DIAGRAMMES

L. VAN DEN BRIL

Objets Kar-initiaux

Diagrammes, tome 9 (1983), exp. nº 2, p. VD1-VD32

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1983__9__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Volume 9, Paris 1983.

OBJETS KAR-INITIAUX

L. Van den Bril

On donne une version catégorique de la propriété suivante: un A-module est projectif de type fini ssi il est plat et de présentation finie, en caractérisant les modules projectifs de type fini au moyen de la notion d'objet Kar-initial, intèrmédiaire entre faiblement initial et initial (Kar pour Karoubi ou idempotent) déjà utilisée par R. Börger et W. Tholen (sous la forme des foncteurs semi-adjoints).
Un objet Kar-initial sera un objet faiblement initial muni d'une structure représentant le défaut d'unicité.
On retrouve et on complète la caractérisation des Ens-distributeurs ayant un adjoint à droite (Gouzou-Grunig et Paré). Ainsi, un distributeur $1 \longrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow A$ a un adjoint à droite ssi c'est une section d'un représentable c'est-à-dire une colimite absolue de représentables et un distributeur $B \longrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow A$ a un co-adjoint ssi c'est une extension absolue de représentables.
En passant au cas additif, on montre que la catégorie des A-modules projectifs de type fini est la Cauchy-complétion additive de l'anneau A , ce qui éclaire leur intervention dans la théorie de Morita classique.
Enfin, on montre comment les équivalences dans la bi-catégorie des distributeurs sont engendrées par les foncteurs pleinement et co-pleinement fidèles.

Introduction.

Un A-module à gauche peut être défini de manière équivalente comme:

1) un foncteur additif $A \longrightarrow Ab$,

2) Un foncteur additif $MatA \longrightarrow Ab$.

On rappelle que si A est une Ab-catégorie, la catégorie des matrices de A, $MatA$, a pour objets les suites finies d'objets de A et comme morphismes $(a_1,\dots,a_n) \xrightarrow{R} (b_1,\dots,b_m)$ les A-matrices $m \times n$. $MatA$ est additive, d'objet nul la suite vide.

3) Un foncteur $MatA \longrightarrow Ens$ commutant aux produits finis (si A est un anneau, $MatA$ est la théorie algébrique des A-modules).

A tout A-module $MatA \xrightarrow{M} Ab$, on peut donc associer la catégorie produit croisé:

$K(M) \longrightarrow MatA$, correspondant à $MatA \xrightarrow{M} Ab \xrightarrow{\text{oubli}} ENS$

Les objets de $K(M)$ sont donc les suites finies d'éléments de M et les morphismes

$$u = (u_1,\dots,u_n) \longrightarrow y = (y_1,\dots,y_m)$$

sont les matrices R de type $m \times n$ vérifiant $R\,x = y$.

Donc, $a = (a_1,\dots,a_n)$ est une base de M ssi a est initial dans $K(M)$.

Pour caractériser de façon analogue les modules P projectifs de type fini, on utilise le critère suivant:

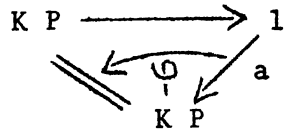
- P possède un <u>systéme générateur</u> $a = (a_1,\dots,a_n)$ (i. e. un objet faiblement initial de $K(P)$) <u>muni d'un choix linéaire</u> c'est-à-dire pour tout objet y de $K(P)$, il existe $a \xrightarrow[\varphi(y)]{} y$ tel que pour $y \xrightarrow[\partial \in K(P)]{} z$, on ait

$$\partial . \varphi(y) = \varphi(z) .$$

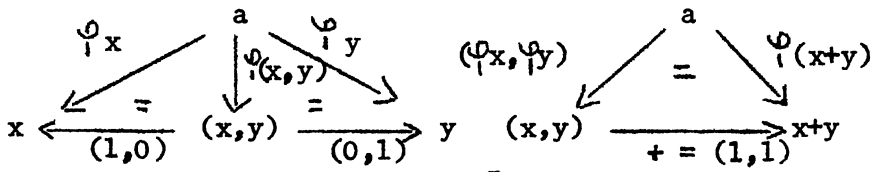
Il suffit en effet de définir $\varphi(y)(j,i) = s_i(y_j)$, où $s_1,\dots,s_n$ sont les n formes linéaires $s_i : P \longrightarrow A$ correspondant à $(P \xrightarrow{=} P) = P \xrightarrow[(s_i)]{} A^n \xrightarrow[a]{} P$.

En d'autres termes, si P est projectif de type fini, alors

il existe un cône



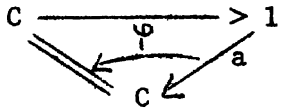
Réciproquement, pour tout $y \in P$ on définit $s_i(y) = \varphi_!(y).i$: $a \xrightarrow[1 \times n]{} y$. La linéarité résulte de celle des $\varphi_!(y)$ par rapport à y . En effet, pour tout $x,y \in P$, on obtient $\varphi_!(x,y) = (\varphi_! x, \varphi_! y)$, puis $\varphi_!(x+y) = \varphi_! x + \varphi_! y$:



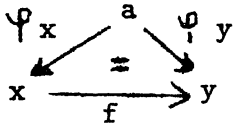
Enfin, on vérifie que $P \xrightarrow[(s_i)]{} A^n \xrightarrow[(a_i)]{} P = Id_P$.

Definition.

Un objet a de la catégorie C est Kar-initial s'il existe un cône $a^\wedge \xrightarrow[\pi]{} Id\ C$



c-à-d



pour tout $f: x \longrightarrow y \in C$, ou de manière équivalente une transformation naturelle $1^\wedge \Longrightarrow C(a,-): C \longrightarrow ENS$.

a est initial si, de plus, une des conditions équivalentes ci-dessous est réalisée:

- $\varphi_!$ a est un épimorphisme,
- $\varphi_!(a) = Id$,
- $\varphi_!$ est une extension,
- $\varphi_!$ est une extension absolue (adjonction).

Dualement, on définit les objets Kar-finaux .

Donc P est projectif de type fini ssi $K(P)$ possède un objet Kar-initial.

Theorème.

Les conditions ci-dessous sont équivalentes.

1. a est un objet Kar-initial de C .

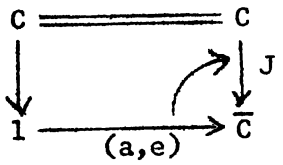
2. Il existe $C \longrightarrow a\downarrow C \xrightarrow[proj]{} C = C \equiv C$

3. a est faiblement initial et il existe $q: B \longrightarrow a$ tel que, pour tous $f,g: a \longrightarrow x$, $f.q = g.q$.

4. a est faiblement initial et il existe $e: a \longrightarrow a$ tel que, pour tous $f,g: a \longrightarrow x$, $f.e = g.e$; e est alors idempotent.

5. Il existe un idempotent $e: a \longrightarrow a$ tel que (a,e) soit initial dans $\overline{C}$ (complétion idempotente de C : les objets de $\overline{C}$ sont les couples (x,u) , où $x \in Ob\ C$ et $u: x \longrightarrow x$ est idempotent et les $\overline{C}$ - morphismes $f: (x,u) \longrightarrow (y,v)$ sont les C-morphismes $f: x \longrightarrow y$ tels que $f.u = f = v.f$ ou encore $v.f.u = f$).

6. Il existe un carré exact



où $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{J} (x,1) \xrightarrow{f} (y,1)$.

7. Il existe un idempotent $e: a \longrightarrow a$ tel que, pour tout objet x de C , il existe un unique $f: a \longrightarrow x$ tel que $f.e = f$.

8. Il existe $j: a \longrightarrow a$ tel que, pour tout objet x de C, il existe un unique $f: a \longrightarrow x$ tel que $f.j = f$.

Démonstration.

Il est clair que 1. et 2. sont équivalentes, de même que 4. et 3. et 7. et 8. .

La condition 1 implique la condition 4 puisque, si $\varphi_1 : a^\wedge \longrightarrow Id_C$, $\varphi_1 a : a \longrightarrow a$ vérifie $f.\varphi_1 a = g.\varphi_1 a = \varphi_1 x$.

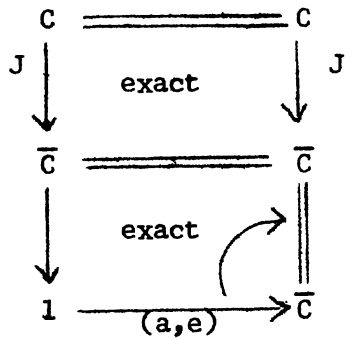
La condition 3 implique la 4 puisqu'il existe $s : a \longrightarrow b$ et $e = q.s$ vérifie $f.e = f.q.s = g.q.s = g.e$.

