DIAGRAMMES

L. COPPEY
C. LAIR

Algébricité, monadicité, esquissabilité et non-algébricité

Diagrammes, tome 13 (1985), p. 1-112
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1985__13__1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol. 13 , 1985.

A.M.S. Sub. Class.
18 C 10 , 18 C 15,
18 C 20 , 18 A 10.

Algébricité, monadicité, esquissabilité et non-algébricité .

L. Coppey et C. Lair.

INTRODUCTION.

Ce travail répond à une question posée par A. Burroni en Novembre 1983, au Séminaire de Théorie des Catégories de l'Université Paris 7:

- la catégorie des (petites) catégories munies d'un choix d'extensions de Kan inductives, le long du foncteur $\underline{1} \longrightarrow (\mathbb{N}, +)$, est-elle une catégorie d'algèbres graphiques (au sens de (A.L.G.R.)) ou encore, ce qui est équivalent dans ce cas, est-elle "monadique" sur la catégorie Graph des graphes (orientés)?

S'il nous paraît opportun de donner, ici et maintenant, la réponse à cette question, ce n'est évidemment pas pour prouver une éventuelle sagacité supérieure ou une possible rapidité plus grande à résoudre ex nihilo un problème neuf par "nature" (quitte à déposséder celui qui serait alors son découvreur de cette nouveauté). C'est, bien au contraire, pour saisir une occasion supplémentaire de (ré-)affirmer qu'un cadre théorique convenable et des méthodes appropriées existent depuis longtemps (1972 pour le premier, 1975 pour les secondes) et qui sont adaptés à un traitement assez systématique de ce problème (comme à d'autres, dont la "nature" n'est ni plus ni moins importante ou consistante!). Qu'est-ce d'autre, en effet, qu'une algèbre graphique (au sens de (A.L.G.R.)), sinon une algèbre d'une syntaxe (au sens de (T.A.E.P.), dégagé

dès 1972) particulière sur la catégorie particulière Graph ; et quelle serait la "nature" immanente particulière de la catégorie Graph qu'aucune autre catégorie ne recèlerait?
De même, de quelle "essence" profonde la question précédente (et, avec elle, sa réponse) serait-elle douée, que ni la question suivante, ni sa réponse (fournie dès 1975 en (E.S.T.R.)) n'auraient l'heur de posséder:

- la catégorie des (petites) catégories munies d'un choix d'extensions de Kan (inductives et/ou projectives),le long d'un ensemble de foncteurs donnés entre petites catégories, est-elle monadique sur Cat ?

On comprendra donc que nous ayons cru nécessaire de développer, dans le présent travail, nettement plus que la seule preuve technique de la réponse à la question initiale. D'autant que les "initiateurs" de ce cadre théorique convenable et de ces méthodes appropriées ont tout de même leurs mots à écrire, après ceux qui en ont tant écrit, si longtemps après, en se contentant, pour les uns, de banalités affligeantes et en se réfugiant, pour les autres, dans une admiration mystique et passive des quelques expédients techniques finalement utilisés pour traiter (malgré tout, et lorsqu'ils y parviennent) quelques cas particuliers.
Et quels autres mots écrire,sinon ceux permettant de présenter, à nouveau et avec la plus grande précision possible, ce cadre, ces méthodes, leurs développements (nombreux, depuis 1972, et qu'un lecteur sérieux peut trouver facilement dans les différents textes publiés, depuis cette date, par les deux auteurs) et les quelques (rares) travaux qui en sont à l'origine ou ont pu fournir des compléments réellement utiles?

La théorie "générale" de l'algébricité, au sens de (T.A.E.P.), admet exactement les deux origines suivantes:

- d'une part, les travaux de F. E. J. Linton (voir (A.O.F.S.)) où la catégorie de Kleisli d'une monade $\mathbb{T}$ sur une catégorie (localement petite) $\underline{C}$ est interprétée comme une "sur-catégorie" de $\underline{C}$, dont les objets sont les <u>sortes</u> ou <u>arités</u> du type de structures que déterminent les algèbres de $\mathbb{T}$, dont les flèches (essentiellement, celles qui n'appartien-

nent pas à $\underline{C}$) en sont les lois de composition et dont les diagrammes commutatifs en représentent les "axiomes": de ce point de vue, la catégorie de Kleisli de $\mathbb{T}$ est donc la syntaxe diagrammatique complète (en ce sens qu'elle contient "toutes" les lois et "toutes" les équations valides) des algèbres de $\mathbb{T}$,

- d'autre part, les travaux de C. Ehresmann (voir (E.T.S.A.)) où une présentation d'un type de structures (à l'aide de lois, génératrices de lois dérivées, et d'axiomes, dont on peut déduire des théorèmes) est représentée à l'aide d'une esquisse, c'est-à-dire, notamment, par un graphe multiplicatif (qui est un système de générateurs et relations pour une catégorie): ainsi, une telle syntaxe diagrammatique n'est pas en général complète, mais elle engendre toujours une syntaxe complète.

Dans ces conditions, il est naturel de poser, en toute généralité, qu'une syntaxe d'algèbres sur une catégorie $\underline{C}$ est (voir Part. I, §1) un sur-graphe multiplicatif d'un sous-graphe multiplicatif de $\underline{C}$: c'est une présentation d'un type de structures algébriques dont les objets de $\underline{C}$ peuvent être, éventuellement, munis, et elle engendre toujours une syntaxe complète, i. e. une sur-catégorie de $\underline{C}$.
Il est alors utile de comparer ce point de vue à celui de la monadicité, dont il est, en partie, issu (voir Part. I, §2): un foncteur vers $\underline{C}$ est algébrique s'il est le foncteur "objet (de $\underline{C}$) sous-jacent" de la catégorie des algèbres d'une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$. Lorsqu'il admet un adjoint à gauche (ce qui n'est pas toujours le cas), il est nécessairement monadique (c'est ce point, essentiel, qui fut souligné dès 1972 en (T.A.E.P.)). Réciproquement, un foncteur vers $\underline{C}$, admettant un adjoint à gauche et monadique,est toujours algébrique (pour la syntaxe que constitue la catégorie de Kleisli de la monade associée).
Pratiquement, on peut souhaiter contrôler la taille, ou mieux le degré de complétude éventuelle, d'une syntaxe, i. e. n'engendrer, à partir d'une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, qu'une sur-catégorie d'une sous-catégorie donnée (qui limite cette taille ou ce degré) de $\underline{C}$ (voir Part. I, §3).
Ceci est à rapprocher (voir Part. I, §4) du point de vue de la "monadici-

té partielle", développé en 1975 par Y. Diers (voir (F.D.C.A.)): un foncteur algébrique en son sens l'est nécessairement au sens de la Part. I, §1. Réciproquement, un foncteur algébrique dans ce dernier sens l'est nécessairement au sens de Y. Diers, dès lors qu'il admet un adjoint à gauche partiel (ce qui n'est pas toujours le cas).

Nous considérons donc (à la suite de (T.A.E.P.)) que ce qui caractérise l'algébricité d'un foncteur n'est pas qu'il possède un adjoint à gauche (total ou partiel) et qu'il soit alors (totalement ou partiellement) monadique, mais plutôt (ou seulement) qu'il est associé à une syntaxe d'algèbres explicite (complète ou non).

Il n'en demeure pas moins qu'un tel foncteur algébrique peut posséder un adjoint à gauche. C'est là, simplement, une de ses propriétés éventuelles supplémentaires, liée tant à la forme particulière de la syntaxe d'algèbres considérée qu'à celle de la catégorie dans le langage de laquelle cette syntaxe est décrite. Ainsi, si $\underline{C}$ possède toutes les limites inductives petites et si les sortes de la syntaxe d'algèbres (supposée petite) sur $\underline{C}$ sont autant d'objets α-présentables de $\underline{C}$ (où α est un ordinal régulier donné) , un foncteur algébrique associé à cette syntaxe possède toujours un adjoint à gauche: il est donc monadique et, de plus, la monade associée est de rang α .

Ceci suggère l'étude générale de la notion de rang d'algébricité (voir Part. II, §1): une syntaxe d'algèbres sur la catégorie quelconque $\underline{C}$ est de rang α , si elle est petite et si tous ses objets sont des objets α-présentables de $\underline{C}$.

Il est alors facile de comparer, comme précédemment, les foncteurs de rang α (ou α-algébriques) dans ce sens aux foncteurs monadiques de rang α .(voir Part. II, §2).

Plus substantiellement encore, si $\underline{C}$ est une catégorie localement α-présentable (au sens de (L.P.L.G.)) ou, ce qui est équivalent, si $\underline{C}$ est la catégorie des réalisations d'une esquisse initiale α-projective (au sens de (E.T.S.A.), dont (T.A.E.P.) est également en partie issu, comme signalé plus haut), nous établissons (voir Part. II, §3) que, pour un foncteur $U\ \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

- U admet un adjoint à gauche et est α-monadique,

- U est α-algébrique,

- U est α-sur-esquissable, au sens de (E.S.T.R.) (i. e. $\underline{A}$ est une catégorie de réalisations d'une esquisse α-projective dont tous les objets, ou sortes, sont déduits des objets de l'esquisse initiale par limites projectives).

Ainsi, dans ce cas, les méthodes syntaxiques, initiées notamment en (E.S.T.R.) , dès 1975, sont applicables, dès lors que l'on cherche à tester l'algébricité, ou la non-algébricité, d'un foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$.

La construction (dans les conditions évoquées plus haut) d'un adjoint à gauche à un foncteur α-algébrique montre que tout objet de $\underline{C}$ engendre une algèbre libre qui est limite inductive α-filtrante d'algèbres "partielles" (voir Part. III, §4): au moins dans son sens intuitif, il s'agit là d'une pratique finalement très courante (voire systématique). Et qui suggère une étude plus précise de la notion d'algèbre partielle.

Si $\underline{B}$ est un sous-graphe multiplicatif de $\underline{C}$ et si C est un objet de $\underline{C}$, alors $\underline{B}$ agit (par composition) sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,C)$, quand B varie dans la classe des objets de $\underline{B}$. Si, de surcroît, $\underline{D}$ est un sur-graphe multiplicatif de $\underline{B}$, i. e. si $\underline{D}$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, un tel C est muni d'une structure d'algèbre, mettons A, dès lors que cette action canonique de $\underline{B}$ admet un prolongement en une action (par "composition formelle") de $\underline{D}$ sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,C)$: ainsi, à toutes flèches $d: B \longrightarrow B'$ de $\underline{D}$ et $c: B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, "consécutives", est associée (par action de d sur c) une flèche $c \cdot_{A} d : B \longrightarrow C$ de $\underline{C}$. De ce point de vue (déduit de (A.O.F.S.)), il est naturel de considérer que C n'est muni que d'une structure d'algèbre partielle , mettons A' , dès que l'action canonique (totale) de $\underline{B}$ admet un prolongement en une action partielle (i. e. au moyen de fonctions et non d'applications) de $\underline{D}$ sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,C)$: ainsi, seules certaines flèches consécutives $d: B \longrightarrow B'$ de $\underline{D}$ et $c: B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$ admettent une composée formelle $c \cdot_{A'} d$ dans $\underline{C}$. Autrement dit, une algèbre partielle est un système de générateurs et relations pour une algèbre totale ce qui

n'est pas fait pour surprendre l'intuition!) , mais très exactement dans le sens où un graphe multiplicatif (ou encore un système de structures, au sens de (C.A.S.T.)) est un système de générateurs et relations pour une catégorie (ou pour une espèce de structures, au sens de (C.A.S.T.)); c'est d'ailleurs ce point qui justifie les développements ultérieurs du premier des deux auteurs (voir (P.C.G.M.) et (S.B.D.S.)). Nous reprenons ce point de vue (initié dès 1972, en (T.A.E.P.)) dans deux cas particuliers (de contraintes sur le genre de partialité des algèbres partielles considérées): ceux des méta-algèbres (voir Part. III, §1) et des para-algèbres (voir Part. III, §2), qui permettent d'exprimer précisément comment une algèbre libre est limite d'algèbres partielles (mais, pour quelques développements complémentaires sur ce sujet, on pourra consulter (C.A.P.E.)).

On connaît le critère de monadicité de J. Beck (voir, par exemples, (C.F.W.M.)) pour un foncteur admettant un adjoint à gauche. On connait, aussi, le critère (plus général) d'algébricité (en son sens) de Y. Diers (voir (F.D.C.A.)), pour un foncteur admettant un adjoint à gauche partiel. Nous ne donnons pas d'autre critère (i. e. d'autre condition nécessaire et suffisante) d'algébricité (au sens de la Part. I, §1)pour un foncteur. Il y a à cela plusieurs raisons.

Remarquons, tout d'abord, que le critère de monadicité de J. Beck n'est pas (malgré la simplicité de son énoncé) d'une application aisée (ce qui ne nuit en rien à son intèrêt théorique - qui nous est utile): il est rare que l'on puisse calculer aisément les conoyaux de paires, même "au dessus" de paires contractiles, dans une catégorie ... dont on ignore même si elle est monadique. C'est d'ailleurs l'une des raisons qui ont conduit à la mise en oeuvre des méthodes utilisées en (E.S.T.R.).

De même, le critère d'algébricité de Y. Diers est d'une application pratique encore plus aléatoire (ce qui ne nuit pas plus à son intèrêt théorique): on ignore même, a priori, quels types de limites (de toute façon plus complexes que les conoyaux) calculer.

Il nous a donc paru inutile de "complèter" ces deux critères, satisfaisants sur le plan théorique, d'un troisième encore moins applicable ! C'est aussi que le problème de l'agébricité d'un foncteur U: $\underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ ne se pose pas toujours, dans la pratique, ex abrupto. Plus précisément

il se pose souvent sous la forme suivante (classique, abordée en (D.I.L.A.)):

- sachant que U': $\underline{A}' \longrightarrow \underline{C}$ est algébrique et que U'': $\underline{A} \longrightarrow \underline{A}'$ l'est aussi, le foncteur composé $U = U'.U''$ l'est-il ?

(on pourrait, plus généralement, supposer que U est un composé de plus de deux foncteurs algébriques, rejoignant ainsi complètement le point de vue des "étages" d'esquissabilité abordé en (E.S.T.R.)).

Toujours est-il que ce n'est que pour ce type de foncteurs, qualifiés de sous-algébriques (voir Part. IV, §1), que nous énonçons une condition suffisante (i. e. pratique) d'algébricité; d'ailleurs, c'est à ce propos, et dans ce but, que la considération de syntaxes non nécessairement complètes (i. e. de présentations) s'avère tout à fait essentielle (voir Part. IV, §2).

Nous consacrons enfin la Partie V à quelques exemples génériques. Essentiellement, nous reprenons celui, qui n'était pas du tout choisi eu hasard, traité en (E.S.T.R.) dès 1975 (voir Part. V, §1): la catégorie des (petites) catégories munies d'un choix d'extensions de Kan (inductives et/ou projectives), le long d'un ensemble donné de foncteurs entre catégories petites, est algébrique sur Cat.

Nous montrons aussi comment des modifications ou spécifications quasi-mécaniques de ce type de structures conduisent (notamment, en utilisant la condition d'algébricité des foncteurs sous-algébriques établie dans la partie IV) à des situations d'algébricité sur Graph:

- la catégorie des petites catégories munies d'un choix de noyaux et/ou conoyaux isotropes, est algébrique sur Graph (ce qui est obtenu d'une manière différente de celle que nous avions élaborée antérieurement, en même temps qu' A. Burroni et indépendamment),

ou encore à des situations de non-algébricité sur Graph:

- la catégorie des petites catégories de Peano n'est pas algébrique sur Graph, ce qui répond à la question évoquée dès le début.

Nous ne tirons aucune gloire particulière d'avoir pu fournir les réponses à quelques questions particulières ... qui sont, aujourd'hui bien à la mode. Nous n'en tirons, non plus, aucune conséquence philosophique ou idéologique (sinon que la mode n'est pas étrangère à l'idéolo-

gie). Par contre, nous constatons que, décidément oui, un cadre théorique convenable et des méthodes appropriées existent, et depuis longtemps, qui intègrent complètement ces quelques questions particulières et au-delà .

PARTIE I :

ALGEBRICITE

1. Algébricité.

A. - On dit que $\underline{D}^{\wedge} = (\underline{C},\underline{B},J: \underline{B} \longrightarrow \underline{D})$ est une *syntaxe d'algèbres* (*sur* $\underline{C}$) si, et seulement si:

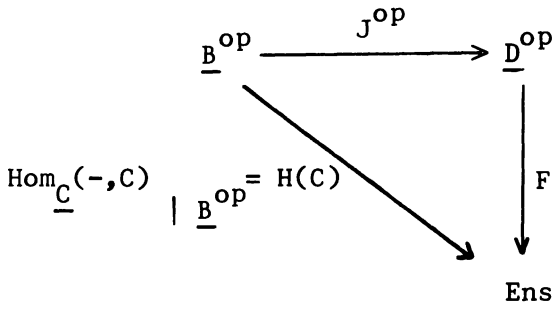
- $\underline{C}$ est une catégorie localement petite,
- $\underline{B}$ est un sous-graphe multiplicatif de $\underline{C}$,
- $J: \underline{B} \longrightarrow \underline{D}$ est un foncteur, bijectif sur les objets,

(voir (T.A.E.P.) et (S.B.D.S.)).

B. - Soit $\underline{D}^{\wedge}$ une syntaxe d'algèbres sur la catégorie localement petite $\underline{C}$.

On dit que (C,F) est une *$\underline{D}^{\wedge}$-algèbre* (*sur* $\underline{C}$) si, et seulement si:

- C est un objet de $\underline{C}$,
- $F: \underline{D}^{op} \longrightarrow$ Ens est un foncteur,
- le diagramme de foncteurs suivant est commutatif:



(alors, pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$ et toute flèche $c: B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, on pose $c \underset{F}{.} d = F(d)(c)$),

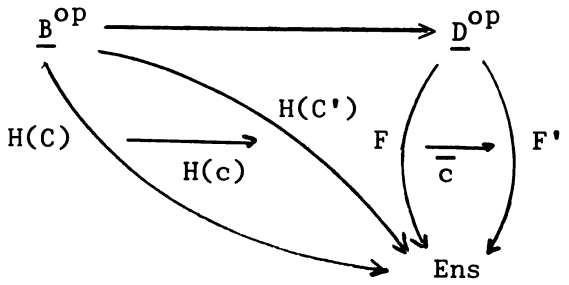
(voir (T.A.E.P.) et (S.B.D.S.)).

De même, on dit que $(c,\overline{c}): (C,F) \longrightarrow (C',F')$ est un *homomorphisme* de la $\underline{D}^{\wedge}$-algèbre (C,F) vers la $\underline{D}^{\wedge}$-algèbre (C',F') si, et seulement si:

- $c: C \longrightarrow C'$ est une flèche de $\underline{C}$,

- $\overline{c}: F \longrightarrow F' : \underline{D}^{op} \longrightarrow Ens$ est une transformation naturelle (nécessairement unique)

- le diagramme suivant, de foncteurs et transformations naturelles, est commutatif:



Bien entendu, les $\underline{D}^{\wedge}$-algèbres (resp. les homomorphismes entre $\underline{D}^{\wedge}$-algèbres) sont les objets (resp. les flèches) d'une catégorie, que l'on note $\underline{D}^{\wedge}$-Alg , et l'on dispose des deux foncteurs d'oubli canoniques

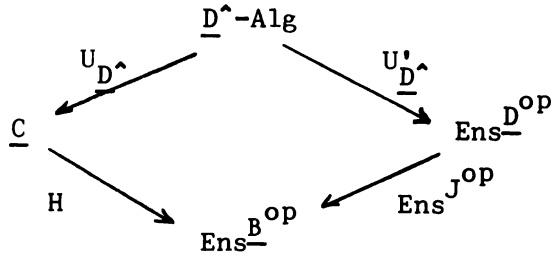
$$U_{\underline{D}^{\wedge}}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$$
$$(C,F) \longmapsto C$$

et

$$U'_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{D}^{op}}$$
$$(C,F) \longmapsto F \quad .$$

Evidemment, la catégorie $\underline{D}^{\wedge}$-Alg est caractérisée comme suit:

Proposition 1. Si $\underline{D}^{\wedge} = (\underline{C},\underline{B},J: \underline{B} \longrightarrow \underline{D})$ est une syntaxe d'algèbres sur la catégorie localement petite $\underline{C}$; alors le diagramme de foncteurs suivant est un produit fibré:



C. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Si $\underline{D}^\wedge = (\underline{C},\underline{B},J\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{D})$ et $\underline{D}'^\wedge = (\underline{C},\underline{B}',J'\colon \underline{B}' \longrightarrow \underline{D}')$ sont deux syntaxes d'algèbres sur $\underline{C}$, on dit que

$$G^\wedge = (\underline{D}'^\wedge, G, \underline{D}^\wedge)\colon \underline{D}'^\wedge \longrightarrow \underline{D}^\wedge$$

est un $\underline{C}$-homomorphisme si, et seulement si:

- $\underline{B}'$ est un sous-graphe multiplicatif de $\underline{B}$,
- $G\colon \underline{D}' \longrightarrow \underline{D}$ est un foncteur,
- le diagramme de foncteurs suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \underline{B} & \xrightarrow{\quad J \quad} & \underline{D} \\ \uparrow & & \uparrow \\ & & G \\ \underline{B}' & \xrightarrow{\quad J' \quad} & \underline{D}' \end{array}$$

Si $G^\wedge : \underline{D}'^\wedge \longrightarrow \underline{D}^\wedge$ est un $\underline{C}$-homomorphisme, il induit un foncteur d'oubli canonique

$$G^\wedge\text{-Alg}\colon \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{D}'^\wedge\text{-Alg}$$
$$(C,F) \longmapsto (C,F.G^{op})$$

qui rend commutatif le diagramme de foncteurs suivant:

$$\begin{array}{ccc} \underline{D}^\wedge\text{-Alg} & \xrightarrow[G^\wedge\text{-Alg}]{} & \underline{D}'^\wedge\text{-Alg} \\ & {\scriptstyle U_{\underline{D}^\wedge}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle U_{\underline{D}'^\wedge}} & \\ & \underline{C} & \end{array}$$

Bien entendu, les syntaxes d'algèbres sur $\underline{C}$ (resp. les $\underline{C}$-homomorphismes) sont les objets (resp. les flèches) d'une catégorie, que l'on note $\underline{C}$-Synt, et l'on dispose d'un foncteur canonique, dit sémantique:

$$U_{_} : (\underline{C}\text{-Synt})^{op} \longrightarrow \mathrm{CaT}/\underline{C}$$

$$\underline{D}^{\wedge} \longmapsto (U_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C})$$

(où CaT désigne la catégorie des catégories localement petites).

D. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, on lui associe la syntaxe d'algèbres

$$\underline{D}(U)^{\wedge} = (\underline{C}, \underline{B}(U), J(U): \underline{B}(U) \longrightarrow \underline{D}(U))$$

sur $\underline{C}$, définie comme suit (voir aussi (F.O.S.A.) et (A.O.F.S.)):

- $\underline{B}(U) = \underline{C}$,
- $\underline{D}(U)$ est la catégorie image pleine (voir (A.O.F.S.)) du foncteur

$$\underline{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{A}})^{op}$$

$$C \longmapsto \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, U(-)) ,$$

- $J(U)$ est le foncteur, associé, défini comme suit

$$J(U): \underline{B}(U) = \underline{C} \longrightarrow \underline{D}(U)$$

$$C \longmapsto (C, \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, U(-)) \quad .$$

Nous dirons que $\underline{D}(U)^{\wedge}$ est la syntaxe <u>complète</u> d'algèbres <u>engendrée par</u> U .

Plus particulièrement, si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, on note $\widetilde{\underline{D}}^{\wedge} = \underline{D}(U_{\underline{D}^{\wedge}})^{\wedge}$ et l'on dit aussi que c'est la syntaxe <u>complète</u> d'algèbres <u>engendrée par</u> $\underline{D}^{\wedge}$

En tout état de cause, on dispose donc d'un foncteur, dit <u>syntaxe</u>,

$$\underline{D}(-)^{\wedge} : \mathrm{CaT}/\underline{C} \longrightarrow (\underline{C}\text{-Synt})^{op}$$

$$U \longmapsto \underline{D}(U)^{\wedge} \quad .$$

Clairement, on a:

<u>Proposition</u> 2. <u>Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, le foncteur syntaxe $\underline{D}(-)^{\wedge}: \mathrm{CaT}/\underline{C} \longrightarrow (\underline{C}\text{-Synt})^{op}$ est adjoint à gauche du foncteur sémantique $U_{_} : (\underline{C}\text{-Synt})^{op} \longrightarrow \mathrm{CaT}/\underline{C}$</u> .

On en déduit que, pour toute syntaxe d'algèbres $\underline{D}^{\wedge}$, sur $\underline{C}$, on dispose d'un $\underline{C}$-homomorphisme (co-unité de la co-monade associée à l'adjonction de la proposition 2 - voir aussi (T.A.E.P.)):

$$G_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge} \longrightarrow \widetilde{\underline{D}}^{\wedge}$$

tel que

$$G_{\underline{D}} : \underline{D} \longrightarrow \widetilde{\underline{D}}$$
$$(d: D \to D') \longmapsto (J^{-1}(D), n_d, J^{-1}(D'))$$

où $n_d : \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C', U_{\underline{D}^{\wedge}}(-)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, U_{\underline{D}^{\wedge}}(-)) : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est la transformation naturelle telle que:

- pour toute $\underline{D}^{\wedge}$-algèbre (C,F) , on a $n_d(C,F) = F(d)$.

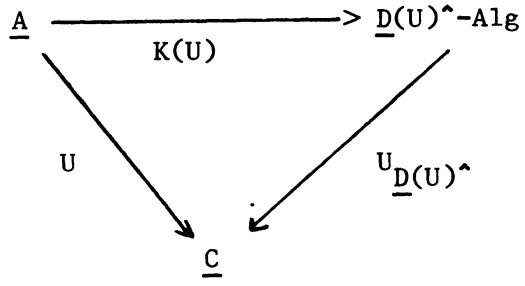
De même, pour tout foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, on dispose d'un foncteur de comparaison:

$$K(U): \underline{A} \longrightarrow \underline{D}(U)^{\wedge}\text{-Alg}$$
$$A \longmapsto (U(A),\ ev_A : \underline{D}(U)^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens})$$

tel que:

$$ev_A : \underline{D}(U)^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$(C, \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, U(-)) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, U(A)) \quad ,$$

rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:



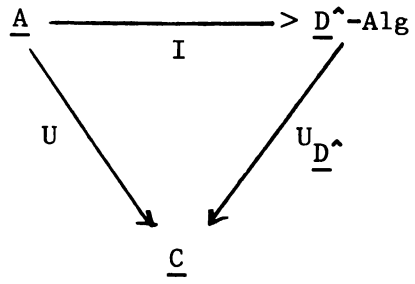
(qui définit l'unité de la monade associée à l'adjonction de la proposition 2).

Enfin, il est facile d'établir que la monade et la co-monade, associées à l'adjonction de la proposition 2, sont idempotentes.

E. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, on dit qu'il est <u>algébrique</u> (<u>sur</u> $\underline{C}$) <u>modulo</u> $\underline{D}^\wedge$ si, et seulement si:

- il existe une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ sur $\underline{C}$ et un foncteur inversible $I: \underline{A} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Alg}$ rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:



Il convient de remarquer qu'un même foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ peut être algébrique sur $\underline{C}$ modulo deux syntaxes d'algèbres sur $\underline{C}$ non isomorphes (dans $\underline{C}$-Synt).

On dit que deux syntaxes d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ et $\underline{D}'^\wedge$ sur $\underline{C}$ sont <u>$\underline{C}$-isovalentes</u> si, et seulement si, l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

- le foncteur $U_{\underline{D}^\wedge}: \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ est algébrique modulo $\underline{D}'^\wedge$,
- le foncteur $U_{\underline{D}'^\wedge}: \underline{D}'^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ est algébrique modulo $\underline{D}^\wedge$.

