DIAGRAMMES

R. MIJOULE

L'universalité des semi-fonctions récursives universelles

Diagrammes, tome 12 (1984), exp. n° 2, p. M1-M12

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1984__12__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Volume 12, 1984.

A.M.S. Sub. Class.
18 A 15 , 03 D 75,
03 G 30.

L'UNIVERSALITE DES SEMI-FONCTIONS RECURSIVES UNIVERSELLES.

par

R. Mijoule

Soit E une catégorie à limites finies. Sur la théorie des catégories indexées, le lecteur pourra consulter l'article de Paré et Schumacher (6). Voici cependant quelques notions indispensables à la compréhension du texte.

Une catégorie E-indexée $\underline{A}$ est la donnée, pour chaque objet I de E , d'une catégorie $\underline{A}^I$, et pour tout morphisme $J \xrightarrow{\alpha} I$ de E , d'un foncteur $\alpha^* : \underline{A}^I \longrightarrow \underline{A}^J$, appelé substitution le long de α . Ces données doivent être fonctorielles, i.e. vérifier les égalités suivantes:

$$(1_I)^* = 1_{\underline{A}^I} \qquad , \qquad (\beta.\alpha)^* = \alpha^*.\beta^* \ .$$

En particulier, E devient elle-même une catégorie E-indexée $\underline{E}$, en posant $\underline{E}^I = E/I$ et α^* étant le changement de base le long de α . Pour tout objet K de E, on a une catégorie E-indexée discrète $[K]$, où $[K]^I = \mathrm{Hom}_E(I,K)$ et où les substitutions le long de α sont les compositions avec α .

Un foncteur E-indexé de $\underline{A}$ vers $\underline{B}$ est la donnée, pour chaque objet I de E , d'un foncteur F^I de $\underline{A}^I$ vers $\underline{B}^I$, ces foncteurs F^I devant commuter avec les substitutions.

Soient f et g deux flèches de même source D et de buts respectifs A et B , dans une catégorie où le produit A x B est défini. On désigne par (f,g) la flèche de D vers A x B qui s'en déduit (ceci suppose bien évidemment que les projections de A x B vers A et B sont spécifiées).

Si 1 est objet final d'une catégorie, et si I est un autre objet de cette catégorie, on désigne encore par I l'unique flèche de I vers 1 .

La catégorie E sous-jacente à la théorie a été supposée à limites finies. On fait sur elle une autre hypothèse : c'est le choix d'une flèche particulière $\Omega \xrightarrow{\eta} \tilde{\Omega}$ qui a la propriété de classifier les flèches partielles de codomaine Ω. Bien sûr, la flèche η est nécessairement un monomorphisme, puisqu'elle représente la flèche partielle "identique" de $\tilde{\Omega}$ vers Ω , correspondant à Id_{Ω} .

I - Une théorie abstraite de la récursivité.

Soit S une sous-catégorie de E à produits finis. On suppose que Ω et $\tilde{\Omega}$ sont des objets de S et que les flèches partielles de but Ω dans S sont composables dans S . Soit A un objet de S . Pour chaque objet I de S , on note $S(A,\tilde{\Omega})^I$ la catégorie discrète ayant pour objets les flèches de I^*A vers $I^*\tilde{\Omega}$ dans S/I . Si $J \xrightarrow{\alpha} I$ est dans S , le foncteur α^* se restreint en un foncteur de $S(A,\tilde{\Omega})^I$ vers $S(A,\tilde{\Omega})^J$, que l'on note encore α^*. On obtient de cette manière une catégorie S-indexée $S(A,\tilde{\Omega})$.

Nous pouvons alors énoncer l'axiome de base de notre théorie:

AXIOME. Pour tout objet A de S , $A \neq 1$, il existe un foncteur S-indexé $U_A : [\Omega] \longrightarrow S(A,\tilde{\Omega})$ et un foncteur

S-indexé $S_A : S(A,\tilde{\omega}) \longrightarrow [\omega]$ tels que le composé $U_A.S_A$ soit le foncteur identité de $S(A,\tilde{\omega})$.

