DIAGRAMMES

WEISHU SHIH

Un invariant algébrique associé à une application continue

Diagrammes, tome 15 (1986), exp. n° 5, p. S1-S15

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1986__15__A5_0>

© Université Paris 7, UER math., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes Volume 15 , 1986

UN INVARIANT ALGEBRIQUE ASSOCIE A UNE APPLICATION CONTINUE

Weishu SHIH
(C.N.R.S.)

"L'égalité de consommation pour tous les êtres humains"

Le but de ce travail est de détailler une partie des résultats annoncés dans [5], [6] et [8], et qui consistent à attacher à chaque application continue d'un espace topologique dans un autre une suite de groupes abéliens que l'on appelle groupes d'homologie sectionnelle de cette application. Ils possèdent la plupart des propriétés des théories d'homologie, mais ce ne sont pas des invariants d'homotopie et ils dépendront de la différentiabilité dans le cas des variétés différentielles.

Ces dernières propriétés nous permettront, dans un travail ultérieur de développer pour les équations aux dérivées partielles, une théorie analogue à la théorie des obstructions en topologie algébrique, et une méthode pour réduire le nombre des variables indépendantes dans un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Nous étendrons ici la notion de degré d'une application continue f entre variétés au cas où les variétés sont de dimensions différentes. Dans le cas où f est l'application de projection d'un espace fibré, ce degré est déterminé par les différentielles de la suite spectrale du fibré, d'où le lien avec les classes caractéristiques du fibré.

Soit $f : Y \to X$ une application continue d'un espace topologique Y dans un autre X. Notons Δ_q le q-ième simplexe type de $\mathbf{R}^{q+1}$ défini par :

$$\Delta_q = \{(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^{q+1} , x_i \geq 0 , \Sigma x_i = 1 \}$$

A.M.S. Sub. Class. : 55 N 35 , 35 A 30 , 57 R 45 , 55 S 35.

et considérons les couples (σ,γ) d'applications continues:

$$\sigma : \Delta_q \to X \quad , \quad \gamma : \Delta_q \to Y$$

telles que σ soit injective et $f\circ\gamma = \sigma$. Désignons par $C_q(f)$ le groupe quotient du groupe abélien libre engendré par ces couples (σ,γ) par la relation d'équivalence de subdivision barycentrique. Les $(q+1)$ faces δ_i de Δ_q nous permettent d'introduire un homomorphisme

$$d_q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \delta_i \quad : \quad C_q(f) \to C_{q-1}(f) \ ,$$

et comme dans la théorie d'homologie singulière on a $d_{q-1}\circ d_q = 0$. Alors on définit le q-ième groupe d'homologie sectionnelle de f par :

$$H_q(f)_* = (\text{noyau de } d_q) \ / \ (\text{image de } d_{q+1})$$

Les projections $p_1 : (\sigma,\gamma) \to \sigma$ et $p_2 : (\sigma,\gamma) \to \gamma$ induisent des homomorphismes du groupe sectionnel $H_q(f)_*$ dans l'homologie ordinaire:

$$\begin{array}{ccc} & H_q(f)_* & \\ {\scriptstyle p_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_2} \\ H_q(X,Z) & \xrightarrow[f_*]{} & H_q(Y,Z) \end{array}$$

A chaque diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} Y_o & \xrightarrow{\ j\ } & Y \\ {\scriptstyle f_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X_o & \xrightarrow[j_o]{} & X \end{array}$$

où j_o est injectif, la somme tordue [9] de l'homomorphisme des groupes différentiels gradués $j_* : C_*(f_o) \to C_*(f)$ nous permet

de définir le groupe d'homologie sectionnelle relative $H_*(f,f_o)_*$ et la suite exacte d'homologie sectionnelle associée à (j_o,j):

$$\ldots \to H_*(f_o)_* \to H_*(f)_* \to H_*(f,f_o)_* \to \ldots$$

En particulier, si U est un ouvert de X, les inclusions $X-U \to X$ et $Y-f^{-1}(U) \to Y$

$$\begin{array}{ccc} Y-f^{-1}(U) & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle f_u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X-U & \longrightarrow & X \end{array}$$

