telle triangulation se trouve dans une seule strate, on peut ramener notre étude aux cas suivants : celui d'un seul simplexe sectionnaire $(\sigma,Y) \in P(\Delta_{n-1},V) \times_D P(\Delta_{n-1},J^{k'-1}(V,Z))$ et celui de deux tels simplexes ayant une face en commun (voir (41)) . Nous nous bornerons ici au premier cas, et rédigerons la suite lorsque la publication de celui-ci sera acceptée. Remarquons les faits suivants.

(51)

Soit Z une variété algébrique de dimension m , D quasi-linéaire, la codimension de $E_{n-1,k'-1}(D)$ dans $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(V,Z) \quad G^*_{n-1}(TD_{k'-1}))$ est égale à m et $D_{k'-1} = J^{k'-1}(V,Z)$. Alors, pour qu'un simplexe sectionnaire

$$(\sigma,Y) \in P(\Delta_{n-1},V) \times_D P(\Delta_{n-1},J^{k'-1}(V,Z))$$

avec

$$\text{Im } Y^{\sim} \subset S^q_{n-1,k'-1} \quad \text{(cf. §7)}$$

soit "un problème de Cauchy bien posé" , il faut que $q = 0$.

(51)'

Supposons que V et Z soient des variétés analytiques réelles , D semi-analytique, telles que la codimension de $E_{n-1,k'-1}(D)$ dans $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(V,Z) \quad G^*_{n-1}(TD_{k'-1}))$ soit égale à la dimension de Z . Soit (σ,Y) un simplexe sectionnaire analytique appartenant à

$$P(\Delta_{n-1},V) \times_D P(\Delta_{n-1},J^{k'-1}(V,Z)) \ .$$

Alors $\text{Im } Y^{\sim}$ est contenue dans la strate triviale $S^t_{n-1,k'-1}(D)$ (cf. §7) , et cela entraîne qu'il existe exactement d fonctions u analytiques définies dans un voisinage tubulaire de

Im σ c V à valeur dans Z tel que $j^{k'}u$ c D et aussi $j^{k'-1}u\cdot\sigma = Y$, où d est le degré du revêtement

$$E^{t}_{n-1,k'-1}(D) \to S^{t}_{n-1,k'-1}(D) \quad (cf.\ §7) ,$$

De plus , cette propriété est stable, c'est-à-dire que pour de tels simplexes sectionnaires (σ',Y') suffisamment voisins de (σ,Y) dans la topologie C^{∞} de l'espace des plongements $P(\Delta_{n-1},V) \times_D P(\Delta_{n-1},J^{k'-1}(V,Z))$, il existe exactement d solutions u' vérifiant $j^{k'}u'$ c D et $j^{k'-1}u'\cdot\sigma' = Y'$.

En particulier, on en déduit le fait suivant. Pour un D quasi-linéaire tel que $D_{k'-1} = J^{k'-1}(V,Z)$, la codimension de $E_{n-1,k'-1}(D)$ dans $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(D) \cap G^{*}_{n-1}(TD_{k'-1}))$ étant égale à la dimension m de Z , alors un simplexe (σ,Y) élément de $P(\Delta_{n-1},V) \times_D P(\Delta_{n-1},J^{k'-1}(V,Z))$ est un "problème de Cauchy bien posé" pour D si et seulement si Im $Y^{\sim}$ c $S^{0}_{n-1,k'-1}$.

La formule (51) est une conséquence immédiate du fait que les strates $S^{q}_{n-1,k'-1}$, q non nul , sont contenues dans l'adhérence du (n-1,k'-1)-ième trou de D :

$$S^{q}_{n-1,k'-1} \subset T_{n-1,k'-1} \subset W_{n-1,k'-1}(V,Z) .$$

Pour (51)' , remarquons d'abord que chaque section ψ^{0} du revêtement trivial $E^{t}_{n-1,k'-1}(D)|\Delta_{n-1} \to \Delta_{n-1}$ (cf. (50)") définit une application $Y' = \rho'\cdot\psi^{0} : \Delta_{n-1} \to J^{k'}(V,Z)$ telle que Im $Y'^{\sim}$ c $S^{0}_{n-1,k'}$ (cf. (47)") . Et puis le fait que

$$E^{0}_{n-1,k'+i-1} \xrightarrow{\sim} S^{0}_{n-1,k'+i-1} \quad , i \geq 1$$

soit un isomorphisme entraîne que

$$\psi^{i} : \Delta_{n-1} \to E^{0}_{n-1,k'+i-1}(D)|\Delta_{n-1}$$

en est un aussi, d'où l'on tire

$$Y^{i+1} = \rho'\cdot\psi^{i} : \Delta_{n-1} \to J^{k'+i}(V,Z)$$

tel que Im Y^{i} c $D_{k'+i-1}$ et Im $Y^{i\sim}$ c $S^{0}_{n-1,k'+i-1}$. Alors les Y^{i} nous permettent d'écrire la solution formelle u dans