La condition 4 implique la 7 car il existe $g : a \longrightarrow x$ d'où $f : a \longrightarrow x$, avec $f = g.e$, de sorte que $f.e = g.e.e = g.e = f$.

L'unicité résulte de $f.e = f$ et $g.e = g$ ce qui implique $f = g$ car $f.e = g.e$.

La condition 7 implique la condition 5 car (a,e) est initial dans $\overline{C}$ puisque, pour tout (x,u) objet de $\overline{C}$, il existe $f : a \longrightarrow x$ tel que $f.e = f$, puis $g = u.f : (a,e) \longrightarrow (x,u)$ et g est unique.

La condition 5 implique la 6 puisque



La condition 6 implique la condition 1. En effet, on a $Ja = e : (a,1) \longrightarrow (a,e)$ est flèche de $\overline{C}$, d'où $Ja^\wedge \longrightarrow (a,e)^\wedge \longrightarrow J : C \longrightarrow \overline{C}$, c'est-à-dire $J.a^\wedge \longrightarrow J.Id_C$. On en déduit $\varphi_1 : a^\wedge \longrightarrow Id_C$, car J est pleinement fidèle.

La condition 8 implique la condition 7. En effet, soit $e : a \longrightarrow a$ tel que $e.j = e$, alors $e^2 = e$ car $e^2.j = e^2$. Pour tout x , il existe $f : a \longrightarrow x$ tel que $f.j = f$ et $f.e = f$ résulte de $f.e.j = f.e$ et $f.j = f$. Enfin, si $f,g : a \longrightarrow x$ vérifient $f.e = f$ et $g.e = g$, alors $f.j = f.e.j = f.e = f$ et $g.j = g.e.j = g.e = g$, de sorte que $f = g$.

Remarques.

Si $j: b \longrightarrow a$ est flèche de C et a est Kar-initial, alors b est aussi Kar-initial car b est faiblement initial et $a \xrightarrow[e]{} a \xrightarrow[s]{} b$ vérifie $f.s.e = g.s.e$. Donc, si C possède un objet Kar-initial, faiblement initial équivaut à Kar-initial.

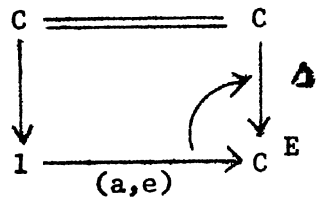
Deux objets Kar-initiaux (a,e) et (b,u) sont isomorphes dans $\overline{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un unique couple $f: a \longrightarrow b$, $g: b \longrightarrow a$ tel que $f.g.f = f$, $g.f.g = g$, $g.f = e$ et $f.g = u$; autrement dit, f et g sont des inverses généralisés.

Notation et remarque.

E désignera la catégorie à un objet et deux morphismes 1 et 0, avec $0.0 = 0$, par exemple le monoïde associé au $\wedge$-treillis $0 \longrightarrow 1$.

La condition 7 devient alors:

- il existe un carré exact



(C^E n'est pas la complétion idempotente de C).

On notera que sous cette forme, une généralisation semble possible.

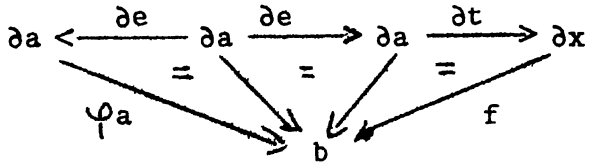
Proposition.

Soit $e: a \longrightarrow a$ Kar-initial dans A et un foncteur $\partial: A \longrightarrow B$. ∂ est initial ssi $\partial e: \partial a \longrightarrow \partial a$ est Kar-initial dans B .

Démonstration.

Si $\partial e: \partial a \longrightarrow \partial a$ est Kar-initial et b est objet de B , il

existe $t: a \longrightarrow x$ et ∂e égalise φa et $f.\partial t$:



La réciproque est évidente.

Corollaire.

A possède un objet Kar-initial ssi il existe un foncteur initial $E \longrightarrow A$.

Démonstration.

En effet, 0 est Kar-initial dans E .

Proposition.

A possède un objet Kar-initial ssi il existe $A \xrightarrow{J} B \xrightarrow{P} A$ vérifiant $P.J = 1$ et B a un objet initial b.

Démonstration.

En effet, on obtient $k: b \longrightarrow JPb$ et $Pk: Pb \longrightarrow Pb$ est Kar-initial.

Exemples.

Dans une catégorie à un objet, e est Kar-initial ssi e est absorbant à droite.
Dans une catégorie à flèches nulles, tout $0: a \longrightarrow a$ est Kar-initial et Kar-final.
Si A possède un objet final 1 , tout $a \longrightarrow 1 \longrightarrow a$ est Kar-final.

Remarque.

Si A possède un objet Kar-final, A est arbitrairement cofil-

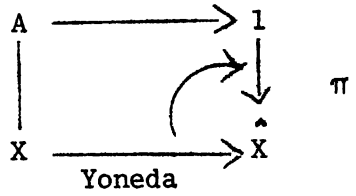
trante, en ce sens que pour tout foncteur $F: I \longrightarrow A$ il existe $F \longrightarrow a^{\wedge}$ (en raison de $\varphi: Id_A \longrightarrow a^{\wedge}$).

Définitions.

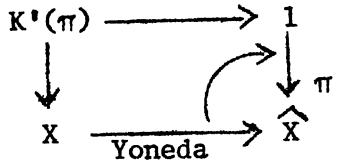
Soit A et C des catégories.

Une A-présentation de C est un foncteur final $A \longrightarrow C$.

Si $\pi: X^{op} \longrightarrow ENS$ est un foncteur, une A-présentation de π est une A-présentation de $K'(\pi)$ (produit croisé), i. e. un foncteur final $A \longrightarrow K'(\pi)$, ou, de manière équivalente, un carré exact

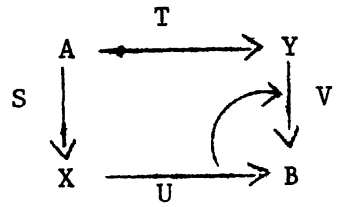


car

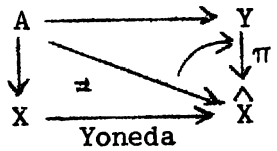


est un carré comma (en raison des propriétés des Yoneda-Structures, π admet une A-présentation ssi π est une A-colimite de foncteurs représentables - ce qui justifie la terminologie).

Soit $\pi: Y \longrightarrow\!\!\!\!\!+\; X$ un distributeur. Une A-présentation de π est un carré exact



où π U.V (π admet donc une A-présentation ssi il existe une extension ponctuelle



).

Théorème.

Si C est A-cofiltrante et admet une A-présentation, alors C possède un objet Kar-**final** .

Réciproquement, si C possède un objet Kar-final, C est A-cofiltrante pour toute catégorie A et admet une présentation finie.

En particulier, C possède un objet Kar-final ssi C est finiment cofiltrante et admet une présentation finie. C'est la version catégorique de l'équivalence:

" projectif de type fini"

équivaut à

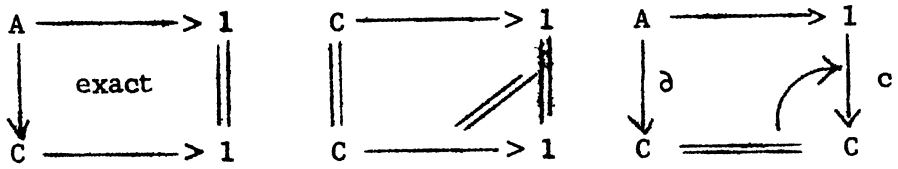
" plat et de présentation finie"

car un R-module P est plat ssi la catégorie produit croisé associée au foncteur $\mathrm{MatR} \xrightarrow[P]{} \mathrm{Ab} \xrightarrow[\text{oubli}]{} \mathrm{ENS}$ est finiment cofiltrante et admet une présentation finie ssi il existe une suite exacte

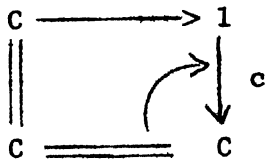
$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow P \longrightarrow 0$, c'est-à-dire P est une colimite finie de modules libres de types finis.

Démonstration.

Soit $\partial : A \longrightarrow C$ un foncteur final et supposons que C est A-cofiltrante. On en déduit



d'où

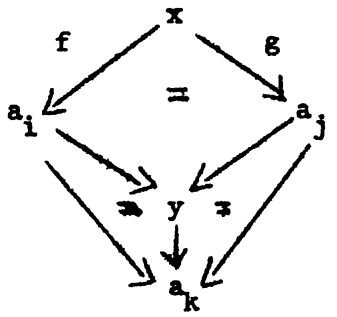


et e est Kar-final.

Remarques.