définissent le groupe $H_*(f,f_u)_*$.
L'homomorphisme $H_*(f,f_u)_* \to H_*(f,f_v)_*$ induit par l'inclusion d'un ouvert V dans U , définit sur X un préfaisceau; on note H le faisceau associé que l'on appelle faisceau sectionnel de f
La projection canonique $p_o : H_*(f,f_u)_* \to H_*(X,X-U)$ induit un morphisme du faisceau H dans le faisceau d'orientation H_o de X, soit $p : H \to H_o$, d'où la suite exacte des groupes de cohomologie associée :

$$\ldots \to H^n(X,H) \to H^n(X,H_o) \to H^{n+1}(X,p) \to \ldots$$

Supposons maintenant que f soit une application indéfiniment dérivable entre deux variétés Y et X de classe C^∞ . Fixons un entier positif k ; nous allons définir les simplexes (σ,γ) k-fois dérivables de f . Pour cela, désignons par $\epsilon\Delta_q$, $\epsilon > 0$, l'image de Δ_q par l'homothétie de rapport $1+\epsilon$ et dont le centre est le barycentre de Δ_q . Soit :
$F_{i_1\cdots i_l} = \delta_{i_1}\cdot\ldots\cdot\delta_{i_l}\Delta_q$ la $i_1\ldots i_l$-ième face de Δ_q, et $_\epsilon F_{i_1\cdots i_l}$ l'intersection de $\epsilon\Delta_q$ avec l'hyperplan affine de dimension $q-1$ qui contient $F_{i_1\cdots i_l}$,et $\mathrm{int}_\epsilon F_{i_1\cdots i_l}$ son intérieur.
Alors (σ,γ) est dit k-fois dérivable s'il vérifie :

(1) il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sigma : \Delta_q \to X$ et $\gamma : \Delta_q \to Y$ se prolongent à $\epsilon\Delta_q$ en des applications de classe C^∞ avec σ_ϵ injectif;

(2) pour tout $i_1\ldots i_l$-ième face $(0 < l \leq q)$ $F_{i_1\cdots i_l}$ de Δ_q , l'application γ' induite par γ sur l'image $\sigma(\mathrm{int}F_{i_1\cdots i_l})$ admet la propriété que son jet d'ordre k

$$j^k\gamma' : \sigma(\mathrm{int}F_{i_1\cdots i_1}) \to J^k(\sigma(\mathrm{int}F_{i_1\cdots i_1});Y)$$

s'étend en une application continue γ sur la fermeture de $\sigma(\mathrm{int}F_{i_1\cdots i_1})$ dans $J^k(\sigma_\alpha(\mathrm{int}_\alpha F_{i_1\cdots i_1});Y)$.

Il est clair que les simplexes k-fois dérivables de f engendrent un groupe différentiel gradué dont l'homologie $H_q(f)_{\infty,k}$ est par définition *le groupe d'homologie sectionnelle k-fois dérivable de* f, et on a la suite exacte :

$$\ldots \to H_*(f)_{\infty,k} \to H_*(f)_{\infty,k'} \to H_*(f)_{k,k'} \to \ldots \ , \ k' < k.$$

Rappelons qu'un sous-faisceau I [3] du faisceau des formes différentielles $\Omega^*(Y)$ de Y est appelé idéal différentiel si $\Omega^*(Y) \bigwedge I$ et dI sont inclus dans I.

On dira qu'un simplexe (σ,γ) est intégrable [10] par rapport à l'idéal I si pour toute forme $\omega \in I$, on a $\gamma^*\omega = 0$.

Alors le groupe obtenu par les simplexes intégrables est appelé *groupe d'homologie sectionnelle de* f *attaché à l'idéal* I; on le note $H_*(f)_{\infty,I}$.

Enfin, nous définissons le groupe d'homologie réduite de la façon suivante. C'est le groupe d'homologie du quotient de $C_*(f)$ par la relation d'équivalence suivante: deux chaînes c" et c' sont équivalentes s'il existe une chaîne sectionnelle c de l'application f x Id : Y x [0,1] → X x [0,1] telle que $dc" = j_0c - j_1c'$, où j_i , i = 0,1 , est l'inclusion canonique.