Plus particulièrement, nous dirons qu'un $\underline{C}$-homomorphisme $G^\wedge: \underline{D}'^\wedge \longrightarrow \underline{D}^\wedge$ est une <u>$\underline{C}$-isologie</u> et que $\underline{D}'^\wedge$ <u>est $\underline{C}$-isologue à</u> $\underline{D}^\wedge$ si, et seulement si:

- le foncteur induit $\underline{G}^\wedge\text{-Alg}: \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{D}'^\wedge\text{-Alg}$ est inversible.

Il convient encore de remarquer que deux syntaxes d'algèbres $\underline{C}$-isologues sont évidemment $\underline{C}$-isovalentes mais que la réciproque n'est pas vraie.

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 3. Si C est une catégorie localement petite, alors:

- pour toute syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ sur C, le C-homomorphisme canonique $G_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge \longrightarrow \widetilde{\underline{D}}^\wedge$ est une C-isologie induisant un foncteur $G_{\underline{D}^\wedge}$-Alg: $\widetilde{\underline{D}}^\wedge$-Alg $\longrightarrow$ $\underline{D}^\wedge$-Alg inverse du foncteur de comparaison $K(U_{\underline{D}^\wedge})$: $\underline{D}^\wedge$-Alg $\longrightarrow$ $\widetilde{\underline{D}}^\wedge$-Alg ,

- deux syntaxes d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ et $\underline{D}'^\wedge$ sur C sont C-isovalentes si, et seulement si, elles engendrent deux syntaxes complètes d'algèbres $\widetilde{\underline{D}}^\wedge$ et $\widetilde{\underline{D}}'^\wedge$ qui sont C-isomorphes (i. e. isomorphes dans la catégorie C-Synt) ,

- deux syntaxes d'algèbres sur C sont C-isovalentes si, et seulement si, elles sont C-isologues à une même troisième.

De même, nous avons:

Proposition 4. Si U: A $\longrightarrow$ C est un foncteur entre deux catégories localement petites, alors:

- le foncteur U est algébrique sur C si, et seulement si, il est algébrique modulo la syntaxe complète d'algèbres $\underline{D(U)}^\wedge$ sur C qu'il engendre,

- le foncteur U est algébrique sur C si, et seulemenent si, le foncteur de comparaison K(U): A $\longrightarrow$ $\underline{D(U)}^\wedge$-Alg est inversible,

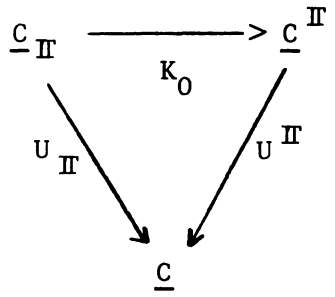
- le foncteur U est algébrique modulo une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ sur C si, et seulement si, $\underline{D}^\wedge$ est C-isologue à la syntaxe complète d'algèbres $\underline{D(U)}^\wedge$ engendrée par U ,

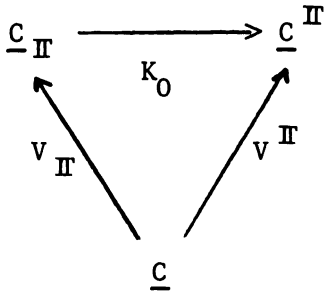
- le foncteur U est algébrique modulo une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ sur C si, et seulement si, les syntaxes complètes d'algèbres $\underline{D(U)}^\wedge$ et $\widetilde{\underline{D}}^\wedge$ sur C, respectivement engendrées par U et $\underline{D}^\wedge$, sont C-isomorphes.

2. Algébricité et monadicité.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Si $\mathbb{T} = (T,u,m)$ est une monade sur $\underline{C}$, nous lui associons les deux diagrammes commutatifs de foncteurs suivants:





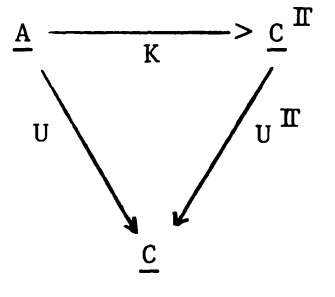
où:

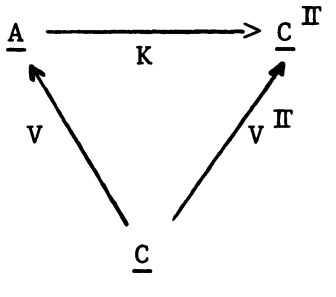
- $\underline{C}^{\mathbb{T}}$ (resp. $\underline{C}_{\mathbb{T}}$) est la catégorie d'Eilenberg-Moore (resp. de Kleisli) de $\mathbb{T}$,

- $V^{\mathbb{T}}$ (resp. $V_{\mathbb{T}}$) est adjoint à gauche de $U^{\mathbb{T}}$ (resp. $U_{\mathbb{T}}$) et cette adjonction induit la monade $\mathbb{T}$,

(voir (C.F.W.M.)).

De même, si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, admettant un adjoint à gauche $V: \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$, cette adjonction induit une monade $\mathbb{T} = (U.V,u,m)$ et l'on dispose des deux diagrammes commutatifs de foncteurs suivants:





où K est le foncteur de comparaison (voir (C.F.W.M.)).

On dit, alors, que U est monadique sur $\underline{C}$ si, et seulement si:

- le foncteur de comparaison $K: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}^{\mathbb{T}}$ est inversible.

B. - Soit $\mathbb{T} = (T,u,m)$ une monade sur la catégorie localement petite $\underline{C}$.

Notons:

- $\underline{B}_{\mathbb{T}} = \underline{C}$,
- $\underline{D}_{\mathbb{T}}$ la catégorie image pleine de $V_{\mathbb{T}} : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}_{\mathbb{T}}$,
- $J_{\mathbb{T}}: \underline{C} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}$ le foncteur associé.

Alors, $\underline{D}_{\mathbb{T}}\hat{} = (\underline{C},\underline{B}_{\mathbb{T}},J_{\mathbb{T}}: \underline{B}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}})$ est, évidemment, une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, dite <u>canoniquement associée à la monade</u> $\mathbb{T}$.

De même, notons:

- $\underline{B}'_{\mathbb{T}} = \underline{C}$,
- $\underline{D}'_{\mathbb{T}}$ le sous-graphe multiplicatif de $\underline{D}_{\mathbb{T}}$ contenant les seules flèches suivantes:
  - + $(C,V_{\mathbb{T}}(c): V_{\mathbb{T}}(C) \longrightarrow V_{\mathbb{T}}(C'),C')$, pour toute flèche $c: C \longrightarrow C'$ de $\underline{C}$,
  - + $(T(C), \overline{m}_C: V_{\mathbb{T}}(T(C)) \longrightarrow V_{\mathbb{T}}(C),C)$, pour tout objet C de $\underline{C}$ (où $\overline{m}_C$ est l'unique flèche de $\underline{C}_{\mathbb{T}}$ telle que $U_{\mathbb{T}}(\overline{m}_C).u_{T(C)} = Id_{T(C)}$),
  - + $(T^2(C),\overline{m}_C.\overline{m}_{T(C)},C)$, pour tout objet C de $\underline{C}$,
  - + $(T(C),\overline{m}_C.V_{\mathbb{T}}(c),C')$, pour toute flèche $c: C \longrightarrow C'$ de $\underline{C}$,

  et tel que:
  - + si d et d' sont deux flèches de $\underline{D}'_{\mathbb{T}}$ (donc aussi de $\underline{D}_{\mathbb{T}}$), composables dans $\underline{D}_{\mathbb{T}}$, dont le composé $d'.d$ appartient à $\underline{D}'_{\mathbb{T}}$, alors elles sont également composables dans $\underline{D}'_{\mathbb{T}}$ (et leur composé est, nécessairement, $d'.d$),
- $J'_{\mathbb{T}}: \underline{B}'_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}'_{\mathbb{T}}$ la restriction de $J_{\mathbb{T}}: \underline{B}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}$,

- $G_{\mathbb{T}} : \underline{D}'_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}$ le foncteur injection canonique.

Alors, $\underline{D}'^{\wedge}_{\mathbb{T}} = (\underline{C}, \underline{B}'_{\mathbb{T}}, J'_{\mathbb{T}} : \underline{B}'_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}'_{\mathbb{T}})$ est, évidemment, une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, dite naturellement associée à la monade $\mathbb{T}$, et $G_{\mathbb{T}}{}^{\wedge} = (\underline{D}'^{\wedge}_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \underline{D}_{\mathbb{T}}{}^{\wedge}) : \underline{D}'^{\wedge}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}{}^{\wedge}$ est un $\underline{C}$-homomorphisme.

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que (voir (T.A.E.P.)):

Proposition 5. *Si $\mathbb{T}$ est une monade sur la catégorie localement petite $\underline{C}$, alors:*

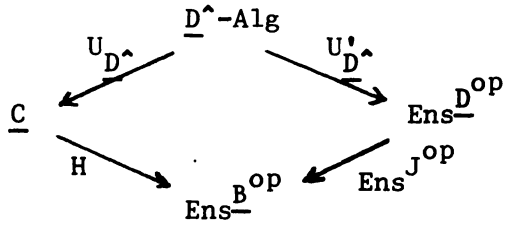
- *le foncteur $U^{\mathbb{T}} : \underline{C}^{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{C}$ est algébrique sur $\underline{C}$, modulo la syntaxe d'algèbres $\underline{D}_{\mathbb{T}}{}^{\wedge}$ canoniquement associée à $\mathbb{T}$,*
- *le foncteur $U^{\mathbb{T}} : \underline{C}^{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{C}$ est algébrique sur $\underline{C}$, modulo la syntaxe d'algèbres $\underline{D}'^{\wedge}_{\mathbb{T}}$ naturellement associée à $\mathbb{T}$,*
- *le $\underline{C}$-homomorphisme $G_{\mathbb{T}}{}^{\wedge} : \underline{D}'^{\wedge}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}{}^{\wedge}$ est une $\underline{C}$-isologie,*
- *les syntaxes complètes d'algèbres sur $\underline{C}$, respectivement engendrées par $U^{\mathbb{T}}$, $\underline{D}'^{\wedge}_{\mathbb{T}}$ et $\underline{D}_{\mathbb{T}}{}^{\wedge}$, sont $\underline{C}$-isomorphes et $\underline{C}$-isomorphes à $\underline{D}_{\mathbb{T}}{}^{\wedge}$.*

C. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, le foncteur d'oubli canonique $U_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ n'admet pas, en général, d'adjoint à gauche: c'est là son seul défaut de monadicité (!) car on a (voir (T.A.E.P.)):

Proposition 6. *Si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur la catégorie localement petite $\underline{C}$, alors le foncteur $U_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ crée les conoyaux absolus* (i. e. il vérifie le critère de Beck - voir par exemple (C.F.W.M.)).

Preuve. On sait que le diagramme commutatif de foncteurs suivant est un produit fibré:



De plus:

- H commute aux conoyaux absolus (puisqu'ils sont absolus!),
- $Ens^{J^{op}}$ commute aux limites inductives petites (puisqu'elles se calculent point par point, tant dans $Ens^{\underline{D}^{op}}$ que dans $Ens^{\underline{B}^{op}}$) mais, de plus, il les crée (puisque J est bijectif sur les objets).

On conclut facilement. Fin de la preuve.

De la proposition 6 précédente, résulte immédiatement que:

Proposition 7. Si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur la catégorie localement petite $\underline{C}$ et si le foncteur $U_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ admet un adjoint à gauche, alors il est monadique sur $\underline{C}$.

Nous fournissons à la proposition 20 (Part. II, §1, E.) une condition suffisante pour qu'un foncteur $U_{\underline{D}^{\wedge}}$ admette un adjoint à gauche.

D. - Des propositions 5 et 7 précédentes, nous déduisons évidemment que:

Proposition 8. Si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur entre deux catégories localement petites et admettant un adjoint à gauche, alors il est monadique sur $\underline{C}$ si, et seulement si, il est algébrique sur $\underline{C}$.

3. Sortes et espèces d'algébricité.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\underline{C}$.

On dit qu'une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^{\wedge} = (\underline{C},\underline{B},J\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{D})$ sur $\underline{C}$ est de sorte $\underline{C}'$ si, et seulement si:

- $\underline{B}$ est un sous-graphe multiplicatif de $\underline{C}'$.

On note, alors, $(\underline{C},\underline{C}')$-Sort la sous-catégorie pleine de $\underline{C}$-Synt dont les objets sont ces syntaxes d'algèbres de sorte $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$.

De même, on dit qu'un foncteur $U\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, est algébrique de sorte $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$ si, et seulement si:

- U est algébrique sur $\underline{C}$ modulo une syntaxe d'algèbres de sorte $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$.

B. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\underline{C}$.

Si $U\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, on note $\underline{D}_{\underline{C}'}(U)^{\wedge} = (\underline{C},\underline{B}_{\underline{C}'}(U),J_{\underline{C}'}(U)\colon \underline{B}_{\underline{C}'}(U) \longrightarrow \underline{D}_{\underline{C}'}(U))$ la syntaxe d'algèbres de sorte $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$ telle que:

- $\underline{B}_{\underline{C}'}(U) = \underline{C}'$,
- $\underline{D}_{\underline{C}'}(U)$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{D}(U)$ dont les objets sont les $(C,\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C,U(-)))$, où C est un objet quelconque de $\underline{C}'$,
- $J_{\underline{C}'}(U)\colon \underline{B}_{\underline{C}'}(U) \longrightarrow \underline{D}_{\underline{C}'}(U)$ est le foncteur restriction du foncteur $J(U)\colon \underline{B}(U) \longrightarrow \underline{D}(U)$.

Nous dirons que $\underline{D}_{\underline{C}'}(U)^{\wedge}$ est la syntaxe complète d'algèbres de sorte $\underline{C}'$ engendrée par U .

En particulier, si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, nous posons $\underline{\mathfrak{D}}_{\underline{C}'}{}^{\wedge} = \underline{D}_{\underline{C}'}(U_{\underline{D}^{\wedge}})^{\wedge}$ et l'on dit que c'est la syntaxe complète d'algèbres de sorte $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$ engendrée par $\underline{D}^{\wedge}$

En tout état de cause, nous disposons d'un foncteur (encore) appelé syntaxe (de sorte $\underline{C}'$):

$$\underline{D}_{\underline{C}'}(-)^{\wedge} : \mathrm{CaT}/\underline{C} \longrightarrow (\underline{C},\underline{C}')\text{-Sort} \ .$$

C. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\underline{C}$.

Si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, on dit qu'il est $\underline{C}'$-localement petit si, et seulement si:

- la catégorie (qu'il engendre) $\underline{D}_{\underline{C}'}(U)$ est localement petite.

On note alors $\mathrm{CaT}/(\underline{C},\underline{C}')$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{CaT}/\underline{C}$ dont les objets sont ces foncteurs $\underline{C}'$-localement petits.
En particulier, on dit qu'une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^{\wedge}$ sur $\underline{C}$ est $\underline{C}'$-localement petite si, et seulement si:

- le foncteur d'oubli canonique $U_{\underline{D}^{\wedge}}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ est $\underline{C}'$-localement petit.

Notons $i': \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur injection canonique, alors il est trivial de constater que:

Proposition 9. *Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, si $\underline{C}'$ en est une sous-catégorie pleine et si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, admettant un i'-adjoint à gauche, alors U est un foncteur $\underline{C}'$-localement petit. En particulier, si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$ et si le foncteur d'oubli canonique $U_{\underline{D}^{\wedge}}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ admet un i'-adjoint à gauche, alors $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres $\underline{C}'$-localement petite sur $\underline{C}$.*

D. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\underline{C}$.

On dit qu'une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^{\wedge}$ sur $\underline{C}$ est d'espèce $\underline{C}'$

si, et seulement si:

- $\underline{D}^{\wedge}$ est de sorte $\underline{C}'$,

- $\underline{D}^{\wedge}$ est $\underline{C}'$-localement petite.

On note alors $(\underline{C},\underline{C}')$-Esp la sous-catégorie pleine de $(\underline{C},\underline{C}')$-Sort dont les objets sont ces syntaxes d'algèbres d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$.

De même, on dit qu'un foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, est algébrique d'espèce $\underline{C}'$ si, et seulement si:

- U est algébrique sur $\underline{C}$ modulo une syntaxe d'algèbres d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$.

E. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\underline{C}$.

Clairement, on a:

Proposition 10. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite et si $\underline{C}'$ en est une sous-catégorie pleine, alors le foncteur syntaxe de sorte (resp. d'espèce) $\underline{C}'$:

$$\underline{D}_{\underline{C}'}(-)^{\wedge}: \mathrm{CaT}/\underline{C} \longrightarrow ((\underline{C},\underline{C}')\text{-Sort})^{op}$$
$$U \longmapsto \underline{D}_{\underline{C}'}(U)^{\wedge}$$

(resp. $\underline{D}_{\underline{C}'}(-)^{\wedge}_{|} : \mathrm{CaT}/(\underline{C},\underline{C}') \longrightarrow ((\underline{C},\underline{C}')\text{-Esp})^{op}$
$U \longmapsto \underline{D}_{\underline{C}'}(U)^{\wedge}$)

est adjoint à gauche du foncteur (restriction du foncteur) sémantique:

$$U_{-|} : ((\underline{C},\underline{C}')\text{-Sort})^{op} \longrightarrow \mathrm{CaT}/\underline{C}$$
$$\underline{D}^{\wedge} \longmapsto U_{\underline{D}^{\wedge}}$$

(resp. $U_{-||} : ((\underline{C},\underline{C}')\text{-Esp})^{op} \longrightarrow \mathrm{CaT}/(\underline{C},\underline{C}')$
$\underline{D}^{\wedge} \longmapsto U_{\underline{D}^{\wedge}}$).

On en déduit que, pour toute syntaxe d'algèbres $\underline{D}^{\wedge}$ de sorte (resp. d'espèce) $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, on dispose d'un $\underline{C}$-homomorphisme (co-

unité de la co-monade associée à l'adjonction de la proposition 10):

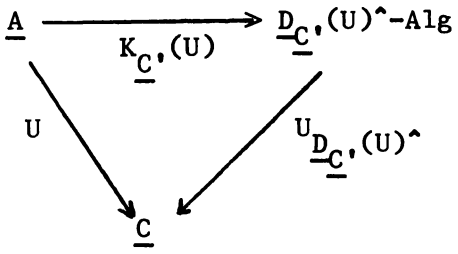
$$G_{\underline{C}',\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge \longrightarrow \widetilde{\underline{D}}_{\underline{C}',\wedge} \quad ,$$

restriction de $G_{\underline{D}^\wedge}: \underline{D}^\wedge \longrightarrow \widetilde{\underline{D}}^\wedge$.

De même, pour tout foncteur (en particulier, pour tout foncteur $\underline{C}'$-localement petit) $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, on dispose d'un foncteur de comparaison:

$$K_{\underline{C}'}(U): \underline{A} \longrightarrow \underline{D}_{\underline{C}'}(U)^\wedge\text{-Alg}$$
$$A \longmapsto (U(A), ev_{\underline{C}',A}: \underline{D}_{\underline{C}'}(U)^{op} \longrightarrow \text{Ens})$$

(où, pour tout objet A de $\underline{A}$, $ev_{\underline{C}',A}$ est le foncteur restriction du foncteur ev_A) rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:



(qui définit l'unité de la monade associée à l'adjonction de la proposition 10).

On en déduit facilement que:

Proposition 11. *Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite et si $\underline{C}'$ en est une sous-catégorie pleine et dense, alors:*

- pour toute syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ de sorte (resp. d'espèce) $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, le $\underline{C}$-homomorphisme $G_{\underline{C}',\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge \longrightarrow \widetilde{\underline{D}}_{\underline{C}',\wedge}$ est une $\underline{C}$-isologie induisant un foncteur $G_{\underline{C}',\underline{D}^\wedge}\text{-Alg} : \widetilde{\underline{D}}_{\underline{C}',\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Alg}$ inverse du foncteur de comparaison $K_{\underline{C}'}(U_{\underline{D}^\wedge}): \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \widetilde{\underline{D}}_{\underline{C}',\wedge}\text{-Alg}$,

- deux syntaxes d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ et $\underline{D}'^\wedge$ de sorte (resp. d'espèce) $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$ sont $\underline{C}$-isovalentes si, et seulement si, elles engen-

drent deux syntaxes complètes d'algèbres $\tilde{D}_{C'}^{\wedge}$ et $\tilde{D}'_{C'}{}^{\wedge}$ de sorte (resp. d'espèce) C' sur C qui sont C-isomorphes,

- deux syntaxes d'algèbres de sorte (resp. d'espèce) C' sur C sont C-isovalentes si, et seulement si, elles sont C-isologues à une même troisième syntaxe complète d'algèbres de sorte (resp. d'espèce) C' sur C .

De même, nous avons:

Proposition 12. Si C est une catégorie localement petite, si C' en est une sous-catégorie pleine et si $U: A \longrightarrow C$ est un foncteur (resp. un foncteur C'-localement petit), où A est une catégorie localement petite, alors:

- le foncteur U est algébrique de sorte (resp. d'espèce) C' sur C si, et seulement si, il est algébrique sur C modulo la syntaxe complète d'algèbres $D_{C'}(U)^{\wedge}$ de sorte (resp. d'espèce) C' sur C qu'il engendre,

- le foncteur U est algébrique de sorte (resp. d'espèce) C' sur C si, et seulement si, le foncteur de comparaison $K_{C'}(U): A \longrightarrow D_{C'}(U)^{\wedge}\text{-Alg}$ est inversible,

- le foncteur U est algébrique de sorte (resp. d'espèce) C' sur C , modulo la syntaxe d'algèbres $D^{\wedge}$ de sorte (resp. d'espèce) C' sur C si, et seulement si, $D^{\wedge}$ est C-isologue à la syntaxe complète d'algèbres $D_{C'}(U)^{\wedge}$ de sorte (resp. d'espèce) C' engendrée par U ,

- le foncteur U est algébrique de sorte (resp. d'espèce) C' sur C , modulo une syntaxe d'algèbres $D^{\wedge}$ de sorte (resp. d'espèce) C' sur C si, et seulement si, les syntaxes complètes d'algèbres $D_{C'}(U)^{\wedge}$ et $\tilde{D}_{C'}{}^{\wedge}$ de sorte (resp. d'espèce) C' sur C , engendrées respectivement par U et $D^{\wedge}$, sont C-isomorphes.

Evidemment, ces deux propositions 11 et 12 signifient que, lorsque C' est une sous-catégorie pleine et dense de C , les monades et comonades associées aux adjonctions de la proposition 10, sont idempotentes.

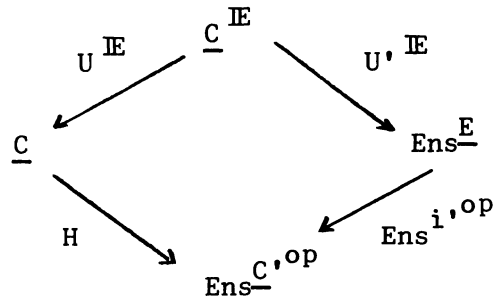
4. Algébricité d'espèce $\underline{C}'$ et i'-algébricité (au sens de Diers).

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine et dense de $\underline{C}$. On note $i' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur injection canonique.

On rappelle (voir (F.D.C.A.)) que $\mathbb{E} = (\underline{E}, e : \underline{C}'^{op} \longrightarrow \underline{E})$ est une i'-théorie si, et seulement si:

- $\underline{E}$ est une catégorie localement petite,
- $e : \underline{C}'^{op} \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur bijectif sur les objets.

La catégorie $\underline{C}^{\mathbb{E}}$ des $\mathbb{E}$-algèbres est alors définie par le produit fibré de foncteurs suivant:



Ainsi, si $\mathbb{E} = (\underline{E}, e)$ est une i'-théorie, elle s'identifie à la syntaxe (complète) d'algèbres $\underline{E}^{op\,\wedge} = (\underline{C}, \underline{C}', e^{op})$, de sorte $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, particulière. De plus, la catégorie $\underline{C}^{\mathbb{E}}$ des $\mathbb{E}$-algèbres est canoniquement isomorphe à la catégorie $\underline{E}^{op\wedge}$-Alg des $\underline{E}^{op\,\wedge}$-algèbres.

B. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine et dense de $\underline{C}$. On note $i' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur injection canonique.

On dit (voir (F.D.C.A.)) qu'une i'-théorie $\mathbb{E} = (\underline{E}, e)$ est algébrique si, et seulement si:

- $e^{op} : \underline{C}' \longrightarrow \underline{E}^{op}$ admet un i'-adjoint à droite.

Il est facile de vérifier que (voir aussi (T.A.E.P.) et (F.D.C.A.)):

Proposition 13. *Si* $\underline{C}$ *est une catégorie localement petite, si* $\underline{C}'$ *est une sous-catégorie pleine et dense de* $\underline{C}$ *et si on désigne par* $i': \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ *le foncteur injection canonique, alors une* i'*-théorie* $\mathbb{E} = (\underline{E}, e: \underline{C}'^{op} \longrightarrow \underline{E})$ *est algébrique si, et seulement si, le foncteur* $U^{\mathbb{E}} : \underline{C}^{\mathbb{E}} \longrightarrow \underline{C}$ *admet un* i'*-adjoint à gauche* $V^{\mathbb{E}}: \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}^{\mathbb{E}}$.

En conséquence, en vertu de la proposition 9, une i'-théorie algébrique $\mathbb{E}$ s'identifie à une syntaxe (complète) d'algèbres $\underline{E}^{op\,\wedge}$, d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, particulière.

C. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine et dense de $\underline{C}$. On note $i': \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur injection canonique.

Si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est localement petite, admettant un i'-adjoint à gauche $V: \underline{C}' \longrightarrow \underline{A}$, on note (voir (F.D.C.A.)) $\mathbb{E}(U) = (\underline{E}(U), e(U): \underline{C}'^{op} \longrightarrow \underline{E}(U))$ la i'-théorie algébrique engendrée par U , i. e. la i'-théorie (dont il est facile de vérifier qu'elle est algébrique) telle que:

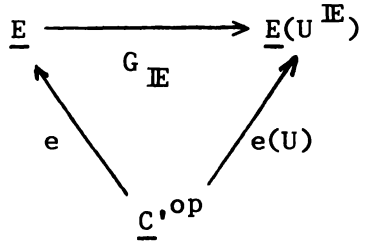
- $\underline{E}(U)^{op}$ est la catégorie image pleine de $V': \underline{C}' \longrightarrow \underline{A}$ (et $e(U)^{op}: \underline{C}' \longrightarrow \underline{E}(U)^{op}$ est le foncteur qui s'en déduit).

Alors, on dit (voir (F.D.C.A.)) que U est i'-algébrique si, et seulement si:

- il existe un foncteur inversible $I: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}^{\mathbb{E}(U)}$ rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow[I]{\qquad} & \underline{C}^{\mathbb{E}(U)} \\ & {\scriptstyle U} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle U^{\mathbb{E}(U)}} & \\ & \underline{C} & \end{array}$$

En particulier, si $\mathbb{E}$ est une i'-théorie algébrique, il est facile de vérifier qu'il existe un unique foncteur inversible $G_{\mathbb{E}} : \underline{E} \longrightarrow \underline{E}(U^{\mathbb{E}})$ rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:



(et, bien entendu, le foncteur $U^{\mathbb{E}} : \underline{C}^{\mathbb{E}} \longrightarrow \underline{C}$ est i'-algébrique).

Clairement, on a:

Proposition 14. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, si $\underline{C}'$ en est une sous-catégorie pleine et dense, si $i' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ désigne le foncteur injection canonique et si $U : \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, admettant un i'-adjoint à gauche, alors:

- la syntaxe d'algèbres $\underline{E}(U)^{op\,\wedge}$ d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, canoniquement associée à la i'-théorie algébrique $\mathbb{E}(U)$, engendrée par U, est $\underline{C}$-isomorphe à la syntaxe complète d'algèbres $\underline{D}(U)^{\wedge}$ d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, engendrée par U,

- si le foncteur U est i'-algébrique, il est algébrique d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$.