En utilisant le lemme de Yoneda, la donnée de U_A devient équivalente à la donnée d'un élément générique X_A de $S(A,\tilde{\omega})^{\omega}$. Notons $\varphi^A : \omega \times A \longrightarrow \tilde{\omega}$ la flèche de S qui est le composé de p_2 et de X_A, où p_2 désigne la deuxième projection de $\omega \times \tilde{\omega}$ dans $\tilde{\omega}$.
On obtient donc que, pour tout objet f de $S(A,\tilde{\omega})^I$, il existe une flèche h de I vers ω, dans S, telle que $\varphi^A.(h,1_A) = f$.

Définition 1. On appelle fonction S-semi-calculable tout élément de S de but $\tilde{\omega}$, et fonction S-calculable tout élément de S de but ω.

Théorème 1. φ^A est une fonction semi-calculable universelle. Pour toute fonction S-semi-calculable $f : \omega \times A \longrightarrow \tilde{\omega}$ il existe une fonction S-calculable $h : \omega \longrightarrow \omega$ telle que $\varphi^A.(h,1_A) = f$. En d'autres termes, $\varphi^A(h(x),\bar{y}) = f(x,\bar{y})$ pour $x \in \omega$ et $\bar{y} \in A$.

Corollaire. φ^A énumère les fonctions S-semi-calculables de A dans $\tilde{\omega}$.

On suppose que les fonctions S-semi-calculables sont composables.

Théorème 2. Soit $h : \omega \longrightarrow \tilde{\omega}$ une fonction S-semi-calculable. Pour chaque objet A de S il existe un élément $e \in \omega$ tel que $\varphi^A(\varphi^{\omega}(e,x),\bar{y}) = \varphi^A(h(x),\bar{y})$ pour $x \in \omega$ et pour $\bar{y} \in A$.

Preuve. Si h est S-semicalculable, par composition on déduit que $\varphi^A(h(x),y)$ est S-semi-calculable, de $\omega \times A$ dans $\tilde{\omega}$. Il existe donc $\theta : \omega \longrightarrow \omega$ S-calculable telle que

$\varphi^A(\theta(x),\bar{y}) = \varphi^A(h(x),\bar{y})$, pour $x \in \omega$ et $\bar{y} \in A$.
Comme φ^ω énumère les fonctions S-semi-calculables de ω dans $\tilde{\omega}$, il existe $e \in \omega$ tel que $\varphi^\omega(e,x) = \theta(x)$ pour $x \in \omega$. On obtient donc le résultat.
On remarque que l'on a en particulier, pour $\bar{y} \in A$,

$$\varphi^A(\varphi^\omega(e,e),\bar{y}) = \varphi^A(h(e),\bar{y}) .$$

Avec un bon choix de h , on a le
Théorème 3 (de récursion). Soit $\psi : \omega \times A \longrightarrow \tilde{\omega}$ une fonction S-semi-calculable. Il existe $e \in \omega$ tel que $\varphi^A(e,\bar{y}) = \psi(e,\bar{y})$ pour tout $\bar{y} \in A$.
Preuve. Soit $f : \omega \longrightarrow \omega$ S-calculable telle que $\varphi^A(f(x),\bar{y}) = \psi(x,\bar{y})$ pour $\bar{y} \in A$. Soit h le composé suivant:

$$\omega \xrightarrow{\Delta_\omega} \omega \times \omega \xrightarrow{\varphi^\omega} \tilde{\omega} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{\omega} ;$$

h est S-semi-calculable, et, d'après le théorème ci-dessus, il existe n tel que $\varphi^A(\varphi^\omega(n,n),\bar{y}) = \varphi^A(h(n),\bar{y})$. D'où $\varphi^A(\varphi^\omega(n,n),\bar{y}) = \varphi^A(f(\varphi^\omega(n,n)),\bar{y})$. Il suffit de poser $e = \varphi^\omega(n,n)$.