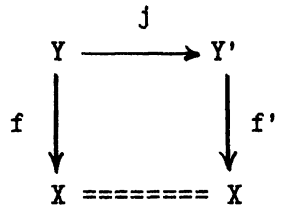
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j_1} & Y \times [0,1] \\ \Big\downarrow f & & \Big\downarrow f \times Id \\ X & \xrightarrow{j_0} & X \times [0,1] \end{array}$$

On notera par $H_*(f)_r$ le groupe d'homologie sectionnelle réduit de f et $q : H_*(f)_\infty \to H_*(f)_r$ la projection canonique. Dans le cas où f est l'application identique d'un C.W.complexe X fini, de dimension n , on a évidemment :

$$H_i(f)_\infty = H_i(f)_r = H_i(X,Z) \quad , \ 0 \leq i < n$$

$$H_n(f)_r = H_n(X,Z) \ .$$

Ainsi, $H_*(f)_\infty$ consiste en une généralisation de l'homologie singulière. Cependant, nous pouvons remarquer (cf. exemple 1) que le groupe $H_*(f)_\infty$ n'est pas un invariant homotopique de f, et dans le cas où f est une application indéfiniment dérivable entre deux variétés de classe C^∞ les groupes d'homologie sectionnelle k-fois dérivables peuvent être différents pour tous les k. Pour une équivalence d'homotopie j au-dessus de X :



on a $H_*(f)_r = H_*(f')_r$, mais $H_*(f)_\infty$ et $H_*(f')_\infty$ peuvent être différents.

D'autre part, quand X est une variété de classe C^∞ de dimension n, et Y une variété de classe C^∞ de dimension m, $f: Y \to X$ de classe C^∞, il est clair que $H_n(f)_\infty$ s'identifie à un sous-groupe de l'espace de m-courant de la variété $X \times Y$. Ceci nous permet de remplacer les distributions par $H_n(f)_\infty$ pour une équation aux dérivées partielles non-linéaire.

Le groupe $H_*(f)_\infty$ est difficile à déterminer, mais il permet d'introduire la notion de degré d'une application pour les variétés de dimensions différentes qui généralise la notion classique de degré. Pour cela, on suppose que X est une variété topologique orientée de dimension n. Plus généralement, X peut être un espace topologique dont le n-ième faisceau d'orientation est trivial (isomorphe au faisceau constant sur $\mathbf{Z}$), Y un espace topologique et f une application continue propre $f : Y \to X$. Alors le degré de f est défini de la manière suivante: c'est le nombre des éléments du groupe quotient $H_n(X,\mathbf{Z})/\mathrm{Im}\ p_* \sim \mathbf{Z}/\mathrm{Im}\ p_*$ diminué d'une unité, où $p : H_n(f)_\infty \to H_n(X,\mathbf{Z})$ est la projection canonique:

$$\deg f = \#\{\text{conoyau } p_* : H_n(f)_\infty \to H_n(X,\mathbf{Z})\} - 1$$

$\deg f$ peut être infini; $\deg f \in \mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$.

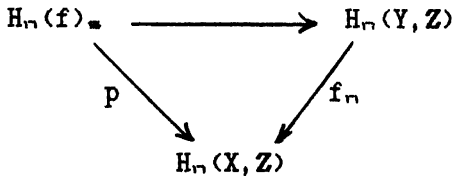
Dans le cas où X, Y et f sont de classe C^∞, on peut utiliser le groupe d'homologie sectionnelle k-fois dérivable de

f : $\deg^{K} f$. De même, si Y est muni d'un idéal différentiel I, on peut introduire le degré de f attaché à cet idéal, $\deg^{I} f$,en utilisant le groupe $H_n(f)_{*,I}$. On a évidemment les inégalités suivantes:

$$\deg f \leqslant \deg^{1} f \leqslant \ldots \leqslant \deg^{I} f \ .$$

L'exemple montre qu'il y a des applications différentielles f pour lesquelles tous ces degrés sont différents.

Dans le cas où Y est une variété orientée connexe de même dimension n que X , alors le degré classique $\deg_c f$ de f est défini. Le diagramme commutatif

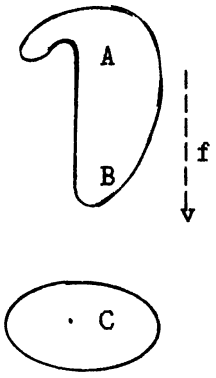


montre que l'on a :

$$\deg_c f \leqslant \deg f + 1 \ .$$

Mais l'exemple suivant montre que les degrés peuvent être différents, donc la nullité de notre degré est une condition plus forte que la nullité du degré classique.

