DIAGRAMMES

L. COPPEY

Sur quelques structures de base pour définir les structures

Diagrammes, tome 7 (1982), exp. n° 2, p. C1-C23

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1982__7__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes,Vol. 7 , 1892.

SUR QUELQUES STRUCTURES DE BASE POUR DEFINR LES STRUCTURES,

par

L.Coppey

I) SYSTEMES MULTIPLICATIFS.

Définition Un système multiplicatif $S^{\cdot}$ est constitué d'un ensemble S et d'une loi de composition binaire partielle, notée en général par un point, lorsque c'est nécessaire.

L'ensemble des couples composables de $S^{\cdot}$ est désigné par $S \hat{\nabla} S$.

Définition Un homomorphisme $h : S^{\cdot} \longrightarrow S'^{\cdot}$ entre systèmes multiplicatifs est défini par une application h satisfaisant:

$(y,x) \in S \hat{\nabla} S \longrightarrow (h(y),h(x)) \in S' \hat{\nabla} S'$ et

$h(y.x) = h(y).h(x)$.

Les homomorphismes se composent naturellement et constituent alors la catégorie Sysm dite des systèmes multiplicatifs.

Définition Une correspondance $c : S^{\cdot} \longrightarrow S'^{\cdot}$ entre systèmes multiplicatifs est définie par une application c satisfaisant :

$(y,x) \in S \hat{\nabla} S$ et $(c(y),c(x)) \in S' \hat{\nabla} S' \longrightarrow c(y.x) = c(y).c(x)$.

Les correspondances se composent de la manière suivante : soient $c : S^{\bullet} \longrightarrow S_1^{\prime\bullet}$ et $c' : S^{\prime\bullet} \longrightarrow S^{\prime\prime\bullet}$ deux correspondances . Elles sont dites composables si et seulement si $S_1^{\prime\bullet} = S^{\prime\bullet}$ et si l'application composée $c' \circ c$ définit encore une correspondance de $S^{\bullet}$ vers $S^{\prime\prime\bullet}$. Notons qu'il se pourrait en effet que l'on ait $c'c(y.x) \neq c'c(y).c'c(x)$, ce qui signifierait seulement que $(c(y),c(x)) \notin S' \hat{\nabla} S'$. Avec cette composition, les correspondances constituent un graphe multiplicatif (associatif au sens précis donné en {2} et rappelé brièvement plus loin) qui contient Sysm comme sous-structure. Notons que ce n'est point une précatégorie. Notons le Corr.

Remarque. Les correspondances fournissent (presque) un exemple, d'ailleurs fort simple, de morphismes souples (cf. {7} et {11}). Ils sont en effet si souples que, ne constituant pas naturellement une catégorie, il eût suffit que les auteurs de {7} pensent aussi aux graphes multiplicatifs (resp. aux graphes multiplicatifs associatifs) internes à la catégorie Esq des esquisses, étant entendu que l'esquisse de graphe multiplicatif (à réaliser ensuite dans Esq) est "à la portée de tous", et que celle de graphe multiplicatif associatif (à réaliser ensuite dans Esq) a été pratiquement décrite en {2} (§ 3) , grâce à la catégorie P des parenthésages. L'idée de base de l'article {7} est donc parfaitement adaptée au cas présent.

II) SOUS-SYSTEMES MULTIPLICATIFS.

Soit $S^{\bullet}$ un système multiplicatif. Toute partie T de S détermine naturellement un sous-système multiplicatif de $S^{\bullet}$ en prenant pour $T \hat{\nabla} T$ l'ensemble des couples $(y,x) \in T \times T \cap S \hat{\nabla} S$ tels que $y.x \in T$.

On dit que T est un sous-système multiplicatif (ou simplement une partie) stable de $S^{\bullet}$ si et seulement si on a l'égalité : $T \hat{\nabla} T = T \times T \cap S \hat{\nabla} S$, c'est-à-dire encore que, si x , y sont dans T et si y.x est défini, alors y.x est dans T.

Exemple. Sysm est une partie stable de Corr , et plus généralement, toute partie d'un graphe multiplicatif qui se trouve être une catégorie est stable.

Etant donnée une partie T de $S^\bullet$, elle détermine un système multiplicatif canonique $T^\bullet$, sous-système de $S^\bullet$, et aussi un sous-système stable engendré (dénombrablement), soit $\overline{T}^\bullet$, appelé encore fermeture stable de T.

Soit $S^\bullet$ un système multiplicatif. Une base de $S^\bullet$ est une partie minimale A de S pour la propriété de fermeture stable dans S : $\overline{A} = S$. Si y et x sont des éléments composables d'une base A , alors , on a soit $y.x = x$, soit $x.y = y$, ces deux cas ne s'excluant pas.

Un système multiplicatif n'a pas nécessairement de base, et deux bases n'ont pas nécessairement même cardinal, sauf si celui-ci est infini.

III) SYSTEMES MULTIPLICATIFS QUOTIENTS.

Soit $S^\bullet$ un système multiplicatif, et soit r une relation binaire sur S ; le quotient de $S^\bullet$ par r n'est autre que le système multiplicatif $(S/\overline{r})^\bullet$, où $\overline{r}$ est la relation d'équivalence compatible engendrée par r et la loi de composition de $S/\overline{r}$ est définie, comme d'habitude, pour que $S^\bullet \longrightarrow (S/\overline{r})^\bullet$ soit un homomorphisme.

IV) RELATIONS MULTIPLICATIVES.

Nous n'en parlons ici que pour signaler des problèmes techniques propres aux systèmes multiplicatifs.

Aspect cartésien. Il ne pose pas de difficulté. Une relation multiplicative $R : S^\bullet \longrightarrow S'^\bullet$ entre systèmes multiplicatifs est définie par la donnée d'une partie du produit $S \times S'$, notée encore R, munie de la structure de sous-système de $S^\bullet \times S'^\bullet$. On dit que R est stable si c'est une partie stable de $S^\bullet \times S'^\bullet$.

Exemples. Les relations stables $R : S^\bullet \longrightarrow S^\bullet$ sont exactement les relations compatibles sur $S^\bullet$.

Les relations fonctionnelles stables s'identifient naturellement aux correspondances.