une carte locale et au voisinage d'un $x^o = (x^o_1 , \ldots , x^o_n) \in \mathrm{Im}\ \sigma$ de la manière suivante:

$$u_\mu(x_1,\ldots,x_n)$$

(51)" $$=$$

$$\sum \frac{1}{e_o!\ldots e_\lambda!}\, a^\mu_{j_o e_o,\ j_\lambda e_\lambda} (x_{j_o}-x^o_{j_o})^{e_o}\ldots(x_{j_\lambda}-x^o_{j_\lambda})^{e_\lambda}$$

$$\mu = 1,\ldots,m\ .$$

où les $a^\mu_{j\alpha} \in R$ sont données par les coordonnées de Υ (cf. 6.1 , (25)') de la façon suivante :

$$a^\mu_{j\alpha} = \begin{cases} \Upsilon^\mu_{j\alpha}(\chi^o) & \text{si } |\alpha| \leq k'-1 \\ \Upsilon^{i\ \mu}_{j\alpha}(\chi^o) & \text{si } |\alpha| = k'+i-1\ ,\ i \geq 1 \end{cases}$$

où $\sigma(\chi^o) = x^o$. Ensuite , la généralisation du théorème de Cauchy-Kowalevska par Petrowski [21] au cas d'une hypersurface entraîne la convergence de (51)" , donc l'existence de d solutions analytiques dans un voisinage tubulaire de $\mathrm{Im}\ \sigma$. Enfin la stabilité est une conséquence du fait que $S^t_{n-1,k'-1}$ est un ouvert de $W_{n-1,k'-1}(V,Z)$, et que l'application

$$P(\Delta_{n-1},V) \times_D P(\Delta_{n-1},J^{k'-1}(V,Z)) \to P(\Delta_{n-1},W_{n-1,k'-1}(V,Z))$$

qui à (σ,Υ) fait correspondre $\Upsilon^\sim$, est une application continue.

Rappelons que les (σ,Υ) qui vérifient l'inclusion $\mathrm{Im}\ \Upsilon^\sim \subset S^t_{n-1,k'-1}$ sont en correspondance biunivoque avec les solutions de l'équation secondaire $E(S^t_{n-1,k'-1})$ par rapport à la strate $S^t_{n-1,k'-1}$ (cf. §8 (50)') , équation du premier ordre avec une variable de moins que D . Ainsi, en résolvant l'équation $E(S^t_{n-1,k'-1})$, nous obtiendrions tous les germes des

hypersurfaces σ ainsi que les conditions initiales Y définies sur ces hypersurfaces, pour lesquels le théorème de Cauchy-Kowalevska s'applique . Ainsi, nous ne suivrons pas l'idée de Sophus Lie qui est de chercher des transformations qui pourraient transformer D en conditions particulières concernant σ et Y dans l'énoncé de ce théorème [14] .

Dans le cas d'une variété analytique réelle V_o de dimension n-1, et où (σ,Y) est un couple de plongements analytiques : $(\sigma,Y) \in P(V_o,V) \times_D P(V_o,J^{k'-1}(V,Z))$ avec $\mathrm{Im}\, Y^{\sim} \subset S^t_{n-1,k'-1}$, alors sous les mêmes hypothèses (51)' reste valable , si et seulement si la première classe d'obstruction (cf. §5) du revêtement $E^t_{n-1,k'-1}(D)|V_o \to V_o$ est nulle . (Evidemment ceci est vrai si D est quasi-linéaire) L'exemple montre que, même pour un D quasi-linéaire, l'hypothèse sur la codimension est nécessaire pour que (51)' soit valable. D'ailleurs si la codimension de $E_{n-1,k'-1}(D)$ dans $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(V,Z) \cap G^*_{n-1}(TD_{k'-1}))$ est strictement plus grande que la dimension de Z , il y aura généralement des ramifications quand $\pi_1(V_o)$ ne sera pas réduit à 0 .