Exemple 1 . Soit f la projection d'un cercle cur un autre telle que f projette le segment AB sur le seul point C . Alors le degré classique est 1 , mais notre degré est infini.



Cet exemple montre en même temps que notre degré n'est pas un invariant homotopique de f ; donc le groupe d'homologie sectionnelle n'est pas non plus un invariant homotopique de f .

Revenons au cas où X est un espace topologique arbitraire, alors le faisceau sectionnel H nous permet de définir le degré local de f au point $x_o \in X$ de la manière suivante:

$$\deg_{x_o} f = \#\{\text{conoyau } p_{x_o}\} - 1$$

où p_{x_o} désigne le morphisme de faisceaux $p : H \to H_o$ au point x_o

Le degré local de f est une fonction semi-continue inférieurement sur X . La nullité du degré local sur X signifie l'exactitude de la suite de faisceaux:

$$0 \to N \to H \xrightarrow{p} H_o \to 0$$

où N est le noyau de p , et l'on a $H^*(X,p) \sim H^*(X,)$
D'autre part on a évidemment :

$$\sup_{x \in X} \deg_x f \leq \deg f$$

mais l'égalité n'est pas toujours satisfaite (cf.exemple 3). Enfin, pour $y \in Y$ et W_y un voisinage de y , on note $f|W_y$ la restriction de f à W_y , et on définit alors le degré local fort de f au point x_o par :

$$\deg_{x_o} f = \sup_{y \in f^{-1}(x_o)} \{\inf_{W_y} (\deg_{x_o} (f|W_y))\} \quad .$$

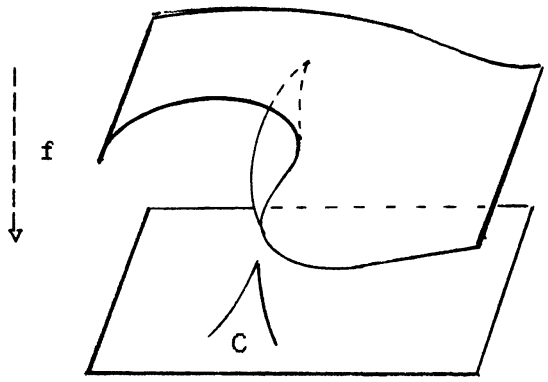
Supposons maintenant que X soit une variété orientée et soit $[X]$ sa classe fondamentale. Si le degré local de f s'annulle sur X , alors l'image $\delta[X] \in H^1(X,N)$ par l'homomorphisme δ de la suite exacte de cohomologie :

$$H^o(X,N) \to H^o(X,H) \to H^o(X,H_o) \xrightarrow{\delta} H^1(X,N) \ldots$$

est une obstruction pour que le degré de f soit égal à zéro.

Remarquons qu'on peut définir les degrés de f en se servant de l'homologie sectionnelle réduite $H_*(f)_r$ au lieu de $H_*(f)_*$, d'où il résulte que le groupe $H_*(f)_r$ n'est pas non plus un invariant homotopique de f . D'autre part , la nullité

du degré (resp. du degré local) de f signifie qu'il existe une condition nécessaire pour l'existence d'une section (resp.section locale) de f : i.e. d'une application (resp.application locale) $g : X \to Y$ telle que $f \cdot g = 1_X$. En effet, ceci entraîne que le cycle sectionnel $\theta = \sum_i (\sigma_i, g \cdot \sigma_i)$, où $[\sum_i \sigma_i] = [X]$, vérifie $p_*[\theta] = [X]$, donc $\deg f = 0$. Mais l'inverse n'est pas vrai. La projection f de la surface pliée sur $\mathbb{R}^2$ ne possède pas de section, pourtant son degré est nul, d'où son degré local aussi. Cependant le degré local fort de f n'est nul qu'en dehors de la caustique C. D'autre part, le degré local au point d'un éclatement est ∞ donc le degré aussi.



Considérons deux variétés de classe C^∞ et la restriction f de l'application source α à un sous-espace stratifié Y de la variété des k-jets de X dans Z : $\alpha : J^k(X,Z) \to X$. D'après Ehresmann [4] , Y peut être considéré comme un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre k sur X , et il introduit l'idéal I de Cartan sur $J^k(X,Z)$, ce qui globalise ainsi le système différentiel canonique de Cartan [1] . Ceci nous permet de considérer le degré de f attaché à I : $\deg^I f$.