Le theorème précédent généralise le théorème d'adjonction de Freyd assurant l'existence d'un objet final à partir d'un ensemble de solutions et d'hypothèses de complétude. Ainsi:

1. Si C possède une famille d'objets $(a_i)_{i\in I}$ faiblement finale (i. e. pour tout objet x de C, il existe $x \longrightarrow a_i$ et si tout diagramme $\longleftarrow \longrightarrow$ peut être complèté en un carré commutatif) alors l'inclusion $A \longrightarrow C$ de la sous-catégorie pleine de C ayant pour objets les a_i est un foncteur final car



;

en particulier, si α est un ordinal régulier tel que A soit α-petite et C soit α-cofiltrante, alors C possède un objet Kar-final.

2. Un foncteur final $A \longrightarrow C$ peut être interprèté comme un "ensemble de solutions" au niveau des objets mais aussi au niveau des morphismes: ainsi, l'inclusion (non nécessairement pleine) $(b \xrightarrow{r_i} a) \longrightarrow C$ est un foncteur final ssi, pour tout objet x de C, il existe $f: x \longrightarrow a$ et, pour toute paire $f,g: x \longrightarrow a$, on a $f = g$ ou encore il existe des suites finies $a_0, a_1, \ldots, a_n : x \longrightarrow b$ et $r_0, r_1, \ldots, r_{2n+1} : b \longrightarrow a$ telles que

$$f = r_0 \cdot a_0 \quad , \quad r_1 \cdot a_0 = r_2 \cdot a_1 \quad , \quad r_3 \cdot a_1 = r_4 \cdot a_2 \quad ,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{2n-1} \cdot a_{n-1} = r_{2n} \cdot a_n \quad , \quad r_{2n+1} \cdot a_n = g \, .$$

Proposition (équivalences dans DIST).

Soit $J: A \longrightarrow B$ un foncteur.
Les assertions suivantes sont équivalentes:

1 J est pleinement et copleinement fidèle ,

2. $J^\circ \dashv J$ (α,β) avec α et β des isomorphismes,

3. J est une équivalence entre A et B au niveau de la bi-catégorie des distributeurs.

Démonstration.

On sait que $J \dashv J^\circ$ (ε,η) et que J est pleinement (copleinement) fidèle ssi ε (η) est un isomorphisme.
Montrons que 1 implique 2. En effet, $J^\circ \eta \,.\, \varepsilon J^\circ = 1$ et $\eta J \,.\, J\varepsilon = 1$ impliquent $\varepsilon^{-1} J^\circ \,.\, J^\circ \eta^{-1} = 1$ et $J\varepsilon^{-1} \,.\, \eta^{-1} J = 1$, c'est-à-dire $J^\circ \dashv J$ $(\varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$.
Il est évident que 2 implique 3 .
La condition 3 implique la condition 2 car, si $J \dashv \sigma$, alors $\sigma \sim J^\circ$.
Enfin, la condition 2 implique la 1 car $J^\circ \dashv J$ (α,β) implique que $J \dashv J^\circ$ (β^{-1},α^{-1}).

Proposition.

Un foncteur pleinement et copleinement fidèle préserve et réfèchit toutes les limites gauches et droites.

Démonstration.

Soit $J: A \longrightarrow B$ un foncteur pleinement et copleinement fidèle $F: I \longrightarrow A$ un foncteur de limite gauche $a^\wedge \xrightarrow{\varphi} F$ et $b^\wedge \xrightarrow{\psi} JF$. Il existe $b \xrightarrow{s} Jx \xrightarrow{q} b = Id_b$ d'où $Jx^\wedge \xrightarrow{q^\wedge} b^\wedge \xrightarrow{\Psi} JF = J(x^\wedge \xrightarrow{\lambda} F)$ et $x \xrightarrow{t} a$ tel que $\varphi . t^\wedge = \lambda$. On en déduit $b \xrightarrow{s} Jx \xrightarrow{Jt} Ja$ tel que:

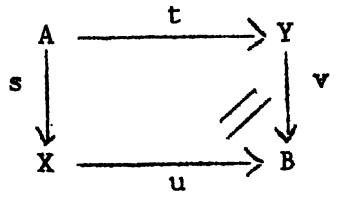
$J\varphi . Jt^{\wedge} . s^{\wedge} = J(\varphi . t^{\wedge}) . s^{\wedge} = J\lambda . s^{\wedge} = \psi . q^{\wedge} . s^{\wedge} = \psi$.

Si $u,v: b \longrightarrow Ja$ sont tels que $J\varphi . u^{\wedge} = J\varphi . v^{\wedge}$, alors $J\varphi . u^{\wedge} . q^{\wedge} = J\varphi . v^{\wedge} . q^{\wedge}$. Si l'on pose $Jx \xrightarrow{q} b \xrightarrow{u} Ja = Jm$ et $Jx \xrightarrow{q} b \xrightarrow{v} Ja = Jn$, on a $J\varphi . Jm^{\wedge} = J\varphi . Jn^{\wedge}$ et $\varphi . m^{\wedge} = \varphi . n^{\wedge}$, où $m,n: x \longrightarrow a$. Il en résulte que $m = n$ et donc $u.q = v.q$, de sorte que $u = v$ (q étant un épimorphisme).

La démonstration pour les limites droites est identique.

Proposition.

Soit

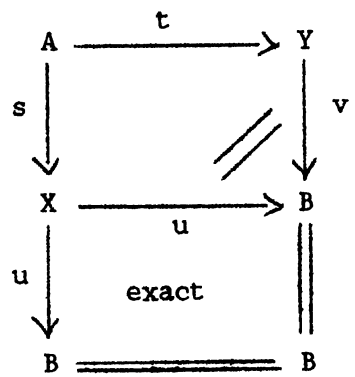


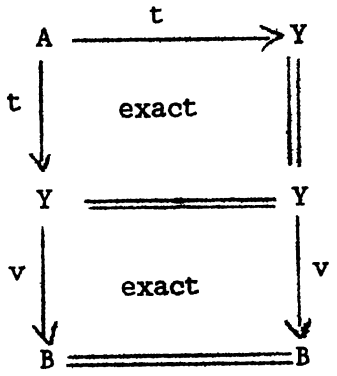
un carré commutatif dans CAT.

Ce carré est exact dès que s et v sont pleinement et copleinement fidèles (ou bien si t et u sont pleinement et copleinement fidèles).

Alors t et u ont les mêmes propriétés de continuité.

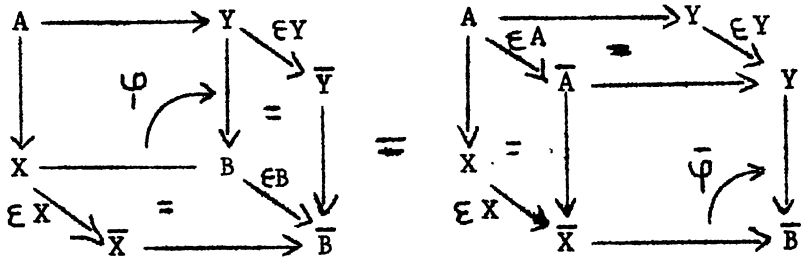
Démonstration.





Corollaire.

Si



et si ξA , ξX , ξY et ξB sont pleinement et copleinement fidèles, alors φ est exact ssi $\bar{\varphi}$ est exact.

Théorème.

La complètion idempotente $A \longrightarrow \bar{A}$ est pleinement et copleinement fidèle et le 2-foncteur associé $CAT \xrightarrow[(-)]{} CAT$ préserve et réflèchit les carrés exacts.

Démonstration.

En effet, pour tout $(a,e) \in Ob\ \bar{A}$, on a

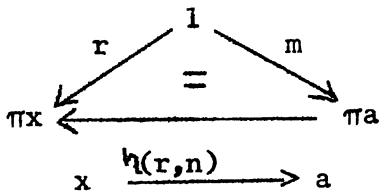
$$(a,e) \xrightarrow{e} (a,1) \xrightarrow{e} (a,e) = Id_{(a,e)}$$

et on applique ensuite le corollaire précédent.

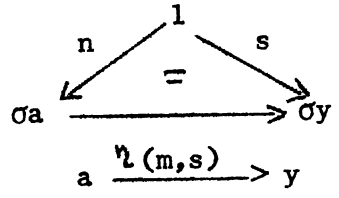
Considérons les distributeurs $1 \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sigma} 1$

c'est-à-dire $A^{op} \xrightarrow{\pi} ENS \xleftarrow{\sigma} A$.