La composition s'effectue ici, comme dans le cas des relations entre ensembles, et l'on obtient ainsi la catégorie Relm des relations multiplicatives; elle contient Corr comme sous-graphe multiplicatif (non stable); les relations stables ne constituent pas une partie stable de Relm .

Remarque. Soit $T^\bullet$ un sous-système multiplicatif de $S^\bullet$ et soit $i : T^\bullet \longrightarrow S^\bullet$ l'inclusion; puisque i est un homomorphisme, c'est aussi une correspondance, et donc l'injection $T^\bullet \longrightarrow T^\bullet x\, S^\bullet$ ($x \longrightarrow (x,x)$) détermine une sous-structure stable de $T^\bullet x\, S^\bullet$, tandis que $T^\bullet$ n'est pas obligatoirement stable.

Aspect fonctionnel. Ici, plusieurs possibilités interviennent nécessairement. Soit $S^\bullet$ un système multiplicatif. Dans l'ensemble $P(S)$ des parties de S , plusieurs structures multiplicatives "naturelles" sont a priori possibles. En voici quelques unes, B et A désignant des éléments de $P(S)$:

- $1^{ère}$ composition (notée, comme celle de $S^\bullet$, par un point): $B.A$ est toujours défini et c'est l'ensemble de tous les composés possibles $b.a$, où $(b,a) \in BxA$. Si $f : S^\bullet \longrightarrow S'^\bullet$ est un homomorphisme, on voit que $f(B).f(A) \supset f(B.A)$, et que cette inclusion n'est pas en général une égalité, de sorte que l'endofoncteur P de Ens (un ensemble est vu ici comme un système multiplicatif sans couples composables) ne s'étend pas en un endofoncteur de Sysm . L'application canonique de $S^\bullet$ dans $P(S)^\bullet$ détermine cependant un homomorphisme.

- $2^{ème}$ composition (notée par un rond "o") : BoA est défini si et seulement si, quel que soit $(y,x) \in BxA$, $y.x$ est défini dans $S^\bullet$. Dans ce cas, on pose $BoA = B.A$. Pour cette composition, P devient un endofoncteur (covariant) de Sysm et l'application canonique de $S^\bullet$ dans $P(S)^o$ définit

encore un homomorphisme.

- 3ème composition, notée par un point entouré d'un rond " ⊙ " : B ⊙ A est défini si et seulement si l'application de composition détermine une bijection de $B \hat{\nabla} A = B \times A \cap S \hat{\nabla} S$ vers B.A . Dans ce cas, le composé B ⊙ A est égal à B.A . Cette composition mérite le nom de "directe" (ou "semi-directe") à cause de la propriété d'existence et d'unicité de décomposition d'un élément $x \in B.A$ en un produit b.a avec $(b,a) \in B \times A$. Ce genre de décompositions a été largement étudié dans {4} .

Soit $P_s(S)$ l'ensemble des parties stables de S . En général, le composé (pour l'une des lois "." , "o" ou "⊙") de deux parties stables n'est pas stable. On peut alors "corriger ce défaut" de plusieurs manières, par exemple :

- composer les parties stables selon l'une des lois désirée, seulement si le composé est encore stable, envisageant ainsi $P_s(S)$ comme un simple sous-système (non stable !) de P(S) ;

- composer les parties stables selon la loi désirée, en oubliant d'abord leur propriété de stabilité, puis en prenant la fermeture stable du composé dans P(S); ...

On pourra alors définir une relation multiplicative $R : S' \longrightarrow S''$, sous l'aspect fonctionnel, par la donnée d'un homomorphisme ou d'une correspondance, ou même d'une simple application de S' vers P(S') ou $P_s(S')$, muni de la loi désirée, etc... Ceci ne constitue pas évidemment une définition, mais seulement un éventail (non limitatif) de possibilités... Le problème de l'équivalence entre l'aspect cartésien et l'aspect fonctionnel pose au moins celui de la fonctorialité de P . D'autre part , il est souhaitable de retrouver l'équivalence usuelle dans Ens (lorsqu'on identifie un ensemble à un système multiplicatif sans couple composable).

La catégorie Sysm contient aussi Cat comme sous-catégorie pleine (ce qui fournit d'ailleurs un autre plongement

naturel de Ens dans Sysm , un ensemble étant regardé cette fois comme un système multiplicatif où les seules équations sont "$x^2 = x$") et il est souhaitable de retrouver des situations d'équivalence déjà étudiées par divers auteurs. Réciproquement, le fait d'envisager Cat comme sous-catégorie de Sysm peut suggérer d'autres possibilités de définition et d'étude des "catégories de relations associées à Cat".

V) GRAPHE MULTIPLICATIF LIBRE ENGENDRE PAR UN SYSTEME MULTIPLICATIF.

Soit Gram la catégorie des graphes multiplicatifs. Rappelons qu'un graphe multiplicatif $S^\bullet$ est un système multiplicatif satisfaisant les conditions suivantes :

(i) tout élément x de $S^\bullet$ possède un élément neutre à droite $\alpha(x)$ et un élément neutre à gauche $\beta(x)$.

(ii) tout couple composable (y,x) est tel que

$\alpha(y.x) = \alpha(x)$, $\beta(y.x) = \beta(y)$, et $\alpha(y) = \beta(x)$.

Un homomorphisme entre graphes multiplicatifs doit respecter la composition et les éléments neutres.

L'oubli naturel (inclusion) Gram $\longrightarrow$ Sysm possède un adjoint à gauche G que nous explicitons ici :

soit $S^\bullet$ un objet de Sysm ; choisissons deux bijections $\alpha : S \longrightarrow A$ et $\beta : S \longrightarrow B$, de sorte que A, B, et S soient disjoints ; la réunion $\hat{S}$ de A, B et S est munie de la structure multiplicative suivante :

$$\hat{S} \hat{\vee} \hat{S} = (S \hat{\vee} S) \cup (S \vee_\alpha A) \cup (B \vee_\beta S) \cup D_A \cup D_B ,$$

où $S \vee_\alpha A$ est l'ensemble des couples $(x,\alpha(x))$, $x \in S$,

$B \vee_\beta S$ est l'ensemble des couples $(\beta(x),x)$, $x \in S$

et D_A et D_B sont les diagonales respectives de AxA et BxB, et les composés sont donnés par :

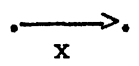
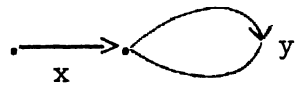
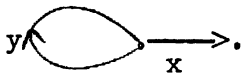
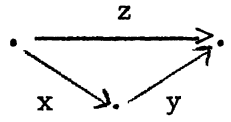
$y.x$, si $(y,x) \in S \hat{\vee} S$,

$y.\alpha(y) = \beta(y).y = y$, pour tout $y \in S$,

$x^2 = x$, quel que soit $x \in A \cup B$.