Théorème 1 . *Pour que le système d'équations aux dérivées partielles* Y *(contenu dans* $J^k(X,Z)$*) possède une solution* $g : X \to Z$ *de classe* C^∞ *il faut que* $\deg^I f = 0$.

En effet, soit $j^k g$ le k-jet de g et $\Sigma\sigma_i$ une subdivision C^∞ de X qui représente la classe d'orientation de X , alors la considération du cycle sectionnel $\Sigma(\sigma_i, j^k g \sigma_i)$ montre bien que $\deg^I f = 0$

Comme on a:

$$\deg f \leqslant \deg' f \leqslant \ldots \leqslant \deg^m f \leqslant \deg^I f ,$$

on a une suite d'invariants numériques qui sont des obstructions pour l'existence d'une solution , $\deg^m f$ correspondant à la régularité, et nous reviendrons sur ce sujet dans un travail ultérieur. L'exemple suivant donné par C.C.Chou [2] montre que le degré peut être un entier positif arbitraire $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2. Désignons par $(x_1, x_2, u_1, u_2, p_1, p_2, q_1, q_2)$ les coordonnées de $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, où p_i (resp. q_i) correspond à $\partial u_i/\partial x_1$ (resp. $\partial u_i/\partial x_2$)
Soit Y_n (contenu dans $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$) défini par :

pour $n = 2m+1$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_i^n u_1^{n-2i} u_2^{2i} = x_1$$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{2i+1} C_{2i+1}^n u_1^{n-2i-1} u_2^{2i+1} = x_2$$

$$p_1 + q_2 = 0 \quad , \quad p_2 - q_1 = 0$$

et pour $n = 2m$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_{2i}^n u_1^{n-2i} u_2^{2i} = x_1$$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_{2i+1}^n u_1^{n-2i-1} u_2^{2i+1} = x_2$$

$$p_1 + q_2 = 0 \quad , \quad p_2 - q_1 = 0$$

où C_i^n désigne le coefficient du binôme.

Alors le degré de la restriction f de l'application source à Y_n attaché à l'idéal de Cartan est n .

Remarquons que dans cet exemple la dimension de la fibre générique de f est 2 . Ceci montre l'avantage de notre degré. Plus généralement, on peut construire un degré de manière analogue dans les cas suivants : équations aux dérivées

partielles avec conditions intégrales, équations intégro-différentielles du type de Boltzmann [7] et le problème de Cauchy à l'aide du groupe d'homologie sectionnelle relative. Ainsi il y a peut-être un certain intérêt à étudier ces degrés. Nous reviendrons sur ce sujet plus tard. Pour le moment nous montrons un théorème qui nous permet de calculer le degré continu dans le cas particulier où f est une fibration localement triviale. Il est clair dans ce cas-là que les deux degrés locaux sont nuls ainxi que la classe $\delta[X]$. De plus , on a le

Théorème 2. *Soit* $f : Y \to X$ *un espace fibré localement trivial dont la base* X *est une variété topologique connexe orientée de dimension* n *et dont la fibre est un* C.W.*-complexe fini connexe. Alors le degré de* f *est le plus petit entier* $m > 0$ *tel que*

$$(m+1)[X] \in \mathrm{Im}(H_n(Y,Z) \xrightarrow{f_n} H_n(X,Z))$$

où $[X]$ *est la classe fondamentale de* X . *En particulier quand* X *est simplement connexe , le degré de* f *est nul si et seulement si :*

$$d_r[X] = 0 \quad , \quad r = 2 , 3 , \ldots$$

où les d_r *désignent les différentielles de la suite spectrale de l'homologie singulière d'espace fibré* $f : Y \to X$.

Remarque. Comme les d_r sont déterminés par la théorie des obstructions [9] , ceci donne des rapports entre le degré d'une fibration et ses classes caractéristiques. D'autre part le théorème montre que le degré est un invariant homotopique dans la catégorie des espaces fibrés localement triviaux. Ainsi les propriétés du degré classique s'étendent dans ce cas-là. Enfin l'exemple 1 montre que la condition imposée à f d'être une fibration est primordiale pour que le résultat du théorème soit vrai.