Revenons aux mêmes hypothèses de (51)' et considérons le cas : $\mathrm{Im}\, Y' \subset S^q_{n-1,k'}$, q non nul , donc $\mathrm{Im}\, Y^{\sim}$ n'est pas contenu dans $S^t_{n-1,k'-1}$ (cf. (47)''') . Alors on peut construire le Y^3 seulement quand on peut choisir une section ψ' de l'espace fibré trivial induit par $Y'^{\sim}$ (cf. (50)") de telle sorte que $Y^2 = \rho' \circ \psi' : \Delta_{n-1} \to J^{k'+1}(V,Z)$ soit une solution de l'équation $E(S^q_{n-1,k'+1})$ pour que l'intersection de $\mathrm{Im}\, Y^{2\sim}$ et de $T_{n-1,k'+1}$ soit vide (cf. (47)') , de même pour les Y^{i+1} , $i \geq 1$. Donc il y aura une infinité d'équations secondaires $E(S^q_{n-1,k'+i})$ à vérifier et qui sont nécessaires pour que Y soit prolongeable à une solution de D . Si tel est le cas, alors on obtient (cf. (51)") une solution formelle seulement. En effet, l'auteur n'a pu établir de théorie des séries majorantes dans ce cas-là . L'exemple montre d'une part qu'il y a des cas où manifestement on a une infinité d'équations secondaires à vérifier [25] , [23] , et d'autre part qu'une partie des solutions formelles est convergente tandis que l'autre est divergente [8] .

Dans le cas d'une variété analytique réelle V_o de dimension n-1 , si (σ,Y) est un couple de plongements analytiques appartenant à $P(V_o,V) \times_D P(V_o,J^{k'-1}(V,Z))$, avec

Im $\tilde{Y}$ c $S^q_{n-1,k'-1}$, et q différent de t , alors pour assurer que l'espace fibré

$$E^q_{n-1,k'-1}(D) \xrightarrow{\rho} W^q_{n-1,k'-1}(D)$$

possède une section ψ' (condition nécessaire et suffisante pour que Y admette un relèvement intégrable dans $D_{k'}$) , il faut d'abord étudier les obstructions topologiques de ρ . En particulier, dans le cas où $\pi_1(V_o) = 0$ il faut que $d_r(\theta) = 0$ [28] pour $r \geq 2$ (cf. §2) . Dans le cas où $\pi_1(V_o)$ n'est pas nul, les études de [19] sont évidemment très utiles pour ce problème. Comme q est différent de t , alors il faut que $\tilde{Y}'$ vérifie l'équation secondaire de sorte que

$$\text{Im } \tilde{Y}' \subset W^q_{n-1,k'}(D) \ ,$$

et ainsi de suite ... De là on voit le lien étroit entre la topologie et le problème caractéristique de Cauchy, i.e. quand q est différent de t .

Remarque.

L'inclusion Im $\tilde{Y}$ c $S^q_{n-1,k'-1}$ (resp. la stratification de V_o induite par $\tilde{Y}$) constitue une précision de la notion classique de *"problème mal posé"* ou des données *"caractéristiques"* .

A présent, nous allons citer une autre conséquence immédiate de (51)' concernant les solutions locales. La voici :

(52)

Soient V ,Z deux variétés analytiques réelles et soit D c $J^{k'}(V,Z)$ un sous-espace semi-analytique. Supposons que la codimension de $E_{n-1,k'-1}(D)$ dans l'espace $\rho^{-1}(W_{n-1,k'-1}(V,Z) \cap G^*_{n-1}(TD_{k'-1}))$ soit égale à m , qui est la dimension de Z . Alors D possède des solutions analytiques dans un voisinage de chaque point

$$x_o \in \text{Im } \alpha \circ p_{k'-1}(S^t_{n-1,k'-1}(D)) \subset V \quad \text{(cf. (27)')}$$

En effet, dans le cas où D est algébrique de degré d, génériquement l'espace des germes des solutions analytiques de D en ce point x_0 contient un ouvert (cf. appendice) non vide de l'espace $(\mathcal{O}_{n-1})^\mu \times Z_d$, où $\mathcal{O}_{n-1}$ est l'anneau des germes des fonctions analytiques réelles de R^{n-1} à l'origine, n la dimension de V, et μ égale $m.k'$ moins la codimension de $D_{k'-1}$ dans $J^{k'-1}(V,Z)$. C'est aussi le nombre maximum de fonctions, dans une condition initiale, qu'on peut donner par avance sur une hypersurface de V. En particulier, si de plus D est elliptique, cet espace des germes de solutions analytiques est homéomorphe à $(\mathcal{O}_{n-1})^\mu \times Z_d$ où $Z_d = Z/dZ$.

En particulier, $x \in \operatorname{Im} \alpha \cdot p_{k'-1}(S^t_{n-1,k'-1})$ implique que les deux degrés locaux $\deg_{x, I_{k'}} \alpha$ sont nuls (cf. §2) [27], mais on ne sait pas si l'inverse est encore vrai. Remarquons que la détermination de la stratification de D, e.g. $S^t_{n-1,k'-1}$ est purement géométrique, ainsi (51)' et (52) nous permettent de connaître facilement la taille minimale de l'espace des germes des solutions analytiques [24], et de donner leur développement en séries convergentes (cf. (51)'), e.g. l'espace des solutions locales voisines de chaque point de R^n de l'équation $D \subset J^2(R^n,R)$ définie par