Soit A un objet de S et φ^A universelle. Si $e \in \omega$, on note φ^A_e ou $\{e\}^A$ la fonction S-semi-calculable de A dans $\tilde{\omega}$ définie par $\varphi^A.(e,1_A)$. En d'autres termes, pour $\bar{y} \in A$, on a $\varphi^A_e(\bar{y}) = \{e\}^A(\bar{y}) = \varphi^A(e,\bar{y})$.
Théorème 4. Pour chaque objet I de S , il existe une fonction S-calculable $S^I_A : \omega \times I \longrightarrow \omega$ telle que

$$\{S^I_A(e,\bar{x})\}^A(\bar{y}) = \{e\}^{I \times A}(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{pour } e \in \omega , \bar{x} \in I \text{ et } \bar{y} \in A.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'universalité de φ^A à $\varphi^{I \times A}$.

Exemples.

1) Soit E la catégorie dont les objets sont les ensembles de la forme $\mathbb{N}^p$, pour $p \in \mathbb{N}$, les sous-ensembles de ces ensembles et $\mathbb{N} \cup \{u\}$. Les flèches de E sont les applications entre ces ensembles. On pose $\omega = \mathbb{N}$ et $\tilde{\omega} = \mathbb{N} \cup \{u\}$. Soit S la sous-catégorie de E ayant pour objets les ensembles $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{N} \cup \{u\}$. Les flèches de S sont les fonctions semi-récursives. On remarque que S vérifie bien les propriétés énoncées ci-dessus. Pour chaque $A = \mathbb{N}^p$, φ^A est une fonction semi-récursive universelle à (p+1)-places. Si $I = \mathbb{N}^n$, un élément f de $S(A,\tilde{\omega})^I$ représente une famille de fonctions semi-récursives (f_i) indexée par I. Alors $S_A^I(f)$ est la fonction récursive de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$ qui à $i \in \mathbb{N}^n$ associe le numéro de f_i.

2) Soit ω l'ensemble des entiers naturels et posons: $T^{(0)} = \omega$, $T^{(j+1)}$ = l'ensemble des fonctions totales de $T^{(j)}$ dans ω, pour $j \in \omega$.
Soit E la catégorie dont les objets sont les $T^{(j)}$, les produits de ces ensembles, les sous-ensembles de ces ensembles et $\tilde{\omega} = \omega \cup \{u\}$.
Soit S la sous-catégorie de E ayant pour objets les $T^{(j)}$ pour $j \in \omega$, les produits de ces objets et $\tilde{\omega}$. Les flèches de S sont les fonctions partielles récursives au sens de Kleene. La description de U_A et de S_A est la même qu'au 1).
Si l'on revient à nos définitions initiales, on a $\omega \subset E$, en désignant encore par E l'ensemble des flèches de E. On s'intéresse donc aux fonctions partielles de E dans ω et en particulier à une certaine classe de ces fonctions que l'on code par ω.

Cette remarque permet de faire un peu le parallèle avec les fonctionnelles $\mathcal{J}$-récursives définies dans (5), les fonctions Θ-computables définies dans (3) et les BRFT définies dans (4). Notre point de vue se rapproche plus de ceux de Fenstad et de Friedman.

Définition 2. Soient $A, A_1, \ldots, A_n$ des objets de S. Soit G' une application de l'ensemble produit des fonctions S-semi-calculables de A_i dans $\tilde{\omega}$ vers l'ensemble des fonctions S-semi-calculables de A dans $\tilde{\omega}$. On dit que G' est représentable s'il existe une fonction S-calculable $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ telle que $G'(\{e_1\}, \ldots, \{e_n\}) = \{f(e_1, \ldots, e_n)\}$ pour tout $e_1, \ldots, e_n$ dans ω.

Théorème 5. Si G est un foncteur S-indexé de source la catégorie produit $S(A_1, \tilde{\omega}) \times \ldots \times S(A_n, \tilde{\omega})$ et de but $S(A, \tilde{\omega})$, alors G^1 est représentable.

Si G' est représentable, il existe un foncteur S-indexé G de $S(A_1, \tilde{\omega}) \times \ldots \times S(A_n, \tilde{\omega})$ vers $S(A, \tilde{\omega})$ tel que $G' = G^1$.