En particulier, si $\mathbb{E}$ est une i'-théorie algébrique, alors:

- les syntaxes d'algèbres $\underline{E}^{op\,\wedge}$ et $\underline{E}(U^{\mathbb{E}})^{op\,\wedge}$ d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, canoniquement associées à la i'-théorie $\mathbb{E}$ et à la i'-théorie $\mathbb{E}(U^{\mathbb{E}})$ respectivement, sont $\underline{C}$-isomorphes à la syntaxe complète d'algèbres $\underline{\tilde{E}}^{op}{}_{\underline{C}'}{}^{\wedge}$ d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, engendrée par $\underline{E}^{op\,\wedge}$,

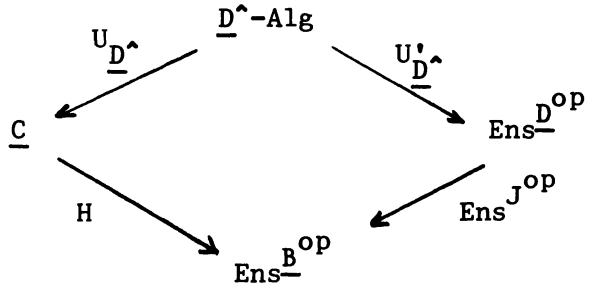
- le foncteur d'oubli canonique $U^{\mathbb{E}} : \underline{C}^{\mathbb{E}} \longrightarrow \underline{C}$ est algébrique d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$.

D. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\underline{C}$.

Si $\underline{C}'$ est dense dans $\underline{C}$, si $i' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ désigne le foncteur injection canonique et si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres d'espèce $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, le foncteur $U_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ n'admet pas, en général, de i'-adjoint à gauche: c'est là son seul défaut de " i'-algébricité " ! En effet, nous avons:

Proposition 15. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, si $\underline{C}'$ en est une sous-catégorie pleine et si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres de sorte $\underline{C}'$ sur $\underline{C}$, alors le foncteur d'oubli canonique $U_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ crée les limites inductives i'-absolues, où $i' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ désigne le foncteur injection canonique (i. e. il vérifie le "critère de Beck généralisé" du Théorème 5.1. de (F.D.C.A.)).

Preuve. On sait que le diagramme commutatif de foncteurs suivant est un produit fibré:



De plus:

- H commute aux limites inductives i'-absolues (par définition),
- $\mathrm{Ens}_{\underline{J}^{op}}$ commute aux limites inductives petites (puisqu'elles se calculent point par point, tant dans $\mathrm{Ens}_{\underline{D}^{op}}$ que dans $\mathrm{Ens}_{\underline{B}^{op}}$) mais, de plus, il les crée (puisque J est bijectif sur les objets).

On conclut facilement. Fin de la preuve.

De la proposition 15 précédente, nous déduisons immédiatement que:

Proposition 16. Si C est une catégorie localement petite, si C' en est une sous-catégorie pleine et dense, si i': C' ⟶ C désigne le foncteur injection canonique, si $D^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres d'espèce C' sur C et si le foncteur d'oubli canonique $U_{D^{\wedge}}$: $D^{\wedge}$-Alg ⟶ C admet un i'-adjoint à gauche, alors il est i'-algébrique (au sens de Diers).

E. - Des propositions 14 et 16 qui précèdent, nous concluons que:

Proposition 17. Si C est une catégorie localement petite, si C' en est une sous-catégorie pleine et dense, si i': C' ⟶ C désigne le foncteur injection canonique et si U: A ⟶ C est un foncteur, où A est une catégorie localement petite, admettant un i'-adjoint à gauche, alors il est i'-algébrique (au sens de Diers) si, et seulement si, il est algébrique d'espèce C' sur C .

PARTIE II :

RANG D'ALGEBRICITE

1. α-algébricité.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Si α est un ordinal régulier, on note $\underline{C}_\alpha$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}$ dont les objets sont tous les objets α-présentables de $\underline{C}$ (voir (L.P.L.G.)).

B. - Il est facile de vérifier que:

Proposition 18. *Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite et si $\underline{D}^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres de sorte $\underline{C}_\alpha$ sur $\underline{C}$, alors le foncteur $U_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ crée les limites inductives (petites) α-filtrantes.*

De même, on a:

Proposition 19. *Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites α-filtrantes et si $\underline{D}^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres de sorte $\underline{C}_\alpha$ sur $\underline{C}$, alors la catégorie $\underline{D}^\wedge$-Alg possède toutes les limites inductives petites α-filtrantes et le foncteur d'oubli canonique $U_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ y commute.*

C. - Soit $\underline{D}^\wedge = (\underline{C}, \underline{B}, J : \underline{B} \longrightarrow \underline{D})$ une syntaxe d'algèbres.

On dit que $\underline{D}^\wedge$ est *petite* si, et seulement si:

- $\underline{D}$ est un graphe multiplicatif petit.

D. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et α un ordinal régulier.

On dit qu'une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ sur $\underline{C}$ est *de rang* α si, et seulement si:

- $\underline{D}^\wedge$ est petite,
- $\underline{D}^\wedge$ est une syntaxe de sorte $\underline{C}_\alpha$ sur $\underline{C}$.

On dit qu'un foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, est α-algébrique si, et seulement si:

- U est algébrique sur $\underline{C}$ modulo une syntaxe d'algèbres de rang α sur $\underline{C}$.

Ainsi, en vertu des propositions 18 et 19 précédentes, un foncteur α-algébrique sur $\underline{C}$ crée les limites inductives petites α-filtrantes et, si $\underline{C}$ possède toutes ces limites, il y commute.

E. - Montrons, maintenant, que:

Proposition 20. Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites et si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres de rang α sur $\underline{C}$, alors le foncteur $U_{\underline{D}^{\wedge}}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ admet un adjoint à gauche.

Preuve. Soit C un objet de $\underline{C}$.
On note $[J,C]$ le graphe multiplicatif (évidemment petit) tel que:

- $[J,C]$ contient le graphe multiplicatif $\underline{B}/C$,

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, n'appartenant pas à $J(\underline{B})$, et, pour toute flèche $e': B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, (d,e') est objet de $[J,C]$,

- $[J,C]$ a un objet supplémentaire (i. e. différent des précédents) noté 1 ,

- pour tout objet B de $\underline{B}$ et toute flèche $e: B \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, $((B,e),1): (B,e) \longrightarrow 1$ est flèche de $[J,C]$,

- pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{B}$ et toutes flèches $e: B \longrightarrow C$ et $e': B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$ telles que $e'.b = e$, alors $((B',e'),1).((B ,e),b,(B',e'))$ est défini dans $[J,C]$ et vaut $((B,e),1)$.

On dispose alors d'un foncteur canonique:

$$[[J,C]]: [J,C] \longrightarrow \underline{C}$$

dont la restriction à $\underline{B}/C$ est le foncteur:

$$\underline{B}/C \xrightarrow[\text{canonique}]{} \underline{B} \xrightarrow[\text{injection}]{} \underline{C}$$

et tel que:

- $[[J,C]](1) = C$,

- pour tout objet B de $\underline{B}$ et toute flèche $e: B \longrightarrow C$ de $\underline{C}$ on a: $[[J,C]]((B,e),1) = e$,

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, n'appartenant pas à $J(\underline{B})$, et pour toute flèche $e': B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, on a: $[[J,C]](d,e') = B$.

Comme $\underline{C}$ possède toutes les limites inductives petites, le foncteur $[[J,C]]: [J,C] \longrightarrow \underline{C}$ admet donc un cône limite inductive

$$(s''_z: [[J,C]](z) \longrightarrow S(C))_{z\in[J,C]} \ .$$

Ainsi, on dispose:

- de la flèche $s(C) = s''_1 : ([[J,C]](1) = C) \longrightarrow S(C)$ de $\underline{C}$,

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, n'appartenant pas à $J(\underline{B})$, et pour toute flèche $e': B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, de la flèche:

$e' \underset{S(C)}{.} d = s''_{(d,e')} : ([[J,C]](d,e') = B) \longrightarrow S(C)$ de $\underline{C}$

- pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{B}$ et toute flèche $e': B' \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, de la flèche:

$$e' \underset{S(C)}{.} J(b) = s(C).e'.b = s''_{(B,e'.b)} = s''_{(B',e')}.[[J,C]]((B,e'.b),b,(B',e'))$$

de source B et de but $S(C)$, dans $\underline{C}$.

Clairement, l'application, ainsi définie, qui à tout objet C de $\underline{C}$ associe $S(C)$, se prolonge canoniquement en un foncteur:

$$S: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$$

et la famille $(s(C))_{C\in Ob\underline{C}}$ définit, bien entendu, une transformation naturelle:

$$s: Id_{\underline{C}} \longrightarrow S : \underline{C} \longrightarrow \underline{C} \ .$$

Dans ces conditions, si C est un objet de $\underline{C}$, on pose:

- $C_0 = C$ et $C_1 = S(C)$,
- $c_{0,1} = s(C): C_0 \longrightarrow C_1$,
- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$ et toute flèche $e': B' \longrightarrow C_0$ de $\underline{C}$, $e' \underset{0,1}{.} d = e' \underset{S(C)}{.} d : B \longrightarrow C_1$.

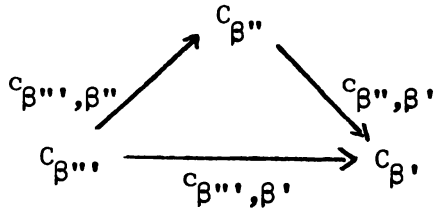
Alors, si $1 < \beta < \alpha$ et si les conditions suivantes sont vérifiées:

a)pour tous $1 \leq \beta'' < \beta' \leq \beta$, on dispose d'une flèche

$$c_{\beta'',\beta'} : C_{\beta''} \longrightarrow C_{\beta'}$$

de $\underline{C}$ et d'une "composition partielle" qui, à toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$ et à toute flèche $e': B' \longrightarrow C_{\beta''}$ de $\underline{C}$, associe la flèche $e' \underset{\beta'',\beta'}{.} d : B \longrightarrow C_{\beta'}$ de $\underline{C}$,

b)pour tous $\beta''' < \beta'' < \beta' \leq \beta$, le diagramme de $\underline{C}$ suivant commute:



c)pour tous $1 \leq \beta'' < \beta' \leq \beta$, pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{B}$ et toute flèche $e': B' \longrightarrow C_{\beta''}$ de $\underline{C}$, on a:

$$e' \underset{\beta'',\beta'}{.} J(b) = c_{\beta'',\beta'} . e' . b \quad ,$$

d)pour tous $\beta''' < \beta'' < \beta' \leq \beta$, pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$ et toute flèche $e': B' \longrightarrow C_{\beta'''}$ de $\underline{C}$, on a:

$$c_{\beta'',\beta'} \cdot (e' \underset{\beta''',\beta''}{.} d) = (c_{\beta''',\beta''} . e') \underset{\beta'',\beta'}{.} d \ ,$$

e)pour tous $\beta''' < \beta'' < \beta' \leq \beta$, pour toutes flèches $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ et $d': J(B') \longrightarrow J(B'')$ de $\underline{D}$, composables dans $\underline{D}$, et pour toute flèche $e'': B'' \longrightarrow C_{\beta'''}$ de $\underline{C}$, on a:

$$(c_{\beta"',\beta"} \cdot_{\beta",\beta'} e") \cdot (d'.d) = (e" \cdot_{\beta"',\beta"} d') \cdot_{\beta",\beta'} d \ ,$$

on note:

$$u_\beta : S(C_\beta) \longrightarrow C_{\beta+1}$$

la flèche (inductivement) universelle de $\underline{C}$ (et qui existe bien puisque $\underline{D}^\wedge$ est petite et $\underline{C}$ possède toutes les limites inductives petites) telle que:

- pour tout $\beta' < \beta$, toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$ et toute flèche $e': B' \longrightarrow C_{\beta'}$ de $\underline{C}$, on a:

$$u_\beta . s(C_\beta) . (e' \cdot_{\beta',\beta} d) = u_\beta . ((c_{\beta',\beta} . e') \cdot_{S(C_\beta)} d) \ ,$$

- pour tout $\beta' < \beta$, toutes flèches $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ et $d': J(B') \longrightarrow J(B")$ de $\underline{D}$, composables dans $\underline{D}$, et toute flèche $e": B" \longrightarrow C_{\beta'}$ de $\underline{C}$, on a:

$$u_\beta . ((e" \cdot_{\beta',\beta} d') \cdot_{S(C_\beta)} d) = u_\beta . ((c_{\beta',\beta} . e") \cdot_{S(C_\beta)} d),$$

et l'on pose:

- pour tout $\beta' \leq \beta$, $c_{\beta',\beta+1} = u_\beta . s(C_\beta) . c_{\beta',\beta} : C_{\beta'} \longrightarrow C_{\beta+1}$ et, pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$ et toute flèche $e': B' \longrightarrow C_{\beta'}$, $e' \cdot_{\beta',\beta+1} d = u_\beta . ((c_{\beta',\beta} . e') \cdot_{S(C_\beta)} d)$.

De même, si $\alpha' \leq \alpha$ est un ordinal limite et si, pour tout $\beta < \alpha'$ les conditions a) à e) précédentes sont vérifiées, on note:

$$C_{\alpha'} = \varinjlim (c_{\beta',\beta} : C_{\beta'} \longrightarrow C_\beta)_{\beta' < \beta < \alpha'}$$

et, pour tout $\beta < \alpha'$, on a donc:

- la co-projection associée $c_{\beta,\alpha'} : C_\beta \longrightarrow C_{\alpha'}$ et, pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$ et toute flèche $e': B' \longrightarrow C_\beta$ de $\underline{C}$, la flèche:

$$e' \cdot_{\beta,\alpha'} d = c_{\beta+1,\alpha'} . (e' \cdot_{\beta,\beta+1} d) \quad .$$

Ainsi, si $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ est une flèche de $\underline{D}$ et si $e': B' \longrightarrow C_\alpha$ est une flèche de $\underline{C}$, il existe (puisque B' est un objet α-présentable de $\underline{C}$ - la syntaxe $\underline{D}^\wedge$ étant de rang α) au moins un $\beta < \alpha$ et une flèche $e'_\beta: B' \longrightarrow C_\beta$ de $\underline{C}$ telle que: $c_{\beta,\alpha} \cdot e'_\beta = e'$. Alors, on pose:

- $e' \underset{F}{.} d = c_{\beta+1,\alpha} \cdot (e'_\beta \underset{\beta,\beta+1}{.} d)$,

et il n'est pas difficile de vérifier que $e' \underset{F}{.} d$, ainsi défini, est indépendant de la représentation e'_β de e' choisie. Il en résulte immédiatement que (C_α, F) est bien une $\underline{D}^\wedge$-algèbre, librement engendrée par $\underline{C}$ (relativement au foncteur $U_{\underline{D}^\wedge}$). Fin de la preuve.

En vertu de cette proposition 20, nous pouvons donc énoncer:

Proposition 21. Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites et si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur α-algébrique, alors il admet un adjoint à gauche.

2. α-algébricité et α-monadicité.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\mathbb{T} = (T,u,m)$ une monade sur la catégorie $\underline{C}$.

Si α est un ordinal régulier, on rappelle que $\mathbb{T}$ est *de rang* α si, et seulement si:

- le foncteur $T: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ commute aux limites inductives (petites) α-filtrantes.

Il est facile de vérifier que:

Proposition 22. *Si* α *est un ordinal régulier, si* $\underline{C}$ *est une catégorie localement petite et si* $\mathbb{T}$ *est une monade de rang* α *sur* $\underline{C}$, *alors le foncteur d'oubli canonique* $U^{\mathbb{T}}: \underline{C}^{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{C}$ *crée les limites inductives (petites)* α*-filtrantes.*

De même, on a:

Proposition 23. *Si* α *est un ordinal régulier, si* $\underline{C}$ *est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites* α*-filtrantes et si* $\mathbb{T}$ *est une monade sur* $\underline{C}$, *alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *le foncteur* $U^{\mathbb{T}}: \underline{C}^{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{C}$ *commute aux limites inductives petites* α*-filtrantes,*

(ii) *la monade* $\mathbb{T}$ *est de rang* α,

(iii) *la catégorie* $\underline{C}^{\mathbb{T}}$ *possède toutes les limites inductives petites* α*-filtrantes et le foncteur* $U^{\mathbb{T}}: \underline{C}^{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{C}$ *les crée.*

B. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, admettant un adjoint à gauche $V: \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$.

Si α est un ordinal régulier, on dit que U est α*-monadique* si, et seulement si:

- U est monadique,

- la monade $\mathbb{T} = (U.V,u,m)$, associée à l'adjonction de V à gauche de U , est de rang α .

Clairement, on a, en vertu des propositions 7 et 19:

Proposition 24. Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites α-filtrantes et si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, α-algébrique sur $\underline{C}$ et admettant un adjoint à gauche, alors il est α-monadique sur $\underline{C}$.

C. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et α un ordinal régulier (rappelons qu'alors on note $\underline{C}_\alpha$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}$ dont les objets sont les objets α-présentables de $\underline{C}$).

On dit que $\underline{C}$ est localement α-générable (modulo $\underline{C}'_\alpha$) si, et seulement si:

- $\underline{C}'_\alpha$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{C}_\alpha$ et le foncteur injection canonique $\underline{C}'_\alpha \longrightarrow \underline{C}_\alpha$ est une équivalence,

- $\underline{C}'_\alpha$ est petite,

- $\underline{C}'_\alpha$ est dense dans $\underline{C}$,

- pour tout objet C de $\underline{C}$, la catégorie $\underline{C}'_\alpha/C$ est α-filtrante.

D. - Soit α un ordinal régulier et $\underline{C}$ une catégorie localement α-générable modulo $\underline{C}'_\alpha$.

Si $\mathbb{T} = (T,u,m)$ est une monade (de rang α) sur $\underline{C}$, nous notons:

- $\underline{B}_{\alpha,\mathbb{T}} = \underline{C}'_\alpha$,

- $\underline{D}_{\alpha,\mathbb{T}}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{D}_{\mathbb{T}}$ (voir Part. I, §2, B.) dont les seuls objets sont les $(C,V_{\mathbb{T}}(C))$, où C est un objet quelconque de $\underline{C}'_\alpha$,

- $J_{\alpha,\mathbb{T}} : \underline{B}_{\alpha,\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\alpha,\mathbb{T}}$ le foncteur restriction de $J_{\mathbb{T}}$,

- $G_{\alpha, \mathbb{T}} : \underline{D}_{\alpha, \mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}$ le foncteur injection canonique.

Dans ces conditions, il est trivial de constater que

$$\underline{D}_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} = (\underline{C}, \underline{B}_{\alpha, \mathbb{T}}, J_{\alpha, \mathbb{T}} : \underline{B}_{\alpha, \mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}_{\alpha, \mathbb{T}})$$

est une syntaxe d'algèbres de rang α sur $\underline{C}$ et que

$$G_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} : \underline{D}_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}\hat{}$$

est un $\underline{C}$-homomorphisme.

De même, notons:

- $\underline{B}'_{\alpha, \mathbb{T}}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}$ dont les seuls objets sont les C, $T(C)$ et $T^2(C)$, où C est un objet quelconque de $\underline{C}'_{\alpha}$,
- $\underline{D}'_{\alpha, \mathbb{T}}$ le sous-graphe multiplicatif plein (pour les flèches et la composition) de $\underline{D}'_{\mathbb{T}}$ (voir Part. I, §2,B.) dont les seuls objets sont les images par $J'_{\mathbb{T}}$ de ceux de $\underline{B}'_{\alpha, \mathbb{T}}$,
- $J'_{\alpha, \mathbb{T}} : \underline{B}'_{\alpha, \mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}'_{\alpha, \mathbb{T}}$ le foncteur restriction de $J'_{\mathbb{T}}$,
- $G'_{\alpha, \mathbb{T}} : \underline{D}'_{\alpha, \mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}'_{\mathbb{T}}$ le foncteur injection canonique.

Il est tout aussi facile de constater que

$$\underline{D}'_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} = (\underline{C}, \underline{B}'_{\alpha, \mathbb{T}}, J'_{\alpha, \mathbb{T}} : \underline{B}'_{\alpha, \mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}'_{\alpha, \mathbb{T}})$$

est une syntaxe d'algèbres (qui n'est pas en général de rang α) sur $\underline{C}$ et que

$$G'_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} : \underline{D}'_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} \longrightarrow \underline{D}'_{\mathbb{T}}\hat{}$$

est un $\underline{C}$-homomorphisme.

Clairement, nous avons alors:

Proposition 25. *Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement α-générable et si $\mathbb{T}$ est une monade de rang α sur $\underline{C}$, alors:*

- *les $\underline{C}$-homomorphismes $G_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} : \underline{D}_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} \longrightarrow \underline{D}_{\mathbb{T}}\hat{}$ et $G'_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} : \underline{D}'_{\alpha, \mathbb{T}}\hat{} \longrightarrow \underline{D}'_{\mathbb{T}}\hat{}$ sont des $\underline{C}$-isologies,*

- les syntaxes d'algèbres $\underline{D}_{\alpha, \mathbb{I}}\hat{}$ et $\underline{D}_{\underline{C}^{\mathbb{I}}_{\alpha}}(U^{\mathbb{I}})\hat{}$ (voir Part. I, §3, B.) sont C-isomorphes,
- le foncteur $U^{\mathbb{I}}: \underline{C}^{\mathbb{I}} \longrightarrow \underline{C}$ est algébrique sur $\underline{C}$ modulo $\underline{D}'_{\alpha, \mathbb{I}}\hat{}$,
- le foncteur $U^{\mathbb{I}}: \underline{C}^{\mathbb{I}} \longrightarrow \underline{C}$ est α-algébrique sur $\underline{C}$ modulo $\underline{D}_{\alpha, \mathbb{I}}\hat{}$.

Il en résulte que:

Proposition 26. Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement α-générable et si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, admettant un adjoint à gauche et α-monadique sur $\underline{C}$, alors il est α-algébrique sur $\underline{C}$.

E. - Soit α un ordinal régulier.

Il est facile de vérifier que, si $\underline{C}$ est une catégorie localement α-générable qui possède toutes les limites inductives petites, alors elle est localement α-présentable et inversement (voir (L. P. L. G.) et (C. S. C. S.)).

Des propositions 21, 24 et 26 précédentes résulte donc que:

Proposition 27. Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement α-présentable et si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(i) U admet un adjoint à gauche et est α-monadique sur $\underline{C}$,

(ii) U est α-algébrique sur $\underline{C}$.

3. α-algébricité et α-sur-esquissabilité.

A. - Soit α un ordinal régulier.

On dit que $/\underline{S}/ = (\underline{S},P)$ est une esquisse de rang α (voir (E.T.S.A.)) si, et seulement si:

- $\underline{S}$ est un graphe multiplicatif petit,
- P est un ensemble de cônes projectifs de $\underline{S}$ (dits distingués) indexés par des catégories α-petites.

Si $/\underline{S}/$ est une esquisse de rang α, on dit que $R: /\underline{S}/ \longrightarrow Ens$ est une réalisation (ou modèle, ou faisceau) de $/\underline{S}/$ si, et seulement si:

- $R: \underline{S} \longrightarrow Ens$ est un foncteur,
- l'image par R de tout cône distingué (i. e. de tout élément de P) est une limite projective de Ens.

Alors, on note $Ens^{/\underline{S}/}$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{\underline{S}}$ dont les objets sont ces réalisations.

B. - Soit α un ordinal régulier.

Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, on dit qu'elle est α-esquissable (modulo $/\underline{S}/$) si, et seulement si:

- il existe une esquisse $/\underline{S}/$ de rang α telle que $\underline{C}$ et $Ens^{/\underline{S}/}$ soient des catégories équivalentes.

Rappelons que (voir (L.P.L.G.) et (C.S.C.S.)):

Proposition 28. Si α est un ordinal régulier et si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\underline{C}$ est une catégorie α-esquissable,

(ii) $\underline{C}$ est une catégorie localement α-présentable.

C. - Soit α un ordinal régulier.

Si $/\underline{S}/ = (\underline{S},P)$ et $/\underline{S}'/ = (\underline{S}',P')$ sont deux esquisses de rang α, on dit que $/H/: /\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{S}/$ est un <u>homomorphisme</u> si, et seulement si:

- $H: \underline{S}' \longrightarrow \underline{S}$ est un foncteur,
- $H(P')$ est inclus dans P.

Un tel homomorphisme induit, évidemment, un <u>foncteur d'oubli canonique</u>:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ens}^{/H/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} &\longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}'/} \\ R &\longmapsto R.H \end{aligned}$$

Rappelons que ("théorème du faisceau associé"):

<u>Proposition 29. Si α est un ordinal régulier et si $/H/:/\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{S}/$ est un homomorphisme entre deux esquisses de rang α, alors le foncteur d'oubli canonique</u>

$$\mathrm{Ens}^{/H/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}'/}$$

<u>possède un adjoint à gauche et commute aux limites inductives petites α-filtrantes</u>.

D. - Soit α un ordinal régulier.

Si $/\underline{S}/$ et $/\underline{S}'/$ sont deux esquisses de rang α, on dit que $/H/: /\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{S}/$ est un <u>sur-homomorphisme</u> si, et seulement si (voir (E.S.T.R.), (E.D.S.A.), (C.S.T.R.) et (S.B.D.S.)):

- $/H/: /\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{S}/$ est un homomorphisme,
- pour tout cône projectif distingué $(s_I: S \longrightarrow S_I)_{I\in\underline{I}}$ de $/\underline{S}/$, de base le foncteur:

$$\begin{aligned} \theta: \underline{I} &\longrightarrow \underline{S} \\ I &\longmapsto S_I \quad , \end{aligned}$$

il existe un foncteur $\theta': \underline{I} \longrightarrow \underline{S}'$ tel que $H.\theta' = \theta$ (autrement dit: tout cône projectif distingué de $/\underline{S}/$ "est à base dans $/\underline{S}'/$ "),

- tout objet de $\underline{S}$, qui n'est pas image par H d'un objet de $\underline{S}'$, est sommet d'un cône projectif distingué de $/\underline{S}/$.

E. - Soit α un ordinal régulier et $\underline{C}$ une catégorie localement α-présentable.

Si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, nous dirons qu'il est α-sur-esquissable (modulo /H/) si, et seulement si:

- U crée les isomorphismes (i. e. : pour tout objet A de $\underline{A}$ et toute flèche inversible $c: U(A) \longrightarrow C$ de $\underline{C}$, il existe une unique flèche inversible $a: A \longrightarrow A'$ de $\underline{A}$ telle que $U(a) = c$),

- il existe un sur-homomorphisme $/H/:/\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{S}/$, entre esquisses de rang α, et deux équivalences de catégories $\underline{A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ et $\underline{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}^{/\underline{S}'/}$ rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ens}^{/H/}} \\ \underline{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ens}^{/\underline{S}'/} \end{array}$$

Dans ces conditions, on a (voir (E.S.T.R.), (E.D.S.A.) et (C.S.T.R.)):

Proposition 30. *Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement α-présentable et si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) U *admet un adjoint à gauche et est α-monadique sur $\underline{C}$,*

(ii) U *est α-algébrique sur $\underline{C}$,*

(iii) U *est α-sur-esquissable.*

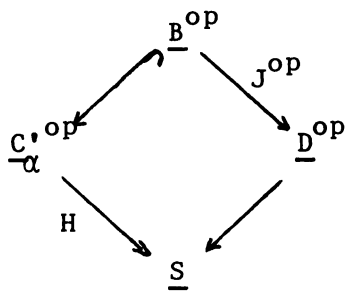
Preuve. La proposition 27 indique déjà que (i) implique (ii) (et lui est même équivalente, ce que nous ignorons délibérément ici!).
Supposons que U est α-algébrique sur $\underline{C}$ modulo la syntaxe d'algèbres $\underline{D}^{\wedge}$ de rang α sur $\underline{C}$. Comme $\underline{C}$ est localement α-présentable, la

sous-catégorie pleine $\underline{C}_\alpha$ de $\underline{C}$, dont les objets sont tous les objets α-présentables de $\underline{C}$, contient une sous-catégorie pleine $\underline{C}'_\alpha$ telle que:

- $\underline{C}'_\alpha \longrightarrow \underline{C}_\alpha$ est une équivalence,
- $\underline{C}'_\alpha$ est petite,
- $\underline{C}'_\alpha$ est dense dans $\underline{C}$,
- $\underline{C}'_\alpha$ possède toutes les limites inductives α-petites.