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i} \left[1 + \left(\frac{\delta u}{\delta x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta u}{\delta x_n}\right)^2\right]^{-1/2} \cdot \frac{\delta u}{\delta x_i} = 0$$

contient un ouvert non vide de $(\mathcal{O}_{n-1})^2$. D'autre part, le simplexe sectionnaire (σ_0, Υ_0), défini par un hyperplan $x_1 = cte$ et la solution triviale $u = cte$, vérifient l'inclusion $\operatorname{Im} \Upsilon_0 \subset S^0_{n-1,1}(D)$. De même l'espace des germes des solutions analytiques au voisinage de l'origine $(0,0) \in R^2$ de l'équation $D \subset J^2(R^2,R)$ donnée par

$$x\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\right)^2 + u\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}\right)^2 + y\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\right)^2 = 1$$

contient un ouvert non vide de $(\mathcal{O}_1)^2$. Cependant on peut remarquer d'une part qu'aucune des deux droites $x = 0$ ou $y = 0$

ne remplit l'hypothèse du théorème de Cauchy-Kowalevska . D'autre part, D étant non quasi-linéaire , les distributions ainsi que les pseudo-transformations de Lie ne semblent pas s'appliquer immédiatement à une telle équation . Enfin l'équation $D \subset J^2(R^n,R)$ définie par

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta}{\delta x_i} \left[1 + \left(\frac{\delta u}{\delta x_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta u}{\delta x_n} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\delta u}{\delta x_i} \right) = 0$$

est elliptique (cf. §5 remarque (5)) . Du fait que $D_1 = J^1(R^n,R)$, on déduit que l'espace des solutions analytiques voisines de chaque point de R^n est homéomorphe à $(\mathcal{O}_{n-1})^2$; en effet, soit $S \subset \mathcal{O}_n$ l'espace des germes des solutions analytiques à l'origine de R^n , et considérons l'application $\psi : \mathcal{O}_{n-1} \to (\mathcal{O}_{n-1})^2$ qui est définie par

$$\psi(f(x_1,\ldots,x_n)) = (f(0,x_2,\ldots,x_n) , \delta f/\delta x_1 (0,x_2,\ldots,x_n)) .$$

Alors ψ induit une application bijective $\psi|S : S \to (\mathcal{O}_{n-1})^2$. Ainsi il y a beaucoup de surfaces minimales analytiques non constantes [32] (*) .

(*) J'ai obtenu des résultats plus précis peu après le colloque de Calgary. A savoir : une équation $D \subset J^k(V,R)$ semi-analytique de codimension 1 telle que $\alpha(D) = J^{k-1}(V,R)$ possède toujours des solutions analytiques locales. Mais ici ne sont présentés que les résultats émis lors de ce colloque. La non publication de ce texte depuis ce jour témoigne de la difficulté pour un homme qui, n'étant ni un jeune loup prometteur de médailles, ni un vieux lion en pleine possession de son pouvoir, n'a même pas une chance sur le million sept cent cinquante mille publications mathématiques [20] d'être reconnu .

10. Obstruction pour l'existence d'une solution globale.

Soient V , Z deux variétés indéfiniment différentiables, V orientée de dimension $n \geq 2$, et $D \subset J^{k'}(V,Z)$ un sous-espace différentiable (cf. §9) . Nous allons étudier quelles sont les obstructions pour l'existence d'une solution de D sur V en supposant que $D_{k'-1}$ en possède une . Pour cela, désignons par $\delta_r(\sigma,\gamma) = (\delta_r\sigma,\delta_r\gamma)$ la r-ième face (cf. §2) d'un n-simplexe sectionnaire (σ,γ) de $\alpha : J^{k'-1}(V,Z) \to V$, $D_{k'-1}$-admissible, et par E l'ensemble formé par les simplexes qui vérifient (cf. (21)) en plus

$$\text{(53)} \qquad \operatorname{Im} \delta_r\gamma^{\sim} \subset W_{n,k'-1}(D) \overset{\sim}{-} E_{n,k'-1}(D)$$

avec $r = 0,\dots,n$.

Les notions introduites dans le paragraphe 9 nous permettent de déterminer cet ensemble E . En effet, supposons que