Soit alors r la relation dans $\hat{S}$ qui identifie, pour tout couple $(y,x) \in S \hat{\vee} S$, $\alpha(x)$ et $\alpha(y.x)$, $\beta(y.x)$ et $\beta(y)$, $\alpha(y)$ et $\beta(x)$; le système multiplicatif quotient $\hat{S}/r = GS^\circ$ est le graphe multiplicatif libre engendré par S° ; l'homomorphisme naturel $S^\circ \longrightarrow GS^\circ$ ($x \longrightarrow x \bmod \bar{r}$) est injectif, puisque l'équivalence $\bar{r}$ n'identifie éventuellement entre eux que des éléments de $A \cup B$.

Voici quelques exemples simples :

S	Equations de S°	Dessin de GS°
$\{ x \}$	$\emptyset$	
$\{ x \}$	$x^2 = x$	
$\{ y , x \}$	$y.x = x$	
$\{ y , x \}$	$x.y = x$	
$\{ z , y , x \}$	$z = y.x$	

Remarque. Le dessin de GS° ne suffit pas à caractériser cette structure . Ainsi, dans les exemples 3 et 4 précédents, on obtiendrait le même dessin en ajoutant l'équation $y^2 = y$.

VI) PROBLEME DE LA RECONNAISSANCE DES STRUCTURES.

Voici, de façon euristique, de quoi il s'agit : étant donné un système multiplicatif (associatif) S° , si on l'envisage, a priori, comme un ensemble de morphismes entre structures d'un certain type, quels sont ces types de structures possibles ? Autrement dit, on "voit" des morphismes "sans source ni but" , et il faut "reconnaître" les structures !

A cet effet, la première idée consiste à rajouter à S° des "unités" (ou éléments neutres) possibles. On peut le faire

librement (c'est la construction faite au § précédent) , mais on doit aussi envisager toutes les catégories possibles dans lesquelles le plongement de $S^\bullet$ est possible (entre autres, celles pour lesquelles le plongement préserve d'éventuels éléments neutres existant déjà dans $S^\bullet$, mais il n'y a là aucun caractère "obligatoire" bien évidemment !). Le problème se divise assez nettement en deux :

- 1 - Un problème de nature algébrique : dans quelles catégories $S^\bullet$ peut-il de plonger ?

- 2 - Etant donnée la classe $C(S^\bullet)$ de ces catégories, quelles conditions (nécessaires et / ou suffisantes) doit-on imposer à une esquisse σ pour que la catégorie de ses réalisations $\underline{Ens}^\sigma$ soit équivalente à l'une des catégories de la classe $C(S^\bullet)$? Dans cette direction, les travaux de Diers, Gabriel-Ulmer, complétés et éclairés par ceux de Lair et de Guitart-Lair ({5} ,{6} , {8} , {9} ,{10} ,....) fournissent déjà des réponses (et/ou des directions) fondamentales.

VII) SYSTEMES MULTIPLICATIFS ASSOCIATIFS.

Pour que le premier problème concernant la reconnaissance des structures ait des solutions, il est nécessaire que $S^\bullet$ soit un système associatif,dans le sens précis rappelé ci-dessous.

Soit $S^\bullet$ un système multiplicatif et $M(S^\bullet)$ le monoïde libre engendré par S . La catégorie P des parenthésages (cf. {2}) opère sur $M(S^\bullet)$ de la manière suivante : soit $d : n \longrightarrow p$ un morphisme de P et soit $C = (x_n,\ldots,x_1)$ un élément de $M(S^\bullet)$; on sait (cf. toujours {2}) que d s'identifie naturellement à un p-uplet $(d_p,d_{p-1},\ldots,d_1)$ de dispositions cohérentes de parenthèses, portant respectivement sur $n_p,n_{p-1},\ldots,n_1$ places, où $n_p + n_{p-1} + \ldots + n_1 = n$. On dit que d opère sur C , ou que $d.C$ est défini, si et seulement si on peut effectuer les calculs indiqués par $(d_p,\ldots,d_1)$

en partant de $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ (en respectant les ordres indiqués naturellement :

d_1 porte sur $(x_{n_1}, x_{n_1-1}, \ldots, x_1)$ et fournit y_1 ,

d_2 porte sur $(x_{n_2+n_1}, \ldots, x_{n_1+1})$ et fournit y_2 , etc...)

et le résultat est le mot $d.C = (y_p, \ldots, y_1)$.

A cette opération (partielle) naturelle de P sur $M(S^\bullet)$ correspond une 2-catégorie notée $PS^\bullet$ et dont voici la description : ses 2-flèches sont les"programmes" de $S^\bullet$ tels qu'ils viennent d'être indiqués sous la forme $C \longrightarrow d.C$. La succession (appelée aussi composition en <u>série</u> des programmes dans {2}) définit une première loi de catégorie. Pour cette loi, la composante connexe de C est notée C_z . La deuxième loi de composition fait intervenir la structure multiplicative ⊠ de P (voir toujours {2}) ; si $C \xrightarrow{d} d.C$ et $C' \xrightarrow{d'} d'.C'$ sont deux programmes de $S^\bullet$, on peut les exécuter "en même temps" (composition <u>parallèle</u> des programmes) , ce qui revient à dire que $(d' \boxtimes d).(C'C)$ est défini et vaut justement $(d'.C')(d.C)$, le programme composé étant $C'C \xrightarrow[d' \boxtimes d]{} (d' \boxtimes d)(C'C)$. Cette deuxième loi est partout définie (comme dans le cas de la 2-catégorie simpliciale).