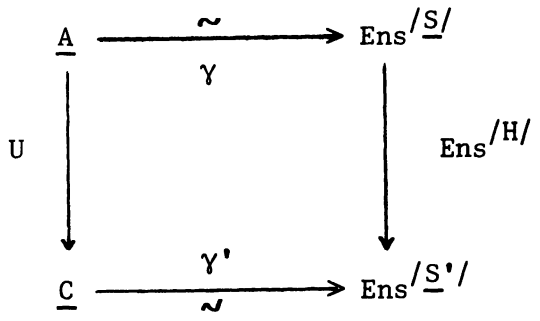
Alors, on peut supposer que $\underline{D}^\wedge$ est de sorte $\underline{C}'_\alpha$.
Notons, dans ces conditions:

- $\underline{S}' = \underline{C}'^{op}_\alpha$,
- P' un choix de (toutes les) limites projectives α-petites dans $\underline{S}'$,
- $\underline{S}$ le graphe multiplicatif (évidemment petit) somme fibrée, représentée par le diagramme commutatif de foncteurs suivant:



- $P = H(P')$.

Il est facile de vérifier que $/H/: /\underline{S}'/ = (\underline{S}', P') \longrightarrow /\underline{S}/ = (\underline{S}, P)$ est bien un sur-homomorphisme entre esquisses de rang α et que le foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est α-esquissable modulo $/H/$. La condition (ii) implique donc la condition (iii).
Si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur α-sur-esquissable modulo un sur-homomorphisme $/H/: /\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{S}/$ entre esquisses de rang α, on dispose d'un diagramme commutatif de foncteurs:



où γ et γ' sont des équivalences.

Ainsi, U admet un adjoint à gauche, puisqu'il en est ainsi de $Ens^{/H/}$ (d'après la proposition 29). Comme $\underline{C}$ possède toutes les limites inductives petites α-filtrantes (puisqu'il est facile d'établir que c'est le cas de $Ens^{/\underline{S}'/}$) et comme U commute avec ces limites (puisque c'est le cas de $Ens^{/H/}$, en vertu de la proposition 29), pour montrer que U est α-monadique, il suffit d'établir (d'après la proposition 22) qu'il est monadique. Comme U crée (par hypothèse) les isomorphismes, il suffit donc de montrer que $Ens^{/H/}$ crée, à isomorphisme près, les conoyaux absolus.

Supposons donc que $r,r' : R_1 \rightrightarrows R_2$ est une paire de flèches de $Ens^{/\underline{S}/}$ et que le diagramme commutatif de $Ens^{/\underline{S}'/}$ suivant:

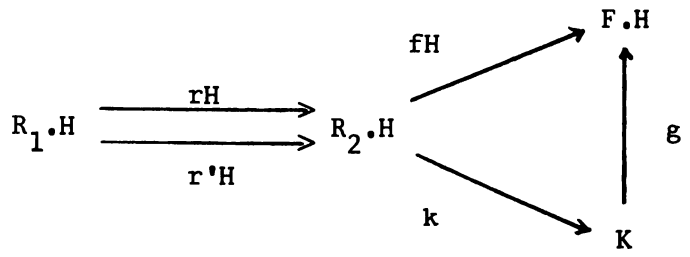
$$R_1.H \underset{r'H}{\overset{rH}{\rightrightarrows}} R_2.H \xrightarrow{k} K$$

est un conoyau absolu. Alors, c'est aussi un conoyau absolu (et calculé point par point) dans la catégorie de foncteurs $Ens^{\underline{S}'}$. Si l'on considère le conoyau (calculé point par point) représenté par le diagramme commutatif de $Ens^{\underline{S}}$ suivant:

$$R_1 \underset{r'}{\overset{r}{\rightrightarrows}} R_2 \xrightarrow{f} F$$

il existe, par conséquent, une unique équivalence naturelle $g : K \longrightarrow F.H$

rendant commutatif le diagramme de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}'}$ suivant:



Mais, si $(s_I : S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ est un cône projectif distingué dans $/\underline{S}/$, de base le foncteur

$$\theta : \underline{I} \longrightarrow \underline{S}$$
$$I \longmapsto S_I \quad ,$$

il existe, par hypothèse, un foncteur

$$\theta' : \underline{I} \longrightarrow \underline{S}'$$
$$I \longmapsto S'_I$$

tel que $H.\theta' = \theta$.

On a donc, successivement:

- $F(S) = \mathrm{coker} \left(R_1(S) \rightrightarrows R_2(S) \right)$

$= \mathrm{coker} \left(\varprojlim_{I \in \underline{I}} (R_1(S_I) \rightrightarrows R_2(S_I)) \right)$

(puisque R_1 et R_2 sont des réalisations)

$= \mathrm{coker} \left(\varprojlim_{I \in \underline{I}} (R_1.H(S'_I) \rightrightarrows R_2.H(S'_I)) \right)$

$= \varprojlim_{I \in \underline{I}} \left(\mathrm{coker} (R_1.H(S'_I) \rightrightarrows R_2.H(S'_I)) \right)$

(puisque les conoyaux considérés sont absolus)

$= \varprojlim_{I \in \underline{I}} (K(S'_I))$

$= \varprojlim_{I \in \underline{I}} (F.H(S'_I)) = \varprojlim_{I \in \underline{I}} (F(S_I))$.

Par conséquent, F est une réalisation de $/\underline{S}/$. D'où la conclusion.

Fin de la preuve.

PARTIE III :

ALGEBRES PARTIELLES

1. Méta-algèbres.

A. - Si $\underline{D}$ est un graphe multiplicatif, on note $\S\underline{D}$ le graphe multiplicatif subdivision de $\underline{D}$, i. e. le graphe multiplicatif trivial tel que (voir (C.F.W.M.)):

- tout objet D de $\underline{D}$ est objet de $\S\underline{D}$,
- toute flèche d de $\underline{D}$ est objet de $\S\underline{D}$,
- si $d: D \longrightarrow D'$ est une flèche de $\underline{D}$, alors $(d,1): d \longrightarrow D$ et $(d,2): d \longrightarrow D'$ sont deux flèches de $\S\underline{D}$.

Alors, à tout foncteur $F: \underline{D}^{op} \longrightarrow Ens$, on associe le foncteur $\&F: \S\underline{D} \longrightarrow Ens$ tel que:

- pour tout objet D de $\underline{D}$, on a $\&F(D) = F(D)$,
- pour toute flèche $d: D \longrightarrow D'$, on a $\&F(d,1) = F(d)$ et $\&F(d,2) = Id_{F(D')}$.

Clairement, l'application qui à tout objet F de $Ens^{\underline{D}^{op}}$ associe l'objet &F de $Ens^{\S\underline{D}}$ se prolonge canoniquement en un foncteur:

$$\&: Ens^{\underline{D}^{op}} \longrightarrow Ens^{\S\underline{D}}$$

(la raison de la dualité intervenant ici n'est que de pure commodité).

B. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{D}^{\wedge}$ une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$.

On dit que $(C, p: X \longrightarrow C, G)$ est une $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbre si, et seulement si, (voir aussi (S.B.D.S.)):

- $p: X \longrightarrow C$ est une flèche de $\underline{C}$,
- $G: \S\underline{D} \longrightarrow Ens$ est un foncteur (et, pour toute flèche d de $\underline{D}$, l'application G(d,1) est une loi de composition partielle de la structure de $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbre considérée),
- pour tout objet $D = J(B)$ de $\underline{D}$, on a $G(D) = Hom_{\underline{C}}(B,C)$,

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, on a:

$$G(d) = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B',X) \ ,$$

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, on a:

$$G(d,2) = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B',p) \ ,$$

- pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{B}$, on a:

$$G(J(b),1)=\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,p).\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(b,X) \ .$$

De même, on dit que $(c,x): (C,p,G) \longrightarrow (C',p',G')$ est un homomorphisme de la $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbre (C,p,G) vers la $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbre (C',p',G') si, et seulement si:

- $x: X \longrightarrow X'$ et $c: C \longrightarrow C'$ sont deux flèches de $\underline{C}$ rendant commutatif le diagramme de $\underline{C}$ suivant:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[p]{} & C \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ X' & \xrightarrow[p']{} & C' \end{array}$$

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, le diagramme de Ens suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B', X) & \xrightarrow[G(d,1)]{} & \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,C) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B',x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,c)} \\ \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B',X') & \xrightarrow[G'(d,1)]{} & \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,C') \end{array}$$

Dans ces conditions, on note $\underline{D}^{\wedge}$-Métalg la catégorie dont les objets (resp. les flèches) sont ces $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbres (resp. les homomorphismes entre $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbres).
Alors, on dispose des deux foncteurs:

$$\begin{aligned} \mathrm{Domet}_{\underline{D}^\wedge} \ : \ \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} &\longrightarrow \underline{C} \\ (C,p\colon X \to C,G) &\longmapsto X \\ ((c,x)\colon (C,p,G) \to (C',p',G')) &\longmapsto x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Codomet}_{\underline{D}^\wedge} \ : \ \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} &\longrightarrow \underline{C} \\ (C,p\colon X \to C,G) &\longmapsto C \\ ((c,x)\colon (C,p,G) \to (C',p',G')) &\longmapsto c \end{aligned}$$

ainsi que de la transformation naturelle:

$$\pi_{\underline{D}^\wedge} : \mathrm{Domet}_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \mathrm{Codomet}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{C}$$

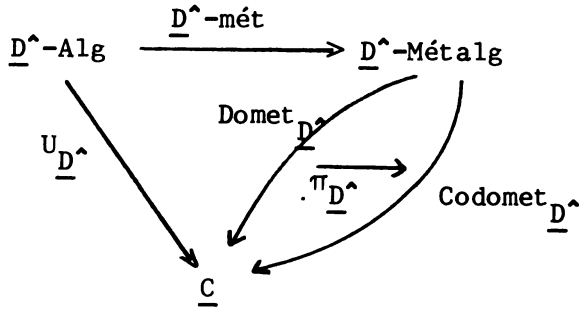
telle que, pour toute $\underline{D}^\wedge$-méta-algèbre (C,p,G), on a:

- $\pi_{\underline{D}^\wedge}(C,p,G) = p$.

De même, on dispose du foncteur injectif:

$$\begin{aligned} \underline{D}^\wedge\text{-mét}\colon \underline{D}^\wedge\text{-Alg} &\longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \\ (C,F) &\longmapsto (C, \mathrm{Id}_C\colon C \to C, \&F) \\ ((c,\overline{c})\colon (C,F) \to (C',F')) &\longmapsto (c,c) \end{aligned}$$

de sorte que le diagramme de foncteurs et transformations naturelles suivant est commutatif:



C. - Montrons que:

Proposition 31. Si C est une catégorie localement petite possédant

toutes les petites limites inductives et si $\underline{D}^{\wedge}$ est une petite syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, alors le foncteur $\mathrm{Domet}_{\underline{D}^{\wedge}}$: $\underline{D}^{\wedge}$-Métalg $\longrightarrow \underline{C}$ admet un adjoint à gauche.

Preuve. Comme $\underline{D}^{\wedge}$ est petite, les considérations et constructions du début de la preuve de la proposition 20, Part. II, §1, B., dont nous reprenons les notations, s'appliquent encore. On dispose donc d'un foncteur $S: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$, construit à l'aide de limites inductives (calculées dans la catégorie $\underline{C}$) et d'une transformation naturelle $s: \mathrm{Id}_{\underline{C}} \longrightarrow S$. De plus, pour tout objet C de $\underline{C}$, on sait que:

- si $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ est une flèche de $\underline{D}$ et si $c: B' \longrightarrow C$ est une flèche de $\underline{C}$, on dispose d'une flèche

$$c \underset{S(C)}{.} d = G_C(d,1)(c) : B \longrightarrow S(C)$$

de $\underline{C}$,

il est alors facile de vérifier que $(S(C), s(C): C \longrightarrow S(C), G_C)$ est bien une $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbre, librement engendrée par C (relativement au foncteur $\mathrm{Domet}_{\underline{D}^{\wedge}}$). Fin de la preuve.

2. Para-algèbres.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{D}^{\wedge}$ une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$.

On dit que $(C,q: Y \longrightarrow H(C),G)$ est une $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbre si, et seulement si, (voir aussi (S.B.D.S.)):

- C est un objet de $\underline{C}$,
- $Y: \underline{B}^{op} \longrightarrow Ens$ est un foncteur,
- $q: Y \longrightarrow H(C) = Hom_{\underline{C}}(-,C)_{|\ \underline{B}^{op}}$ est une transformation naturelle,
- $G: \S\underline{D} \longrightarrow Ens$ est un foncteur (et, pour toute flèche d de $\underline{D}$, l'application $G(d,1)$ est une loi de composition partielle de la structure de $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbre considérée),
- pour tout objet $D = J(B)$ de $\underline{D}$, on a $G(D) = Hom_{\underline{C}}(B,C)$,
- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, on a $G(d\ ) = Y(B')$,
- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, on a:

$$G(d,2) = q(B') \ ,$$

- pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{B}$, on a:

$$G(J(b),1) = q(B).Y(b) \ .$$

De même, on dit que $(c,y): (C,q,G) \longrightarrow (C',q',G')$ est un homomorphisme de la $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbre (C,q,G) vers la $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbre (C',q',G') si, et seulement si:

- $c: C \longrightarrow C'$ est une flèche de $\underline{C}$,
- $y: Y \longrightarrow Y'$ est une transformation naturelle,
- le diagramme de transformations naturelles suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ q\ } & Hom_{\underline{C}}(-,C)_{|\ \underline{B}^{op}} \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Hom_{\underline{C}}(-,c)_{|\ \underline{B}^{op}}} \\ Y' & \xrightarrow{\ q'\ } & Hom_{\underline{C}}(-,C')_{|\ \underline{B}^{op}} \end{array}$$

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, le diagramme de Ens suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Y(B') & \xrightarrow{G(d,1)} & \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,C) \\ {\scriptstyle y(B')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,c)} \\ Y'(B') & \xrightarrow{G'(d,1)} & \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B,C') \end{array}$$

Dans ces conditions, on note $\underline{D}^{\wedge}$-Paralg la catégorie dont les objets (resp. les flèches) sont ces $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbres (resp. les homomorphismes entre les $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbres).
Alors, on dispose des deux foncteurs:

$$\mathrm{Codom}_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{C}$$

$$(C,q,G) \longmapsto C$$

$$((c,y): (C,q,G) \to (C',q',G')) \longmapsto c$$

et

$$\mathrm{Dom}_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{B}^{op}}$$

$$(C,q: Y \to H(C),G) \longmapsto Y$$

$$((c,y): (C,q,G) \to (C',q',G')) \longmapsto (y: Y \to Y') ,$$

ainsi que de la transformation naturelle:

$$\nu_{\underline{D}^{\wedge}} : \mathrm{Dom}_{\underline{D}^{\wedge}} \longrightarrow H.\ \mathrm{Codom}_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{B}^{op}}$$

telle que, pour toute $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbre (C,q,G) , on a:

- $\nu_{\underline{D}^{\wedge}}(C,q,G) = q$.

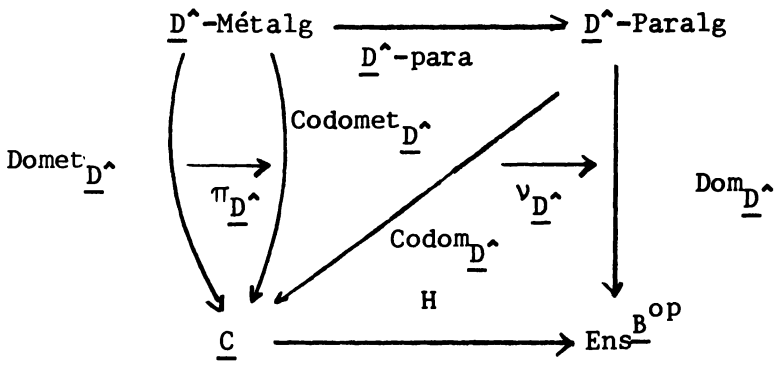
De même, on dispose du foncteur injectif:

$$\underline{D}^{\wedge}\text{-para}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg}$$

$$(C,p: X \to C,G) \longmapsto (C,\ H(p): H(X) \to H(C),G)$$

$$((c,x): (C,p,G) \to (C',p',G')) \longmapsto (c,H(x)) ,$$

de sorte que le diagramme de foncteurs et transformations naturelles suivant est commutatif:



Nous poserons, enfin:

$$\underline{D}^{\wedge}\text{-paramét}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \xrightarrow[\underline{D}^{\wedge}\text{-mét}]{} \underline{D}^{\wedge}\text{-Métalg} \xrightarrow[\underline{D}^{\wedge}\text{-para}]{} \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg.}$$

B. - Clairement, nous avons:

Proposition 32. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite et si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, alors le foncteur

$$\text{Codom}_{\underline{D}^{\wedge}}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{C}$$

admet un adjoint à gauche.

Preuve. En effet, il est facile de vérifier que, si C est un objet de $\underline{C}$, alors $(C, q_{C,\emptyset}: Y_{\emptyset} \longrightarrow H(C), G_{C,\emptyset})$ est bien une $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbre, librement engendrée par C (relativement à $\text{Codom}_{\underline{D}^{\wedge}}$), lorsque:

- $Y_{\emptyset} : \underline{B}^{op} \longrightarrow \text{Ens}$ est le foncteur constant sur $\emptyset$,

- $q_{C,\emptyset}: Y_{\emptyset} \longrightarrow H(C)$ est l'unique transformation naturelle qui en résulte,

- $G_{C,\emptyset} : \S\underline{D} \longrightarrow \text{Ens}$ est le foncteur tel que:

  + pour toute flèche d de $\underline{D}$, on a $G_{C,\emptyset}(d) = \emptyset$

  + pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{B}$, on a:

  $G_{C,\emptyset}(J(b),1) : \emptyset \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{C}}(B,C)$ et

  $G_{C,\emptyset}(J(b),2) : \emptyset \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{C}}(B',C)$.

Fin de la preuve.

On en déduit, évidemment, que le foncteur

$$\mathrm{Codomet}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{C}$$

admet un ($\underline{D}^\wedge$-para)-adjoint à gauche. Cependant, en général, $\mathrm{Codomet}_{\underline{D}^\wedge}$ n'admet pas d'adjoint à gauche (à moins, bien sûr, que le foncteur $Y_\emptyset$ ne soit de la forme $H(C_\emptyset)$, pour un certain objet $C_\emptyset$ de $\underline{C}$).

C. - Montrons, maintenant, que:

Proposition 33. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites et si $\underline{D}^\wedge$ est une petite syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, alors le foncteur

$$\mathrm{Dom}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{B}^{op}}$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathrm{LDom}_{\underline{D}^\wedge} : \mathrm{Ens}^{\underline{B}^{op}} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} .$$

De plus, si $\underline{B}$ est dense dans $\underline{C}$, le diagramme de foncteurs suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} & \xrightarrow[\underline{D}^\wedge\text{-para}]{} & \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{LDomet}_{\underline{D}^\wedge}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{LDom}_{\underline{D}^\wedge}} \\ \underline{C} & \xrightarrow{H} & \mathrm{Ens}^{\underline{B}^{op}} \end{array}$$

(où $\mathrm{LDomet}_{\underline{D}^\wedge}$ est un adjoint à gauche de $\mathrm{Domet}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{C}$, dont l'existence est assurée par la proposition 31).

Preuve. Soit $Y : \underline{B}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ un foncteur. Nous lui associons le graphe multiplicatif (de ses hypermorphismes) Hyp(Y) défini comme suit:

- ses objets sont les (B,e), où B est objet de $\underline{B}$ et e est élément de $Y(B)$,

- ses flèches sont les $(e,b,e'): (B,e) \longrightarrow (B',e')$, où $b: B \longrightarrow B'$ est flèche de $\underline{B}$, e est élément de $Y(B)$, e' est élément de $Y(B')$ et $Y(b)(e') = e$,

- pour toutes flèches

$$(e,b,e'): (B,e) \longrightarrow (B',e')$$

et

$$(e',b',e''): (B',e') \longrightarrow (B'',e'')$$

ainsi définies, on a

$$(e',b',e'').(e,b,e') = (e,b'.b,e'')$$

si, et seulement si, $b'.b$ est défini dans $\underline{B}$.
Il en résulte un foncteur canonique:

$$\begin{aligned} hyp(Y): Hyp(Y) &\longrightarrow \underline{B} \\ (B,e) &\longmapsto B \\ (e,b,e') &\longmapsto b \quad . \end{aligned}$$

Notons alors $Hyp(Y,J)$ le sur-graphe multiplicatif de $Hyp(Y)$ tel que:

- pour toute flèche $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, n'appartenant pas à $J(\underline{B})$, et pour tout élément e' de $Y(B')$, le couple (d,e') est objet de $Hyp(Y,J)$.

Dans ces conditions, on désigne par $hyp(Y,J): Hyp(Y,J) \longrightarrow \underline{B}$ le foncteur, prolongeant $hyp(Y)$, tel que:

- pour tout objet $(d: J(B) \longrightarrow J(B'),e')$ de $Hyp(Y,J)$, qui n'est (donc) pas objet de $Hyp(Y)$, on a $hyp(Y,J)(d,e') = B$.

Il est facile de vérifier que $Hyp(Y,J)$ est petit (puisque $\underline{D}^{\wedge}$ est petite). En conséquence, le foncteur

$$kyp(Y,J): Hyp(Y,J) \xrightarrow[hyp(Y,J)]{} \underline{B} \xrightarrow[injection]{} \underline{C}$$

admet un cône limite inductive (puisque $\underline{C}$ possède toutes les limites inductives petites):

$$(s'_z : kyp(Y,J)(z) \longrightarrow Q(Y))_{z \in Hyp(Y,J)}.$$

Alors, il est clair qu'il existe une unique $\underline{D}^\wedge$-para-algèbre

$$(Q(Y), q_Y : Y \longrightarrow H(Q(Y)), G_Y)$$

telle que:

- pour tout objet B de $\underline{B}$, on a:

$$q_Y(B) : Y(B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B, Q(Y))$$
$$e \longmapsto s'_{(B,e)} \quad ,$$

- pour toute flèche $d : J(B) \longrightarrow J(B')$ de $\underline{D}$, n'appartenant pas à $J(\underline{B})$, on a:

$$G_Y(d,1) : Y(B') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(B, Q(Y))$$
$$e' \longmapsto s'_{(d,e')} \quad .$$

On constate aisément que $(Q(Y), q_Y, G_Y)$ est bien une $\underline{D}^\wedge$-para-algèbre librement engendrée par Y (relativement au foncteur $\mathrm{Dom}_{\underline{D}^\wedge}$).

Enfin, si $\underline{B}$ est dense dans $\underline{C}$ et si C est un objet de $\underline{C}$, on a (en comparant la construction précédente et celle du début de la preuve de la proposition 20, Part. II, §1, B.) $Q(H(C)) = H(S(C))$ et $q_{H(C)} = H(s(C))$; d'où la dernière affirmation. Fin de la preuve.

Remarquons que la dernière affirmation de la proposition 33 précédente suffit à montrer qu'en général le foncteur

$$\underline{D}^\wedge\text{-para} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$$

n'admet pas d'adjoint à gauche.

D. - Enfin, nous avons:

Proposition 34. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites et si $\underline{D}^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, alors la catégorie $\underline{D}^\wedge$-Paralg possède aussi toutes les petites limites inductives et les foncteurs

$$\mathrm{Dom}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{B}^{op}}$$

et

$$\mathrm{Codom}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{C}$$

commutent avec ces limites.

Bien entendu, si $\underline{C}$ possède toutes les petites limites projectives, alors les catégories $\underline{D}^\wedge$-Métalg et $\underline{D}^\wedge$-Paralg les possèdent également et les foncteurs $\mathrm{Domet}_{\underline{D}^\wedge}$, $\mathrm{Codomet}_{\underline{D}^\wedge}$, $\mathrm{Dom}_{\underline{D}^\wedge}$, $\mathrm{Codom}_{\underline{D}^\wedge}$, $\underline{D}^\wedge$-para commutent avec ces petites limites projectives.

3. Pré-algèbres.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite et $\underline{D}^\wedge$ une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$.

On dit que $(C,q: Y \longrightarrow H(X),p: X \longrightarrow C,G_0,G_1)$ est une $\underline{D}^\wedge$-pré-algèbre si, et seulement si ,(voir aussi (S.B.D.S.)):

- $(X,q: Y \longrightarrow H(X),G_0)$ est une $\underline{D}^\wedge$-para-algèbre,

- $(C,p: X \longrightarrow C,G_1)$ est une $\underline{D}^\wedge$-méta-algèbre ,

- $(p,q): (X,q: Y \longrightarrow H(X),G_0) \longrightarrow (C, H(p): H(X) \longrightarrow H(C),G_1)$ est un homomorphisme de $\underline{D}^\wedge$-para-algèbres,

- pour toutes flèches $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ et $d': J(B') \longrightarrow J(B")$ de $\underline{D}$, composables dans $\underline{D}$, et pour tout élément $e"$ de $Y(B")$, on a (axiome "d'associativité" (+)):

$$G_1(d,1)(G_0(d',1)(e")) = G_1(d'.d,1)(q(B")(e")) \quad .$$

De même, on dit que $(c,x,y): (C,q,p,G_0,G_1) \longrightarrow (C',q',p',G_0',G_1')$ est un homomorphisme de la $\underline{D}^\wedge$-pré-algèbre (C,q,p,G_0,G_1) vers la $\underline{D}^\wedge$-pré-algèbre (C',q',p',G_0',G_1') si, et seulement si:

- $(x,y): (X,q,G_0) \longrightarrow (X',q',G_0')$ est un homomorphisme de $\underline{D}^\wedge$-para-algèbres,

- $(c,x): (C,p,G_1) \longrightarrow (C',p',G_1')$ est un homomorphisme de $\underline{D}^\wedge$-méta-algèbres.

Dans ces conditions, on note $\underline{D}^\wedge$-Préalg la catégorie dont les objets (resp. les flèches) sont ces $\underline{D}^\wedge$-pré-algèbres (resp. les homomorphismes entre $\underline{D}^\wedge$-pré-algèbres).
Alors, on dispose des deux foncteurs:

$$\underline{D}^\wedge\text{-prédo}: \underline{D}^\wedge\text{-Préalg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$$

$$(C,q,p,G_0,G_1) \longmapsto (X,q,G_0)$$

$$(c,x,y) \longmapsto (x,y)$$

(+) On peut avoir à considérer des "$\underline{D}^\wedge$-algèbres partielles" plus générales que les $\underline{D}^\wedge$-pré-algèbres, introduites ici: dans ce cas, il convient d'énoncer tout un sytème d'axiomes d'associativité. Ceci sera exposé dans un prochain travail du premier des deux auteurs, après avoir été, brièvement explicité au Séminaire de Théorie des Catégories de l'Université Paris 7 (voir aussi C.A.P.E.)).

et

$$\underline{D}^{\wedge}\text{-préco}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Préalg} \longrightarrow \underline{D}^{\wedge}\text{-Métalg}$$

$$(C,q,p,G_0,G_1) \longmapsto (C,p,G_1)$$

$$(c,x,y) \longmapsto (c,x) \quad ,$$

ainsi que de la transformation naturelle:

$$\mu_{\underline{D}^{\wedge}} : \underline{D}^{\wedge}\text{-prédo} \longrightarrow \underline{D}^{\wedge}\text{-para}.\underline{D}^{\wedge}\text{-préco} : \underline{D}^{\wedge}\text{-Préalg} \longrightarrow \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg}$$

telle que, pour toute $\underline{D}^{\wedge}$-pré-algèbre (C,q,p,G_0,G_1) , on a:

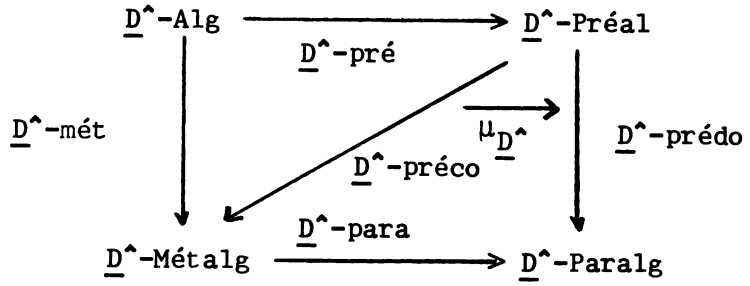
- $\mu_{\underline{D}^{\wedge}}(C,q,p,G_0,G_1) = (p,q): (X,q,G_0) \longrightarrow (C,H(p),G_1)$.