Preuve. Considérons le diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccc} [\omega^n] \approx [\omega] \times \ldots \times [\omega] & \xrightarrow{H} & S(A_1, \tilde{\omega}) \times \ldots \times S(A_n, \tilde{\omega}) \\ \downarrow F & & \downarrow G \\ [\omega] & \xleftarrow{S_A} & S(A, \tilde{\omega}) \end{array}$$

où $H = U_{A_1} \times \ldots \times U_{A_n}$. Comme F est S-indexé, il existe $f \in S$ tel que $[f] = F$. Donc G^1 est représentable. Réciproquement, si G' est représentable par $f : \omega^n \longrightarrow \omega$, on a un foncteur S-indexé $[f]$ tel que:

$$G'.(U^1_{A_1} \times \ldots \times U^1_{A_n}) = U^1_A . [f] .$$

En utilisant le lemme de Yoneda, on construit le foncteur G S-indexé tel que $G^1 = G'$.

Proposition 6.

1) L'application qui à $(f_1, \ldots, f_n)$ associe f_i est représentable.

2) Les applications représentables sont stables par composition.

On en déduit alors le résultat "classique":

Théorème 7. (du point fixe). Soit G un foncteur S-indexé, de $S(A, \widetilde{\omega})$ vers $S(A, \widetilde{\omega})$. Il existe une fonction S-semi-calculable $f : A \longrightarrow \widetilde{\omega}$ telle que $G^1(f) = f$.

Preuve. D'après le théorème 5, il existe une fonction S-calculable $g : \omega \longrightarrow \omega$ telle que $G^1(\{e\}) = \{g(e)\}$. D'après le théorème de récursion, il existe $e' \in \omega$ tel que $\{g(e')\} = \{e'\}$. Il suffit de poser $f = \{e'\}$.

II - Sous-objets S-semi-calculables.

Soit A un objet de S et A' un sous-objet de A . A' est un objet de E , mais pas nécessairement de S.

Définition 3. On dit que A' est un sous-objet S-semi-calculable de A s'il existe une fonction S-semi-calculable $f : A \longrightarrow \widetilde{\omega}$ de domaine A' .

Proposition 8. Les objets S-semi-calculables sont stables par changements de base.

Soit A un objet de S . Grâce à cette proposition, on construit une catégorie S-indexée S(A) de la manière suivante: si I est un objet de S , $S(A)^I$ est la catégorie discrète dont les objets sont les sous-objets S-semi-calculables de I x A , et, si $\alpha : J \longrightarrow I$ est dans S , α^* est le foncteur qui à $A' \longrightarrow I \times A$ associe $B' \longrightarrow J \times A$, où B' est l'image réciproque de A' par $\alpha \times 1_A$ (produit fibré).

Proposition 9. Il existe un foncteur S-indexé dom de source $S(A,\tilde{\omega})$ et de but $S(A)$ qui à f élément de $S(A,\tilde{\omega})^I$ associe le domaine de $p_2.f$.
En particulier, si φ^A est universelle, de $\omega \times A$ dans $\tilde{\omega}$, notons P^A le domaine de φ^A . P^A est donc un sous-objet S-semi-calculable de $\omega \times A$.
Théorème 9. P^A vérifie la propriété suivante : pour tout objet I de S et tout sous-objet S-semi-calculable F de $I \times A$, il existe une fonction S-calculable $h : I \longrightarrow \omega$ telle que $F(\bar{x},\bar{y})$ si et seulement si $P^A(h(\bar{x}),\bar{y})$ pour $\bar{x} \in I$ et $\bar{y} \in A$. Le diagramme ci-dessous est donc un produit fibré:

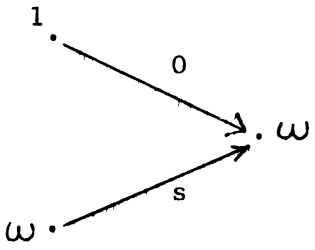
$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & P^A \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times A & \xrightarrow{h \times 1_A} & \omega \times A \end{array}$$

Preuve. Soit $f : I \times A \longrightarrow \tilde{\omega}$ S-semi-calculable de domaine F . Il existe donc $h : I \longrightarrow \omega$ S-calculable telle que $\{h(\bar{x})\}(\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y})$ pour $\bar{x} \in I$ et $\bar{y} \in A$. Par produit fibré, on en déduit le résultat.
Corollaire. P^A est un sous-objet S-semi-calculable universel de $\omega \times A$ qui énumère les sous-objets S-semi-calculables de A .

