DIAGRAMMES

C. LAIR

Catégories modelables et catégories esquissables

Diagrammes, tome 6 (1981), exp. n° 5, p. L1-L20

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__6__A5_0>

© Université Paris 7, UER math., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol. 6 , Paris 1981.

CATEGORIES MODELABLES

ET

CATEGORIES ESQUISSABLES

C. Lair

Introduction.

On sait caractériser intrinsèquement les catégories de réalisations d'esquisses projectives (voir (E.T.S.A.)): ce sont exactement les catégories présentables (voir (L.P.L.G.)). De même, on sait caractériser intrinsèquement les catégories de réalisations d'esquisses mixtes pour lesquelles les seules limites inductives distinguées sont des sommes: ce sont exactement les catégories localisables (voir (C.A.L.O.) et (C.M.F.I.)).
Dans ce travail, nous fournissons une caractérisation intrinsèque des catégories de réalisations d'esquisses mixtes quelconques.

1. Terminologie - Notations.

On dit que $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathrm{IP}, \mathrm{II})$ est une esquisse (mixte) si, et seulement si:

- $\underline{S}$ est une catégorie petite,

- $\mathbb{P}$ est un ensemble de limites projectives petites distinguées dans $\underline{S}$,

- $\mathbb{H}$ est un ensemble de limites inductives petites distinguées dans $\underline{S}$.

Une <u>réalisation</u> de $//\underline{S}//$ est un foncteur $F: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant les limites distinguées dans $\underline{S}$ en des limites de Ens . On note alors $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les seuls objets sont ces réalisations, que l'on notera désormais $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$.

Soit a un cardinal.

On dit qu'un ensemble E est a-<u>petit</u> et l'on note $E < a$ si, et seulement si, son cardinal est strictement inférieur au cardinal a.

On dit qu'une catégorie $\underline{C}$ est a-<u>petite</u> et l'on note $\underline{C} < a$ si, et seulement si, le cardinal de son ensemble $\mathrm{Fl}\underline{C}$ de flèches est strictement inférieur à a .

On dit qu'un foncteur $G: \underline{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est a-<u>petit</u> et l'on note $G < a$ si, et seulement si, $G(C) < a$ pour tout objet C de la catégorie (quelconque) $\underline{C}$.

Enfin, on dit qu'une esquisse mixte $//\underline{S}//$ est a-<u>petite</u> et l'on note $//\underline{S}// < a$ si, et seulement si:

- $\underline{S} < a$, $\mathbb{P} < a$, $\mathbb{H} < a$,

- pour toute limite projective $(p_I: S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$, appartenant à $\mathbb{P}$, on a $\underline{I} < a$,

- pour toute limite inductive $(s_J: S'_J \longrightarrow S')_{J \in \underline{J}}$, appartenant à $\mathbb{H}$, on a $\underline{J} < a$.

Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite, $\underline{D}$ et $\underline{D}'$ deux catégories petites, $\partial: \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ et $\partial': \underline{D}' \longrightarrow \underline{C}$ deux foncteurs (encore appelés, pour la circonstance, <u>diagrammes</u>).

On dit que ∂' est un <u>petit diagramme limite inductive locale de</u> ∂ si, et seulement si:

- $\varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}(\partial D, C) \simeq \varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}(\partial' D', C)$, naturellement en tout objet C de $\underline{C}$ (voir (C.M.F.I.)).

Soit $U: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un foncteur entre catégories localement petites, C' un objet de $\underline{C}'$ et $\partial': \underline{D}' \longrightarrow \underline{C}$ un foncteur (encore appelé diagramme) où $\underline{D}'$ est petite. On dit que ∂' est un <u>petit diagramme localement libre sur</u> C' (<u>relativement à</u> U) si, et seulement si:

- $\varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}(\partial' D', C) \simeq \mathrm{Hom}(C', UC)$, naturellement en tout objet C de $\underline{C}$ (voir (C.M.F.I.)).

Soit θ un ordinal inaccessible (c'est donc un cardinal particulier) et $\underline{L}$ une catégorie localement petite. On dit que $\underline{L}$ est θ-<u>esquissable</u> si, et seulement si, il existe une esquisse mixte $//\underline{S}//$ telle que:

(E1). $\underline{L}$ et $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ sont équivalentes;

(E2). $//\underline{S}//$ est θ-petite.

On dit que $\underline{L}$ est θ-<u>modelable</u> si, et seulement si, il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ et une sous-catégorie pleine $\underline{L}' < \theta$ de $\underline{L}$ tels que:

(M1). $\underline{L}$ possède toutes les limites inductives petites β-filtrantes;

(M2). les objets de $\underline{L}'$ sont des objets β-présentables de $\underline{L}$;

(M3). pour tout objet L de $\underline{L}$, la catégorie $\underline{L}'/L$ (comma des deux foncteur $\underline{L}' \longrightarrow \underline{L} \longleftarrow \{L\}$) est β-fil-

trante;

(M4). $\underline{L}'$ est dense dans $\underline{L}$.

2. Les catégories θ-modelables sont θ-esquissables.

Dans tout ce §2, nous notons θ un ordinal inaccessible et $\underline{L}$ une catégorie θ-modelable au sens du §1 dont nous reprenons les notations.