Dans le cas d'un graphe multiplicatif $G^\bullet$, on peut faire jouer aux unités le rôle spécial des 0-flèches (qui , pour $M(S^\bullet)$ est joué par la suite vide) ce qui conduit à faire opérer P sur $L(G^\bullet)$ au lieu de le faire opérer sur $M(G^\bullet)$, et c'est ce qui a été fait en . On remarquera cependant ceci: soit $d : n \longrightarrow 1$ un morphisme de P , et soit $C = (x_n, \ldots, x_1)$ un élément de $M(G^\bullet)$ tel que $d.C$ soit défini ; alors , C est élément de $L(G^\bullet)$; ceci est inexact en général pour des flèches de P dont le but est un entier $p \neq 1$.

Ceci étant, on dira que $S^\bullet$ est un <u>système associatif</u> si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

A_1) $S^\bullet$ est un "morceau de catégorie" , i.e. il existe une catégorie $C^\bullet$ admettant $S^\bullet$ comme sous-système multiplicatif.

A_2) $S^\bullet$ est un morceau de graphe multiplicatif associatif (au sens de la définition donnée en {2}).

A_3) Si x et y sont des éléments de $S^\bullet$ tels que les composantes connexes $(x)_z$ et $(y)_z$ soient égales , alors on a l'égalité : $x = y$. Ceci signifie intuitivement qu'étant donné $x \in S^\bullet$, on ne peut pas atteindre d'autre élément de $S^\bullet$ par une succession de décompositions et de recompositions partant de x .

A_4) Le graphe multiplicatif libre $GS^\bullet$ engendré par $S^\bullet$ est associatif, toujours au sens de {2} .

Remarques.

1) La forme (A_3) de l'associativité est celle qui permet, compte tenu de la description de P , de préciser une esquisse (dénombrable, mais projective) de système multiplicatif associatif.

2) Bien entendu, la définition précédente s'applique aux graphes multiplicatifs et ne fait qu'étendre aux systèmes multiplicatifs plus généraux la définition de {2} (cf.A_2).

3) La catégorie Sysm est à projections dans la sous-catégorie pleine dont les objets sont les systèmes multiplicatifs associatifs : soit $S^\bullet$ un système multiplicatif ; la relation r telle que "$x\ r\ y$" si et seulement si $(x)_z = (y)_z$ est une équivalence compatible sur $S^\bullet$, de sorte que le système multiplicatif quotient $S^\bullet/r$ est facile à décrire ; il est tout aussi facile de se convaincre que $S^\bullet/r$ est associatif , même si l'écriture de ce fait est assez lourde ! Le système associatif $S^\bullet/r$ est le système projection cherché. Notons que si on veut obtenir un résultat analogue en utilisant seulement les correspondances, la question est nettement plus compliquée. Il convient de définir correctement ce qu'on entend par "solution d'un problème universel" dans un graphe multiplicatif associatif, ce qu'on entend, plus généralement, par

"adjoint" d'un foncteur entre graphes multiplicatifs, puis, plus particulièrement, par "limites" et "extensions de Kan" , etc..., et tout ceci nous ramène, avant tout, au plongement de Yoneda , qui n'est plus naturel, et aux structures monoïdales bifermées de la catégorie Gram ; c'est justement ces questions que nous avons abordées dans les § 1 ét 2 de {2} .

VIII) D'AUTRES GENRES D'ASSOCIATIVITE.

Convenons ici que 0 est un objet (isolé !) de la catégorie P . Soit M la théorie-de-Lawvere des magmas ; rappelons que M a pour objets les entiers ; quant aux flèches de M , outre les projections faisant de tout n le produit de n copies de 1 , il y a essentiellement une flèche $2 \longrightarrow 1$, et celles qui s'en déduisent par propriété universelle des produits et par compositions ; ainsi, de $n+1$ vers n , il y a, outre les projections, les n flèches suivantes :

$$k_n^p = \underbrace{1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{p-1 \text{ fois}} \times k \times \underbrace{1 \times \ldots \times 1}_{n-p \text{ fois}} \quad \text{où } p = 1,\ldots,n.$$

La catégorie P se plonge naturellement dans M en faisant correspondre à $n+1 \xrightarrow{(p)} n$, où $1 \leq p \leq n$, la flèche k_n^p de M , et 0 à 0. Ainsi P apparaît comme un morceau de la théorie-de-Lawvere des magmas. On serait tenté de dire le "morceau essentiel" , commettant (ici) une grossière erreur, car ce sont justement les projections qui, du point de vue qui nous occupe, font la "différence essentielle" entre M et P . Soit en effet C la catégorie des surjections croissantes entre entiers (ordinaux finis) , et identifions P à une sous catégorie de M , comme indiqué ci-dessus ; posons $u = k \times 1$ et $v = 1 \times k$. La catégorie-quotient de M par la relation $k.u = k.v$ est naturellement isomorphe à C (au sujet des quotients, voir la convention précise que nous avons donnée en {4} , pages 65 et 66) Ceci est la "version catégorique" du résultat élémentaire selon lequel , pour les lois binaires totales , l'associativité por-

tant sur 3 variables entraîne l'associativité portant sur un nombre quelconque de variables. Ceci est faux pour les lois partielles ; c'est ce qu'exprime le fait que la catégorie-quotient de P par la même relation k.u = k.v n'est pas du tout la catégorie C !

Certes, C est quand même une catégorie-quotient de P , mais la relation d'équivalence compatible R sur P telle que C = P/R ne peut pas être engendrée par un nombre fini d'équations du genre " g = f" !

Soit S° un système multiplicatif; nous avons vu que P opère partiellement sur M(S°), et cette opération s'étend encore en une opération partielle de M sur M(S°) , les projections agissant par oubli de variables. Pour exprimer que C opère sur M(S°) autant que P ou que M (i.e. que si d.C est défini, alors (d mod R).C l'est encore), il ne suffit pas de dire que k.u et k.v opèrent, partout où c'est possible, de la même manière ; il faut le dire pour une infinité de couples (g,f) de PxP engendrant la relation R. Dans ce cas, S° est dit faiblement associatif ; cette notion est en effet plus faible que l'associativité décrite au paragraphe précédent (cf. les contre-exemples donnés en [2] , pages 43,44,45).

Ceci suggère d'autres types possibles d'associativité ; soit Q une catégorie-quotient de P , dont C soit un quotient. Nous disons que S° est Q-associatif si Q opère sur M(S°) autant que P , par passage au quotient ; la C-associativité n'est autre que la faible associativité, par exemple.