$$\delta_r\gamma : \Delta_{n-1} \to J^{k'-1}(V,Z)$$

se prolonge à une solution γ (cf. §9) dans un voisinage de $\operatorname{Im} \delta_r\sigma \subset V$. Alors, γ définit une application de Δ_{n-1} dans $E_{n,k'-1}(V,Z)$ par $\gamma(\chi) = (\tau(\chi),y(\chi))$ (cf. (17)) où $\tau(\chi)$ est l'image de l'espace tangent à V au point $\sigma(\chi)$ par la dérivée de $j^{k'-1}\gamma$, et où $y(\chi) = j^{k'}\gamma(\sigma(\chi))$. D'où $\tau(\chi) = \delta_3\gamma^{\sim}(\chi)$ entraîne $(\sigma,\gamma) \in E$. Notons par H le sous-groupe de $H(\alpha_{k'-1})_{S,I_{k'-1}} = K$ (où $\alpha_{k'-1} : D_{k'-1} \to V$) engendré par les cycles $\theta = \Sigma\, a_i(\sigma_i,\gamma_i)$ avec $(\sigma_i,\gamma_i) \in E$, et $H_n(V,Z) = K/H$ le groupe quotient . Alors le nombre d'éléments (ou cardinal) du groupe quotient $H_n(V,Z)/\operatorname{Im} p(H)$ est un invariant numérique de D qui vérifie évidemment la relation:

$$\deg I_{k'-1}(\alpha_{k'-1}) \leq \operatorname{card}\,(H_n(V,Z)/\operatorname{Im} p(H)) - 1 \ ,$$

où $p : K \to H_n(V,Z) \tilde{} Z$ est la projection canonique (cf. (10)) . Or, si D possède une solution u , ce nombre est nécessairement égal à 1 puisque $p(\{\theta_o\}) = 1$, où $\{\theta_o\} \in H$ est donné par

$$\theta_o = \Sigma\, (\sigma_i, j^{k'-1}u\cdot\sigma_i) \quad ,$$

et où $\Sigma\, \sigma_i$ est un cycle d'orientation de V . Supposons maintenant que $\mathrm{card}(\, Z \,/\, \mathrm{Im}\, p(H)\,) = 1$ et considérons le cycle $\theta = \Sigma\, a_i(\sigma_i,\gamma_i)$ de E tel que $p(\{\theta\}) = 1$. Alors l'équation (53) nous permet d'associer à chaque simplexe (σ_i,γ_i) de θ un élément $\{\gamma_i\}$ du n-ième groupe d'homotopie de $W_{n,k'-1}(V,B)$ relatif à $W_{n,k'-1}(D)$; $\{\gamma_i\} \in \pi_n(W_{n,k'-1}(V,Z);W_{n-1,k'-1}(D))$ qui est représenté par $\gamma_i\tilde{}$ et par sa restriction au bord de

$$\Delta_n \,;\, \delta\Delta_n = \bigcup_r \delta_r\Delta_n \xrightarrow{\ \bigcup \delta_r\gamma_i\tilde{}\ } W_{n,k'-1}(D)$$

D'où l'on obtient une classe de cohomologie dans

$$H^n(\alpha_{k'-1}, \pi_n(W_{n,k'-1}(V,Z);W_{n,k'-1}(D)))$$

dont la nullité est une condition nécessaire pour que D possède une solution sur V . En particulier, soit $u_o : V \to Z$ une solution de $D_{k'-1} \subset J^{k'-1}(V,Z)$ et $\Sigma\, \sigma_i$ une triangulation de V compatible avec l'orientation ; alors la classe $\theta_1 = \{\theta\} \in K/H$, où $\theta = \Sigma\, (\sigma_i, j^{k'-1}u_o\cdot\sigma_i)$, est la première obstruction pour que u_o soit une solution de D . Quand $\theta_1 = 0$ c'est-à-dire $\theta \in H$, on définit la seconde obstruction θ_2 qui est un élément du groupe de cohomologie ordinaire

$$H^n(V, \pi_n(W_{n,k'-1}(V,Z);W_{n,k'-1}(D)))$$

en associant à chaque simplexe σ_i l'élément du groupe d'homotopie relative $\pi_n(W_{n,k'-1}(V,Z);W_{n,k'-1}(D))$ défini par $\gamma_i\tilde{}$, où $\gamma_i = j^{k'-1}u_o\cdot\sigma_i$ vérifie (53) . La nullité de θ_2 est une condition nécessaire pour que u_o soit une solution de D .

En somme, supposons qu'on sache déjà résoudre n'importe quel système d'équations aux dérivées partielles $D \subset J^k(V,Z)$ sur les variétés V de dimension $< n'-1$, d'ordre k arbitrairement choisi, et qu'on puisse résoudre tout système d'ordre $k < k'-1$ sur n'importe quelle variété V ; alors la méthode proposée ici nous permet de résoudre les systèmes d'équations sur une variété de dimension n' d'ordre k'. Autrement dit le problème se réduit d'une part à un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre arbitraire (c'est-à-dire quand $n = 1$), et d'autre part à la description des zéros communs d'un système de fonctions algébriques (resp. analytiques) sur une variété algébrique (resp. analytique) de dimension quelconque (i.e. $k = 0$) ; c'est-à-dire la géométrie algébrique réelle. Ainsi, la géométrie algébrique et les équations aux dérivées partielles sont étroitement liées ainsi que l'avaient pensé depuis longtemps déjà certains mathématiciens français , qui prônaient également l'unité des mathématiques et ceci malgré l'avis contraire de leurs adversaires [1] [7] [23] [32] [17].