On a $\pi \dashv \sigma\ (\xi,\eta)$ ssi il existe un objet a de A , $m \in \pi a$, $n \in \sigma a$ et $\eta : \pi x \longrightarrow A(-,-) : A^{op} \times A \longrightarrow ENS$ vérifiant, pour tout $(x,r) \in Ob K_{\pi}$ et $(y,s) \in Ob\ K\sigma$,



$x \xrightarrow{\eta(r,n)} a$



$a \xrightarrow{\eta(m,s)} y$

$\pi x \times \sigma a \xrightarrow[\eta]{} (x,a)$ $\qquad$ $\pi a \times \sigma y \xrightarrow[\eta]{} (a,y)$

$1 \xrightarrow{\sigma\pi} 1 = \int^a \pi a \times \sigma a$ = ensemble des composantes connexes de la catégorie $\pi \diamond \sigma$, schématisée par $f: (m,a,n) \longrightarrow (\bar{m},\bar{a},\bar{n})$ où $a \in Ob\ A$, $m \in \pi a$, $n \in \sigma a$, $f: a \longrightarrow \bar{a} \in A$, $\pi(f)\ \bar{m} = m$, $\sigma(f)\ n = \bar{n}$.

Une présentation équivalente est donnée par la proposition qui suit.

Proposition.

On a $\pi \longrightarrow\!\!\!\!\!\mid \sigma$ (ξ,η) ssi il existe:

1. $a \in Ob\ A$, $m \in \pi a$, $n \in \sigma a$,
2. des transformations naturelles $\varphi : \pi \xrightarrow{\varphi} (-,a)$ et $\psi : \sigma \longrightarrow (a,-)$

vérifiant:

(i) $\pi \xrightarrow{\varphi} (-,a) \xrightarrow{\lambda^m} \pi = Id_\pi$,

(ii) $\sigma \xrightarrow{\psi} (a,-) \xrightarrow{\lambda^n} \sigma = Id_\sigma$,

(iii) $\varphi(a)\ m = \psi(a)\ n$.

Démonstration.

En effet, on passe d'une présentation à l'autre en posant:

$\varphi(x)\ r = \eta(x,a)(r,n)$, $\psi(y)\ s = \eta(a,y)(m,s)$ et

$\eta(x,y)(r,s) = \psi(y)\ s \,.\, \varphi(x)\ r$, $x \xrightarrow{\varphi(x)r} a \xrightarrow{\psi(y)s} y$.

Remarque.

Les associations $\eta \longleftrightarrow (\varphi,\psi)$ ne sont pas bijectives et " η est un isomorphisme " n'est pas équivalent à " φ et ψ sont des isomorphismes ".

Proposition.

Avec les notations de la proposition précédente, soit $a \in Ob\ A$ et $m \in \pi a$. On obtient une bijection entre les transformations naturelles $\varphi : \pi \longrightarrow (-,a)$, vérifiant $\lambda^m . \varphi = Id_\pi$, et les morphismes $e: (a,m) \longrightarrow (a,\mathbf{a})$, représentant (a,m) comme objet Kar-final de $K'(\pi)$, en posant:

1. $e = \varphi(a)(m)$;

2. Pour tout $x \in Ob\ A$ et $r \in \pi x$, $\varphi(x)r : a \longrightarrow a$ est l'unique morphisme vérifiant, dans $K'\pi$,

$$(x,r) \xrightarrow{\varphi(x)r} (a,m) \xrightarrow{e} (a,m) = (x,r) \xrightarrow{\varphi(x)r} (a,m) .$$

Corollaire.

Soit $1 \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sigma} 1$ des distributeurs.

On a $\pi \dashv \sigma$ ssi la catégorie $\pi \diamond \sigma$ possède un endomorphisme $(m,a,n) \xrightarrow{e} (m,a,n)$ (c'est-à-dire $m \in \pi a$, $n \in \sigma a$, $a \xrightarrow{e} a \in A$, $\pi(e)\ m = m$ et $\sigma(e)\ n = n$) tel que:

- $(a,m) \xrightarrow{e} (a,m)$ soit Kar-final dans $K'\pi$,
- $(a,n) \xrightarrow{e} (a,n)$ soit Kar-initial dans $K\sigma$.

Définition.

On dira qu'un foncteur $\sigma : A \longrightarrow ENS$ est Kar-représentable ssi $K\sigma$ possède un objet Kar-initial.

Ainsi, en particulier, P est un R-module projectif de type fini ssi $Mat\ R \longrightarrow Ab \longrightarrow ENS$ est Kar-représentable.

Théorème (cas particulier de distributeurs adjoints).

Soit $\sigma : A \longrightarrow ENS$ un foncteur.

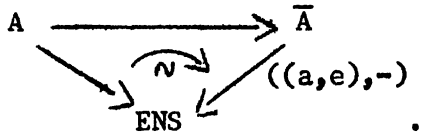
Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. σ est Kar-représentable.

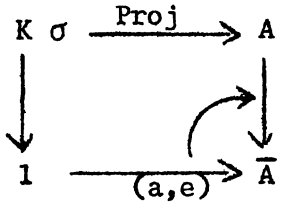
2. σ est une section d'un représentable, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \xrightarrow{\varphi} (a,-) \longrightarrow \sigma = Id_\sigma$.

3. σ admet un adjoint à gauche dans la bicatégorie des distributeurs.

4. σ est isomorphe à la restriction d'un foncteur représentable de $\overline{A}$, c'est-à-dire

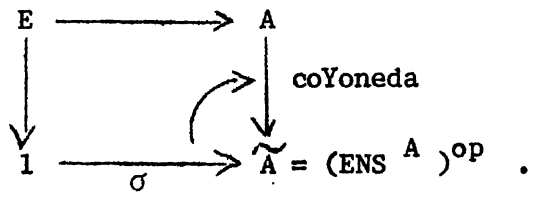


5. Il existe un carré exact



6. σ est une colimite absolue de représentables.

7. Il existe un carré exact



En raison de 4. , σ a alors toutes les propriétés de continuité du représentable ((a,e),-) . L'adjoint à gauche π de σ est, dans ces conditions, le sous-foncteur de (-,a) tel que $\pi\, x = \{ f : x \longrightarrow a \;/\; e.f = f \}$.

Démonstration.

La condition 7 implique la condition 6 car toute E-colimite est une colimite absolue.

La condition 6 implique la 2 puisque si $\varphi : \partial \longrightarrow a^{\wedge} : I \longrightarrow A$ est une colimite absolue, il existe $a \longrightarrow \partial i \xrightarrow{\varphi i} a \simeq Id$.

La condition 2 implique la condition 7 car si l'on a $a \xrightarrow{p} e \xrightarrow{q} a = Id_a$, alors a est une E-colimite (absolue) de $\partial : E \longrightarrow A$ tel que $\partial e = pq$.

La condition 5 équivaut à la condition 4 . En effet, un carré est $U\,S \xrightarrow{\varphi} V\,T$ est exact ssi $S\,T^{\circ} \xrightarrow{\overline{\varphi}} U^{\circ}\,V$ est un isomorphisme.

La condition 5 implique la condition 3, puisque l'on a

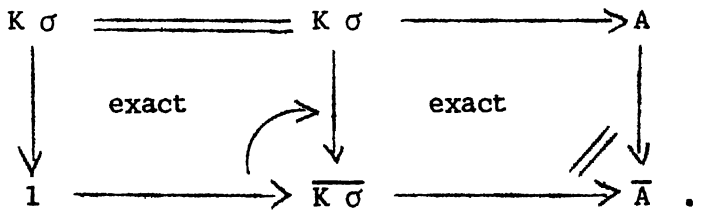
$A \xrightarrow{\sigma} 1$ $\quad A \xrightarrow{J} \overline{A} \longrightarrow 1$, qui ont tous deux des adjoints à gauche dans DIST.

La condition 3 implique la 2, puisque l'on a montré que $\pi \dashv \sigma$ entraine l'existence de $\sigma \xrightarrow{\varphi} (a,-) \longrightarrow \sigma = Id_\sigma$.

La condition 2 implique la condition 1, car

$K\sigma \longrightarrow a \downarrow A \longrightarrow K\sigma = Id_{K\sigma}$, et, comme $a \downarrow A$ possède un initial, $K\sigma$ possède un Kar-initial.

La condition 1 implique la condition 5 puisque:



Il reste à montrer que l'adjoint à gauche a la forme indiquée.

Soit $e: (a,n) \longrightarrow (a,n)$ Kar-initial dans $K\sigma$. Il en résulte que $(a,e) \xrightarrow{e} (a,e) \in K'\pi$. Il suffit alors de montrer que ce dernier morphisme est Kar-final dans $K'\pi$. Cela résulte de: $f: (b,f) \longrightarrow (a,e)$, pour tout $(b,f) \in Ob\, K'\pi$, et, si $f,g: (b,f) \longrightarrow (a,e) \in K'\pi$, c'est-à-dire $\pi(f)\, e = \pi(g)\, e$, alors $e\, f = e\, g$.

Remarque.