Un autre point de vue que celui consistant à regarder P comme morceau de M , prend en compte la structure monoïdale ⊠ de P ; la catégorie-monoïdale-quotient de (P,⊠) par la relation "k.u = k.v" est bien isomorphe à (C,+), où + est la somme (ordinale) usuelle.

IX) ACTIONS DE SYSTEMES ET DE GRAPHES MULTIPLICATIFS.

Soit $S^\bullet$ un système multiplicatif et soit E un ensemble. Une action (à droite) a de $S^\bullet$ sur E est la donnée d'une application partielle de $E \times S$ vers E. Le domaine de a est noté $E \hat{\nabla}_a S$, ou plus simplement $E \hat{\nabla} S$. Si A est une partie de E et T une partie de S, l'ensemble $A \times T \cap E \hat{\nabla} S$ est noté $A \hat{\nabla} T$; on écrit encore $x.k$ au lieu de $a(x,k)$.

Soit a une action à droite d'un système multiplicatif $S^\bullet$ sur E. L'ensemble $E \hat{\nabla} S$ est muni de la structure multiplicative naturelle suivante : $(x',k').(x,k)$ est défini si et seulement si $x' = x.k$, et si $k'.k$ et $x'.(k'.k)$ sont définis. Dans ce cas, on pose $(x',k').(x,k) = (x',k'.k)$.

Les notations "$x.k$", "$E \hat{\nabla} S$" ou "$A \hat{\nabla} T$" suggèrent (ou rappellent) que la réunion (supposée disjointe) de E et de S, notée $E + S$, est munie d'une structure multiplicative qui étend celle de $S^\bullet$, en convenant que :

$$(E + S) \hat{\nabla} (E + S) = E \hat{\nabla} S \cup S \hat{\nabla} S .$$

Ce système multiplicatif étendu est noté $E + S^\bullet$. Par exemple, $S^\bullet$ opère à droite sur S de façon naturelle : il ne faut pas confondre les systèmes multiplicatifs $S + S^\bullet$, $S^\bullet$, $S^\bullet + S^\bullet$, ou $(S \hat{\nabla} S)^\bullet$ etc ...

On définit de façon analogue les actions à gauche de $S^\bullet$ sur E, les objets $S \hat{\nabla} E$, $(S \hat{\nabla} E)^\bullet$, $S^\bullet + E$, $S^\bullet + S$, etc... On peut ainsi construire, par exemple, avec trois exemplaires de S, les systèmes multiplicatifs suivants :
$S^\bullet + (S + S)$, $S + (S^\bullet + S)$, $S + (S + S^\bullet)$,
$(S + S) + S^\bullet$, $(S + S^\bullet) + S$, $(S^\bullet + S) + S$.
Plus généralement, on peut engendrer, avec n exemplaires de S, par ce procédé, un certain nombre de systèmes multiplicatifs ; chacun d'eux est canoniquement isomorphe à un produit $S^\bullet \times N^\bullet$ où $N^\bullet$ désigne génériquement une structure multiplicative sur $N = \{1,2,...,n\}$ induite de la structure multipli-

cative (totale) définie par le "inf." . La notation d'un tel système, consistant en une disposition cohérente de parenthèses à n places et le choix d'une place (pour le point!), n'est pas ambigüe. Quant au décompte des classes d'isomorphismes de structures ainsi engendrées, il ne présente pas de difficulté particulière ; nous le laissons au lecteur (en manière de distraction !!!)

Ces processus générateurs de systèmes multiplicatifs sont essentiels dans les questions concernant l'associativité, nous y reviendrons plus complètement dans un article séparé. Les axiomes supplémentaires possibles concernant les actions (associativité, unitarité, commutativité, et tutti quanti...) peuvent s'exprimer en des axiomes concernant les systèmes multiplicatifs déduits, du genre de $(E \vee S)^*$ ou $E + S^*$,etc...

Une action à droite d'un graphe multiplicatif G^* sur un ensemble E est une action du système multiplicatif sous-jacent satisfaisant en outre la condition suivante:

si e est une unité de G^*, et si $x.e$ est défini, alors $x.e = x$.

Il est utile,pour la description des types de structures dans une catégorie, d'envisager les actions de graphes multiplicatifs <u>cohérentes</u> :

ce sont celles pour lesquelles l'égalité $x.(g'.g) = (x.g').g$ a lieu dès que l'un des deux membres est défini ainsi que $g'.g$.

Il revient au même de dire que le graphe multiplicatif associatif libre engendré par G^* opère autant que G^*. En effet, si d est une disposition cohérente de parenthèses telle que $d.C$ et $x.(d.C)$ soient définis, où $C = (g_n, g_{n-1}, \ldots g_1)$ est élément de $M(G^*)$, on constate que $x.(d.C) = (\ldots((x.g_n).g_{n-1})\ldots)g_1$, par récurrence sur n. Il ne faudrait pas en conclure que les graphes multiplicatifs déduits par les processus générateurs cités plus haut sont eux-mêmes associatifs.

On définit les homomorphismes et les correspondances entre actions, comme dans le cas des systèmes multiplicatifs (ajouter des conditions éventuelles d'unitarité...), et les mêmes remarques faites à leur propos sont encore bonnes ici.

X) SYNTAXE D'ALGEBRE POUR UNE CATEGORIE.

Soit $C^\cdot$ une catégorie et soit $D^\cdot$ un graphe multiplicatif admettant $C^\cdot$ comme sous-structure et ayant les mêmes unités que $C^\cdot$. Soit D' l'ensemble des flèches de D qui interviennent dans les couples composables éléments de $D \hat{\nabla} D - C \hat{\nabla} C$, ou qui sont composés de tels couples. On munit D' de la structure de sous-graphe multiplicatif de D suivante : à part les couples triviaux (faisant déjà de D' un graphe orienté) il y a les couples éléments de $D \hat{\nabla} D - C \hat{\nabla} C$. D' n'est pas en général un sous-graphe multiplicatif stable de D , car on peut avoir $(k',k) \in D \hat{\nabla} D \cap D' \times D'$ (et même $k'.k \in D'$) sans pour autant que $(k',k) \in D' \hat{\nabla} D'$; si tel est le cas en effet, cela signifie simplement que k' et k , qui sont éléments de C , ont été retenus comme éléments de D' pour des raisons étrangères à leur appartenance au couple (k',k) (même remarque pour $k'.k$, si $k'.k \in D'$).