Avant la démonstration, nous introduirons la notion suivante. Pour un sous-espace K de Y et une application continue $f : Y \to X$ entre deux espaces topologiques , on pose:

$$\Sigma_K^{\sim} = \{ x \in X \mid \dim(f_{-1}(x) \cap K) \geq 1 \} ;$$

$\Sigma_K^{\sim}$ est l'ensemble des valeurs critiques ; on pose aussi :

$$\Sigma_K = \{ y \in Y \mid \forall U \in V(y) \ \dim(U \cap K \cap f^{-1}(f(y))) \geq 1 \},$$

où $V(y)$ désigne l'ensemble des voisinages de y;
Σ_K est l'ensemble des points critiques de f . Lorsque $\Sigma_K = \emptyset$ on dit que K est transversal à f et on écrit : $K \pitchfork f$. D'autre part, par abus de langage, nous identifierons un cycle à son support. Ceci étant , remarquons que pour démontrer le théorème, il suffit d'établir le fait suivant:

supposons qu'il y ait un cycle K de Y formé par des simplexes injectifs et tel que l'image de ce cycle par f soit homologue à la classe fondamentale de X , alors il existe un autre cycle K' homologue à K formé par des simplexes injectifs avec $\Sigma_{K'} = \emptyset$, c'est-à-dire $K' \pitchfork f$.

Nous utilisons alors le lemme suivant:

Lemme. *Soit* $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *la projection canonique* , $m > 1$, D *un disque de dimension* $< n$ *plongé dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *dont le bord* δD *est muni d'une triangulation. Alors il existe un disque plongé* D' *dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *tel que* $\delta D = \delta D'$ *et* $\mathrm{int}(D') \pitchfork p$, *où* $\mathrm{int}(D')$ *désigne l'intérieur de* D'. *En particulier, si* $\Sigma_{\delta D} = \emptyset$, *on a* $D' \pitchfork p$ *et* D' *admet une triangulation* $D' = \bigcup_i \Delta_i$, *telle que* p *restreint à* Δ_i *soit un homomorphisme de* Δ_i *sur son image et* δD *soit un sous-complexe de* D' .

Acceptons ce lemme et fixons-nous une triangulation f de sorte que Σ_K et $\Sigma_K\tilde{}$ soient des sous-complexes de Y et de X. Remarquons qu'un cycle K' formé par des simplexes injectifs, définit un polyèdre dont le bord est vide, mais qui n'est pas nécessairement un sous-complexe de la triangulation . Or le cas $\dim F = 0$ est trivial, nous supposons donc $\dim F \geq 1$.

On va démontrer d'abord le fait suivant :
soit x_0 un sommet de $\Sigma_K\tilde{}$ et U' un voisinage de x_0, alors il y a un autre voisinage U de x_0, dont la fermeture est contenue dans U', tel que pour chaque $q \geq 0$, il existe un cycle K_q qui vérifie les conditions suivantes : K_q est homologue à K , Σ_{K_q} est contenu dans Σ_K , $\{x_0\} \cap \Sigma_{K_q^{(q)}}\tilde{} = \emptyset$ où $K_q^{(q)}$ est le q-ième squelette de K_q et l'égalité suivante est vérifiée:

$$K_q \cap (Y - f^{-1}(\bar{U})) = K \cap (Y - f^{-1}(\bar{U}))$$

Nous allons raisonner par récurrence sur $q \geq 0$. Pour $q = 0$ il suffit de prendre $K_0 = K$ puisque tout point est transversal à f .Supposons que nous ayons déjà trouvé U_{q-1} et