III - Structures récursives.

Définition 4. On appelle structure récursive la donnée d'une catégorie E à limites finies, d'une sous-catégorie S de E vérifiant les conditions du paragraphe I . On impose de plus que le foncteur S-indexé $\underline{S} \xrightarrow{\Delta} \underline{S} \times \underline{S}$ admet un adjoint

à gauche en $(1,\omega)$ et que sa valeur est ω. On obtient en particulier deux fonctions S-calculables $1 \xrightarrow{0} \omega$ et $\omega \xrightarrow{s} \omega$ telles que



soit une somme dans S .

On retrouve à présent toutes les théories faites sur la récursivité. On obtient en particulier la

Proposition 10. Il existe une fonction S-calculable

$$\alpha : \omega \times \omega \times \omega \longrightarrow \omega \text{ telle que}$$

$$\alpha(a,x,y) = \begin{cases} x & \text{si } a = 0 \\ y & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Preuve. On utilise l'universalité de la somme avec les fonctions S-calculables $p_2 : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ et $p_3 : \omega \times \omega \times \omega \longrightarrow \omega$.

Théorème 11. Il existe un foncteur S-indexé C_A de source $S(A,\tilde{\omega}) \times S(A,\tilde{\omega})$ et de but $S(\omega \times A,\tilde{\omega})$ tel que, en 1 , on ait : si $h : A \longrightarrow \tilde{\omega}$ et $g : A \longrightarrow \tilde{\omega}$ sont S-semi-calculables, et si $f = C_A^1(h,g)$ alors:

$$f(\bar{y}) = \begin{cases} h(\bar{y}) & \text{si } a = 0 \\ g(\bar{y}) & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Preuve. En effet, pour tout I , soient h_1 et h_2 des fonctions S-semi-calculables, de $I \times A$ dans $\tilde{\omega}$. On en déduit

donc deux fonctions S-calculables θ_1 et θ_2 , de I dans ω , telles que $U_A^I(\theta_1) = h_1$ et $U_A^I(\theta_2) = h_2$.
Soit θ_2' le composé de $1_\omega x\, \theta_2$ et de p_2 ; c'est une flèche de $\omega \times I$ vers ω. On en déduit alors une fonction S-calculable θ ; $\omega x\, I \longrightarrow \omega$, car $\omega \times I = (1 \sqcup \omega) \times I = I \sqcup (\omega \times I)$. Posons alors $C_A^I(h_1,h_2) = U_A^{\omega x\, I}(\theta)$.

Théorème 12. Supposons que E soit une sous-catégorie de Ens et que ω soit l'ensemble des entiers naturels. Alors les fonctions semi-récursives sur ω sont des fonctions S-semi-calculables.

Preuve. La démonstration est classique. Je rappelle simplement les constructions:

1) Soit f récursive à (n+1)-places . Considérons l'application $H : \mathbb{F}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{F}^{n+1}$ définie par:

$$H(g)(y,x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(y,x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ s(g(s(y),x_1,\ldots,x_n) & \\ \quad \text{si } f(y,x_1,\ldots,x_n) \neq 0 & \end{cases}$$

Par le théorème du point fixe, il existe h telle que H(h) soit égale à h . Posons $\mu f(x_1,\ldots,x_n) = h(0,x_1,\ldots,x_n)$.