Le graphe multiplicatif $C'' = D'' \cap C^\cdot$ est, lui, un graphe orienté, sous-graphe multiplicatif stable de D''. De plus, il est clair que

$$\begin{array}{ccc} C'' & \longrightarrow & D'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\cdot & \longrightarrow & D^\cdot \end{array}$$

est une somme amalgamée dans la catégorie Gram.

Réciproquement, soient donnés :

- un sous-graphe orienté C'' de $C^\cdot$,
- un surgraphe multiplicatif D'' de C'' , dans lequel C' soit stable .

Par somme amalgamée dans Gram , on récupère un surgraphe multiplicatif $D^\bullet$ de $C^\bullet$, auquel correspond, par la première construction, le couple $(C^{\bullet\bullet}, D^{\bullet\bullet})$ dont on est parti.

Ainsi, les deux données (celle de $D^\bullet$, ou celle de $(C^{\bullet\bullet},D^{\bullet\bullet})$) sont équivalentes ; nous disons qu'il s'agit d'une syntaxe de théorie algébrique sur $C^\bullet$. Les éléments de $D^\bullet - C$ s'appellent les lois formelles , et les couples composables non triviaux de $D^{\bullet\bullet}$ s'appellent les axiomes de cette syntaxe .

Si $C^\bullet$ est une catégorie localement petite, et si la syntaxe $D^\bullet$ ne comporte qu'un ensemble de lois formelles, la classe des axiomes peut ne pas être un ensemble. Inversement, on peut avoir une classe propre de lois formelles et un ensemble d'axiomes seulement. Remarques analogues en termes de plus ou moins grande cardinalité.

Remarque. Ce que nous écrivons aux paragraphes X et suivants n'est pas foncièrement nouveau ; c'est une réécriture de certains passages de {3} , que nous avons jugés plus importants que d'autres, et dont le moins qu'on puisse dire est qu'ils manquaient véritablement d'attrait pour le lecteur non averti, ce qui ne veut pas dire,au demeurant,que le même lecteur, maintenant averti, éprouvera à lire ce texte-ci un bonheur sans partage !!!

XI) LES $D^\bullet$-ALGEBRES ET LEURS HOMOMORPHISMES.

A partir d'ici nous employons la terminologie d'objet, et la notation majuscule (X,Y,...) pour désigner les objets.

Soit $C^\bullet$ une catégorie, $D^\bullet$ un surgraphe multiplicatif de $C^\bullet$, et X un objet de $C^\bullet$. Une $D^\bullet$-algèbre sur X est une action à droite de $D^\bullet$ sur l'ensemble C_X des flèches dans $C^\bullet$ de but X , satisfaisant les conditions suivantes:

1) l'action en question est cohérente,
2) si $x.k$ est défini, alors $\alpha(x) = \beta(k)$ et $\alpha(x.k) = \alpha(k)$
3) si $k \in C^\bullet$ et si $\beta(k) = \alpha(x)$, alors $x.k$ est défini , et c'est justement le composé dans $C^\bullet$ de ces deux éléments, comme le rappelle la notation employée.

Il suffit, pour décrire une D^*-algèbre sur X, de préciser l'effet de $D - C$ sur C_X ; bien entendu, cet "effet" ne peut pas, en général, être arbitraire, puisque la syntaxe D^* comporte, en général, des axiomes (structure de D').

Un homomorphisme d'algèbres est un homomorphisme d'actions représentable , i.e. $f : (X,a) \longrightarrow (Y,b)$, où $f:X \longrightarrow Y$ est une flèche de C, l'application sous-jacente à l'action, $C_X \longrightarrow C_Y$ étant justement la composition par f . On peut considérer aussi des morphismes formels $(X,a) \longrightarrow (Y,b)$ où $C_X \longrightarrow C_Y$ est une application non représentable.

On définit de même les correspondances entre D^*-algèbres, représentables ou non. Voici un exemple typique de correspondance : soient M^* et N^* deux systèmes multiplicatifs ; ce sont des D^*-algèbres , où D^* est la syntaxe dans Ens obtenue en ajoutant une loi formelle $1 \xrightarrow{k} 2$; une correspondance $f : M^* \longrightarrow N^*$ s'identifie naturellement à une application $f : M \longrightarrow N$ satisfaisant en outre : si $y.x$ est défini dans M^* et si $f(y).f(x)$ est défini dans N^* , alors $f(y.x) = f(y).f(x)$; on retrouve bien ainsi le premier sens donné en (I).

Les D^*-algèbres totales se définissent ainsi: soit (X,a) une D^*-algèbre sur l'objet X de C^* ; si quel que soit $k : Z \longrightarrow Y$ dans D , le domaine d'action de k est $\mathrm{Hom}(Y,X)$, on dit que (X,a) est une D^*-algèbre totale.

On désigne par $\mathrm{Alg}(D^*,C^*)$ la catégorie des homomorphismes entre D^*-algèbres totales, et par U le foncteur d'oubli naturel de $\mathrm{Alg}(D^*,C^*)$ vers C^* défini sur les objets par $U(X,a) = X$. Rappelons la proposition suivante (cf.{3}) :

Proposition. Si U admet un adjoint à gauche, soit L , alors $\mathrm{Alg}(D^*,C^*)$ est canoniquement isomorphe à la catégorie des T-algèbres , où T est le triple dans C^* déduit de la paire (U,L).

En effet, soit F le foncteur de comparaison ; posons $F(X,a) = (X,t_a)$ où $t_a : TX \longrightarrow X$ est la T-algèbre sur X associée à a ; si $LX = (TX,b)$, t_a est l'unique morphisme de

(TX,b) vers (X,a) tel que $t_a.\epsilon_X = 1_X$, où $\epsilon_X : X \longrightarrow TX$ est l'unité du triple en X.

Construisons l'inverse de F , soit G ; posons donc $G(X,t) = (X,a_t)$, où $t : TX \longrightarrow X$ est une T-algèbre donnée, et où nous devons préciser a_t. Soit $x : Y \longrightarrow X$ et $k : Z \longrightarrow Y$, avec $(x,k) \in C \times D$; comme b est une action sur C_{TX} , on sait que k opère sur $\epsilon_X.x$; par définition,on pose : $a_t(x,k) = t.((\epsilon_X.x)\underset{b}{.}k)$. On doit vérifier que a_t est bien une action à droite de D' sur C_X satisfaisant les conditions voulues.