K_{q-1} . En subdivisant le cycle K_{q-1} si nécessaire, on peut supposer $f^{-1}(U_{q-1}) \sim F_o \times U_{q-1}$ où $F_o = f^{-1}(x_o)$ est muni d'une triangulation, de sorte que chacun des n-simplexes de K_{q-1} dont l'intersection avec $f^{-1}(U_{q-1})$ est non vide sera contenu dans $\Delta_j \times U_{q-1}$ pour un simplexe Δ_j convenable de F_o. Fixons un q-simplexe Δ_q^o de K_{q-1} tel que l'intersection de Δ_q^o , $f^{-1}(x_o)$ et $\Sigma_{K_{q-1}}$ soit non vide. Si $q = n$, alors le bord de Δ_n^o est transversal à f par l'hypothèse de récurrence; alors le lemme nous permet de remplacer Δ_n^o par un Δ_n qui est transversal à f et $\delta\Delta = \delta\Delta_n^o$. Dans ce cas-là la démonstration est terminée . Maintenant supposons $q < n$, et notons par $K_{q-1}(j_o)$ l'union des n-simplexes de K_{q-1} qui contiennent Δ_q^o comme une q-ième face et qui sont contenus dans $\Delta_{j_o} \times U_{q-1}$, i.e. l'étoile de Δ_q^o dans $K_{q-1} \cap (\Delta_{j_o} \times U_{q-1})$ Choisissons un ouvert U' voisinage de x_o , dont la fermeture soit contenue dans U_{q-1}, et tel que $K_{q-1}(j_o) \cap f^{-1}(U')$ soit contractile sur Δ_q^o . Triangulons les n-simplexes de K_{q-1} de sorte que $K_{q-1}(j_o) \cap f^{-1}(\bar{U}')$ soit un sous-complexe, et soit Δ_n un de ces n-simplexes. Puisque $q < n$, on peut choisir une face de Δ_n dite $\Delta_{n-1} = \delta_o\Delta_n$ qui contient Δ_q^o, et telle que

$\Delta_{n-1} \cap f^{-1}(\delta\bar{U}') = \emptyset$. Remplaçons Δ_q^o par Δ_q' , d'après le lemme , avec $\Delta_q' \pitchfork f$, et $\Delta_q^o = \delta\Delta_q'$. Gardons toutes les autres faces de Δ_{n-1} fixes sauf celles qui touchent $\delta\Delta_q^o$, en appliquant successivement le lemme sur ces simplexes, on obtient un Δ_{n-1}' qui contient Δ_q' et tel que $\Sigma_{\Delta_{n-1}'}$ soit contenu dans $\Sigma_{\Delta_{n-1}}$ .. Appliquons la même modification pour les autres faces $\delta_i\Delta_n$, $i \neq 0$, qui touchent Δ_q^o et gardent les restes fixes. Enfin le lemme nous permet de construire un n-simplexe Δ_n' tel que $\Sigma_{\Delta_n'}$ soit contenu dans Σ_{Δ_n} , et que

$$\Delta_n \cap f^{-1}(\delta\bar{U}') = \Delta_n' \cap f^{-1}(\delta\bar{U}')$$

i.e. conserve le K_{q-1} en dehors de U', et que la face Δ_q' qui correspond à Δ_q^o soit transversale à f . Si $\Delta_n^{\sim}$ est un autre n-simplexe de l'étoile, on le modifiera en conservant les faces communes de $\Delta_n^{\sim}$ et Δ_n pour obtenir un $\Delta_n^{\sim}{}'$ qui vérifiera la même condition que Δ_n' . En continuant ce processus , on arrivera à modifier tous les n-simplexes de l'étoile $K_{q-1}(j_o) \cap f^{-1}(U')$ puisque celui-là est contractile sur Δ_q^o . Le cycle obtenu après cette modification est évidemment homologue à K_{q-1} et n'augmente pas les points

critiques, en plus il ne contient plus le Δ_q^o au départ puisqu'on le remplace par un Δ_q' qui est transversal à f . Faisons cette modification pour tous les Δ_q^o et Δ_{j_o} on obtient le cycle K_q. Ainsi la démonstration par récurrence est achevée.

Appliquons ce que nous venons de démontrer à tous les sommets de $\Sigma_K\tilde{}$; on en déduit le fait suivant, dans le cas où $q = 0$, puis par construction récurrente le fait lui-même pour tout $q \geq 0$

> pour chaque entier $q \geq 0$,il existe un cycle C_q tel que C_q soit homologue à K, Σ_{C_q} inclus dans Σ_K, et l'intersection de $\Sigma_{C_q}\tilde{}$ et de $\Sigma_K{}^{(q)\sim}$ est vide, où $\Sigma_K{}^{(q)\sim}$ est le q-ième squelette de $\Sigma_K\tilde{}$