2) Soient $g \in \mathbb{F}^n$ et $h \in \mathbb{F}^{n+2}$ récursives. Soit encore $H : \mathbb{F}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{F}^{n+1}$ définie par:

$$H(k)(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \begin{cases} g(x_1,\ldots,x_n) & \text{si } x_{n+1} = 0 \\ h(x_1,\ldots,x_{n+1},k(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1} - 1)) & \\ \quad \text{si } x_{n+1} \neq 0 & \end{cases}$$

Si f est un point fixe de H , alors f est définie par

récurrence à partir de g et de h .

Le résultat ci-dessous affirme que, sous certaines conditions, $A^*\omega$ est un NNO dans S/A , pour tout objet A de S .

Théorème 13. Soit A un objet de S . Si dans S/A il existe des éléments $1 \xrightarrow{x} A^*\tilde{\omega}$ et $A^*\tilde{\omega} \xrightarrow{k} A^*\tilde{\omega}$, il existe un élément $m : A^*\omega \longrightarrow A^*\tilde{\omega}$ tel que $m\,0^* = x$ et $m\,s^* = k\,m$.

Preuve. A l'élément x est associé une fonction S-semi-calculable $g : A \longrightarrow \tilde{\omega}$ et à k est associé une fonction S-semi-calculable $h : \omega \times A \longrightarrow \tilde{\omega}$ telles que $A^*g = x$ et $A^*h = k$.

On construit un foncteur S-indexé de $S(\omega \times A, \tilde{\omega})$ dans $S(\omega \times A, \tilde{\omega})$. Pour tout objet I de S , soit b un objet de $S(\omega \times A, \tilde{\omega})^I$. On remarque d'abord que la fonction prédécesseur p est S-calculable en utilisant $1 \xrightarrow{0} \omega \xleftarrow{1} \omega$

Posons $b' = b.(1_I, p, 1_A)$ et soit $h.(b', p_2)$. En considérant $g.p_2$ et cette dernière fonction, on arrive à une fonction S-semi-calculable de $I \times \omega \times A$ dans $\tilde{\omega}$.

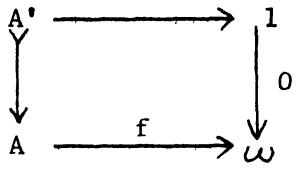
On obtient ainsi une application G^I de $S(\omega \times A, \tilde{\omega})^I$ dans $S(\omega \times A, \tilde{\omega})^I$. Il est facile de voir que l'on construit de cette manière un foncteur S-indexé de $S(\omega \times A, \tilde{\omega})$ dans $S(\omega \times A, \tilde{\omega})$.

D'après le théorème 7 , G admet un point fixe f . Montrons que (f, p_2) répond à la question, c'est-à-dire satisfait les deux égalités voulues. On utilise pour ce faire le fait que $\omega \times A$ est une somme de A et de $\omega \times A$.

Corollaire. Il existe une fonction calculable $\omega \times \omega \xrightarrow{+} \omega$.

Définition 5. Soit A un objet de S et $A' \rightarrowtail A$ un sous-objet de A . On dit que A' est un sous-objet S-calculable de A s'il existe une fonction S-calculable $f : A \longrightarrow \omega$

telle que A' soit le produit fibré de f et de 0 .



Proposition 14. Les objets S-calculables sont stables par changements de base. Si A' est un sous-objet S-calculable de A et $h : B \longrightarrow A$ est dans S , alors l'objet A'' produit fibré de A' et de h est un sous-objet S-calculable de B .

à suivre...

1) J.P.AZRA et B.JAULIN, Récursivité, Collection Programmation, Gauthier-Villars (1973)

2) S.KLEENE, Recursive functionals and quantifiers of finite types, I, Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959),1-52,

3) J.FENSTAD, Genaral recursion theory, Perspectives in mathematical logic, Springer-Verlag (1980).

4) H.FRIEDMAN, Axiomatic recursive function theory, Logic colloquium '69, North-Holland (1971) 113-137.

5) A.KECHRIS and Y.MOSCHOVAKIS, Recursion in higher types, Handbook of mathematical logic, North-Holland, (1977) 681-737.

6) R.PARE et D.SCHUMACHER, Abstract families and the adjoint functor theorems, Lectures notes in mathematics, 661, (1978) 1-125.