De même, on dispose du foncteur injectif:

$$\underline{D}^{\wedge}\text{-pré}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Alg} \longrightarrow \underline{D}^{\wedge}\text{-Préalg}$$

$$(C,F) \longmapsto (C,Id_{H(C)},Id_C,\&F,\&F)$$

de sorte que le diagramme de foncteurs et transformations naturelles suivant est commutatif:



B. - Clairement, on a:

Proposition 35. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite et si $\underline{D}^{\wedge}$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, alors le foncteur

$$\underline{D}^{\wedge}\text{-préco}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Préalg} \longrightarrow \underline{D}^{\wedge}\text{-Métalg}$$

admet un adjoint à gauche.

Preuve. En effet, si $(C,p: X \longrightarrow C,G)$ est une $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbre, il est facile de vérifier que $(C,q_{X,\emptyset} : Y_{\emptyset} \longrightarrow H(X),G_{X,\emptyset},G)$ est bien une $\underline{D}^{\wedge}$-pré-algèbre (où l'on a repris les notations du début de la preu-

ve de la proposition 32, §2, B.), librement engendrée par (C,p,G) (relativement au foncteur $\underline{D}^{\wedge}$-préco). Fin de la preuve.

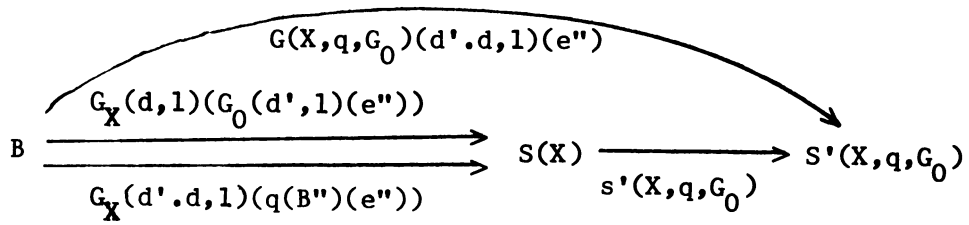
C. - De même, montrons que:

Proposition 36. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites et si $\underline{D}^{\wedge}$ est une petite syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$, alors le foncteur

$$\underline{D}^{\wedge}\text{-prédo}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Préalg} \longrightarrow \underline{D}^{\wedge}\text{-Paralg}$$

admet un adjoint à gauche.

Preuve. Soit $(X,q: Y \longrightarrow H(X),G_0)$ une $\underline{D}^{\wedge}$-para-algèbre.
On sait (d'après la proposition 31, §1, C.) que l'objet X de $\underline{C}$ engendre (relativement au foncteur $\text{Domet}_{\underline{D}^{\wedge}}: \underline{D}^{\wedge}\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{C}$) une $\underline{D}^{\wedge}$-méta-algèbre libre $(S(X), s(X): X \longrightarrow S(X),G_X)$.
On désigne alors par $s'(X,q,G_0): S(X) \longrightarrow S'(X,q,G_0)$ la flèche (inductivement) universelle de $\underline{C}$, rendant commutatif, pour toutes flèches $d: J(B) \longrightarrow J(B')$ et $d': J(B') \longrightarrow J(B'')$ de $\underline{D}$, composables dans $\underline{D}$, et pour tout élément e'' de $Y(B'')$, le diagramme de $\underline{C}$ suivant:



(une telle flèche existe, puisque $\underline{D}^{\wedge}$ est petite et $\underline{C}$ possède toutes les limites inductives petites).
Il est alors facile de vérifier que

$$(S'(X,q,G_0),q,s'(X,q,G_0).s(X),G_0,G_{(X,q,G_0)})$$

est bien une $\underline{D}^{\wedge}$-pré-algèbre, librement engendrée par (X,q,G_0) (relativement au foncteur $\underline{D}^{\wedge}$-prédo). Fin de la preuve.

On en déduit, en particulier, que:

Proposition 37. Si C est une catégorie localement petite, possédant toutes les limites inductives petites, et si $D^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres sur C, alors le foncteur

$$D^\wedge\text{-prédo}: D^\wedge\text{-Préalg} \longrightarrow D^\wedge\text{-Paralg}$$

admet un ($D^\wedge$-para: $D^\wedge$-Métalg $\longrightarrow$ $D^\wedge$-Paralg)-adjoint à gauche.

4. Para-algèbres, méta-algèbres, pré-algèbres et algèbres libres.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite, possédant toutes les petites limites inductives, et $\underline{D}^\wedge$ une petite syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$.

En vertu de la proposition 36, §3, C. , on sait que le foncteur

$$\underline{D}^\wedge\text{-prédo}: \underline{D}^\wedge\text{-Préalg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$$

admet un adjoint à gauche:

$$\underline{D}^\wedge\text{-Lprédo}: \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Préalg}\ .$$

On dispose donc de l'endo-foncteur:

$$\Sigma_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \xrightarrow[\underline{D}^\wedge\text{-Lprédo}]{} \underline{D}^\wedge\text{-Préalg} \xrightarrow[\underline{D}^\wedge\text{-préco}]{} \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \xrightarrow[\underline{D}^\wedge\text{-para}]{} \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$$

et de la transformation naturelle:

$$\sigma_{\underline{D}^\wedge} : \mathrm{Id}_{\underline{D}^\wedge\text{-Paralg}} \longrightarrow \Sigma_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}.$$

Par construction, cet endo-foncteur et cette transformation naturelle admettent des restrictions:

$$\Sigma'_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Métalg}$$

et

$$\sigma'_{\underline{D}^\wedge} : \mathrm{Id}_{\underline{D}^\wedge\text{-Métalg}} \longrightarrow \Sigma'_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Métalg}.$$

B. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite, possédant toutes les limites inductives petites, et $\underline{D}^\wedge$ une petite syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$.

On pose:

- $\Sigma^1_{\underline{D}^\wedge} = \Sigma_{\underline{D}^\wedge}$, $\Sigma^2_{\underline{D}^\wedge} = \Sigma_{\underline{D}^\wedge}.\Sigma^1_{\underline{D}^\wedge}$ et $\sigma^{1,2}_{\underline{D}^\wedge} = \sigma_{D^\wedge}\,\Sigma^1_{\underline{D}^\wedge} : \Sigma^1_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \Sigma^2_{\underline{D}^\wedge}$.

Si β est un ordinal (quelconque) et si

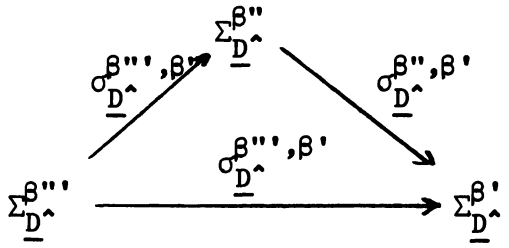
$$\Sigma^\beta_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$$

est un foncteur défini, on pose:

- $\Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta+1} = \Sigma_{\underline{D}^\wedge} \cdot \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta}$ et $\sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta,\beta+1} = \sigma_{\underline{D}^\wedge} \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta} : \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta} \longrightarrow \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta+1}$.

Si β est un ordinal limite, et si, pour tous ordinaux $\beta''' \leq \beta''$ et $\beta'' \leq \beta' < \beta$, on dispose:

- d'un endo-foncteur $\Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$,
- d'une transformation naturelle $\sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'',\beta'} : \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta''} \longrightarrow \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'}$
- d'un diagramme commutatif:



alors, on pose:

- $\Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta} = \varinjlim (\sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'',\beta'} : \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta''} \longrightarrow \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'})_{\beta'' \leq \beta' < \beta}$ (car cette limite, calculée point par point dans $\underline{D}^\wedge\text{-Paralg}^{\underline{D}^\wedge\text{-Paralg}}$, existe en vertu de la proposition 34, §2, D.),

et, pour tout ordinal $\beta' < \beta$, on note $\sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta',\beta} : \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'} \longrightarrow \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta}$ la co-projection qui en résulte.

Clairement, pour tous ordinaux <u>non limites</u> $\beta' \leq \beta$, la transformation naturelle:

$$\sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta',\beta} : \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'} \longrightarrow \Sigma_{\underline{D}^\wedge}^{\beta} : \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$$

admet une restriction:

$$\sigma'^{\beta',\beta}_{\underline{D}^\wedge} : \Sigma'^{\beta'}_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \Sigma'^{\beta}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} .$$

C. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite, possédant toutes les limites inductives petites, et $\underline{D}^\wedge$ une petite syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$.

En vertu de la proposition 31, §1, C. , on sait que le foncteur

$$\mathrm{Domet}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \longrightarrow \underline{C}$$

admet un adjoint à gauche:

$$\mathrm{LDomet}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} .$$

Alors, on pose:

- $\Omega^0_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \xrightarrow[\mathrm{LDomet}_{\underline{D}^\wedge}]{} \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} \xrightarrow[\underline{D}^\wedge\text{-para}]{} \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$,

- pour tout ordinal (quelconque) $0 < \beta$

$$\Omega^\beta_{\underline{D}^\wedge} = \Sigma^\beta_{\underline{D}^\wedge} \cdot \Omega^0_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} ,$$

- $w^{0,1}_{\underline{D}^\wedge} = \sigma_{\underline{D}^\wedge} \Omega^0_{\underline{D}^\wedge} : \Omega^0_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \Omega^1_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$,

- pour tous ordinaux $0 < \beta' < \beta$:

$$w^{\beta',\beta}_{\underline{D}^\wedge} = \sigma^{\beta',\beta}_{\underline{D}^\wedge} \Omega^0_{\underline{D}^\wedge} : \Omega^{\beta'}_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \Omega^\beta_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} ,$$

- pour tout ordinal $0 < \beta$:

$$w^{0,\beta}_{\underline{D}^\wedge} = w^{1,\beta}_{\underline{D}^\wedge} \cdot w^{0,1}_{\underline{D}^\wedge} : \Omega^0_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \Omega^\beta_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg} .$$

Clairement, pour tous ordinaux non limites $\beta' < \beta$, la transformation naturelle:

$$w^{\beta',\beta}_{\underline{D}^\wedge} : \Omega^{\beta'}_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \Omega^\beta_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Paralg}$$

admet une restriction:

$$w'^{,\beta',\beta}_{\underline{D}^\wedge} : \Omega'^{,\beta'}_{\underline{D}^\wedge} \longrightarrow \Omega'^{,\beta}_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Métalg} .$$

D. - Clairement, en vertu de la preuve de la proposition 20, Part. II, §1, E. , nous pouvons énoncer (voir aussi (C.A.P.E.)):

Proposition 38. Si α est un ordinal régulier, si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives petites et si $\underline{D}^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres de rang α sur $\underline{C}$, alors le foncteur:

$$U_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$$

admet un adjoint à gauche:

$$V_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Alg}$$

tel que, naturellement en tout objet C de $\underline{C}$, on a:

$$V_{\underline{D}^\wedge}(C) \approx \varinjlim (w_{\underline{D}^\wedge}^{\beta',\beta}(C) : \Omega_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'}(C) \longrightarrow \Omega_{\underline{D}^\wedge}^{\beta}(C))_{\beta' \leq \beta < \alpha}$$

dans la catégorie des $\underline{D}^\wedge$-para-algèbres (et en identifiant la $\underline{D}^\wedge$-algèbre $V_{\underline{D}^\wedge}(C)$ à sa $\underline{D}^\wedge$-para-algèbre sous-jacente).

En conséquence, si C et C' sont deux objets de $\underline{C}$, pour qu'il existe un homomorphisme de la $\underline{D}^\wedge$-algèbre $V_{\underline{D}^\wedge}(C)$ vers la $\underline{D}^\wedge$-algèbre $V_{\underline{D}^\wedge}(C')$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée:

- il existe deux ordinaux $\beta \leq \alpha$ et $\beta' \leq \alpha$ et il existe un homomorphisme de la $\underline{D}^\wedge$-para-algèbre $\Omega_{\underline{D}^\wedge}^{\beta}(C)$ vers la $\underline{D}^\wedge$-para-algèbre $\Omega_{\underline{D}^\wedge}^{\beta'}(C')$ (induisant, par passage à la limite, l'homomorphisme de $\underline{D}^\wedge$-algèbres considéré);

en particulier, il suffit que la condition suivante soit vérifiée:

- il existe deux ordinaux non limites $\beta < \alpha$ et $\beta' < \alpha$ et il existe un homomorphisme de la $\underline{D}^\wedge$-méta-algèbre $\Omega'^{\beta}_{\underline{D}^\wedge}(C)$ vers la $\underline{D}^\wedge$-méta-algèbre $\Omega'^{\beta'}_{\underline{D}^\wedge}(C)$ (induisant, par passage à la limite, l'homomorphisme de $\underline{D}^\wedge$-algèbres considéré).

PARTIE IV :

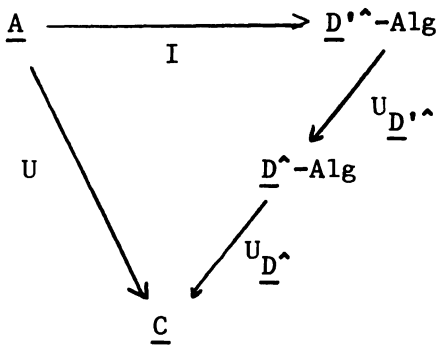
SOUS-ALGEBRICITE

1. Sous-algébricité.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

On dit qu'un foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, où $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, est sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$) si, et seulement si, (voir aussi (S.B.D.S.)):

- il existe une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ sur $\underline{C}$, une syntaxe d'algèbres $\underline{D}'^\wedge$ sur $\underline{D}^\wedge$-Alg et un foncteur inversible $I: \underline{A} \longrightarrow \underline{D}'^\wedge$-Alg rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:



Nous dirons, plus précisément encore, qu'un foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$) si, et seulement si:

- U est sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$ modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$,

- U est algébrique sur $\underline{C}$ (modulo une syntaxe a priori indépendante de $\underline{D}^\wedge$).

Au contraire, nous dirons qu'il est sous-algébrique d'ordre (exactement) 1/2 sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$) si, et seulement si:

- il est sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$, modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$,

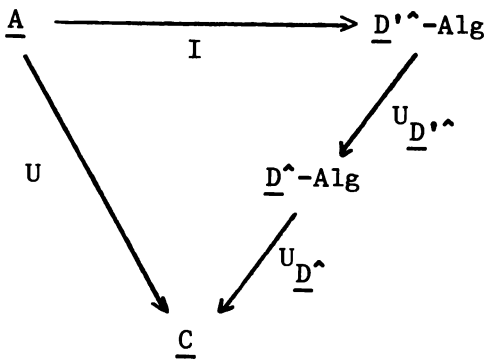
- il n'est pas algébrique sur $\underline{C}$.

On laisse au lecteur le soin de définir les foncteurs sous-algébriques d'ordre $\geq 1/n$ (resp. d'ordre $> 1/n$; d'ordre $1/n$) sur $\underline{C}$, pour tout entier $n \geq 3$!

B. - Soit α un ordinal régulier et $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

On dit qu'un foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est α-sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$) si, et seulement si:

- il existe une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ de rang α sur $\underline{C}$, une syntaxe d'algèbres $\underline{D}'^\wedge$ de rang α sur $\underline{D}^\wedge$-Alg et un foncteur inversible $I: \underline{A} \longrightarrow \underline{D}'^\wedge$-Alg rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:



Plus précisément encore, nous dirons qu'un foncteur $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est α-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$) si, et seulement si:

- U est α-sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$),
- U est α-algébrique sur $\underline{C}$ (modulo une syntaxe a priori indépendante de $\underline{D}^\wedge$).

Au contraire, nous dirons qu'il est α-sous-algébrique d'ordre (exactement) $1/2$ sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$) si, et seulement si:

- il est α-sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$ (modulo $(\underline{D}^\wedge, \underline{D}'^\wedge)$),
- il n'est pas α-algébrique sur $\underline{C}$

Nous laissons au lecteur le soin de définir les foncteurs α-sous-algébriques d'ordre $\geq 1/n$ (resp. d'ordre $> 1/n$; d'ordre $1/n$) sur $\underline{C}$, pour tout entier $n \geq 3$.

C. - En vertu des propositions 25 (Part. II, §2, D.) et 27 (Part. II, §2, E.) nous pouvons affirmer que:

Proposition 39. Si α est un ordinal régulier, si C est une catégorie α-présentable et si U: A $\longrightarrow$ C est un foncteur, où A est une catégorie localement petite, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- U est α-sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ et algébrique (i.e. sous-algébrique d'ordre $> 1/2$) sur C ,

- U est α-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ (i. e. α-algébrique) sur C .

2. Conditions suffisantes d'algébricité des foncteurs sous-algébriques.

A. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Supposons que:

- $\underline{D}^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$ telle que le foncteur $U_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ admet un adjoint à gauche $V_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Alg}$,

- $\underline{D}'^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{D}^\wedge$-Alg.

Alors, on dispose:

- de la $\underline{C}$-isologie $G_{\underline{D}^\wedge} : \underline{D}^\wedge \longrightarrow \tilde{\underline{D}}^\wedge$ (voir Part. I, §1, D.) ,

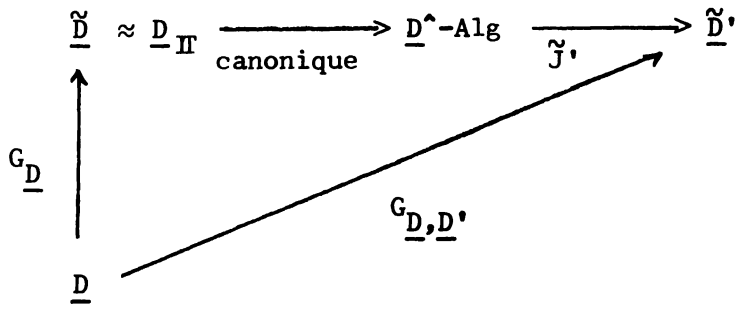
- de la $(\underline{D}^\wedge\text{-Alg})$-isologie $G_{\underline{D}',^\wedge} : \underline{D}'^\wedge \longrightarrow \tilde{\underline{D}}'^\wedge$ (voir Part. I, §1, D.),

- de la monade $\mathbb{T} = (U_{\underline{D}^\wedge}.V_{\underline{D}^\wedge}, u, m)$, associée à l'adjonction de $V_{\underline{D}^\wedge}$ à gauche de $U_{\underline{D}^\wedge}$, donc d'un $\underline{C}$-isomorphisme $\tilde{\underline{D}}^\wedge \approx \underline{D}_{\mathbb{T}}{}^\wedge$ et, par construction, d'un foncteur canonique $\underline{D}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Alg}$ (voir Part. I, §2, B.).

On en déduit un foncteur:

$$G_{\underline{D},\underline{D}'} : \underline{D} \xrightarrow[G_{\underline{D}}]{} \tilde{\underline{D}} \approx \underline{D}_{\mathbb{T}} \xrightarrow[\text{canonique}]{} \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \xrightarrow[\text{canonique}]{\tilde{J}'} \tilde{\underline{D}}'$$

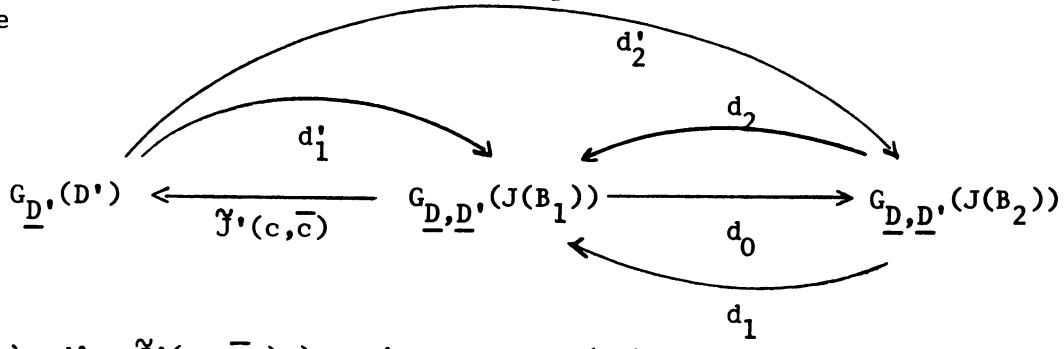
rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:



Dans ces conditions, nous dirons que $\underline{D}^\wedge$ conoyaute $\underline{D}'^\wedge$ si, et seulement si:

- pour tout objet $D' = J'((B',F_{B'}))$ (où $(B',F_{B'})$ est donc une $\underline{D}^\wedge$-algèbre) de $\underline{D}'$, il existe deux objets $D_1 = J(B_1)$ et $D_2 = J(B_2)$ de $\underline{D}$, il existe une flèche $(c,\overline{c})\colon V_{\underline{D}^\wedge}(B_1) \longrightarrow (B',F_{B'})$ de $\underline{D}^\wedge$-Alg, il existe $i \in \{1,2\}$ et il existe une flèche $(c_i,\overline{c}_i)\colon (B',F_{B'}) \longrightarrow V_{\underline{D}^\wedge}(B_i)$ de $\underline{D}^\wedge$-Alg,

- naturellement en tout objet $D' = J'(B',F_{B'})$ de $\underline{D}'^\wedge$, il existe un diagramme



de $\widetilde{\underline{D}}'$ (où $d'_i = \mathcal{J}'(c_i,\overline{c}_i)$), présentant $G_{\underline{D}'}(D')$ comme conoyau contractile de (d_1,d_2) dans $\widetilde{\underline{D}}'$.

Nous laissons au lecteur le soin de définir, plus généralement, dans ces mêmes conditions, les syntaxes d'algèbres $\underline{D}^\wedge$ sur $\underline{C}$ qui colimitent des syntaxes d'algèbres $\underline{D}'^\wedge$ sur $\underline{D}^\wedge$-Alg.

B. - Prouvons que:

Proposition 40. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, si $U\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$, modulo $(\underline{D}^\wedge,\underline{D}'^\wedge)$, et si $\underline{D}^\wedge$ conoyaute $\underline{D}'^\wedge$, alors $U\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur $\underline{C}$ (autrement dit: il est algébrique sur $\underline{C}$).
De plus, si α est un ordinal régulier, si $U\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur α-sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$, modulo $(\underline{D}^\wedge,\underline{D}'^\wedge)$, et si $\underline{D}^\wedge$ conoyaute $\underline{D}'^\wedge$, alors $U\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur α-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur $\underline{C}$ (autrement dit: il est α-algébrique sur $\underline{C}$).

Preuve. Notons $\underline{D} * \underline{D}'$ la catégorie image pleine du foncteur

$$\underline{B} \xrightarrow[V_{\underline{D}^\wedge} \mid \underline{B}]{} \tilde{\underline{B}}' \xrightarrow[\tilde{J}']{} \tilde{\underline{D}}'$$

dont nous notons $J * J'$ la restriction qui en résulte.
Clairement, on dispose donc des foncteurs canoniques:

$$G_{\underline{D} * \underline{D}'} : \underline{D} * \underline{D}' \longrightarrow \tilde{\underline{D}}'$$

(restriction de $G_{\underline{D},\underline{D}'}$) et:

$$G'_{\underline{D} * \underline{D}'} : \underline{D} \longrightarrow \underline{D} * \underline{D}' \quad .$$

De plus, $\underline{D} * \underline{D}'^\wedge = (\underline{C},\underline{B},J * J')$ est bien une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$.
Dans ces conditions, si (C,F) est une $\underline{D}^\wedge$-algèbre et si $((C,F),F')$ est une $\underline{D}'^\wedge$-algèbre, il lui correspond isomorphiquement une $\tilde{\underline{D}}'^\wedge$-algèbre $((C,F),\tilde{F}')$ (voir Part. I, §1, D.). Il est alors facile de vérifier que (C,F'') est une $\underline{D} * \underline{D}'^\wedge$-algèbre, où l'on a:

$$F'': (\underline{D} * \underline{D}')^{op} \xrightarrow[(G_{\underline{D} * \underline{D}'})^{op}]{} \tilde{\underline{D}}'^{,op} \xrightarrow[\tilde{F}']{} \text{Ens} \ .$$

Réciproquement, si (C,F'') est une $\underline{D} * \underline{D}'^\wedge$-algèbre, il lui correspond déjà la $\underline{D}^\wedge$-algèbre (C,F), où l'on a:

$$F: \underline{D}^{op} \xrightarrow[(G'_{\underline{D} * \underline{D}'})^{op}]{} (\underline{D} * \underline{D}')^{op} \xrightarrow[F'']{} \text{Ens} \quad .$$

De plus, si $\bar{d}': \tilde{D}' = J'(\tilde{B}',F_{\tilde{B}'}) \longrightarrow D' = J'(B',F_{B'})$ est une flèche de $\underline{D}'$ et si $(e',\bar{e}'): (B',F_{B'}) \longrightarrow (C,F)$ est une flèche de $\underline{D}^\wedge$-Alg, on dispose (puisque $\underline{D}^\wedge$ conoyaute $\underline{D}'^\wedge$) du "diagramme" suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & (\tilde{B}',F_{\tilde{B}'}) & \xrightarrow[(\tilde{c}_i,\tilde{c}_i)]{} & V_{\underline{D}^\wedge}(\tilde{B}_i) & & \\
 & \bar{d}' & \downarrow & & \downarrow & \bar{d}'_i & \\
(C,F) & \xleftarrow[(e',\bar{e}')]{} & (B',F_{B'}) & \xleftarrow[(c,\bar{c})]{} & V_{\underline{D}^\wedge}(B_1) & \xleftarrow[x_i]{} & V_{\underline{D}^\wedge}(B_i)
\end{array}$$

(où l'on a posé $x_i = Id_{V_{\underline{D}^\wedge}(B_1)}$, si $i = 1$, et $x_i = d_1$, si $i = 2$).

Alors, on pose (moyennant quelque abus de notation):

$$(e',\overline{e}') \underset{F'}{.} \overline{d}' = ((((e',\overline{e}').(c,\overline{c})) \underset{F''}{.} x_i) \underset{F''}{.} \overline{d}'_i).(\tilde{c}_i,\overline{\tilde{c}}_i)$$

Les conditions de naturalité et les équations exprimant la contractilité des conoyaux de paires utilisées permettent d'affirmer qu'on définit bien, ainsi, une $\underline{D}'^\wedge$-algèbre $((C,F),F')$.
On conclut facilement. Fin de la preuve.

Bien entendu, on peut énoncer (et prouver!) une proposition analogue en y remplaçant partout " $\underline{D}^\wedge$ conoyaute $\underline{D}'^\wedge$ " par " $\underline{D}^\wedge$ colimite $\underline{D}'^\wedge$ " : nous laissons ce soin au lecteur.

C. - Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite.

Si $\underline{D}^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres sur $\underline{C}$ telle que le foncteur $U_{\underline{D}^\wedge}: \underline{D}^\wedge\text{-Alg} \longrightarrow \underline{C}$ admet un adjoint à gauche $V_{\underline{D}^\wedge} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}^\wedge\text{-Alg}$, on dit qu'une syntaxe d'algèbres $\underline{D}'^\wedge$ sur $\underline{D}^\wedge$-Alg est une sur-syntaxe de $\underline{D}^\wedge$ si, et seulement si:

- $\underline{D}'^\wedge$ est une syntaxe d'algèbres de sorte $V_{\underline{D}^\wedge}(\underline{B})$ sur $\underline{C}$.