A partir du C_q nous allons construire le cycle C_{q+1} en appliquant le fait suivant sur tous les q-simplexes de $\Sigma_K\tilde{}$. Fixons-nous un q+1-simplexe Δ_o de $\Sigma_K\tilde{}$ et un ouvert U' contenant Δ_o, alors pour chaque entier $p \geq 1$ il existe un cycle K_p et un ouvert U contenant Δ_o, et dont la fermeture est contenue dans U' tel que :

K_p est homologue à $C = C_q$,
Σ_{K_p} est contenu dans Σ_C ,
l'intersection de Δ_o et de $\Sigma_{K_p}{}^{(p)\sim}$ est vide,

$K_p \cap (Y-f^{-1}(\bar{U})) = C \cap (Y-f^{-1}(\bar{U}))$.

Pour $p = 0$, il suffit de prendre $K_o = C$. Supposons que l'on ait déjà construit K_{p-1} , et soit Δ_p^o un p-simplexe de K_{p-1} tel que l'intersection de Δ_p^o , $f^{-1}(\Delta_o)$ et $\Sigma_{K_{p-1}}$ soit non vide. Alors le même raisonnement tenu auparavant montre que l'on peut modifier le cycle K_{p-1} dans un voisinage de Δ_p^o de sorte que le nouveau cycle obtenu a une face Δ_p' correspondant à Δ_p^o avec $\Delta_p' \neq f$ d'où l'existence du cycle K_p . Si on procède de même pour tous les q+1-simplexes de C_q , on obtient un cycle C_{q+1} qui satisfait aux conditions voulues. Alors il est clair que le cycle C_n est un cycle $K\tilde{}$ qui convient pour la démonstration du théorème.

Exemple 3. Le théorème implique que le fibré de Hopf $S^3 \to S^2$ soit de degré infini , pourtant les deux degrés locaux sont évidemment nuls. La projection d'un espace fibré localement

trivial de fibre F connexe ayant pour base une sphère de dimension n, son degré est égal à l'ordre de la classe d'obstruction $\theta \in H_{n-1}(F,Z)$ diminué de 1.

Remarque. D.Sullivan et R.Thom donnent une démonstration plus élégante du théorème 2, dans le cas où f est un fibré différentiable de classe C^∞.

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application différentiable et Σ (contenu dans $\mathbf{R}^m$) l'ensemble des valeurs critiques de f, alors le degré de la restriction de f à $\mathbf{R}^n - f^{-1}(\Sigma)$ sur $\mathbf{R}^m - \Sigma$ est un invariant numérique de l'application f. Cet invariant est évident dans le cas où f est un polynôme complexe quasi-homogène, mais le cas général peut présenter un certain intérêt pour l'étude des singularités des applications différentielles. Enfin, à chaque sous-groupe H d'un groupe de Lie G on associe son *degré* comme étant le degré de la projection canonique de G sur $G/\overline{H}$, de même à chaque classe de représentations ρ de G on associe son *degré* comme étant le degré du sous-groupe $\rho(G)$. Il y aurait peut-être un certain intérêt à étudier ces invariants numériques.

Bibliographie.

[1] E.Cartan:

Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Hermann, Paris, 1945.

[2] C.C.Chou:

Quelques exemples d'homologie sectionnaire de Shih, Chinese Journal of Mathematics, Vol.10 June 1982 .

[3] J.Dieudonné:

Eléments d'Analyse IV, Gauthier-Villars, 1971

[4] C.Ehresmann:

Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, Colloques internationaux du C.N.R.S., 1953

[5] W.Shih:

Un invariant algébrique associé à une application continue et le problème de Cauchy global, C.R.A.S., t.285, série A, p.333, Paris 1977.

[6] W.Shih:

Une remarque sur les équations aux dérivées partielles, C.R.A.S., t.286, série A, p.823, Paris 1978 .

[7] W.Shih:

Une remarque sur les équations du type de Boltzmann, C.R.A.S., t.290, série A , p.1073, Paris 1980 .

[8] W.Shih:

Quelques notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles, C.R.A.S., t.292, série I, p.901, Paris 1981 .

[9] W.Shih:

Sur le théorème de Hurewicz-Fadell, C.R.A.S., t.250, p.4095, Paris 1960 .

[10] R.Thom:

Bull.Sci.Math., France, Vol.87, p.455, 1959 .

La Chênetière,

78120 Raizeux
France