Appendice

Etant donnés trois entiers positifs (m, ρ, d) , désignons par

$$\alpha^q_0, \alpha^q_{j^e} \ , \quad j^e = j_0^{e_0} \ldots j_\lambda^{e_\lambda} \ ,$$

$$1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_\lambda \leq m \ ,$$

$$e_i \geq 1 \ , \quad \Sigma\, e_i \leq d \ , \quad q = 1,2,\ldots,\rho$$

et par $x_1, \ldots, x_m$ les coordonnées d'un point de R^N ,

$$N = \rho\langle m+d,d\rangle + m \quad \text{(cf. (22))}$$

et par X la sous-variété non singulière de R^N définie par les ρ équations polynomiales en x , linéaires en α , que voici:

$$\alpha^q_0 + \Sigma\ \alpha^q_{j_0^{e_0} \ldots j_\lambda^{e_\lambda}} x_{j_0}^{e_0} \ldots x_{j_\lambda}^{e_\lambda} = 0$$

$$q = 1,2,\ldots,\rho \ .$$

La projection f de R^N sur R^M , où $M = \rho\langle m+d,d\rangle$, définie par $f(x,\alpha^q_0,\alpha^q_{j^e}) = (\alpha^q_0,\alpha^q_{j^e})$ induit une application notée encore par f

$$f : X \to R^M \ ,$$

et on appellera la stratification de f *stratification standard du type* (m,ρ,d) . Remarquons d'abord que le nombre $\phi(m,\rho,d)$ des strates, les équations ψ_S qui définissent la strate $S \subset R$, c'est-à-dire le discriminant de S , ainsi que les invariants algébriques (e.g. π_* , H_* , etc...) de S , sont des invariants numériques ou algébriques fonctions de ces trois entiers (m,ρ,d) . Par exemple, $\phi(1,1,1) = 3$, $\phi(1,1,2) = 6$,

les composantes connexes des strates correspondantes sont contractiles, et un travail de Curtz [6] peut être utile pour obtenir une description de la stratification standard du type (2,2,2) (*). Les connaissances sur ϕ , ψ_S , les invariants des espaces fibrés $f_S : f^{-1}(S) \to S$ et les autres propriétés géométriques de f , ont une certaine utilité dans l'étude des équations aux dérivées partielles sur R^n . En effet, fixons-nous un $D \subset J^k(R^n,R^m)$ algébrique de degré d tel que la codimension de $E_{n-1,k-1}(D)$ dans l'espace

$$\rho^{-1}(W_{n-1,k-1}(R^n,R^m) \cap G^*_{n-1}(TD_{k-1}))$$

soit égale à ρ . Alors, le nombre des strates de la stratification canonique $W_{n-1,k-1}(R^n,R^m)$ de D est majoré par $\phi(m,\rho,d)$, e.g. une équation ($m = 1$) quasi-linéaire ($d = 1$) d'ordre quelconque sur R^n a au plus 3 strates, et une équation algébrique de degré 2 ($d = 2$) ne possède pas d'obstruction topologique pour un problème de Cauchy sur une variété plongée V_o (cf. §9) .

D'autre part, la forme explicite des discriminants ψ_S du type de (m,ρ,d) nous permet d'écrire les équations secondaires de D (cf. §8) dont la résolubilité est nécessaire pour celle de D , e.g. pour $(1,1,d)$ avec $d \leq 4$, i.e. une équation d'ordre k sur R^n de degré algébrique d , les solutions par radical d'un polynôme de degré $d \leq 4$ donnent explicitement les équations secondaires . Pour $d \geq 5$, la théorie de Galois montre qu'il n'est pas trivial d'obtenir une description simple de ces équations. De même, pour un système, i.e. $m \geq 2$ et $d \geq 2$, la situation est aussi complexe sauf dans le cas (2,2,2) qui est la conséquence d'un résultat récent (*) et de [6]. Ce résultat nous permet d'écrire les équations secondaires d'un système de deux équations à deux fonctions inconnues d'ordre k sur R^n , et algébriques de degré 2 .

(*) Un travail récent (1984) de M.Perroud détermine entièrement la stratification standard du type (2,2,2) en introduisant des invariants algébriques nouveaux.

Enfin la connaissance sur les classes d'obstruction des espaces fibrés f_S ; $f^{-1}(S) \to S$ (resp. le comportement d'une section de f_S voisine d'une autre strate) ainsi que la connaissance d'autres invariants , entraînent celle de la stratification canonique de D (resp. des solutions de D) .

Il est utile de construire une telle stratification standard (resp. universelle) pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques réelles sur R^n (resp. sur deux variétés V et Z) .