Clairement, si $\underline{D}'^\wedge$ est une sur-syntaxe d'algèbres de la syntaxe d'algèbres $\underline{D}^\wedge$, alors $\underline{D}^\wedge$ conoyaute $\underline{D}'^\wedge$. Ainsi, nous pouvons énoncer (voir aussi (D.I.L.A.)):

Proposition 41. Si $\underline{C}$ est une catégorie localement petite, si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$, modulo $(\underline{D}^\wedge,\underline{D}'^\wedge)$, et si $\underline{D}'^\wedge$ est une sur-syntaxe de $\underline{D}^\wedge$, alors $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur $\underline{C}$ (autrement dit: il est algébrique sur $\underline{C}$).
De plus, si α est un ordinal régulier, si $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur α-sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur $\underline{C}$, modulo $(\underline{D}^\wedge,\underline{D}'^\wedge)$, et si $\underline{D}'^\wedge$ est une sur-syntaxe de $\underline{D}^\wedge$, alors $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur α-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur $\underline{C}$ (autrement dit: il est α-algébrique sur $\underline{C}$).

PARTIE V :

APPLICATIONS ET EXEMPLES

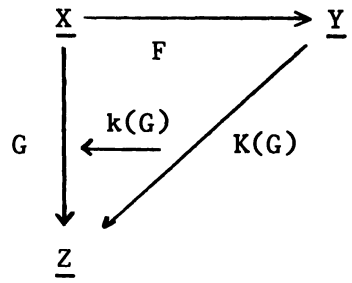
1. Exemples de foncteurs algébriques sur Cat .

A. - Soit $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}'$ deux ensembles de foncteurs $F: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ entre petites catégories.

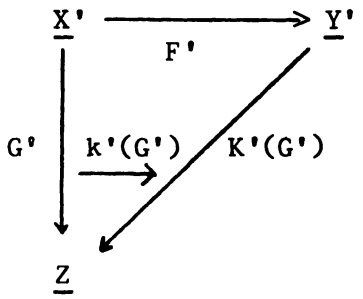
On dit que $(\underline{Z},(K,k),(K',k'))$ est une (petite) catégorie à choix de $(\mathbb{F},\mathbb{F}')$-extensions de Kan si, et seulement si:

- $\underline{Z}$ est une catégorie petite,

- pour tout foncteur $F: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$, appartenant à $\mathbb{F}$, et tout foncteur $G: \underline{X} \longrightarrow \underline{Z}$, le diagramme suivant est une extension de Kan projective (de G le long de F):



- pour tout foncteur $F': \underline{X}' \longrightarrow \underline{Y}'$, appartenant à $\mathbb{F}'$, et tout foncteur $G': \underline{X}' \longrightarrow \underline{Z}$, le diagramme suivant est une extension de Kan inductive (de G' le long de F'):



On note alors $\mathrm{Cat}_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}}$ la catégorie dont les objets sont ces catégories à choix de $(\mathbb{F},\mathbb{F}')$-extensions de Kan et dont les flèches sont les foncteurs qui commutent avec ces choix. Ainsi, on dispose d'un foncteur d'oubli canonique ("catégorie sous-jacente"):

$$U_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}} : Cat_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}} \longrightarrow Cat$$
$$(\underline{Z},(K,k),(K',k')) \longmapsto \underline{Z} \quad .$$

B. - Montrons que (voir (E.S.T.R.), (E.D.S.A.) et (C.S.T.R.)):

Proposition 42. Si α est un ordinal régulier, si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}'$ sont deux ensembles de foncteurs entre (petites) catégories α-présentables (en tant qu'objets de la catégorie $\aleph_0$-esquissable Cat), alors le foncteur d'oubli canonique

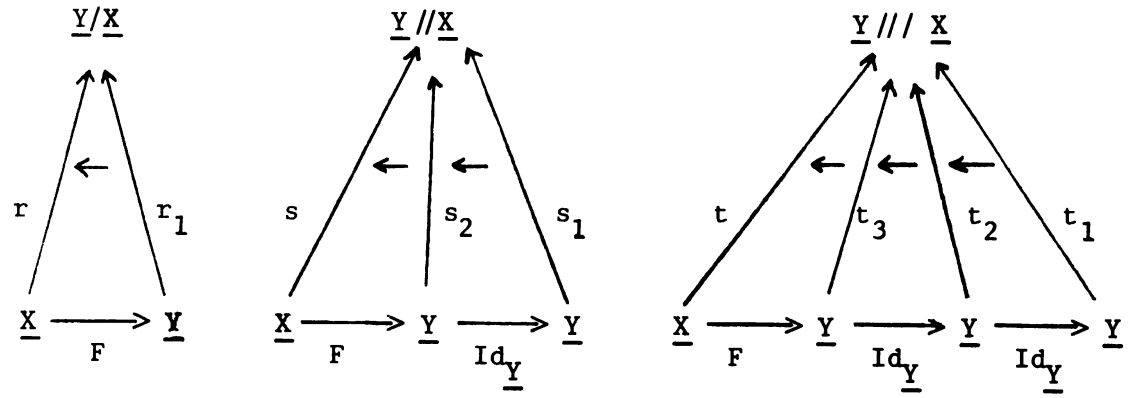
$$U_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}} : Cat_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}} \longrightarrow Cat$$

est:

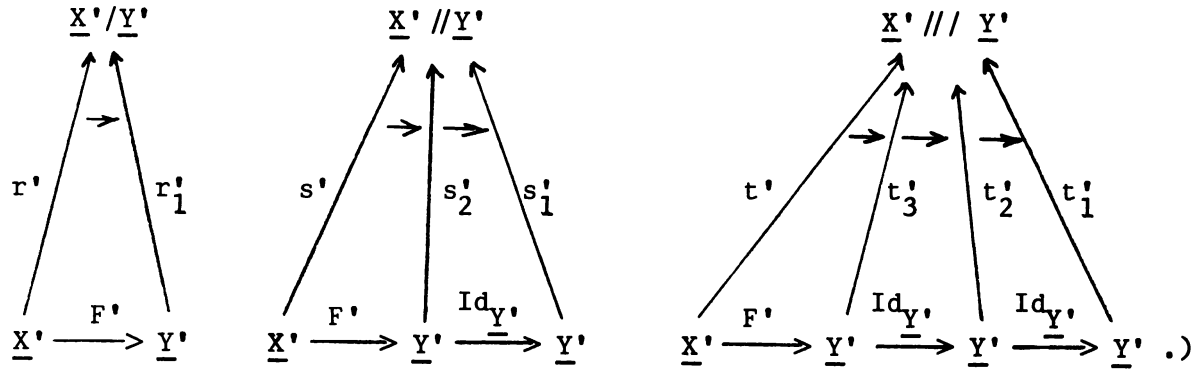
- α-algébrique sur Cat ,
- α-sur-esquissable sur Cat,
- α-monadique sur Cat.

Preuve. Comme Cat est une catégorie $\aleph_0$-esquissable (voir, par exemple (E.T.S.A.)), elle est α-esquissable. En conséquence elle est localement α-présentable et, en vertu de la proposition 30, Part. II, §3, E., pour prouver les trois affirmations, il suffit de prouver la première.

Pour tout $F: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ (resp. $F': \underline{X}' \longrightarrow \underline{Y}'$) appartenant à $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{F}'$), nous construisons tout d'abord les 2-limites inductives représentées par les diagrammes suivants



(resp.



.)

Pour toutes applications injectives croissantes

$$f: (\{1\}, \leq) \longrightarrow (\{1,2\}, \leq)$$

et

$$g: (\{1,2\}, \leq) \longrightarrow (\{1,2,3\}, \leq)$$

on en déduit deux foncteurs:

$$i_f: \underline{Y}/\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}//\underline{X}$$

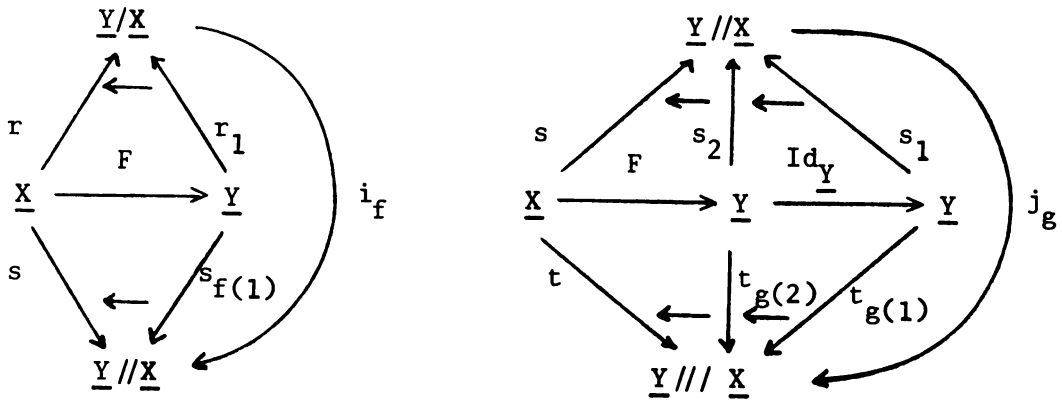
(resp. $i'_f: \underline{X}'/\underline{Y}' \longrightarrow \underline{X}'//\underline{Y}'$)

et

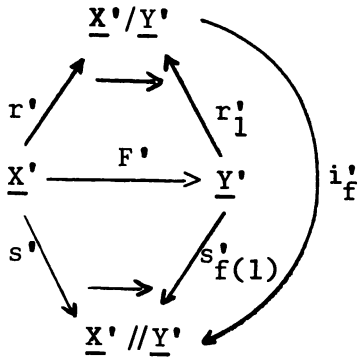
$$j_g: \underline{Y}//\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}/// \underline{X}$$

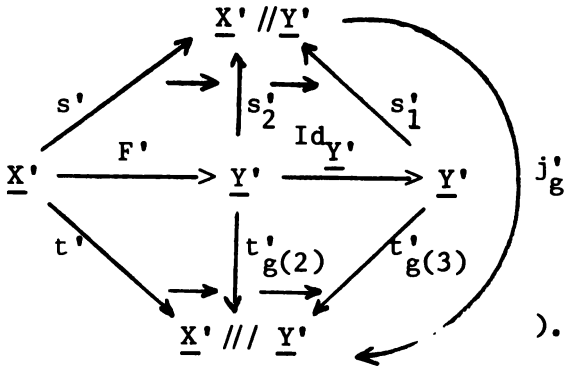
(resp. $j'_g: \underline{X}' //\underline{Y}' \longrightarrow \underline{X}' /// \underline{Y}'$)

rendant commutatifs les diagrammes suivants:



(resp.





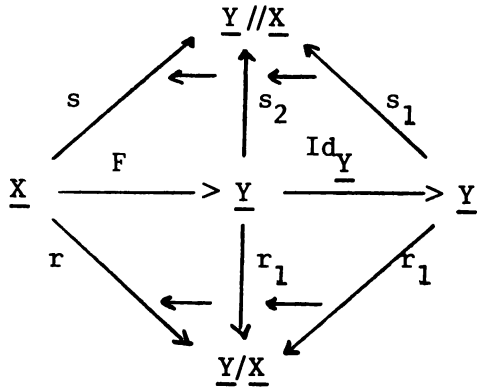
).

De même, on dispose d'un foncteur:

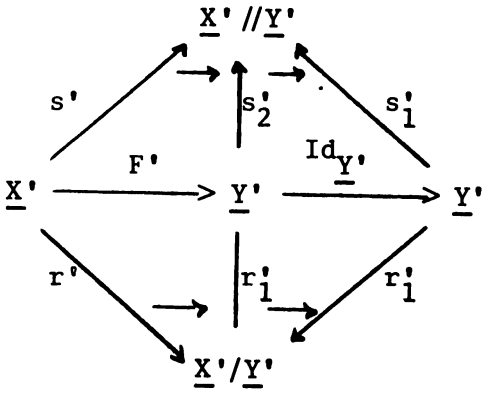
$$k: \underline{Y}//\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}/\underline{X}$$

(resp. $k': \underline{X}'//\underline{Y}' \longrightarrow \underline{X}'/\underline{Y}'$),

rendant commutatif le diagramme suivant:



(resp.



).

Alors, nous désignons par $\underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$ le plus petit sous-graphe multiplicatif de Cat tel que, pour tout élément $F: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ (resp. $F': \underline{X}' \longrightarrow \underline{Y}'$) appartenant à $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{F}'$), on a:

- $\underline{X}$ (resp. $\underline{X}'$) , $\underline{Y}/\underline{X}$ (resp. $\underline{X}'/\underline{Y}'$) , $\underline{Y}//\underline{X}$ (resp. $\underline{X}'//\underline{Y}'$) et $\underline{Y}/// \underline{X}$ (resp. $\underline{X}'/// \underline{Y}'$) sont des objets de $\underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$;
- $r: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}/\underline{X}$ (resp. $r': \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}'/\underline{Y}'$) et $k: \underline{Y}//\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}/\underline{X}$ (resp. $k': \underline{X}'//\underline{Y}' \longrightarrow \underline{X}'/\underline{Y}'$) sont des flèches de $\underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$
- pour toute application injective croissante:

$$f: (\{1\}, \leq) \longrightarrow (\{1,2\}, \leq) ,$$

alors $i_f: \underline{Y}/\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}//\underline{X}$ (resp. $i'_f: \underline{X}'/\underline{Y}' \longrightarrow \underline{X}'//\underline{Y}'$) est flèche de $\underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$;

- pour toute application injective croissante:

$$g: (\{1,2\}, \leq) \longrightarrow (\{1,2,3\}, \leq) ,$$

alors $j_g: \underline{Y}//\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}/// \underline{X}$ (resp. $j'_g: \underline{X}'//\underline{Y}' \longrightarrow \underline{X}'/// \underline{Y}'$) est flèche de $\underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$.

Nous notons, enfin, $\underline{D}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$ le sur-graphe multiplicatif de $\underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$ tel que, pour tout élément $F: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ (resp. $F': \underline{X}' \longrightarrow \underline{Y}'$) appartenant à $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{F}'$):

- $\underline{D}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$ possède les flèches supplémentaires

$$\underline{X} \xleftarrow{K_F} \underline{Y}/\underline{X} \xleftarrow{C_F} \underline{Y}//\underline{X} \xleftarrow{u_F} \underline{Y}/// \underline{X}$$

(resp. $\underline{X}' \xleftarrow{K'_F} \underline{X}'/\underline{Y}' \xleftarrow{C'_F} \underline{X}'//\underline{Y}' \xleftarrow{u'_F} \underline{X}'/// \underline{Y}'$),

- les équations suivantes ont un sens (i. e. les composés de flèches qui y figurent sont définis) et sont vérifiées:

$$K_F.r = Id_{\underline{X}} \qquad (\text{resp. } K'_F,.r' = Id_{\underline{X}'},$$

$$K_F.C_F = K_F.k \qquad K'_F,.C'_F, = K'_F,.k'$$

$$C_F.i_a = Id_{\underline{Y}/\underline{X}} \qquad C'_F,.i'_a = Id_{\underline{X}'/\underline{Y}'}$$

$$C_F.i_b = r.K_F \qquad C'_F,.i'_b = r'.K'_F,$$

$$u_F.j_C = Id_{\underline{Y}//\underline{X}} \qquad u'_F,.j'_c = Id_{\underline{X}'//\underline{Y}'}$$

$$u_F.j_d = i_b.K_F \qquad u'_F,.j'_d = i'_b.K'_F,$$

$$u_F.j_e = i_a.K_F \qquad u'_F,.j'_e = i'_a.K'_F, \quad)$$

où l'on a posé:

$$a: \{1\} \longrightarrow \{1,2\} \quad , \qquad b: \{1\} \longrightarrow \{1,2\}$$
$$1 \longmapsto 1 \qquad\qquad 1 \longmapsto 2$$
$$c: \{1,2\} \longrightarrow \{1,2,3\} \quad , \qquad d: \{1,2\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$
$$1 \longmapsto 1 \qquad\qquad 1 \longmapsto 2$$
$$2 \longmapsto 2 \qquad\qquad 2 \longmapsto 3$$

et

$$e: \{1,2\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$2 \longmapsto 3 \quad .$$

Clairement,

$$\underline{D}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}^{\wedge} = (\text{Cat}, \underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}, \underline{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan} \hookrightarrow \underline{D}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan})$$

est une syntaxe d'algèbres de rang α sur Cat et il est facile de vérifier que $U_{(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}}$ est α-algébrique sur Cat , modulo $\underline{D}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}$. Fin de la preuve.

C. - Soit α un ordinal régulier.

Si $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{F}'$) est un ensemble de foncteurs entre (petites) catégories α-présentables, on pose:

$$U_{\underleftarrow{\mathbb{F}\text{-Kan}}} = U_{(\mathbb{F},\emptyset)\text{-Kan}} : (\mathrm{Cat}_{\underleftarrow{\mathbb{F}\text{-Kan}}} = \mathrm{Cat}_{(\mathbb{F},\emptyset)\text{-Kan}}) \longrightarrow \mathrm{Cat}$$

(resp. $U_{\underrightarrow{\mathbb{F}'\text{-Kan}}} = U_{(\emptyset,\mathbb{F}')\text{-Kan}} : (\mathrm{Cat}_{\underrightarrow{\mathbb{F}'\text{-Kan}}} = \mathrm{Cat}_{(\emptyset,\mathbb{F}')\text{-Kan}}) \longrightarrow \mathrm{Cat}$).

En vertu de la proposition 42 précédente, qui s'applique immédiatement, on voit que ces foncteurs sont:

- α -algébriques sur Cat,
- α-sur-esquissables sur Cat,
- α-monadiques sur Cat.

Autrement dit, la catégorie des petites catégories munies de choix d' extensions de Kan projectives (resp. inductives),le long d'un ensemble de foncteurs entre catégories α-présentables (voir la prop. 42),est:

- isomorphe à une catégorie d'algèbres d'une syntaxe de rang α sur Cat,
- isomorphe à une catégorie de réalisations d'une esquisse α-projective,
- isomorphe à la catégorie des algèbres d'une monade de rang α sur Cat.

D. - Posons:

$$\mathbb{P} = \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{1} & \xrightarrow{e} & \underline{\mathbb{N}} \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \right\} \qquad (\text{où } \underline{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, +))$$

Alors, la catégorie $\mathrm{Cat}_{\mathbb{P}\text{-Kan}} = \mathrm{Cat}_{\mathrm{Peano}}$ est la catégorie des <u>petites catégories de Peano</u> (voir (C.A.P.E.)) et le foncteur "catégorie sous-jacente":

$$U_{\mathrm{Peano}} : \mathrm{Cat}_{\mathrm{Peano}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$$

est, notamment, en vertu du C. précédent, $\aleph_0$-monadique sur Cat.

E. - Soit α un ordinal régulier.

Si $\mathbb{K}$ (resp. $\mathbb{K}'$) est un ensemble de (petites) catégories α présentables, on pose:

- $\mathbb{F}(\mathbb{K}) = \{ \underline{X} \longrightarrow \underline{1} \ / \ \underline{X}$ est élément de $\mathbb{K} \}$
(resp. $\mathbb{F}'(\mathbb{K}') = \{ \underline{X}' \longrightarrow \underline{1} \ / \ \underline{X}'$ est élément de $\mathbb{K}' \}$).

- $\mathrm{Cat}_{(\mathbb{K},\mathbb{K}')\text{-lim}} = \mathrm{Cat}_{(\mathbb{F}(\mathbb{K}),\mathbb{F}'(\mathbb{K}'))\text{-Kan}}$

- $U_{(\mathbb{K},\mathbb{K}')\text{-lim}} = U_{(\mathbb{F}(\mathbb{K}),\mathbb{F}'(\mathbb{K}'))\text{-Kan}} : \mathrm{Cat}_{(\mathbb{K},\mathbb{K}')\text{-lim}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$.

Alors, la proposition 42 précédente s'applique immédiatement et indique que le foncteur $U_{(\mathbb{K},\mathbb{K}')\text{-lim}}$ est:

- α-algébrique sur Cat,

- α-sur-esquissable sur Cat,

- α-monadique sur Cat.

Autrement dit, la catégorie des petites catégories munies de choix de $\mathbb{K}$-limites projectives et de choix de $\mathbb{K}'$-limites inductives est:

- isomorphe à une catégorie d'algèbres d'une syntaxe de rang α sur Cat,

- isomorphe à une catégorie de réalisations d'une esquisse α-projective,

- isomorphe à la catégorie des algèbres d'une monade de rang α sur Cat.

En particulier, c'est aussi le cas pour la catégorie

$$\mathrm{Cat}_{\underleftarrow{\mathbb{K}\text{-lim}}} = \mathrm{Cat}_{(\mathbb{K},\emptyset)\text{-lim}}$$

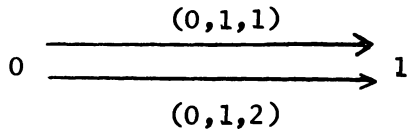
(resp. $\mathrm{Cat}_{\underrightarrow{\mathbb{K}'\text{-lim}}} = \mathrm{Cat}_{(\emptyset,\mathbb{K}')\text{-lim}}$)

des petites catégories munies d'un choix de limites projectives (resp. inductives) indexées par une ensemble $\mathbb{K}$ (resp. $\mathbb{K}'$) de petites catégories α-présentables.

F. - Notons:

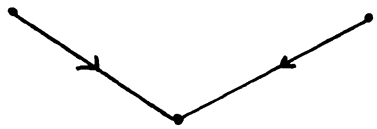
- $\mathbb{D}$is l'ensemble des catégories discrètes finies (i. e. un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes entre catégories discrètes finies),

- $\mathbb{P}$aire l'ensemble dont le seul élément est la catégorie Paire représentée par le diagramme suivant:

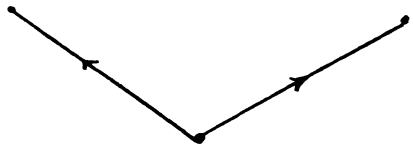


- $\mathbb{F}$in l'ensemble des catégories finies (i. e. un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes entre catégories finies),

- $\mathbb{P}$fib l'ensemble dont le seul élément est la catégorie Pfib représentée par le diagramme suivant:



- $\mathbb{S}$fib l'ensemble dont le seul élément est la catégorie Sfib représentée par le diagramme suivant:



Alors:

- la catégorie $\mathrm{Cat}_{\underleftarrow{\mathbb{D}\text{is-lim}}} = \mathrm{Cat}_{\mathrm{Prodfin}}$ (resp. $\mathrm{Cat}_{\underrightarrow{\mathbb{D}\text{is-lim}}} = \mathrm{Cat}_{\mathrm{Somfin}}$) est la catégorie des petites catégories munies d'un choix de produits (resp. sommes) finis (resp. finies),

- la catégorie $\mathrm{Cat}_{\underleftarrow{\mathbb{P}\text{aire-lim}}} = \mathrm{Cat}_{\mathrm{Ker}}$ (resp. $\mathrm{Cat}_{\underrightarrow{\mathbb{P}\text{aire-lim}}} = \mathrm{Cat}_{\mathrm{Coker}}$) est la catégorie des petites catégories munies d'un choix de noyaux (resp. de co-noyaux),

- la catégorie $\mathrm{Cat}_{\underleftarrow{\mathbb{F}\text{in-lim}}}$ (resp. $\mathrm{Cat}_{\underrightarrow{\mathbb{F}\text{in-lim}}}$) est la catégorie des petites catégories munies d'un choix de limites projectives (resp. inductives) finies,

- la catégorie $\mathrm{Cat}_{\underleftarrow{\mathbb{P}\text{fib-lim}}} = \mathrm{Cat}_{\mathrm{Prodfib}}$ (resp. $\mathrm{Cat}_{\underrightarrow{\mathbb{S}\text{fib-lim}}} = \mathrm{Cat}_{\mathrm{Somfib}}$) est la catégorie des petites catégories munies d'un choix de produits (resp. sommes) fibrés (resp. fibrées).

En vertu du E. précédent, ces catégories sont toutes, notamment, isomorphes à des catégories d'algèbres de monades (canoniques) de rang χ_0 sur Cat. De même que toutes les catégories obtenues par produit fibré (au-dessus de Cat) de deux ou plusieurs de ces catégories!

---

2. Exemples de sous-algébricité d'ordre > 1/2 sur Cat.

A. - Soit $\underline{Z}$ une catégorie petite et ker (resp. coker) un choix de noyaux (resp. co-noyaux) sur $\underline{Z}$.

Nous dirons que ce choix est isotrope (resp. co-isotrope) si, et seulement si:

- pour toute flèche $z: Z \longrightarrow Z'$ de $\underline{Z}$, on a:

$$\ker(z,z) = Id_Z : Z \longrightarrow Z$$

(resp. $\operatorname{coker}(z,z) = Id_{Z'} : Z' \longrightarrow Z'$).

B. - On désigne par Cat_{Keris} (resp. $Cat_{Cokeris}$) la catégorie des petites catégories munies d'un choix isotrope (resp. co-isotrope) de noyaux (resp. co-noyaux). Ainsi, on dispose de deux foncteurs d'oubli canoniques:

$$U_{is} : Cat_{Keris} \longrightarrow Cat_{Ker}$$

(resp. $U_{cois} : Cat_{Cokeris} \longrightarrow Cat_{Coker}$)

et

$$U_{Keris} : Cat_{Keris} \longrightarrow Cat$$

(resp. $U_{Cokeris} : Cat_{Cokeris} \longrightarrow Cat$)

rendant commutatif le diagramme de foncteurs suivant:

$$\begin{array}{ccc} Cat_{Keris} & \xrightarrow{U_{is}} & Cat_{Ker} \\ & {\scriptstyle U_{Keris}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle U_{Ker}} & \\ & Cat & \end{array}$$

(resp.

$$\begin{array}{ccc} Cat_{Cokeris} & \xrightarrow{U_{cois}} & Cat_{Coker} \\ & {\scriptstyle U_{Cokeris}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle U_{Coker}} & \\ & Cat & \end{array}$$

).

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 43. Le foncteur $U_{is}: Cat_{Keris} \longrightarrow Cat_{Ker}$ (resp. $U_{cois}: Cat_{Cokeris} \longrightarrow Cat_{Coker}$) est $\aleph_0$-algébrique sur Cat_{Ker} (resp. Cat_{Coker}).

De plus, le foncteur $U_{Keris}: Cat_{Keris} \longrightarrow Cat$ (resp. $U_{Cokeris}: Cat_{Cokeris} \longrightarrow Cat$) est $\aleph_0$-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur Cat (autrement dit: il est $\aleph_0$-algébrique sur Cat).

Preuve. Puisque $U_{Ker}: Cat_{Ker} \longrightarrow Cat$ est $\aleph_0$-algébrique sur la catégorie localement $\aleph_0$-présentable, il admet (en vertu de la proposition 30, Part. II, §3, E.) un adjoint à gauche $V_{Ker}: Cat \longrightarrow Cat_{Ker}$. On dispose donc de la catégorie à choix de noyaux $V_{Ker}(\underline{2})$.
Par ailleurs, la catégorie $\underline{2}$ est canoniquement dotée d'une unique structure, notée $\overline{\underline{2}}$, de catégorie munie d'un choix isotrope de noyaux. Le foncteur $Id_{\underline{2}}: \underline{2} \longrightarrow \underline{2} = U_{Ker}(\overline{\underline{2}})$ définit donc une unique flèche de Cat_{Ker}, que nous notons $s: V_{Ker}(\underline{2}) \longrightarrow \overline{\underline{2}}$.

On note, dans ces conditions, $\underline{B}'$ le sous-graphe multiplicatif de Cat_{Ker} ayant s comme seule flèche non triviale et l'on désigne par $\underline{D}'$ le sur-graphe multiplicatif de $\underline{B}'$ représenté par le diagramme et l'équation qui suivent:

$$V_{Ker}(\underline{2}) \underset{s'}{\overset{s}{\rightleftarrows}} \overline{\underline{2}}$$

$$s.s' = Id_{\overline{\underline{2}}} \quad .$$

Clairement, le foncteur $U_{is}: Cat_{Keris} \longrightarrow Cat_{Ker}$ est $\aleph_0$-algébrique sur Cat_{Ker}, modulo la syntaxe d'algèbres $\underline{D}'^{\wedge} = (Cat_{Ker}, \underline{B}', \underline{B}' \hookrightarrow \underline{D}')$ qui est effectivement de rang $\aleph_0$ sur Cat_{Ker}.