(i) soit $k \in C$; alors $x\underset{a_t}{.}k = t.((\epsilon_X.x).k) = x.k$.

(ii) supposons que le composé k'.k soit défini ; comme il s'agit d'actions totales, on sait déjà que les deux éléments $\alpha = x.(k'.k)$ et $\beta = (x.k').k$ sont définis ; posons $u = (\epsilon_X.x).k'$, de sorte que :

$$\alpha = t.(u.k) \quad \text{et} \quad \beta = t.((\epsilon_X.t.u).k) .$$

On peut écrire $\beta = t.((Tt.\epsilon_{TX}.u).k)$; mais, en posant $L(TX) = (T^2X,c)$, on sait, par définition de T et de L , que $Tt : (T^2X,c) \longrightarrow (TX,b)$ est un homomorphisme de D'-algèbres ; comme il s'agit de D'-algèbres totales, on sait que $(\epsilon_{TX}.u).k$ est défini, de sorte que:

$$\beta = t.(Tt.((\epsilon_{TX}.u).k)) ;$$

mais $t.Tt = t.\mu_X$, où $\mu : T^2 \longrightarrow T$ est la multiplication du triple ; là aussi, $\mu_X : (T^2X,c) \longrightarrow (TX,b)$ est un homomorphisme de D'-algèbres totales, de sorte que:

$$\beta = t.(\mu_X.((\epsilon_{TX}.u).k)) = t.((\mu_X.\epsilon_{TX}.u).k)$$
$$= t.(u.k) = \alpha .$$

Ainsi, (X,a_t) est bien une D'-algèbre. Montrons que F et G sont inverses l'un de l'autre. Tout d'abord :

$$a_{t_a}(x,k) = t_a.((\epsilon_X.x).k)$$
$$= (t_a.\epsilon_X.x).k \quad , \text{car } t_a : (TX,b) \longrightarrow (X,a)$$

est un homomorphisme de D'-algèbres,

$$= x.k = a(x,k) \quad , \text{ car } t.\epsilon_X = 1,$$

donc, $a = a_{t_a}$ et $G_oF = Id$. D'un autre côté, t_{a_t} est l'unique morphisme $(TX,b) \longrightarrow (X,a_t)$ tel que $t_{a_t}.\epsilon_X = 1$; il suffit donc de prouver que $t : (Tx,b) \longrightarrow (X,a_t)$ est bien un morphisme de D'-algèbres , pour être assuré que $t = t_{a_t}$. Soit à cet effet $y : Y \longrightarrow TX$ et $k : Z \longrightarrow Y$, avec $(y,k) \in C \times D$; on a :

$$\begin{aligned}
(t.y)\underset{a_t}{.}k &= t.((\epsilon_X.t.y) \underset{b}{.} k) \\
&= t.((Tt.\epsilon_{TX}.y) \underset{b}{.} k) \\
&= t.(Tt.((\epsilon_{TX}.y) \underset{c}{.} k)) \\
&= t.\mu_X.((\epsilon_{TX}.y) \underset{c}{.} k) \\
&= t.((\mu_X.\epsilon_{TX}.y) \underset{b}{.} k) \\
&= t.(y \underset{b}{.} k) \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. Bien sûr, il convient de définir G comme foncteur, mais ceci est tout à fait analogue à la preuve précédente ; si $f : (X,t) \longrightarrow (Y,t')$ est un morphisme de T-algèbres, il suffit de voir que $f : (X,a_t) \longrightarrow (Y,a_{t'})$ est un homomorphisme de D'-algèbres, ce qui utilise une troisième fois le même argument.

Toujours dans la situation de la proposition, il convient de remarquer que l'adjoint à gauche $L : C' \longrightarrow Alg(D',C')$ se prolonge en un foncteur $\hat{L} : D' \longrightarrow Alg(D',C')$ de la manière suivante : soit $k : X \longrightarrow Y$ une flèche de D' ; on définit $\hat{L}(k) : LX \longrightarrow LY$ comme étant l'unique flèche $TX \longrightarrow TY$ satisfaisant $\hat{L}(k).\epsilon_X = \epsilon_Y \underset{b}{.} k$, où b est l'action sur C_{TY} qui fait de $LY = (TY,b)$ la D'-algèbre libre engendrée par Y .

Exemple. Considérons la catégorie des topos, soit Top , au dessus de la catégorie des catégories, soit Cat , elle-même au dessus de la catégorie des graphes orientés, soit Gra , pour les foncteurs d'oubli usuels. Il est connu que Top ——> Cat et Cat ——> Gra ont des adjoints à gauche, donc que Top ——> Gra a un adjoint à gauche. Burroni a montré que les topos sont des "algèbres graphiques", c'est-à-dire qu'ils sont descriptibles en termes de D^*-algèbres, où D^* est un surgraphe multiplicatif de Gra . La proposition précédente prouve aussitôt que Top ——> Gra est triplable. Chaque fois qu'on peut établir qu'un foncteur d'oubli vers Gra est celui d'une espèce d'algèbres graphiques au sens de Burroni, et que ce foncteur a un adjoint à gauche (existence des structures libres engendrées par les graphes, pour l'espèce considérée) , alors on peut conclure que ce foncteur est triplable. Sur ce sujet, on pourra consulter {1} et les références de {12}.

XII) ESQUISSES PROJECTIVES ET D^*-ALGEBRES.

Soit $/S^*/$ une esquisse projective et soit C^* la catégorie des réalisations (dans Ens) de $/S^*/$. Soit enfin D^* un surgraphe multiplicatif de C^* ; chaque objet F de D^* qui est source ou but d'une loi formelle est limite inductive (canonique) dans C^* d'un foncteur à valeurs dans $\hat{S}$, en désignant ainsi l'image par le foncteur de Yoneda de $(S^*)^{op}$. On constitue alors une esquisse $/S^*/_{D^*}$ dont le graphe multiplicatif sous-jacent $S^*_{D^*}$ est le dual du sous-graphe multiplicatif plein de D^* qui a pour objet:

(i) ceux de $\hat{S}$,

(ii) les sources et les buts des lois formelles,

et dont les cônes projectifs distingués sont:

(i) ceux de $/S^*/$,

(ii) les duaux des cônes inductifs précisant les sources ou buts de lois formelles comme limites (canoniques) dans C^*.