Dans le cas où $D_{k'}$ est défini par les zéros d'une fonction différentiable $F : J^{k'}(V,Z) \to R^N$, alors la stratification canonique de D est entièrement déterminée par la dérivée de F le long des fibres de

$$J^{k'}(V,Z) \to J^{k'-1}(V,Z) .$$

C'est la raison pour laquelle les termes d'ordre k' dans une des dérivées partielles pour une équation quasi-linéaire sont plus importants pour certains problèmes que les autres termes.

Rappelons aussi que, dans la pratique, on doit tenir compte des composantes connexes et du type des fibres dans une telle stratification. De même, la détermination du type topologique et des invariants algébriques des variétés $E_{n,k}(V,Z)$, $W_{n,k}(V,Z)$, ρ (cf. (27)) en fonction des invariants de V et Z aidera à l'étude des solutions globales.

Enfin, rappelons encore une fois qu'une théorie des séries majorantes pour les strates non triviales (cf. §9) est importante pour compléter cette méthode .

D'autre part, il est peut-être utile aussi de remarquer le fait suivant ; l'équation d'un fluide général [24] , qui tient compte de plusieurs facteurs physiques d'un fluide se comporte mieux (e.g. équation secondaire, condition bien posée, etc...) que les équations où l'on néglige certains facteurs . Par exemple, les équations de Navier-Stokes [9] et Euler [25] . Autrement dit, cette équation se traite plus facilement que les deux autres, bien que ces dernières aient l'air plus simples. En effet , il est possible qu'en négligeant trop de facteurs, on s'éloigne de la réalité du fluide.

Ainsi, il ne serait peut-être pas mauvais qu'au lieu de continuer à simplifier des équations classiques et à affaiblir leurs solutions, on s'attache à compléter les équations classiques en tenant compte des connaissances nouvelles apportées par les récents progrès de la physique. Ainsi on obtiendrait une nouvelle équation F que l'on pourrait essayer de résoudre même si elle paraît plus complexe de prime abord. Une fois les solutions trouvées, et après les avoir vérifiées par la méthode numérique, ou par ordinateur, on pourrait alors comparer ces résultats aux phénomènes naturels. Au cas où la différence ne serait pas négligeable, alors il faudrait améliorer l'équation F elle-même et recommencer le processus.

Une des raisons pour laquelle on a utilisé les simplexes ou variétés plongées au lieu des sous-variétés de V est que l'on voulait éviter de voir apparaître la "multiplicité" dans les conditions initiales, bien que les résultats eussent été certainement plus précis si l'on avait appliqué le langage de Grothendieck [16] .

A présent, soit A un sous-anneau des germes des fonctions indéfiniment dérivables à l'origine de R^n , alors la k-ième topologie "algébrique" (resp. analytique, différentiable) sur A^m (produit de m copies de A) , est définie de la manière suivante : à chaque système D d'inéquations strictes aux dérivées partielles algébriques (resp. analytiques, différentiables) d'ordre $\leq k$ à m inconnues, on associe un ouvert fondamental de cette topologie $\mathcal{U}_D$ formé par l'ensemble des solutions $(f_1, \ldots, f_m)$ de D . Il est clair que la (k+1)-ième topologie est plus fine que la k-ième, et l'ensemble des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles algébriques (resp. analytiques, différentiables) d'ordre $\leq k$ est un fermé de la k-ième topologie algébrique (resp. analytique, différentiable) de A^m .

Il est évident que ce travail médiocre, malgré de longues années d'efforts (*), ne vaut rien pour la plupart des grands génies contemporains couronnés de médailles prestigieuses et détenteurs de pouvoirs. Mais il reste malgré tout un mince espoir qu'il puisse subsister ou être volé ! (**) .

En effet, d'une part, il est probable que les chercheurs qui établissent des équations à partir d'un phénomène naturel aimeront voir les solutions en séries convergentes que cette méthode permet d'obtenir, enfin de confirmer ou d'améliorer leur description de la nature. D'autre part, ma méthode est élémentaire et n'utilise que les connaissances de trois options du niveau de la licence d'enseignement mathématique. De plus, seules les notions fondamentales de ces options ont servi.

Ainsi ce travail contribuera-t-il, de manière très modeste évidemment, à l'*"unité des mathématiques"* par opposition à la *"division"* actuelle - conséquence de la compétition individualiste bien soutenue par le système des médailles, de l'argent et du pouvoir, et aussi par la peur de perdre son emploi si l'on n'accepte pas de suivre ce chemin. Les médailles et le pouvoir sont les carottes pourries des multinationales pour maintenir l'inégalité, cause profonde de la crise .