De plus, comme $\overline{\underline{2}}$ est but de l'épi $s: V_{Ker}(\underline{2}) \longrightarrow \overline{\underline{2}}$, scindé par $s': \overline{\underline{2}} \longrightarrow V_{Ker}(\overline{\underline{2}})$, dans la catégorie $\widetilde{\underline{D}}'$, on en conclut que $\widetilde{\underline{D}}$ conoyaute $\underline{D}'$ (voir Part. IV,§2, A. et Part. I, §1, D.). Les propositions 3 (Part. I, §1, E.), 40 (Part. IV, §2, B.) et 39 (Part. IV, §1, C.) permettent d'affirmer que U_{Keris} est bien $\aleph_0$-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur Cat.
On procède "dualement" pour U_{Cois} et $U_{Cokeris}$. Fin de la preuve.

C. - Soit $\underline{X}$ une petite catégorie.

On dit que $(\underline{X},h)$ est une catégorie homogène si, et seulement si:

- $h: \underline{X} \longrightarrow \underline{Paire}$ est un foncteur surjectif et tel que $h^{-1}(0)$ et $h^{-1}(1)$ sont deux sous-catégories connexes de $\underline{X}$.

Lorsque le foncteur h est "canonique", "naturel", ou défini une fois pour toutes, on dira, plus simplement, que $\underline{X}$ est homogène (en omettant de re-préciser h à chaque fois).

D. - Evidemment $(\underline{Paire}, Id_{\underline{Paire}}: \underline{Paire} \longrightarrow \underline{Paire})$ est une catégorie homogène.

Soit $\underline{n}$ la catégorie associée à l'ordre naturel sur l'ensemble d'entiers $\{0,1,...,n-1\}$, où $n > 1$ est un entier naturel fixé. Alors, si $\S\underline{n}$ désigne la catégorie subdivision de $\underline{n}$ (voir Part. III, §1, A.), $(\S\underline{n},h_n: \S\underline{n} \longrightarrow \underline{Paire})$ est une catégorie homogène, où h_n est l'unique foncteur tel que:

- $h_n(0,1) = 0$, $h_n((0,1),1) = (0,1,1)$, $h_n((0,1),2) = (0,1,2)$,
- pour tout objet X de $\S\underline{n}$, différent de $(0,1)$, on a $h_n(X) = 1$.

On voit facilement que $\S\underline{1}$ est isomorphe à $\underline{Paire}$, et par conséquent, elle est également (munie d'une structure de catégorie) homogène.

E. - Si $(\underline{X},h)$ est une catégorie homogène et si $\underline{Z}$ est une catégorie (petite) munie d'un choix $\varprojlim_{\underline{X}}$ (resp. $\varinjlim_{\underline{X}}$) de $\underline{X}$-limites

projectives (resp. inductives), il lui est <u>associé</u> un choix $\underset{(\underline{X},h)}{\mathrm{Ker}}$ (resp. $\underset{(\underline{X},h)}{\mathrm{Coker}}$) de noyaux (resp. conoyaux) défini comme suit (moyennant quelque abus de notation):

- pour toute paire $z,z' : Z \longrightarrow Z'$ de $\underline{Z}$, on a:

$$\underset{(\underline{X},h)}{\ker}(z,z') = \varprojlim_{\underline{X}} \left(\underline{X} \xrightarrow{h} \underline{\text{Paire}} \longrightarrow \underline{Z} \right)$$
$$(0,1,1) \longmapsto z$$
$$(0,1,2) \longmapsto z'$$

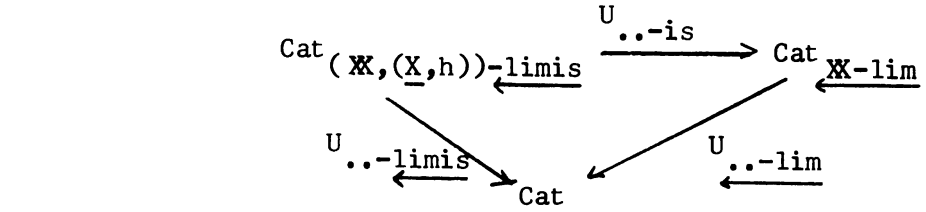
(resp.
$$\underset{(\underline{X},h)}{\mathrm{Coker}}(z,z') = \varinjlim_{\underline{X}} \left(\underline{X} \xrightarrow{h} \underline{\text{Paire}} \longrightarrow \underline{Z} \right).$$
$$(0,1,1) \longmapsto z$$
$$(0,1,2) \longmapsto z'$$

F. - Soit α un ordinal régulier et $(\mathbb{K}, (\underline{X},h))$ (resp. $(\mathbb{K}',(\underline{X}',h'))$) un ensemble de (petites) catégorie α-présentables et pointé par une catégorie homogène $(\underline{X},h)$ (resp. $(\underline{X}',h')$).

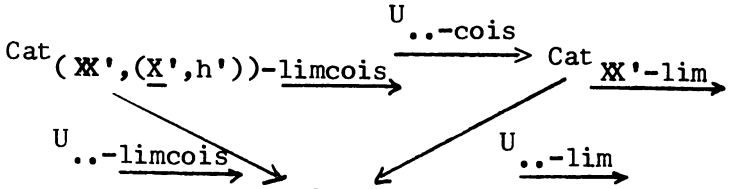
Si $\underline{Z}$ est une petite catégorie munie d'un choix de $\mathbb{K}$-limites (resp. $\mathbb{K}'$-limites) projectives (resp. inductives), on dit que ce choix est $(\underline{X},h)$-<u>isotrope</u> (resp. $(\underline{X}',h')$-<u>co-isotrope</u>) si, et seulement si:

- le choix $\underset{(\underline{X},h)}{\mathrm{ker}}$ (resp. $\underset{(\underline{X}',h')}{\mathrm{coker}}$) de noyaux (resp. conoyaux) associé est isotrope (resp. co-isotrope), au sens du A. précédent.

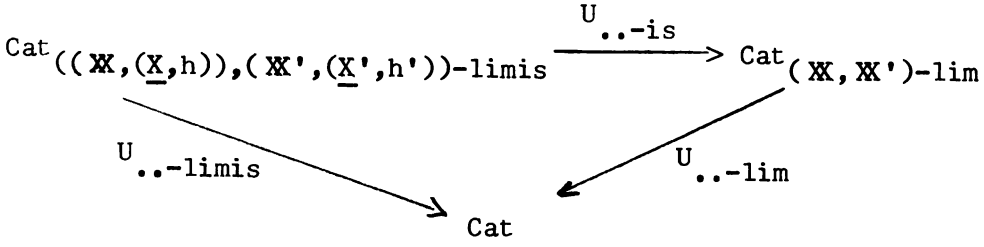
Dans ces conditions, on note $\mathrm{Cat}_{(\mathbb{K},(\underline{X},h))\text{-}\varprojlim\text{is}}$ (resp. $\mathrm{Cat}_{(\mathbb{K}',(\underline{X}',h'))\text{-}\varinjlim\text{cois}}$, $\mathrm{Cat}_{((\mathbb{K},(\underline{X},h)),(\mathbb{K}',(\underline{X}',h'))\text{-limis}}$) la catégorie dont les objets sont ces petites catégories munies d'un choix de $\mathbb{K}$-limites projectives $(\underline{X},h)$-isotrope (resp. d'un choix de $\mathbb{K}'$-limites inductives $(\underline{X}',h')$-isotrope, de choix de $\mathbb{K}$-limites projectives $(\underline{X},h)$-isotrope et de $\mathbb{K}'$-limites inductives $(\underline{X}',h')$-co-isotrope). On obtient alors des foncteurs d'oubli canoniques et un diagramme commutatif de foncteurs tel que:



(resp.



,



).

Une démonstration en tout point analogue à celle de la proposition 43 précédente permet alors d'affirmer que:

Proposition 44. Si α est un ordinal régulier, si $(\mathbb{K},(X,h))$ (resp. $(\mathbb{K}',(X',h'))$) est un ensemble de catégories α-présentables, pointé par une catégorie homogène, alors le foncteur:

$$U_{(\mathbb{K},(X,h))\text{-is}} : Cat_{(\mathbb{K},(X,h))\text{-limis}} \longrightarrow Cat_{\mathbb{K}\text{-lim}}$$

(resp. $U_{(\mathbb{K}',(X',h'))\text{-cois}} : Cat_{(\mathbb{K}',(X',h'))\text{-limcois}} \longrightarrow Cat_{\mathbb{K}'\text{-lim}}$,

$U_{((\mathbb{K},(X,h)),(\mathbb{K}',(X',h')))\text{- is}}$ ...) ,

est α-algébrique sur $Cat_{\mathbb{K}\text{-lim}}$ (resp. $Cat_{\mathbb{K}'\text{-lim}}$, $Cat_{(\mathbb{K},\mathbb{K}')\text{-lim}}$).

De plus, le foncteur:

$$U_{(\mathbb{K},(X,h))\text{-limis}} : Cat_{(\mathbb{K},(X,h))\text{-limis}} \longrightarrow Cat$$

(resp. $U_{(\mathbb{K}',(X',h'))\text{-limcois}}$, $U_{((\mathbb{K},(X,h)),(\mathbb{K}',(X',h')))\text{-limis}}$)

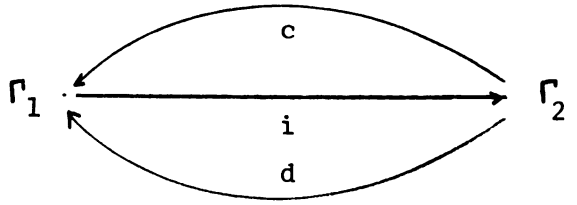
est α-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur Cat: autrement dit, il est

α-algébrique sur Cat et donc, en particulier, il admet un adjoint à gauche et est α-monadique.

G. - On pourrait multiplier les exemples de raffinement de la proposition 42: ainsi, la catégorie des petites catégories munies de choix associatifs de limites, ou celle des petites catégories munies de choix de limites projectives (resp. inductives) construites par noyaux (resp. conoyaux) et produits (resp. sommes) choisies ... sont des catégories d'algèbres de syntaxes sur Cat, donc des catégories d'algèbres de monades sur Cat. Nous laissons ce soin au lecteur, qui pourra consulter (C.A.P.E.).

3. Exemples de sous-algébricité d'ordre > 1/2 sur Graph .

A. - On note Graph la catégorie des graphes orientés, i. e. la catégorie Ens^{Γ} , où Γ est le graphe multiplicatif représenté par le diagramme et les équations suivants:



où $c.i = d.i = Id_{\Gamma_1}$.

Ceci suffit à établir (voir, par exemple, la proposition 28, Part. II, §3, B.) que Graph est une catégorie localement $\aleph_0$-présentable.

On note U: Cat ——> Graph le foncteur "graphe orienté sous-jacent": il admet évidemment un adjoint à gauche V: Graph ——> Cat et l'on sait qu'il est $\aleph_0$-monadique. En conséquence, d'après la proposition 27 (Part. II, §2, E.), U est $\aleph_0$-algébrique sur Graph.

B. - Soit α un ordinal régulier.

Si $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{F}'$) est un ensemble de foncteurs entre catégories α-présentables, la proposition 42 précédente permet d'affirmer immédiatement que le foncteur

$$U.U_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}}: \mathrm{Cat}_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}} \longrightarrow \mathrm{Graph}$$

est certainement α-sous-algébrique d'ordre $\geq 1/2$ sur Graph.

En particulier et plus précisément nous avons:

Proposition 45. Si α est un ordinal régulier, si $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{F}'$) est un ensemble de foncteurs entre catégories discrètes et α-présentables (i. e. α-petites), alors $U.U_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}}: \mathrm{Cat}_{(\mathbb{F},\mathbb{F}')\text{-Kan}} \longrightarrow \mathrm{Graph}$ est α-sous-algébrique d'ordre > 1/2 sur Graph: autrement dit, il est

α-algébrique sur Graph et donc il admet un adjoint à gauche et est α-monadique.

Preuve. Le foncteur U: Cat $\longrightarrow$ Graph étant $\aleph_0$-monadique, il est α-monadique: il est donc α-algébrique, modulo une syntaxe d'algèbres $\underline{D}^{\wedge}$ = (Graph, $\underline{B}$, J: $\underline{B} \longrightarrow \underline{D}$) , de rang α sur Graph, où $\underline{B}$ est une sous-catégorie pleine petite et dense de Graph, dont les objets sont α-présentables dans Graph et telle que $\underline{B} \longrightarrow (\text{Graph})_\alpha$ est une équivalence (voir la preuve de la proposition 30, Part. II, §3, E.). La preuve de la proposition 42 précédente indique que $U_{(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}}$ est α-algébrique sur Cat , modulo une syntaxe d'algèbres $\underline{D}_{(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}}^{\wedge}$ dont les objets sont, pour tout F: $\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ (resp. F': $\underline{X}' \longrightarrow \underline{Y}'$) , appartenant à $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{F}'$), les catégories $\underline{X}$ (resp. $\underline{X}'$) , $\underline{Y}/\underline{X}$ (resp. $\underline{X}'/\underline{Y}'$), $\underline{Y}//\underline{X}$ (resp. $\underline{X}'//\underline{Y}'$) et $\underline{Y}/// \underline{X}$ (resp. $\underline{X}' /// \underline{Y}'$). Mais, il est facile de voir que ces diverses catégories sont toutes librement engendrées par des graphes orientés α-présentables, dès que $\underline{X}$ (resp. $\underline{X}'$) et $\underline{Y}$ (resp. $\underline{Y}'$) sont discrètes.
Autrement dit, $\underline{D}_{(\mathbb{F}, \mathbb{F}')\text{-Kan}}^{\wedge}$ est une sur-syntaxe de $\underline{D}^{\wedge}$, au sens de la Part. IV, §2, C. . La proposition 41 (Part. II, §2, C.) s'applique donc: d'où la conclusion. Fin de la preuve.

En particulier, il résulte de cette proposition 45 que les foncteurs "graphes orientés sous-jacents":

$$\text{Cat}_{\text{Prodfin}} \longrightarrow \text{Graph}$$

et

$$\text{Cat}_{\text{Somfin}} \longrightarrow \text{Graph}$$

admettent des adjoints à gauche et sont $\aleph_0$-monadiques.

C. - Montrons que:

Proposition 46. Le foncteur "graphe orienté sous-jacent"

$$U.U_{\text{Keris}}: \text{Cat}_{\text{Keris}} \longrightarrow \text{Graph}$$

(resp.

$$U.U_{Cokeris}: Cat_{Cokeris} \longrightarrow Graph \qquad)$$

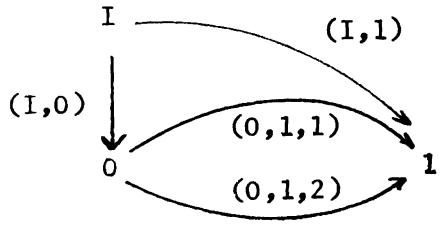
est $\aleph_0$-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur Graph: autrement dit, il est $\aleph_0$-algébrique sur Graph, donc il admet un adjoint à gauche et est $\aleph_0$-monadique.

Preuve. Le foncteur $U: Cat \longrightarrow Graph$ étant $\aleph_0$-monadique, il est $\aleph_0$-algébrique, modulo une syntaxe d'algèbres $\underline{D}_0\hat{} = (Graph, \underline{B}_0, J_0)$ de rang $\aleph_0$ sur Graph, où $\underline{B}_0$ est une sous-catégorie pleine, petie et dense de Graph, dont les objets sont $\aleph_0$-présentables dans Graph et telle que $\underline{B}_0 \longrightarrow (Graph)_{\aleph_0}$ est une équivalence.

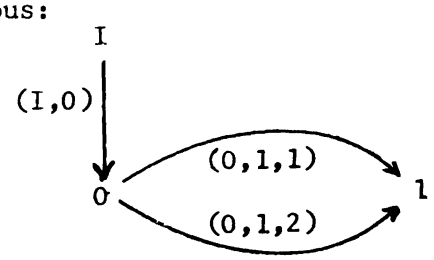
Par ailleurs, la preuve de la proposition 43 précédente indique que $U_{Keris}: Cat_{Keris} \longrightarrow Cat$ est $\aleph_0$-algébrique sur Cat, modulo une syntaxe d'algèbres $\underline{D}'\hat{}$ de rang $\aleph_0$ sur Cat dont les objets sont $\underline{2}$, $\underline{1}/\underline{Paire}$, $\underline{1}//\underline{Paire}$ et $\underline{1}/// \underline{Paire}$.

On a donc $\underline{2} = V(\underline{2})$ (moyennant quelque abus de notation !).

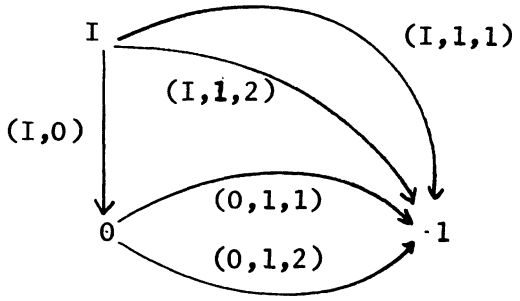
De plus, $\underline{1}/\underline{Paire}$ est la catégorie représentée par le diagramme commutatif ci-dessous:



Désignons par Tri le graphe orienté représenté par le diagramme ci-dessous:

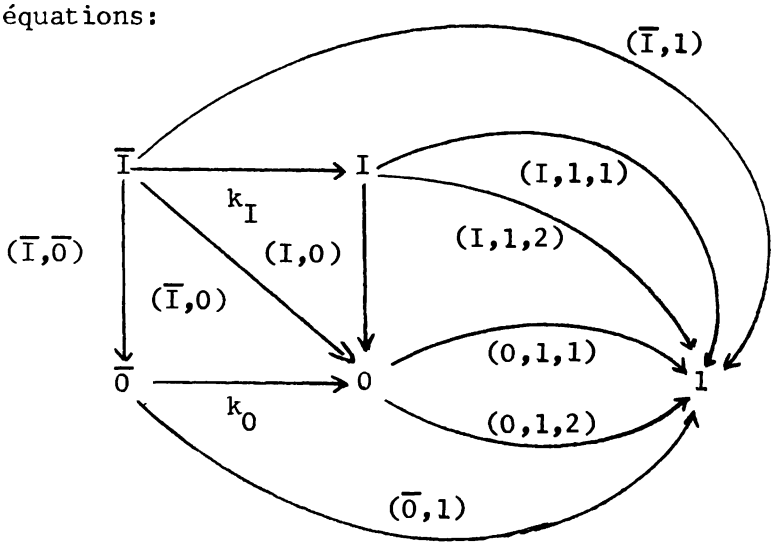


Alors, V(Tri) est la catégorie représentée par le diagramme et les équations qui suivent:



$(0,1,1).(I,0) = (I,1,1)$ $(0,1,2).(I,0) = (I,1,2)$.

Notons, alors, $V(\underline{Tri})_2$ la catégorie représentée par le diagramme et les équations:



$k_0.(\bar{I},\bar{0}) = (I,0).k_I = (\bar{I},\bar{0})$

$(I,1,1).k_I = (\bar{I},1)$

$(I,1,2).k_I = (\bar{I},1)$

$(0,1,1).k_0 = (\bar{0},1)$

$(0,1,2).k_0 = (\bar{0},1)$

$(0,1,1).(I,0) = (I,1,1)$

$(0,1,2).(I,0) = (I,1,2)$

D'où l'homomorphisme injection canonique $\underline{Tri} \longrightarrow \underline{1}/\underline{Paire}$ induit donc un foncteur $K : V(\underline{Tri}) \longrightarrow \underline{1}/\underline{Paire}$.

Notons $K' : \underline{1}/\underline{Paire} \longrightarrow V(\underline{Tri})_2$ l'unique foncteur tel que:

- $K'(0,1,1) = (I,1,1)$, $K'(0,1,2) = (I,1,2)$ et $K'(I,0) = k_I$.

Clairement, en reprenant les notations de la proposition 38 (Part. III, §4, D.), K induit un homomorphisme $\bar{K}_2 : \Omega^2_{\underline{D}',\wedge}(V(\underline{Tri})) \longrightarrow \Omega^2_{\underline{D}',\wedge}(\underline{1}/\underline{Paire})$ et K' induit également un homomorphisme $\bar{K}'_2 : \Omega^2_{\underline{D}',\wedge}(\underline{1}/\underline{Paire}) \longrightarrow \Omega^2_{\underline{D}',\wedge}(V(\underline{Tri}))$.

La proposition 38 indique donc qu'ils induisent deux homomorphismes:

$$\overline{K} : V_{Keris}.V(\underline{Tri}) \longrightarrow V_{Keris}(\underline{1}/\underline{Paire})$$

et

$$\overline{K}' : V_{Keris}(\underline{1}/\underline{Paire}) \longrightarrow V_{Keris}.V(\underline{Tri}) \quad ,$$

et l'on établit sans difficulté que $\overline{K}.\overline{K}' = Id_{V_{Keris}(\underline{1}/\underline{Paire})}$.

Un raisonnement en tout point analogue, portant sur les catégories $\underline{1}//\underline{Paire}$ et $1 /// \underline{Paire}$ permet donc de conclure que $\underline{D}_0\hat{}$ conoyaute $\underline{D}'\hat{}$, au sens de la Part. IV, §2, 1. La proposition 40 (Part. IV, §2, B.) permet donc de conclure en ce qui concerne $U.U_{keris}$.

Le raisonnement "dual" fournit le résultat cherché pour $U.U_{Cokeris}$.

Fin de la preuve.

De la même manière, nous avons, plus généralement:

Proposition 47. Si α est un ordinal régulier, si $(\mathbb{X},(\underline{X},h))$ (resp. $(\mathbb{X}',(\underline{X}',h'))$) est un ensemble de catégories α-présentables, pointé par une catégorie homogène, alors le foncteur "graphe orienté sous-jacent"

$$Cat_{(\mathbb{X},(\underline{X},h))\text{-}\underleftarrow{limis}} \longrightarrow Graph$$

(resp. $Cat_{(\mathbb{X}',(\underline{X}',h'))\text{-}\underrightarrow{limcois}} \longrightarrow Graph$,

$Cat_{((\mathbb{X},(\underline{X},h)),(\mathbb{X}',(\underline{X}',h'))\text{-}limis} \longrightarrow Graph$)

est α-sous-algébrique d'ordre $> 1/2$ sur Graph: autrement dit, il est α-algébrique sur Graph , donc il admet un adjoint à gauche et est α-monadique.

4. Exemple d'algébricité d'ordre (exactement) 1/2 sur Graph.

A. - Soit $\underline{G}$ un graphe orienté fini et non vide.

On dit qu'une flèche $g: G \longrightarrow G'$ de $\underline{G}$ est cyclée si, et seulement si:

- il existe un entier $n \geq 1$ et un diagramme de $\underline{G}$ de la forme

$$G' = G_0 \xrightarrow[g_1]{} G_1 \xrightarrow[g_2]{} G_2 \ \ldots \xrightarrow[g_n]{} G_n = G \quad .$$

Ainsi, par exemple, pour tout objet G de $\underline{G}$, la flèche $Id_G: G \longrightarrow G$ est cyclée. Plus généralement, toute flèche fermée $g: G \longrightarrow G$ de $\underline{G}$ est cyclée!

Dans ces conditions, on note $C(\underline{G})$ le sous-graphe orienté de $\underline{G}$, ayant mêmes objets que $\underline{G}$, dont les seules flèches sont les flèches cyclées de $\underline{G}$.

On désigne alors par $Ind(\underline{G})$ l'indice de $\underline{G}$, i. e. le nombre entier fini, non nul, de composantes connexes (non vides) du graphe orienté $C(\underline{G})$. On peut donc affecter à tout $1 \leq i \leq Ind(\underline{G})$ une et une seule composante connexe $C_i(\underline{G})$, que l'on appelle la $i^{ème}$ composante connexe de $C(\underline{G})$.

Si $1 \leq i \leq Ind(\underline{G})$ et $1 \leq j \leq Ind(\underline{G})$, on pose $i \ll j$ (ou encore $C_i(\underline{G}) \ll C_j(\underline{G})$) si, et seulement si:

- il existe un objet G de $C_i(\underline{G})$, un objet G' de $C_j(\underline{G})$ et une flèche $g: G \longrightarrow G'$ de $\underline{G}$.

Clairement, la relation $\ll$, ainsi définie sur $\{1,2,\ldots,Ind(\underline{G})\}$, est une relation d'ordre: on en désigne par $\underbrace{Ind(\underline{G})}_{\ldots\ldots}$ le graphe orienté.

Si $1 \leq i \leq Ind(\underline{G})$, $1 \leq j \leq Ind(\underline{G})$ et $i \ll j$, on pose:

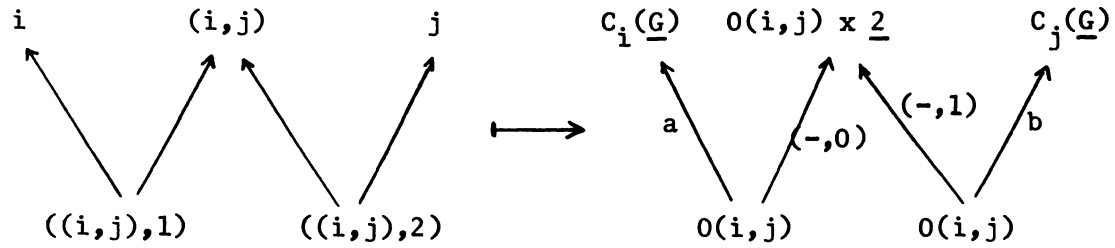
- $O(i,j) = \{g: G = a(g) \longrightarrow G' = b(g) / \ g \in Fl\underline{G}, \ G \in ObC_i(\underline{G}), \ G' \in ObC_j(\underline{G})\}$

(que l'on identifie, dans toute la suite, à un graphe orienté discret).

Alors, on considère le foncteur canoniquement associé à $\underline{G}$:

$$\Phi_{\underline{G}}: \underbrace{\S(\S(Ind(\underline{G})))}_{\ldots\ldots} \longrightarrow Graph$$

tel que, pour tout $i \ll j : i \longrightarrow j$ de $\underset{\cdots\cdot\cdot}{\mathrm{Ind}(\underline{G})}$, on a:



(en respectant l'ordre de lecture).

B. - On rappelle que le foncteur "graphe orienté sous-jacent" U: Cat $\longrightarrow$ Graph admet un adjoint à gauche V: Graph $\longrightarrow$ Cat.

De même, si $\mathrm{Cat}_{\mathrm{Peano}}$ est la catégorie des petites catégories de Peano (voir le §1, D.), le foncteur "catégorie sous-jacente" U_{Peano}: $\mathrm{Cat}_{\mathrm{Peano}} \longrightarrow$ Cat admet un adjoint à gauche V_{Peano}: Cat $\longrightarrow$ $\mathrm{Cat}_{\mathrm{Peano}}$. On pose alors $T_{\mathrm{Peano}} = U_{\mathrm{Peano}}.V_{\mathrm{Peano}}$.

Enfin, il est très facile de voir que U_{Peano} (et donc T_{Peano}) commute(ent) aux sommes.

C. - Clairement, on a:

Lemme 1. Si $\underline{G}$ est un graphe orienté fini, non vide, alors:

$$\underline{G} = \varinjlim \phi_{\underline{G}}$$

dans Graph. En conséquence, on a aussi:

$$V(\underline{G}) = \varinjlim (V.\phi_{\underline{G}})$$

dans Cat, de même que:

$$V_{\mathrm{Peano}}.V(\underline{G}) = \varinjlim (V_{\mathrm{Peano}}.V.\phi_{\underline{G}})$$

dans $\mathrm{Cat}_{\mathrm{Peano}}$.

Etablissons, maintenant, que:

Lemme 2. Si E est un ensemble (identifié à une petite catégorie discrète), alors on a:

$$T_{Peano}(E) = E \times T_{Peano}(\underline{1})$$

dans Cat.