On voit aussitôt que $Alg(D^*,C^*)$ est isomorphe à la catégorie des réalisations de $/S^*/_{D^*}$ dans Ens.

Le morphisme $/S^\bullet/ \longrightarrow /S^\bullet/_D$. fait apparaître $/S^\bullet/_D$. comme une esquisse ayant , par rapport à $/S^\bullet/$, un "étage de cônes" supplémentaire. Ces cônes sont d'ailleurs d'un genre particulier.

Réciproquement, soit $/S^\bullet/ \xrightarrow{m} /S''/$ un morphisme entre esquisses projectives, tel que $/S''/$ apparaisse comme ayant , par rapport à $/S^\bullet/$, un étage de cônes supplémentaire c'est-à-dire que tout objet de S'' qui n'est pas image par m d'un objet de $S^\bullet$ est sommet d'un cône distingué de $/S''/$ dont la base est, elle, dans $m(S)$. Faisons encore sur m l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas d'autres cônes distingués de $/S''/$ que ceux dont il vient d'être question d'une part, et ceux qui sont image par m des cônes distingués de $/S^\bullet/$.

Posons alors $C^\bullet = \underline{\text{Ens}}\,^{/S^\bullet/}$ et soit encore $\hat{S}$ l'image de $(S^\bullet)^{op}$ par le plongement de Yoneda dans $C^\bullet$. Soit S' un objet de $S' - m(S)$; soit $c : S' \longrightarrow B$ un cône projectif à base dans $m(S)$, distingué pour $/S''/$ (par hypothèse, il en existe !) On retrouve B^{op} dans $\hat{S}$, et on peut prendre la limite inductive dans $C^\bullet$ qui fournit un objet $F_{S'}$, associé à S' . On détient donc , dans $C^\bullet$, un certain nombre d'objets associés à ceux de $/S''/$: ceux de $m(S)$, par Yoneda, et ceux de $S'- m(S)$ par la construction précédente. On peut alors décrire une syntaxe de $D^\bullet$-algèbre dans $C^\bullet$ associée à $/S''/$, sous sa forme (C'',D'') (cf. § (X)) : les objets de C' (ou D') sont ceux dont on vient de parler ; quant aux lois formelles (éléments de $D' - C'$) ce"sont"toutes les flèches de S' qui ne sont pas dans $m(S)$, ou qui ne sont pas arêtes des cônes distingués qui interviennent dans la construction des $F_{S'}$, à la dualité près, et en respectant les sources et buts de la façon décrite ci-dessus . On constate que les catégories $\text{Alg}(D^\bullet,C^\bullet)$ et $\underline{\text{Ens}}^{/S''/}$ sont isomorphes.

De même que les esquisses peuvent avoir plusieurs étages de cônes, on peut envisager plusieurs étages de $D^\bullet$-algèbres: on se donne $D_0^\bullet$ sur $C^\bullet$, puis $D_1^\bullet$ sur $\text{Alg}(D_0^\bullet,C^\bullet)$, etc... , $D_n^\bullet$ sur

$Alg(D^{\bullet}_{n-1}, Alg(D^{\bullet}_{n-2}, \ldots))$, etc... (éventuellement transfiniment !)
Le problème qui se pose en premier, dans cette direction, est de savoir si l'on peut ou non "réduire" le nombre d'étages proposés pour décrire une catégorie de structures au dessus de $C^{\bullet}$. Nous proposerons des éléments de réponse à cette question dans un très prochain article.

(à suivre...)

Références.

{1} A.BURRONI — Algèbres graphiques, Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, XXII, 3 , 1981.

{2} L.COPPEY — Quelques problèmes typiques concernant les Graphes multiplicatifs, Diagrammes, 3, 1980.

{3} L.COPPEY — Théories algébriques et extension de préfaisceaux, et Compléments à cet article, Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, XIII, 1 et 4 , 1972.

{4} L.COPPEY — Thèse, Supplément au volume 3 de Diagrammes 1980.

{5} Y.DIERS — Catégories localisables, Thèse, Paris 1977.

{6} F.ULMER — Locally presentable and locally generated categories, Lect. Notes 195, 1971.

{7} R.GUITART C.LAIR — Critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, Diagrammes,5, 1981.

{8} R.GUITART C.LAIR — Existence de diagrammes localement libres, Diagrammes, 6 , 1981.

{9} C.LAIR — Catégories modelables et catégories esquissables, Diagrammes, 6, 1981.

{10} R.GUITART C.LAIR — Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes, 4, 1980.

{11} C.LAIR — Etude générale de la catégorie des Esquisses, Esquisses mathématiques, 23, Paris, 1975.

{12} E.DUBUC M.KELLY — A presentation of topoï as algebraic relative to categories or graphs, preprint , 1982.

Table des matières.

		n° page
I.	Systèmes multiplicatifs.	01
II.	Sous-systèmes multiplicatifs.	02
III.	Systèmes multiplicatifs quotients	03
IV.	Relations multiplicatives.	03
V.	Graphe multiplicatif libre engendré par un système multiplicatif.	06
VI.	Problème de la reconnaissance des structures.	07
VII.	Systèmes multiplicatifs associatifs.	08
VIII.	D'autres genres d'associativité.	11
IX.	Actions de systèmes et de graphes multiplicatifs	13
X.	Systaxe d'algèbre pour une catégorie.	15
XI.	Les D'-algèbres et leurs homomorphismes.	16
XII.	Esquisses projectives et D'-algèbres.	20

Commentaire de lecture.

Douze références, douzes paragraphes, six thèmes (multiplicatifs)... On est en droit de penser qu'il s'agit de "Variations dodécaphoniques".Pourtant, si ce texte souffre la comparaison musicale, je lui reconnais plus volontiers la structure d'une sonate (romantique) à quatre mouvements. A un petit détail près : les quatre mouvements doivent être joués ensemble, et non l'un après l'autre.

Quant à la qualité de cette musique et de son montage, une "bonne interprétation" me paraît indispensable pour la découvrir. L'interprète est libre, mais je lui rappelle que la fidélité au texte est souvent très utile.

Est-il encore permis de s'amuser un peu, tout en exprimant des choses sérieuses, et sans se prendre trop au sérieux ?