Ne serait-il pas mieux que les mathématiciens s'unissent au lieu de *"diviser pour mieux ruiner"* ? Ne serait-il pas plus sage qu'ils accomplissent enfin leur devoir et contribuent à établir *"l'égalité de consommation pour tous les êtres humains"* ?

(*)

L'auteur remercie les membres de la commission scientifique du C.N.R.S. qui ont renouvelé son contrat, bien que récemment une sérieuse menace soit apparue du fait que je n'avais pas réalisé de publications dans le domaine des mathématiques modernes depuis dix huit ans.

(**)

Ch. Ehresmann : "On m'a volé mes idées, c'est la preuve qu'elles sont bonnes !"

A. Grothendieck (Université de Montpellier et C.N.R.S.) : "Recoltes et Semailles" Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien.

Bibliographie

[1] Bureau, F.

Quelques questions de géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques. Colloque de Géométrie algébrique, Liège 1949, Centre belge de recherches mathématiques.

[2] Cartan, E.

Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Hermann, Paris 1945.

[3] Cartan, H.

Séminaire de l'E.N.S. 1953-54

[4] Cerf, J.

Théorèmes de fibration des espaces de plongements, Application. Exposé 8, Séminaire Cartan, E.N.S. 1962-63

[5] Chou, C.C.

Quelques exemples d'homologie sectionnaire de Shih. Chinese Journal of Mathematics, Vol. 10, n°1 , June 1982

[6] Curtz, P.

Stabilité locale des systèmes quadratiques. Ann. Scient. E.N.S. , 4ème série, T.13, 1980, p. 293 à 302.

[7] Darboux, G.

Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications du calcul infinitésimal, 3^{ième} partie.
Gauthier-Villars, Paris, 1894.

[8] Didierjean, G. et Marti J.A. , à paraître.

[9] Didierjean, A. et Legrand, A. , à paraître.

[10] Dieudonné, J.

Elements d'analyse IV, Gauthier-Villars, Paris 1971

[11] Douady, A.

Variétés à bords anguleux et voisinages tubulaires.
Séminaire Cartan, E.N.S. 1961-62.

[12] Ehresmann, Ch.

Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie.
Colloques internationaux du C.N.R.S., Paris, 1953

[13] Ehresmann, Ch.

Sur la théorie des espaces fibrés.
Colloques internationaux du C.N.R.S., XII, Topologie algébrique, Paris 1947.

[14] Goursat, E.

Cours d'analyse mathématique, Gauthier-Villars, Paris 1942

[15] Grassman, H.

Geometrische Analysegesknüpft an die erfundense geometrische charakteristik. Mit einer erlaüternden Abhandlung von A.F. Möbius, Leipzig, Weidmann, 1847.

[16] Grothendieck, A.

Séminaire de géométrie algébrique, 1962.

[17] Hadamard, J.

Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques. Paris, Hermann 1932.

[18] Lalonde, F.

Thèse Univ. de Montréal, 1982, et C.R.Acad.SC. Paris, t. 297, p. 659, 1983.

[19] Legrand, A.

Homotopie des espaces de sections,
L.N. in Math. , 941. Springer-Verlag. Berlin

[20] Leray, J.

Enseignement et Recherche. Gazette des Math. S.M.F., n° 8, 1977.

[21] Leray, J.

Problème de Cauchy IV.
Bull. Soc. Math. France, vol. 90 , 1962, p. 39-156

[22] Petrovskii, I.G.

Lektsii ob uravneniyakk s chastnymi proizvodnymi,
Moscow Fizmatgiz 1961.

[23] Picard, E.

Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique.
Gauthier-Villars, Paris 1927.

[24] Shih, W.H.

On the Cauchy problem for the equation of a general fluid.
Colloque sur les problèmes mathématiques rencontrés dans l'étude des phénomènes naturels , C.I.R.M. Marseille-Luminy, France 1982, D. Reidel Publishing Company, Pays Bas.

[25] Shih, W.H.

Sur l'équation d'Euler, à paraître,
et C.R. Acad. Sc. Paris, t. 297, Séries I, 1983, p. 591.

[26] Shih, W.

C.R. Acad. SC. Paris, t. 285, série A, 1977, p. 333.

[27] Shih, W.

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, série A, 1981, p. 901.

[28] Shih, W.

Un invariant algébrique associé à une application continue.
Algebraic Topology-manifolds and cell complexes, Editor George M.Rass , National Research Institute, Athene, Grèce.

[29] Thom, R.

Bull. Soc. Math. de France, Vol. 87, 1959, p. 455.

[30] Thom, R.

Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 75, 1969, p. 240-284.

[31] Thom, R.

Stabilité structurelle et morphogénèse. Inter-éditions.

[32] Valiron, G.

Cours d'analyse mathématique . Equations fonctionnelles et applications. Masson, Paris, 1942.

La Chênetière
78120 Raizeux
France