Preuve. On a $E = \coprod_{x\in E} \underline{1}_x$ dans Cat, où $\underline{1}_x = \underline{1}$ pour tout élément x de E. En conséquence, on a: $V_{Peano}(E) = \coprod_{x\in E} V_{Peano}(\underline{1}_x)$ et donc, puisque T_{Peano} commute aux sommes:

$T_{Peano}(E) = \coprod_{x\in E} T_{Peano}(\underline{1}_x) = E \times T_{Peano}(\underline{1})$ dans Cat. Fin de la preuve.

De même, montrons que:

Lemme 3. Si E est un ensemble (identifié à une petite catégorie discrète), alors on a:

$$T_{Peano}(E \times \underline{2}) = E \times T_{Peano}(\underline{2}) = E \times \underline{2} \times T_{Peano}(\underline{1})$$

dans Cat.

Preuve. On a $E \times \underline{2} = \coprod_{x\in E} \underline{2}_x$ dans Cat, où $\underline{2}_x = \underline{2}$ pour tout élément x de E. En conséquence, on a:

$$T_{Peano}(E \times \underline{2}) = \coprod_{x\in E} T_{Peano}(\underline{2}_x) = E \times T_{Peano}(\underline{2})$$

et il est, de plus, facile de vérifier directement que

$$T_{Peano}(\underline{2}) = \underline{2} \times T_{Peano}(\underline{1}) .$$

Fin de la preuve.

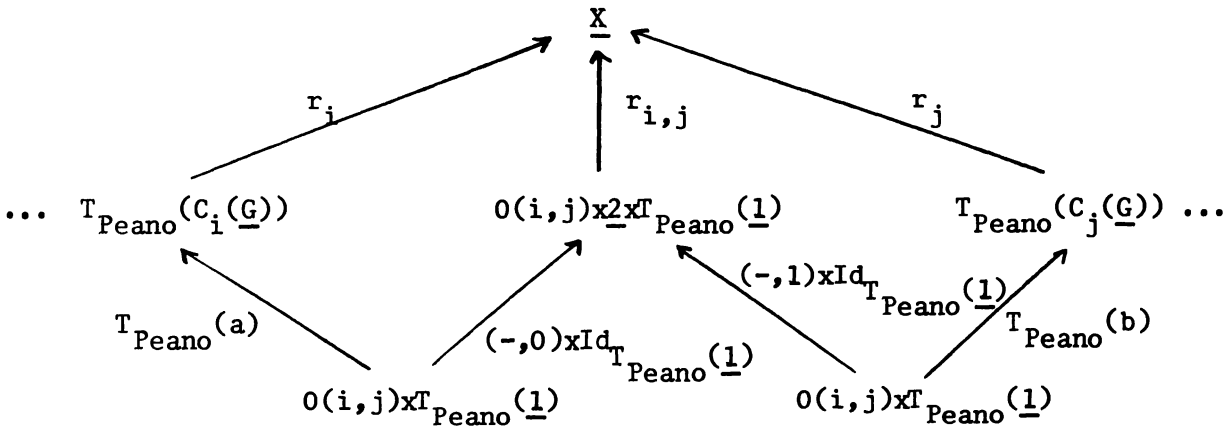
Nous sommes alors en mesure de prouver que:

Lemme 4. Si G est un graphe orienté fini, non vide, alors on a:

$$T_{Peano}.V(\underline{G}) = T_{Peano}.V(\varinjlim \phi_{\underline{G}}) = \varinjlim (T_{Peano}.V.\phi_{\underline{G}})$$

dans Cat.

Preuve. Considérons le diagramme commutatif de Cat suivant, présentant $\underline{X}$ comme limite inductive dans Cat du foncteur $T_{Peano}.V.\Phi_{\underline{G}}$:



Pour établir le lemme, il suffit de montrer que $\underline{X}$ est munie d'une seule structure de catégorie de Peano faisant des co-projections des homomorphismes de catégories de Peano.

Or le graphe orienté $\underline{\underline{Ind}}(\underline{G})$ étant (par construction) sans cycles, il suffit de le prouver si l'on suppose que:

- $Ind(\underline{G}) = 2$ et $1 \ll 2$,

- $O(1,2) = \{g: G \longrightarrow G'\}$ n'a qu'un seul élément.

Mais, dans ces conditions, la catégorie $\underline{X}$ est définie comme suit:

- elle contient la sous-catégorie pleine

$$(T_{Peano}(C_i(\underline{G})) = \overline{C_i(\underline{G})}\ ) \times \{i\}$$

dès que $i \in \{1,2\}$ (et l'on note aussi $T_{Peano}(a) = \overline{a} : T_{Peano}(\underline{1}) \longrightarrow \overline{C_1(\underline{G})}$ et $T_{Peano}(b) = \overline{b} : T_{Peano}(\underline{1}) \longrightarrow \overline{C_2(\underline{G})}$) ,

- ses seules autres flèches sont les classes d'équivalence

$$\overline{(k,H,k')} : (K,1) \longrightarrow (K',2)$$

des triplets (k,H,k') tels que:

+ H est un objet de $T_{Peano}(\underline{1})$,

+ $k: K \longrightarrow \overline{a}(H)$ est flèche de $\overline{C_1(\underline{G})}$,

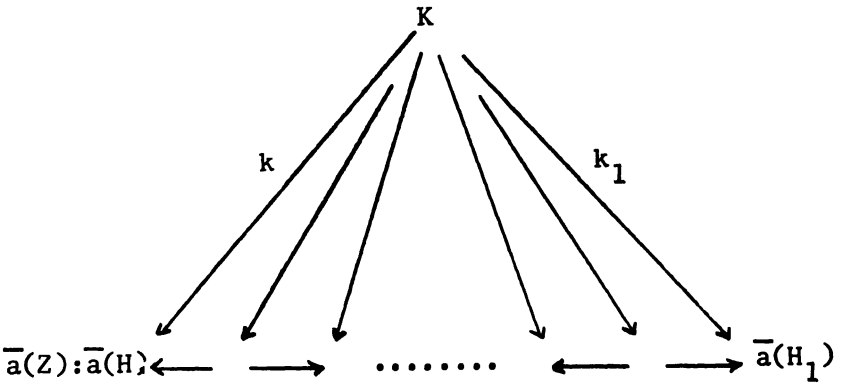
+ $k': \overline{b}(H) \longrightarrow K'$ est flèche de $\overline{C_2(\underline{G})}$,

et ce, modulo la relation d'équivalence telle que $(k,H,k') \sim (k_1,H_1,k_1')$ si, et seulement si:

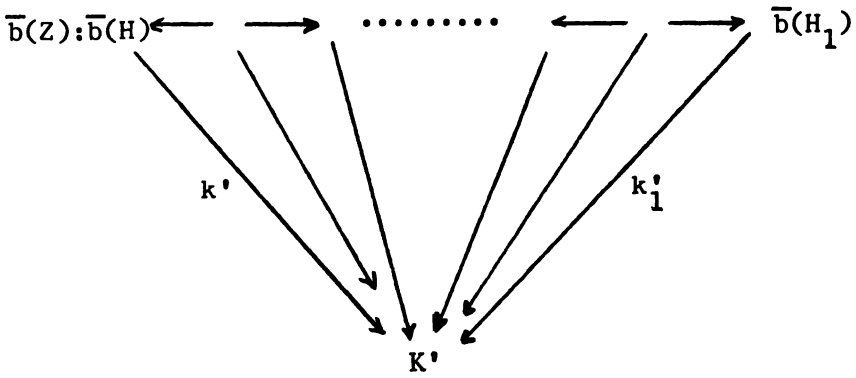
+ il existe un zigzag Z de $T_{Peano}(\underline{1})$ de la forme

$Z:\quad H \longleftarrow \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \longleftarrow \longrightarrow H_1$

+ il existe un diagramme commutatif de $\overline{C_1(\underline{G})}$ de la forme



+ il existe un diagramme commutatif de $\overline{C_2(\underline{G})}$ de la forme



Une vérification longue mais facile (car les cycles de $\underline{G}$ ont été "regroupés") permet alors de conclure. Fin de la preuve.

D. - Considèrons, maintenant, la catégorie $\underline{P}$ définie comme suit:

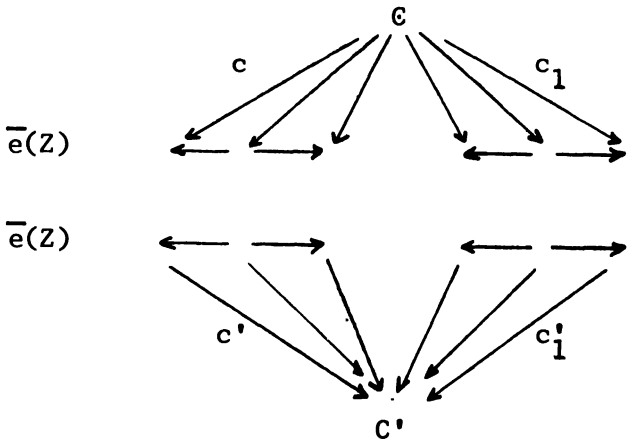
- elle contient ($T_{Peano}(\underline{\mathbb{N}}) = \overline{\underline{\mathbb{N}}} \times \{i\}$ comme sous-catégorie pleine, dès que $i \in \{1,2\}$ (on note - cf. p. 83 - $T_{Peano}(e) = \overline{e}: T_{Peano}(\underline{1}) \to \overline{\underline{\mathbb{N}}}$ et $u_{\underline{\mathbb{N}}} : \underline{\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\underline{\mathbb{N}}}$ le foncteur canonique, associé à l'adjonction de V_{Peano} à gauche de U_{Peano}),
- ses seules autres flèches sont les classes d'équivalence des triplets (c,A,c') tels que:

  + A est objet de $T_{Peano}(\underline{1})$,
  + $c: C \longrightarrow \overline{e}(A)$ est flèche de $\overline{\underline{\mathbb{N}}}$,
  + $c': \overline{e}(A) \longrightarrow C'$ est flèche de $\overline{\underline{\mathbb{N}}}$,

et ce, modulo la relation d'équivalence engendrée par la réunion des deux relations R_1 et R_2 telles que:

+ $(c,A,c')\ R_1\ (c_1,A_1,c_1')$ si, et seulement si, il existe trois diagrammes commutatifs:

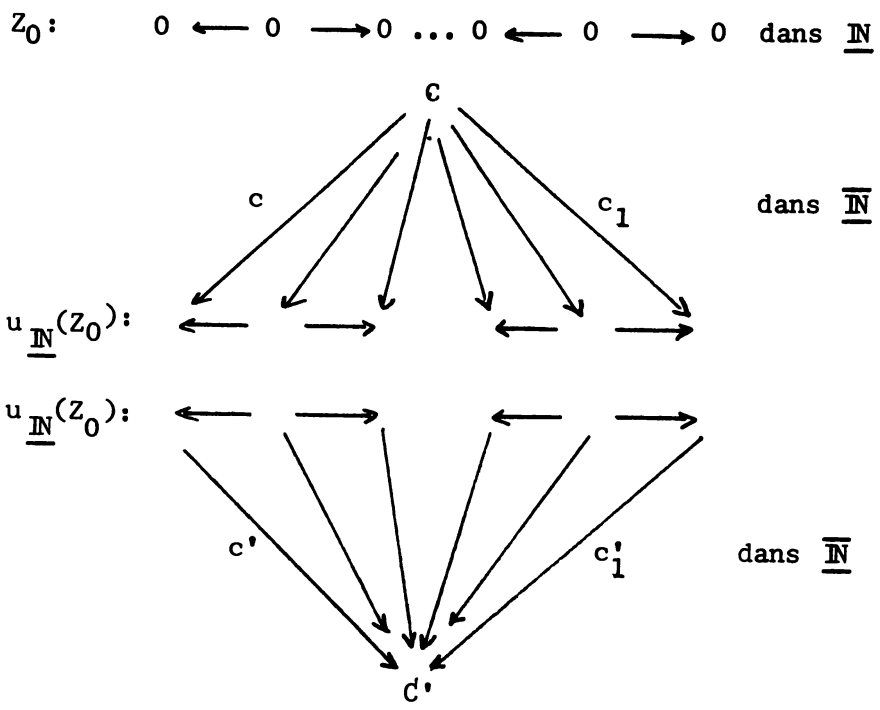
Z: $A \longleftarrow \longrightarrow \cdots\cdots \longleftarrow \longrightarrow A_1$ dans $T_{Peano}(\underline{1})$



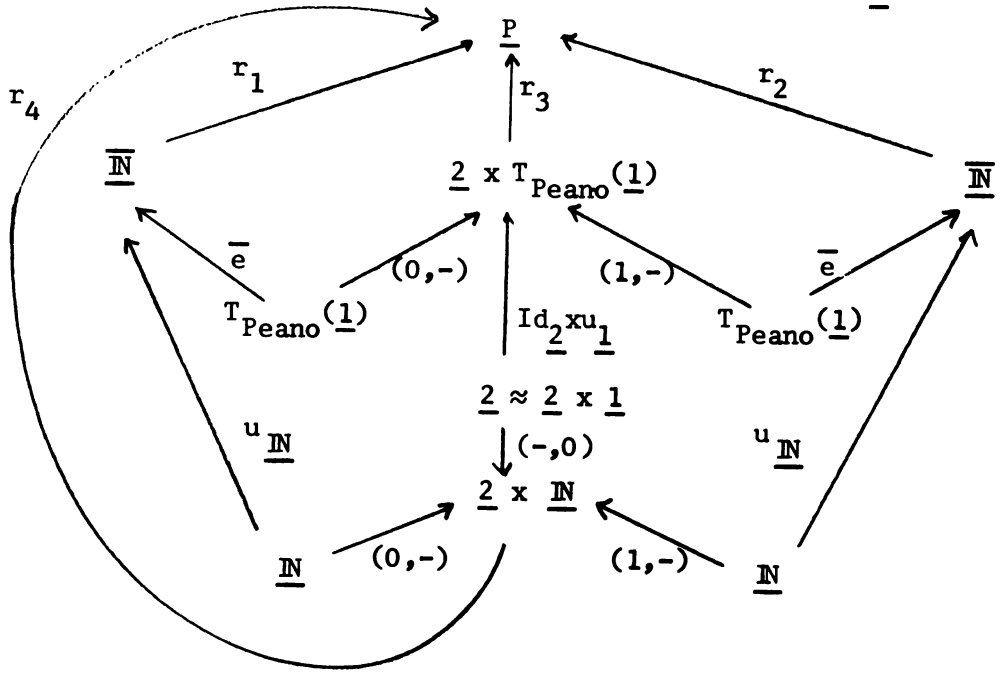
dans $\overline{\underline{\mathbb{N}}}$

dans $\overline{\underline{\mathbb{N}}}$

+ $(c,u_{\underline{\mathbb{N}}}(0),c')\ R_2\ (c_1,u_{\underline{\mathbb{N}}}(0),c_1')$ si, et seulement si, il existe trois diagrammes commutatifs



Il est facile de vérifier que le diagramme commutatif de Cat suivant présente $\underline{P}$ comme limite inductive d'un foncteur $\theta : \underline{I_P} \longrightarrow$ Cat:



E. - Compte tenu du lemme 1, il est clair que:

Lemme 5. Naturellement en tout graphe orienté fini (non vide) $\underline{G}$, on a:

$$\mathrm{Hom}_{Cat}(V(\underline{G}), \underline{P}) = \varinjlim \theta\,(-)) = \varinjlim (\mathrm{Hom}_{Cat}(V(G), \theta(-)))$$

dans Ens .

Enfin, prouvons que:

Lemme 6. Il n'existe aucune structure de catégorie de Peano sur $\underline{P} = \underline{\lim}\ \theta$ qui fasse des co-projections $r_1 : \overline{\underline{\mathbb{N}}} \longrightarrow \underline{P}$, $r_2 : \overline{\underline{\mathbb{N}}} \longrightarrow \underline{P}$ et $r_3 : \underline{2} \times T_{Peano}(\underline{1}) \longrightarrow \underline{P}$ des homomorphismes de catégories de Peano.

Preuve. Soit E un ensemble et $v : E \longrightarrow E$ une application tels que:

(a) pour tout entier $n > 0$, on a $v^n \neq Id_E$,

(évidemment, un tel couple (E,v) existe !).

On note $\langle E \rangle$ (resp. $\ll E \gg$) la plus petite sous-catégorie de Ens telle que:

- E est objet de $\langle E \rangle$ (resp. $v : E \longrightarrow E$ est flèche de $\ll E \gg$),

- $\langle E \rangle$ (resp. $\ll E \gg$) possède un choix de sommes dénombrables d'un quelconque de ses objets,

- l'injection canonique $\langle E \rangle \longrightarrow$ Ens (resp. $\ll E \gg \longrightarrow$ Ens) commute avec ces sommes.

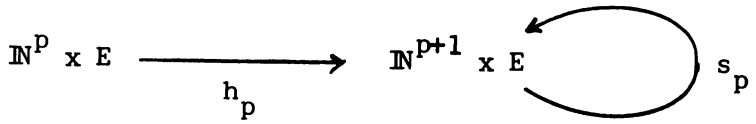
Alors $\langle E \rangle$ est la sous-catégorie de Ens telle que:

- ses objets sont les $\mathbb{N}^p \times E$, pour tout entier p ,

- ses flèches sont les applications $g \times Id_E : \mathbb{N}^p \times E \longrightarrow \mathbb{N}^q \times E$, pour toute application $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^q$.

Evidemment, $\langle E \rangle$ est une sous-catégorie de $\ll E \gg$, ayant mêmes objets

et $\langle E \rangle$ (resp. $\ll E \gg$) est canoniquement munie d'une structure de catégorie de Peano (de sorte que l'injection canonique $\langle E \rangle \longrightarrow \ll E \gg$ est un homomorphisme de catégories de Peano): à tout foncteur $\underline{1} \longrightarrow \langle E \rangle$ (resp. $\underline{1} \longrightarrow \ll E \gg$) , i. e. à tout objet $\mathbb{N}^p \times E$, est associé son extension, représentée par:



où:

- $h_p(n_1,\ldots,n_p,x) = (n_1,\ldots,n_p,0,x)$, pour tout élément $(n_1,\ldots,n_p,x)$ de $\mathbb{N}^p \times E$,

- $s_p(n_1,\ldots,n_p,n_{p+1},x) = (n_1,\ldots,n_p,n_{p+1} + 1,x)$, pour tout élément $(n_1,\ldots,n_p,n_{p+1},x)$ de $\mathbb{N}^{p+1} \times E$.

Alors, il existe une unique flèche k_v: $\mathbb{N} \times E \longrightarrow E$ de $\ll E \gg$ telle que:

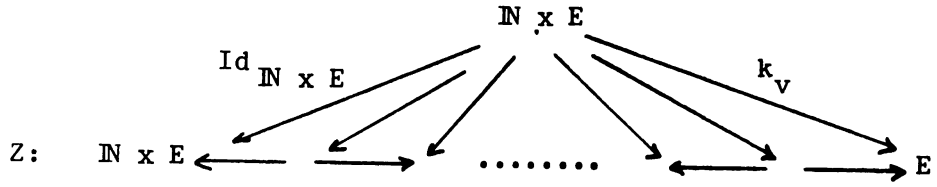
- $k_v.h_0 = Id_E$,

- $k_v.s_0 = v.k_v$,

il suffit, en effet, de poser $k_v(n,x) = v^n(x)$, pour tout élément (n,x) de $\mathbb{N} \times E$.

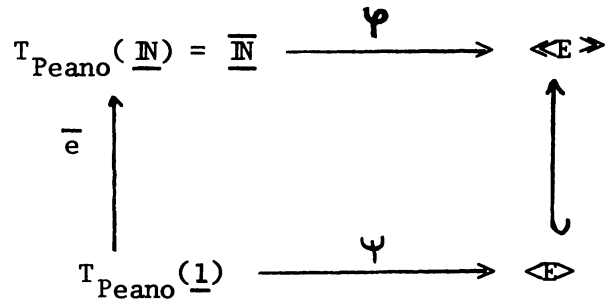
Notons $\langle E \rangle_v$ la plus petite sous-catégorie de $\ll E \gg$, contenant v et $\langle E \rangle$: alors, la condition (a) permet d'établir facilement que:

(b) il n'existe aucun diagramme commutatif de $\ll E \gg$, de la forme

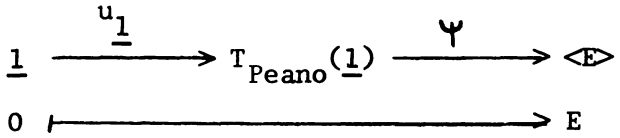


où Z est un zigzag de $\langle E \rangle_v$.

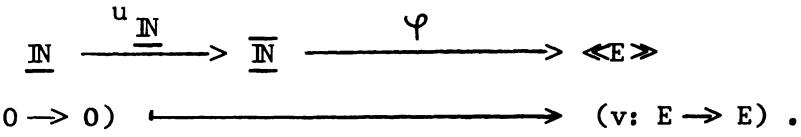
Dans ces conditions, on dispose tout d'abord d'un unique diagramme commutatif d'homomorphismes entre catégories de Peano:



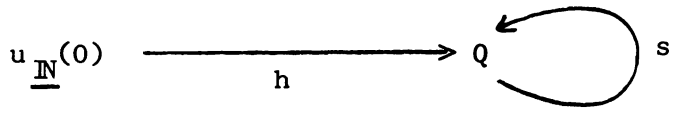
tel que:



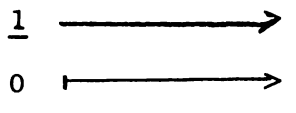
et



Ensuite, si l'on représente par:



l'extension de Kan du foncteur:



on dispose d'une unique flèche $k: Q \longrightarrow u_{\underline{\mathbb{N}}}(0)$ de $\overline{\mathbb{N}}$ telle que:

- $k.h = Id_{u_{\underline{\mathbb{N}}}(0)}$,
- $k.s = u_{\underline{\mathbb{N}}}(1: 0 \longrightarrow 0).k$.

Enfin, si l'on pose (en reprenant les notations du D.):

- $\overline{x} = \overline{(Id_{u_{\underline{\mathbb{N}}}(0)}, u_{\underline{\mathbb{N}}}(0), Id_{u_{\underline{\mathbb{N}}}(0)})}$,

- $\overline{y} = \overline{(Id_Q, Q, Id_Q)}$,

on dispose de deux flèches:

$$\overline{x}.(k,1): (Q,1) \longrightarrow (u_{\underline{\mathbb{N}}}(0),2)$$

et

$$(k,2).\overline{y}: (Q,1) \longrightarrow (u_{\underline{\mathbb{N}}}(0),2)$$

de $\underline{P}$, solutions du système des deux équations (en z):

$$\begin{cases} z.(h,1) = \overline{x} \\ z.(s,1) = u_{\underline{\mathbb{N}}}(1: 0 \longrightarrow 0).z \end{cases} .$$

Mais, la propriété (b) permet d'affirmer que $\overline{x}.(k,1) \neq (k,2).\overline{b}$.
D'où la conclusion. Fin de la preuve.

F. - Nous pouvons, maintenant, établir que:

Proposition 48. Le foncteur $U.U_{Peano}: Cat_{Peano} \longrightarrow Graph$ est $\aleph_0$-sous-algébrique d'ordre exactement 1/2 sur Graph: en particulier, il admet un adjoint à gauche mais il n'est pas monadique.

Preuve. Notons $\mathbb{T}$ la monade associée à l'adjonction de $V_{Peano}.V$ à gauche de $U.U_{Peano}$: elle est, trivialement, de rang $\aleph_0$.

Si $U.U_{Peano}$ était $\aleph_0$-monadique, il serait, en vertu de la proposition 30 (Part. II, §3, E.) , algébrique modulo la syntaxe d'algèbres $\underline{D}'_{\aleph_0, \mathbb{T}}\hat{}$ sur Graph (voir la Part. II, §2, C.). Or, les lemmes 1, 4 et 5 précédents assurent que le graphe orienté sous-jacent à $\underline{P}$ est canoniquement muni d'une structure de $\underline{D}'_{\aleph_0, \mathbb{T}}\hat{}$-algèbre telle que:

- sa catégorie sous-jacente est $\underline{P}$,

- les co-projections $r_1: \overline{\underline{\mathbb{N}}} \longrightarrow \underline{P}$, $r_2: \overline{\underline{\mathbb{N}}} \longrightarrow \underline{P}$ et $r_3: \underline{2} \times T_{Peano}(\underline{1}) \longrightarrow \underline{P}$ définissent des homomorphismes de $\underline{D}'_{\aleph_0, \mathbb{T}}\hat{}$-algèbres. Mais, le lemme 6 précédent signifie, en particulier, que cette structure de $\underline{D}'_{\aleph_0, \mathbb{T}}\hat{}$-algèbre n'est certainement pas une structure de catégorie de Peano. D'où la conclusion. Fin de la preuve.

BIBLIOGRAPHIE.

(A.L.G.R.) A. Burroni, Algèbres graphiques, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XXII,3 , Amiens, 1981.

(A.O.F.S.) F. E. J. Linton, An outline of functorial semantics, Lec. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(C.A.P.E.) L. Coppey, Catégories de Peano,catégories algorithmiques, récursivité, Diagrammes 12, Paris, 1984.

(C.A.S.T.) C. Ehresmann, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

(C.F.W.M.) S. MacLane, Categories for the working mathematician, Grad. Text. in Math. 5, Springer, 1971.

(C.S.C.S.) F. Mouen, Sur la caractérisation sémantique des catégories de structures, Diagrammes 11, Paris, 1984.

(C.S.T.R.) C. Lair, Condition syntaxique de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé, Diagrammes 1, Paris, 1979.

(D.I.L.A.) J. Beck, Distributive laws, Lect. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(E.D.S.A.) C. Lair, Esquissabilité des structures algébriques, Thèse de Doctorat es-Sciences, multigraphiée, Amiens, 1977.

(E.S.T.R.) C. Lair, Esquissabilité et triplabilité, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XVI,3, Amiens, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. instit. Polit. Iaşi, XIV, 1968.

(F.D.C.A.) Y. Diers, Foncteur pleinement fidèle dense classant les algèbres, Pub. de l'U. E. R. de Math. Pures et Appli. de l'Univ. Lille I, 1975.

(F.O.S.A.) C. Lair, Foncteur d'omission des structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XII,2, Paris, 1971.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(P.C.G.M.) L. Coppey, Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris, 1980.

(S.B.D.S.) L. Coppey, Sur quelques structures de base pour définir les structures, Diagrammes 7, Paris, 1982.

(T.A.E.P.) L. Coppey, Théories algébriques et extension de pré-faisceaux et Compléments à cet article, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XIII, 1 et 4, Paris, 1972.

SOMMAIRE.

INTRODUCTION. Page 1

PARTIE I : ALGEBRICITE. 9

1. Algébricité. 10
2. Algébricité et monadicité. 17
3. Sortes et espèces d'algébricité. 21
4. Algébricité d'espèce C' et i'-algébricité (au-sens de Diers). 26

PARTIE II : RANG D'ALGEBRICITE. 31

1. α-algébricité. 32
2. α-algébricité et α-monadicité. 38
3. α-algébricité et α-sur-esquissabilité. 42

PARTIE III : ALGEBRES PARTIELLES. 48

1. Méta-algèbres. 49
2. Para-algèbres. 53
3. Pré-algèbres. 60
4. Para-algèbres, méta-algèbres, pré-algèbres et algèbres libres. 64

PARTIE IV : SOUS-ALGEBRICITE. 68

1. Sous-algébricité. 69
2. Conditions suffisantes d'algébricité d'un foncteur sous-algébrique. 72

PARTIE V : APPLICATIONS ET EXEMPLES. 76

1. Exemples de foncteurs algébriques sur Cat 77
2. Exemples de sous-algébricité d'ordre $> 1/2$ sur Cat. 87
3. Exemples de sous-algébricité d'ordre $> 1/2$ sur Graph. 93

4. Exemples d'algébricité d'ordre (exactement) 1/2 sur Graph. 98

BIBLIOGRAPHIE. 109