Compte tenu des propriétés d'exactitude du 2-foncteur

$Ab\text{-}CAT \xrightarrow{Mat} Ab\text{-}CAT \xrightarrow{Oubli} CAT$, on peut montrer que les modules projectifs de type fini sont ceux qui admettent un adjoint dans Ab-CAT.

Proposition (Lemme de Yoneda pour les foncteurs Kar-représentables).

- Tout idempotent de A , $e: a \longrightarrow a$, détermine un foncteur Kar-représentable contravariant

$$a_e: A \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{(-,(a,e))} ENS$$

c'est-à-dire que a_e est le sous-foncteur de $(-,a)$ tel que $a_e(x) = \{ f: x \longrightarrow a \;/\; e\,f = f \}$ et $e: (a,e) \longrightarrow (a,e)$ est Kar-final dans $K'(a,e)$.

- En raison du théorème précédent, tout foncteur Kar-représentable est isomorphe à un tel foncteur.

- Pour tout foncteur $\pi: A^{op} \longrightarrow$ ENS , l'application $a_e \xrightarrow{\theta} \pi \longrightarrow \theta(a)\, e \in \pi a$ est une bijection entre les transformations naturelles $a_e \longrightarrow \pi$ et les points fixes de $\pi a \xrightarrow{\pi e} \pi a$, c'est-à-dire les $m \in \pi a$ tels que $\pi(e)\, m = m$.

La bijection réciproque $m \longrightarrow \theta$ telle que $\theta(x)f = \pi(f)m$ ($f: x \longrightarrow a$ vérifiant $e\,f = f$) .

En particulier, les transformations naturelles $a_e \longrightarrow b_j$ sont en bijection avec les $f: a \longrightarrow b \in A$ tels que $j\,f\,e = f$.

- Par suite, les applications

$$(a,e) \xrightarrow{f} (b,j) \longrightarrow a_e \longrightarrow b_j$$

définissent une équivalence de catégories entre la complétion idempotente $\overline{A}$ et la sous-catégorie pleine de $\hat{A}$ formée des foncteurs Kar-représentables.

Corollaire.

Un A-module projectif à gauche de type fini P est, à isomorphisme près, une A-matrice idempotente $n \times m$, notée E , et une application linéaire $P \longrightarrow M$ équivaut à un système X de n éléments de M tel que $E\,X = X$.

Remarque.

Soit un foncteur $\pi: A^{op} \longrightarrow$ ENS de "type fini" , c'est-à-dire que $K'(\pi)$ possède un objet faiblement final (a,n) ou $(-,a) \xrightarrow{\lambda^n} \pi$ est un épimorphisme.

Dans ces conditions, π est Kar-représentable ssi π est projectif dans la catégorie $\hat{A}$ des préfaisceaux sur A .

En effet, si $\varphi_1 : \sigma \longrightarrow \tau : A^{op} \longrightarrow$ ENS est un épi-

morphisme et $\theta : a_e \longrightarrow \tau$ est quelconque, soit $n \in \sigma a$ tel que $\varphi(a)\, n = \theta(a)\, e$. Alors $\sigma(e)\, n \in \sigma(a)$ est un point fixe de $\sigma(e)$ et $\varphi(a)\, \sigma(e)\, n = \pi(e)\, \varphi(a)\, n = \pi(e)\, \theta(a)\, e = \theta(a)\, e$. D'où un unique $\psi : a_e \longrightarrow \sigma$ tel que $\psi(a)\, e = \sigma(e)\, n$. On en déduit que $\varphi . \psi = \theta$ car $\varphi a \,.\psi(a)\, e = \varphi(a)\, \sigma(e)\, n = \theta(a)\, e$. Réciproquement, comme $\lambda^n : (-,a) \longrightarrow \pi$ est un épimorphisme, il existe $\pi \longrightarrow (-,a) \longrightarrow \pi = Id_\pi$ et π est Kar-représentable.

Théorème.

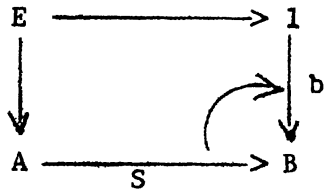
Soit $S : A \longrightarrow B$ un foncteur.

Les conditions ci-dessous sont équivalentes.

1. $S^\circ : B \longrightarrow A$ a un adjoint à droite dans la bicatégorie des distributeurs.

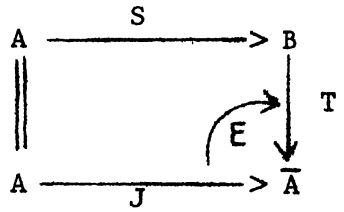
2. Pour tout objet b de B , $S \downarrow b$ a un objet Kar-final, c'est-à-dire un couple $\eta : Sa \longrightarrow b$, $e : a \longrightarrow a$ avec $\eta . Se = \eta$, vérifiant la propriété universelle suivante:
- pour tout $f : Sx \longrightarrow b$, il existe un unique $\hat{f} : x \longrightarrow a$ tel que $\eta . S\hat{f} = f$ et $e.\hat{f} = \hat{f}$ ($\eta . Su = \eta . Sv$, $e.u = u$ et $e.v = v$ entrainent donc $u = v$).

3. Pour tout objet b de B , il existe un carré exact:



.

4. Il existe un carré exact:



.

5. $\bar{S} : \bar{A} \longrightarrow \bar{A}$ a un adjoint à droite.

6. Il existe un "foncteur non unitaire" $T: B \longrightarrow A$ et des transformations naturelles $\xi: 1 \longrightarrow T S$, $\eta: S T \longrightarrow 1$ telles que:

- $T\eta \,.\, \xi T = T(Id) = e$ et $\eta S \,.\, S\xi = Id\, S$.

Démonstration.

La condition 1 implique la condition 2 puisque le distributeur composé $\pi = 1 \xrightarrow{b} B \xrightarrow[S^{op}]{} A$ a un adjoint à droite, c'est-à-dire π est Kar-représentable ou $K'(\pi) = S\downarrow b$ admet un objet Kar-final.

Les conditions 2 et 3 sont équivalentes puisque la donnée d'un foncteur final $E \longrightarrow S\downarrow b$ équivaut à celle d'un carré exact de la forme indiquée.

La condition 3 implique la 4 qui est équivalente à la 6. En effet, pour tout objet b de B , on choisit un objet Kar-final $\tau b : (T b, \eta b) \longrightarrow (T b, \eta b)$ dans $S\downarrow b$. Pour toute flèche $u: b \longrightarrow c$ de B , il existe alors un unique $Tu: Tb \longrightarrow Tc$, appartenant à A , tel que

$\eta c \,.\, S T u = u \,.\, \eta b$ et $\tau c \,.\, T u = T u$.

Si $b \xrightarrow{u} c \xrightarrow{v} d$ appartient à B , on a $T(vu) = TvTu$ car $\eta d \,.\, STv \,.\, STu = v.u.\eta b = ST(vu).\eta b$,

$\tau d\, T(vu) = Tvu$ et $\tau d\, Tv\, Tu = Tv\, Tu$.

Mais $T(Id_b) = \tau b$, car $\eta b . ST(Id_b) = \eta b = \eta b . \tau b$,

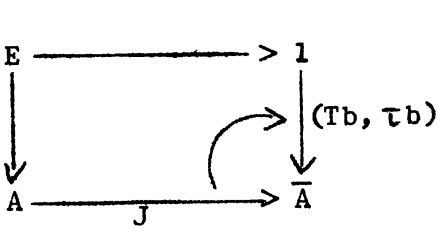
$\tau b\, T(Id_b) = T(Id_b)$ et $\tau b \,.\, \tau b = \tau b$.

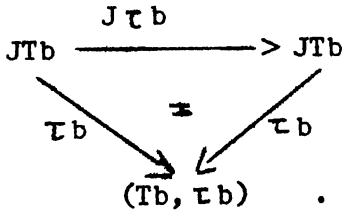
On obtient donc un foncteur non unitaire $T: B \longrightarrow A$ et une transformation naturelle $\eta: S T \longrightarrow 1$. En conséquence, T est un foncteur $B \longrightarrow \overline{A}$ tel que $T(u: b \longrightarrow c) = (Tb, \tau b) \xrightarrow{Tu} (Tc, \tau c)$.

On définit, ensuite, pour tout objet a de A , $\xi a: a \longrightarrow TSa$ au moyen de $\eta Sa \,.\, S\xi a = Id_{Sa}$ et $\tau Sa \,.\, \xi a = \xi a$, de sorte que $Ja = (a,1) \xrightarrow{\xi a} (TSa, \tau Sa)$. Alors, ξ est naturelle et vérifie $T\eta b \,.\, \xi T b = \tau b$.

Pour vérifier l'exactitude du carré ξ , il suffit de montrer que

les composés suivants sont exacts:





Cela résulte aussitôt de

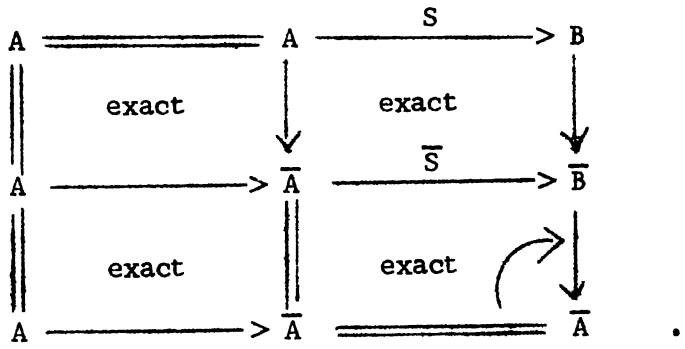
$(Tb,1) \xrightarrow{\tau b} (Tb,1) = (Tb,1) \xrightarrow{\tau b} (Tb, b) \xrightarrow{\tau b} (Tb,1)$

i. e. τb est scindé dans $\bar{A}$.

La condition 4 implique la condition 1 car $S^\circ \simeq J^\circ T$ et $J^\circ \dashv J$.

La condition 4 implique la 5 car $(\bar{-})$ conserve les carrés exacts.

Enfin, la condition 5 implique la condition 4 puisque:



Remarque.

Il résulte de 4 que S conserve toutes les limites droites et que S est un foncteur initial.

Proposition.

A possède un objet Kar-final ssi $A \longrightarrow 1$ possède un adjoint à droite dans la bicatégorie des distributeurs.

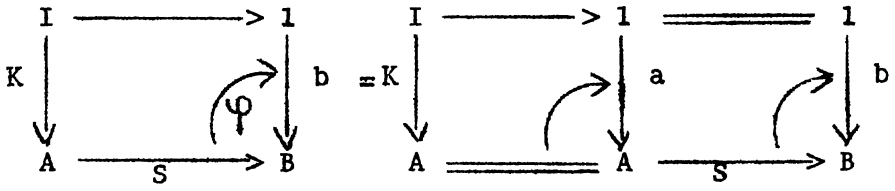
Démonstration.

Cela résulte aussitôt de la condition 4 précédente.

Remarque.

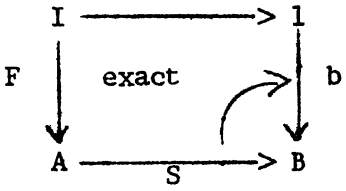
En raison des critères d'obtention d'un objet Kar-final, $S \downarrow b$ possède un objet Kar-final ssi il existe une catégorie I telle que:

1. $S \downarrow b$ soit I-filtrante, ce qui signifie



pour tout φ : $S\,K \longrightarrow b^{\wedge}$;

2. $S \downarrow b$ admet une I-présentation, c'est-à-dire qu'il existe un carré exact:



.

Théorème (distributeurs adjoints).

Soit π: $Y \nrightarrow X$ un distributeur.

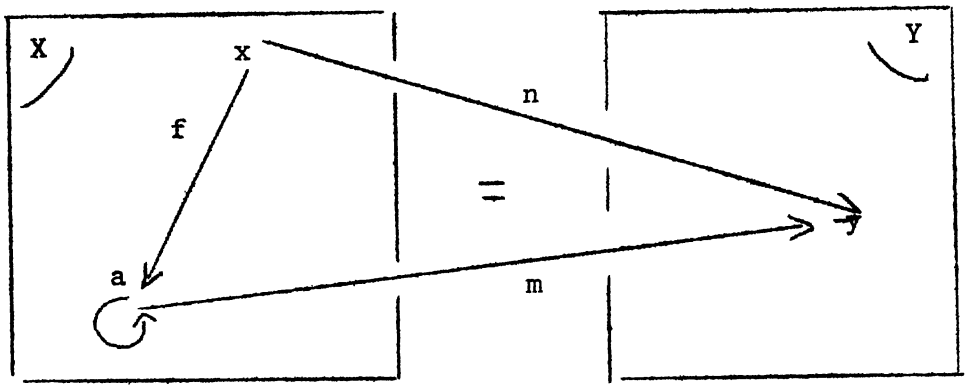
Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. π admet un adjoint à droite.

2. Pour tout objet y de Y, le distributeur composé $1 \xrightarrow{y} Y \nrightarrow X$ a un adjoint à droite, c'est-à-dire $\pi(-,y)$: $X^{op} \longrightarrow$ ENS est Kar-représentable, ou encore il existe un idempotent e: $a \longrightarrow a$ de X et $m \in \pi(a,y)$ avec $\pi(e,y)\, m = m$ vérifiant la propriété universelle suivante:

- pour tout objet x de X et tout $n \in \pi(x,y)$, il existe un unique f: $x \longrightarrow a$ tel que $\pi(f)\, m = n$ et $e\, f = f$;

Cela signifie également que, dans la catégorie joint de π on a:

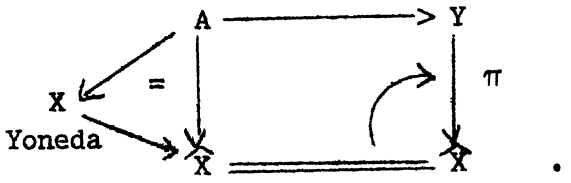


3. Il existe un foncteur $V: Y \longrightarrow \overline{X}$ tel que $\pi \sim J^\circ V$,
$Y \xrightarrow{V} \overline{X} \xrightarrow{J^\circ} X$.

4. $\pi \sim U^\circ V$ et U° a un adjoint à droite.

5. $\pi \sim S T^\circ$ et T° a un adjoint à droite.

6. $\pi: Y \longrightarrow \hat{X}$ est une extension absolue de représentables, c'est-à-dire qu'il existe un carré exact:



.

Démonstration.

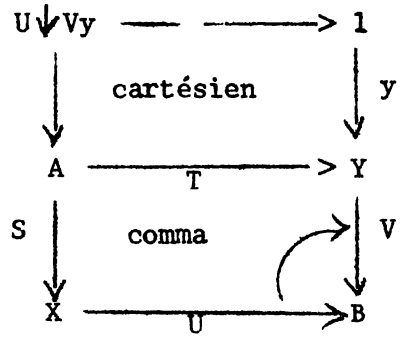
Il est évident que 1 implique 2.

La condition 2 implique la condition 4. En effet, si $X \xrightarrow{U} C \xleftarrow{V} Y$ représente le joint de π , la condition 2 signifie que, pour tout objet y de Y , $U \downarrow Vy$ possède un objet Kar-final. Comme U est pleinement fidèle, $U \downarrow Ux$ possède un objet final. Par suite U° possède un adjoint à droite et $\pi \sim U^\circ V$.

La condition 4 implique la condition 3 car, en raison du théorème précédent, $C \xrightarrow{U^\circ} X \sim C \xrightarrow{R} \overline{X} \xrightarrow{J^\circ} X$, de sorte que $\pi \sim U^\circ V \sim J^\circ R V$.

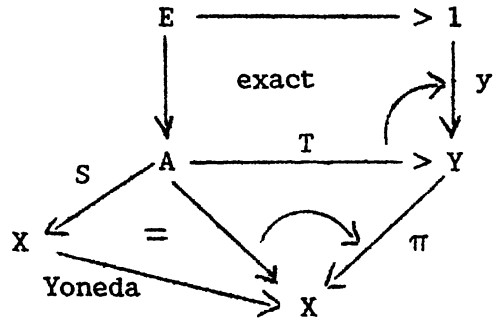
Il est clair que la condition 3 implique la condition 1.

La condition 4 implique la 5. En effet, on a:



Comme U° possède un adjoint à droite, $U\downarrow Vy$ possède un objet Kar-final. Comme T est une cofibration, le carré cartésien supérieur est exact et $U\downarrow Vy \longrightarrow T\downarrow y$ est final, de sorte que $T\downarrow y$ possède aussi un objet Kar-final. Par suite, T° possède un adjoint à droite.

La condition 5 implique la 6. En effet, soit $\pi \mathcal{N} S\ T^\circ$, où T° a un adjoint à droite. Le diagramme ci-dessous



représente une colimite, car le triangle inférieur est une extension ponctuelle. Or, toute E-colimite est une colimite absolue et, par suite, le triangle inférieur est une extension absolue.

La condition 6 implique la condition 2 car on remarque que $\pi(-,y)$ est une colimite absolue de représentables et est donc Kar-représentable.

Proposition.

On sait qu'un foncteur $J: X \longrightarrow Y$, pleinement et coplei-

nement fidèle, définit une équivalence $X \sim Y$ dans la bicatégorie des distributeurs.

Réciproquement, si X et Y sont des catégories équivalentes dans DIST , alors il existe $X \xrightarrow{J} B \xleftarrow{K} Y$, où J et K sont pleinement et copleinement fidèles.

En général, si X et Y sont équivalentes dans DIST , cette équivalence n'est pas induite par un foncteur pleinement et copleinement fidèle $X \longrightarrow Y$ ou $Y \longrightarrow X$.

Démonstration.

Si $\pi : Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\mid\ X$ est une équivalence dans DIST , $\pi \sim J^\circ V$, $Y \xrightarrow{V} \overline{X} \xrightarrow{J^\circ} X$, où V est un foncteur et J est pleinement et copleinement fidèle avec $J \dashv J^\circ \dashv J$.

Donc $\pi \sim J^\circ V \dashv V^\circ J$ et, par suite, $J^\circ V V^\circ J \sim 1$, d'où $J J^\circ V V^\circ J J^\circ \sim J J^\circ$ ou $V V^\circ \sim 1$. De même, $1 \sim V^\circ J J^\circ V \sim V^\circ V$. Finalement, on obtient $Y \xrightarrow{V} \overline{X} \xleftarrow{J} X$, où V et J sont pleinement et copleinement fidèles.

Pour construire un contre-exemple, il suffit de considérer une Ab-catégorie C contenant des objets a et b tels que les monoïdes (a,a) et (b,b) et $(a \oplus b, a \oplus b)$ soient deux à deux non isomorphes. Soit, alors X (resp. Y) la sous-catégorie pleine de C formée des objets a et $a \oplus b$ (resp. b et $a \oplus b$) et B la sous-catégorie pleine de C formée des objets a, b et $a \oplus b$. Il est immédiat que les inclusions $X \longrightarrow B \longleftarrow Y$ sont pleinement et copleinement fidèles, mais il n'existe pas de foncteur pleinement fidèle $X \longrightarrow Y$ ou $Y \longrightarrow X$.

Proposition (Gouzou-Grunig).

Les conditions ci-dessous sont équivalentes.

1. A est à idempotents scindés, c'est-à-dire E-cocomplète.
2. A est Cauchy-complète, c'est-à-dire que tout distributeur

$\pi : B \longrightarrow\!\!\!\!\!+\; A$ qui a un adjoint à droite est représentable, i. e. il existe un foncteur $K: B \longrightarrow A$ tel que $\pi \sim (-,K(-))$.

3. Tout foncteur $S: A \longrightarrow B$ tel que $B \xrightarrow{S^\circ}\!\!\!\!\!+\; A$ possède un adjoint à droite dans la bicatégorie des distributeurs, possède un adjoint à droite T, i. e. $S \dashv T : B \longrightarrow A$.

4. Tout foncteur pleinement et copleinement fidèle $A \longrightarrow B$ est une équivalence de catégories.

Démonstration.

Il est évident que 2 implique 3, 3 implique 4 et 4 implique 1. La condition 1 implique la condition 2 car, si $\pi: B \longrightarrow\!\!\!\!\!+\; A$ a un adjoint à droite, on a montré que $\pi \sim J^\circ V$, où $B \xrightarrow{V} \overline{A} \xleftarrow{J} A$. Comme J est une équivalence, $J \dashv J^\circ \sim K: \overline{A} \longrightarrow A$, de sorte que $\pi \sim K V$.

Remarque.

Si A est une Ab-catégorie (additive), alors $\overline{A}$ est une Ab-catégorie (additive).

Si (a,e) et (b,j) sont objets de $\overline{A}$ et

$$a \underset{p}{\overset{m}{\rightleftarrows}} e \underset{q}{\overset{n}{\rightleftarrows}} b$$

est un biproduit dans A, alors

$$(a,e) \underset{ep}{\overset{me}{\rightleftarrows}} (c, m\,e\,p + n\,j\,q) \underset{jq}{\overset{nj}{\rightleftarrows}} (b,j)$$

est un biproduit dans $\overline{A}$.

Lemme.

Soit $\pi: B \longrightarrow\!\!\!\!\!+\; A$ un Ab-distributeur.

Si B est additive et si π est représentable dans CAT, c'est-

à-dire s'il existe un foncteur $S: B \longrightarrow A$ et un isomorphisme de ENS-distributeurs $\varphi: \pi \longrightarrow A(-,S(-))$, alors S est un foncteur additif et les $\varphi(a,b)$ sont des isomorphismes de groupes, i. e. π est représentable dans Ab-CAT.

Démonstration.

On remarque, en effet, que, pour tout objet a de A , $A(a,S(-)) \sim \pi(a,-)$ est un foncteur additif $B \longrightarrow Ab$ et que $\varphi(a,b \oplus c) = \varphi(a,b) \oplus \varphi(a,c)$.

Proposition (Cauchy-complétude dans Ab-CAT).

Si A est Cauchy-complète dans Ab-CAT , alors A est Cauchy-complète dans CAT.
Si A est une catégorie additive (Ab-catégorie à biproduits), alors A est Cauchy-complète dans Ab-CAT ssi A est Cauchy-complète dans CAT.
Donc $\overline{\text{Mat } A}$ est Cauchy-complète dans CAT et Ab-CAT.

Démonstration.

Supposons A Cauchy-complète dans Ab-CAT. Comme $J: A \longrightarrow \overline{A}$ est pleinement et copleinement fidèle dans CAT et, a fortiori, dans Ab-CAT , il existe un Ab-foncteur $K: \overline{A} \longrightarrow A$ tel que $J^\circ \sim (-,K(-))$ dans Ab-DIST et, par suite, aussi dans ENS-DIST. Donc A et $\overline{A}$ sont équivalentes dans CAT.
Supposons A additive et Cauchy-complète dans CAT. Soit un Ab-distributeur $\pi: B \nrightarrow A$ tel que $\pi \dashv \sigma$ dans la bicatégorie des Ab-distributeurs. Comme $J \dashv J^\circ: B \nrightarrow \text{Mat } B$, on a encore $\pi J^\circ \dashv J\sigma : A \nrightarrow \text{Mat } B$. Comme A et Mat B sont additives, $\pi J^\circ \dashv J\sigma$ dans la bicatégorie des ENS-distributeurs. Comme A est Cauchy-complète dans CAT, πJ° est représentable dans CAT et, en raison du lemme précédent, dans Ab-CAT , autrement dit il existe un foncteur additif

S: Mat $B \longrightarrow A$ tel que $\pi J^{\circ} \sim S$ et, par suite, $\pi \sim \pi J^{\circ} J \sim S J$, de sorte que π est représentable dans Ab-CAT.

Théorème (Cauchy-complétude dans Ab-CAT - suite).

Soit A une Ab-catégorie.
Les conditions ci-dessous sont équivalentes.
1. A est Cauchy-complète dans Ab-CAT.
2. A est additive (à biproduits) et à idempotents scindés.
3. $A \longrightarrow \overline{\text{Mat } A}$ est une équivalence de catégories dans CAT ou Ab-CAT.
4. Tout Ab-foncteur $K: A \longrightarrow X$ plein et copleinement fidèle dans Ab-CAT est une équivalence dans Ab-CAT ou CAT .

Démonstration.

Il résulte immédiatement de la proposition précédente que la condition 3 implique la condition 1.
La condition 1 implique la condition 4 car un foncteur K pleinement et copleinement fidèle dans Ab-CAT vérifie $K \dashv K^{\circ} \dashv K$ dans Ab-DIST .
La condition 4 implique la condition 3 car $A \longrightarrow \overline{\text{Mat } A}$ est pleinement et copleinement fidèle dans Ab-CAT (mais pas dans CAT).

Corollaire.

Le Ab-foncteur $A \longrightarrow \overline{\text{Mat } A}$ est la Cauchy-complétion de A dans Ab-CAT.
On a établi, par ailleurs, que $\overline{\text{Mat } A}$ est équivalente aux foncteurs Kar-représentables, Mat $A^{op} \longrightarrow$ Ab $\xrightarrow{\text{oubli}}$ ENS , correspondant aux A-modules (généralisés) à droite, projectifs, de type fini. Il en résulte que la Cauchy-complétion dans Ab-CAT d'un anneau A s'identifie à la catégorie des A-modules à droite projectifs et de type fini.

Théorème (Morita).

Soit A et B deux Ab-catégories.
Les conditions suivantes sont équivalentes.
1. A et B sont équivalentes dans la bicatégorie Ab-DIST .
2. $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont équivalentes dans Ab-CAT .
3. Il existe un Ab-foncteur pleinement et copleinement fidèle $A \longrightarrow \overline{\text{Mat B}}$ (ou $B \longrightarrow \overline{\text{Mat A}}$) dans Ab-CAT .
4. Il existe $A \xrightarrow{J} X \xleftarrow{K} B$, où J et K sont pleinement et copleinement fidèles dans Ab-CAT .
5. $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont équivalentes dans CAT .
6. Mat A et Mat B sont équivalentes dans la bicatégorie des ENS-distributeurs.
7. Il existe un foncteur pleinement et copleinement fidèle $\text{Mat A} \longrightarrow \overline{\text{Mat B}}$ (ou $\text{Mat B} \longrightarrow \overline{\text{Mat A}}$) dans CAT.

Démonstration.

La condition 1 implique la condition 2 car on a $\overline{\text{Mat A}} \sim A \sim B \sim \overline{\text{Mat B}}$ dans Ab-DIST et l'équivalence $\overline{\text{Mat A}} \sim \overline{\text{Mat B}}$ est représentable, puisque $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont Cauchy-completes.
La condition 2 implique la 3 puisque $A \longrightarrow \overline{\text{Mat A}} \longrightarrow \overline{\text{Mat B}}$ est alors pleinement et copleinement fidèle dans Ab-CAT .
Il est évident que 3 implique 4 et que 4 implique 1 .
La condition 2 équivaut à la condition 5 . En effet, une équivalence dans Ab-CAT est une équivalence dans CAT . La réciproque est vraie car $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont additives, de sorte qu'une équivalence dans CAT est un foncteur additif.
Les conditions 5 , 6 et 7 sont équivalentes: c'est la propriété analogue non additive de l'équivalence des conditions 1, 2 et 3 et elle se démontre de la même façon.

Théorème (l'existence d'objets Kar-initiaux est une propriété de nature homologique).

Si A est une petite catégorie, le foncteur constant sur $\underline{Z}$

$\underline{Z}^{\wedge}$: A ——————> Ab est projectif dans la catégorie abélienne des foncteurs A ——————> Ab (ou encore $EXT(\underline{Z}^{\wedge}, \pi) = 0$, pour tout π) ssi chaque composante connexe de A possède un objet Kar-initial.

Démonstration.

Soit $A = \coprod_i A_i$ la décomposition de A en ses composantes connexes et, pour tout i, soit a_i un objet Kar-initial de A_i, au moyen de $\theta_i : a_i^{\wedge} \longrightarrow Id_{A_i}$.

Alors $\underline{Z}^{\wedge} \xrightarrow[\varepsilon]{} \sigma \xleftarrow[\lambda]{} \pi$ détermine

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{r_i} & \pi\, a_i \\ & {\scriptstyle \varepsilon a_i} \searrow \quad = \quad \swarrow {\scriptstyle \lambda a_i} & \\ & \sigma\, a_i & \end{array}$$

pour tout i, car $\underline{Z}$ est projectif dans Ab.

Pour tout objet x de A, on définit ensuite

$$\varphi\, x : \underline{Z} \longrightarrow \pi\, x = \underline{Z} \xrightarrow[r_i]{} \pi\, a_i \xrightarrow[\pi(\theta_i\, x)]{} \pi\, x$$

lorsque x est objet de A_i.

On vérifie, alors, que φ est naturelle et que $\lambda . \varphi = \varepsilon$.

Supposons, maintenant, que $\underline{Z}^{\wedge}$ est projectif.

On considère le foncteur

$$A \xrightarrow{\pi} Ab = A \xrightarrow{A\downarrow -} CAT \xrightarrow{Ob} ENS \xrightarrow{L} Ab,$$

où le premier foncteur du second membre est le foncteur comma

$$a \xrightarrow{f} b \in A \longrightarrow A\downarrow a \xrightarrow{A\downarrow f} A\downarrow b \in CAT$$

et le dernier foncteur du second membre est le foncteur groupe abélien libre. Ainsi, on a:

$\pi(f)(z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n) = z_1 f u_1 + \ldots + z_n f u_n$, lorsque, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $z_i \in \underline{Z}$ et $x_i \xrightarrow[u_i]{} a \xrightarrow[f]{} b \in A$.

Comme $Ob(A\downarrow a)$ est non vide pour tout a, on obtient un épimorphisme $\lambda : \pi \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \underline{Z}^{\wedge}$ tel que:

$$\lambda(a)(z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n) = z_1 + \ldots + z_n .$$

Il existe donc $\varphi : \underline{Z}^{\wedge} \longrightarrow \pi$ tel que $\lambda . \varphi = Id$.
Pour tout objet a de A , notons $V(a) = \{ u_1 , \ldots , u_n \}$ l'ensemble des morphismes figurant dans $a = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$.
On remarque que $V(a)$ n'est pas vide et que, pour toute flèche $f : a \longrightarrow b$ de A :

(*) l'application

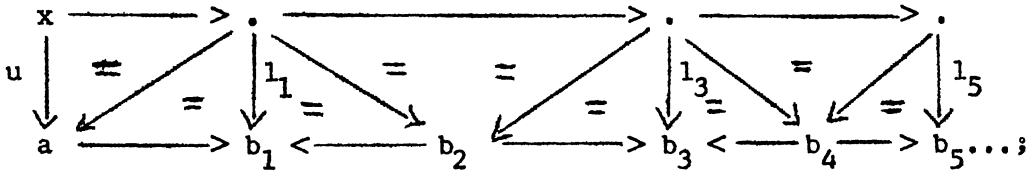
$$V(a) \longrightarrow V(b)$$
$$u : x \longrightarrow a \dashrightarrow fu : x \longrightarrow b$$

est une application partielle surjective.

Alors, si a est un objet arbitraire de A et $u : x \longrightarrow a$ appartient à $V(a)$, x est faiblement initial dans la composante connexe de a. En effet, soit un chemin

$$a \longrightarrow b_1 \longleftarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longleftarrow b_4 \ldots ;$$

on choisit alors $l_1 \in V(b_1)$, $l_3 \in V(b_3)$, $l_5 \in V(b_5)$ ... et en utilisant la propriété (*) on obtient :



on raisonne de même pour un chemin $a \longleftarrow . \longrightarrow \ldots$
Après avoir choisi dans chaque composante connexe A_i un objet faiblement initial a_i , on construit un nouveau foncteur $A \xrightarrow{\pi} Ab = A \longrightarrow ENS \xrightarrow{L} Ab$, où le premier foncteur du second membre est défini au moyen de $A_i \xrightarrow{inf} A \longrightarrow ENS = A_i \xrightarrow[(a_i,-)]{} ENS$.
En d'autres termes, si $x \in A_i$, πx est le groupe abélien libre sur l'ensemble (a_i,x) . Ces ensembles étant non vides, on obtient encore un épimorphisme $\lambda : \pi \twoheadrightarrow \underline{Z}^{\wedge}$, tel que : $\lambda(x)(z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n) = z_1 + \ldots + z_n$, où $u_j : a_i \longrightarrow x \in A$ et $z_j \in \underline{Z}$, et par suite $\varphi : \underline{Z}^{\wedge} \longrightarrow \pi$ tel que $\lambda . \varphi = Id$.

Montrons qu'en fait a_i est Kar-initial dans A_i .
Soit $\varphi a_i = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$, où $u_j : a_i \longrightarrow a_i$. Donc $z_1 + \ldots + z_n = 1$, car $\lambda . \varphi = Id$ et $\pi(u_j)\varphi a_i = \varphi a_i$, pour tout $j = 1, \ldots , n$, car φ est naturelle.
Il en résulte que la composition définit une loi de groupe sur $\{u_1, \ldots , u_n\}$. Dans ces conditions, si u_k est l'élément neutre de ce groupe, la relation $z_1 u_j u_1 + \ldots + z_n u_j u_n = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$ entraine que $z_k = z_j$ et , par suite, $z_1 = \ldots = z_n$.
Comme $z_1 + \ldots + z_n = 1$, on a $n = 1$ et $\varphi a_i = 1 e_i$, où $e_i : a_i \longrightarrow a_i$. Pour tout objet x de A_i , $\varphi x : \underline{Z} \longrightarrow \pi x$ est donc aussi réduit à un morphisme $a_i \longrightarrow x$, affecté du coefficient 1 , car pour tout $t : a_i \longrightarrow x$ on a l'égalité $\varphi x = \pi(t) . \varphi a = t\, e_i$. Cela montre aussi que $e_i : a_i \longrightarrow a_i$ est Kar-initial dans A_i .

REFERENCES.

M.-F. Gouzou et R. Grunig, Distributeurs internes à une bicatégorie exacte, Séminaire J. Bénabou de Théorie des Catégories, 1974.

R. Guitart et L. Van Den Bril, Calcul des satellites et présentation des bimodules à l'aide des carrés exacts, à paraitre.

R. Paré, exposé au Séminaire de Catégories, Oberwolfach, Juillet 1973.

R. Börger et W. Tholen, Absehwächungen das adjunktions begriffs, Preprint, Fernuniversität, Hagen.