Nous avons tout d'abord:

Lemme 1. Tout foncteur $\partial : \underline{D} \longrightarrow \underline{L}'$, tel que $\underline{D} < \beta$, admet un petit diagramme limite inductive locale $\partial' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{L}'$ tel que $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial'$ soit aussi un petit diagramme limite inductive locale de $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial$.

Preuve. Notons $\underline{D}'$ la catégorie (évidemment petite) dont les objets sont les cônes inductifs $D' = (1'_D : \partial D \longrightarrow L')_{D \in \underline{D}}$ de $\underline{L}'$ et dont les morphismes $d' : D' \longrightarrow D''$ sont les flèches $d' : L' \longrightarrow L''$ de $\underline{L}'$ telles que $d'.1'_D = 1''_D$, pour tout objet D de $\underline{D}$. Notons alors $\partial' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{L}'$ le foncteur défini par $\partial'(D') = L'$. Il est trivial de constater que ∂' est bien un petit diagramme limite inductive locale (appelé canonique) de ∂ . Pour prouver que $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial'$ est également un petit diagramme limite inductive locale de $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial$, il suffit d'utiliser l'axiome de filtration (M3).
(On pourra consulter utilement (C.M.F.I.) pour plus de détails sur le calcul des limites inductives locales.) //

Désormais, on ne choisit qu'une catégorie $\underline{D}$ par composante connexe dans le sous-groupoïde de Cat des foncteurs inversibles. Il est immédiat de constater alors que:

Lemme 2. L'ensemble V des foncteurs $\partial : \underline{D} \longrightarrow \underline{L}'$ tels que $\underline{D} < \beta$ est θ-petit. De plus, pour tout élément ∂ de V, son petit diagramme limite inductive locale canonique $\partial' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{L}'$ vérifie $\underline{D}' < \theta$.

Désignons, maintenant, par $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Ens}^{\underline{L}}$ dont les objets sont :

- d'une part les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\underline{L}}(L',-)$, dès que L' est objet de $\underline{L}'$,

- d'autre part les foncteurs

$$U_{\partial} = \varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial D,-)$$

dès que $\partial : \underline{D} \longrightarrow \underline{L}'$ est élément de V.
Par construction, on a :

Lemme 3. La catégorie $\underline{S}$ est θ-petite.

Preuve. Du lemme 1, on déduit facilement que, si ∂ est élément de V et si ∂' en est son petit diagramme limite inductive locale canonique, alors

$$U_{\partial} = \varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial' D',-) \quad .$$

Ceci permet d'exprimer les $\mathrm{Hom}_{\underline{S}}(S',S'')$ (pour deux objets quelconques S' et S'' de $\underline{S}$) en fonction des seuls $\mathrm{Hom}_{\underline{L}'}(L',L'')$ (où L' et L'' sont des objets variant dans la catégorie θ-petite $\underline{L}'^{op}$, identifiée par le plongement de Yoneda à une sous-catégorie pleine de $\underline{S}$).
Il suffit, alors, d'utiliser le lemme 2 pour conclure. //

Dans la catégorie $\underline{S}$, nous distinguons :

- les limites projectives (calculées point par point)

$$U_\partial = \varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial D, -) \quad ,$$

- les limites inductives (calculées point par point)

$$U_\partial = \varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial' D', -) \quad ,$$

dès que ∂ est élément de V et ∂' en est son petit diagramme limite inductive locale canonique. On définit ainsi une esquisse mixte $//\underline{S}//$.
Si l'on désigne par $y: \underline{L}'^{op} \longrightarrow \underline{S}$ la restriction du plongement de Yoneda, il est alors évident que, par construction:

Lemme 4. Deux réalisations de $//\underline{S}//$ qui égalisent y sont équivalentes.

De plus, des lemmes 2 et 3 résulte immédiatement:

Lemme 5. L'esquisse mixte $//\underline{S}//$ est θ-petite.

Enfin, pour toute réalisation $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$, notons $H(F)^{op}$ la catégorie comma des deux foncteurs

$$\underline{1} \xrightarrow[0 \longmapsto 1]{} \mathrm{Ens} \xleftarrow[F.y]{} \underline{L}'^{op}$$

et par $h(F)^{op} : H(F)^{op} \longrightarrow \underline{L}'^{op}$ le foncteur projection canonique. On a:

Lemme 6. Pour toute réalisation F de $//\underline{S}//$, la catégorie $H(F)$ est β-filtrante.

Preuve. Il suffit d'utiliser le lemme 1 puis le fait que F est bien une réalisation. //

Nous sommes, maintenant, en mesure de prouver:

Proposition 1. Toute catégorie θ-modelable est θ-esquissable.

Preuve. Vu le lemme 5 , il suffit d'établir que $\underline{L}$ et $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ sont équivalentes.

A tout objet L de $\underline{L}$, on associe le foncteur

$$F_L : \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$S \longmapsto S(L) .$$

C'est évidemment une réalisation de $//\underline{S}//$ puisque les petites limites tant projectives qu'inductives (distinguées dans $\underline{S}$) se calculent point par point dans $\mathrm{Ens}^{\underline{L}}$.

A toute réalisation $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$, on associe l'objet

$$L_F = \varinjlim \left(H(F) \xrightarrow[h(F)]{} \underline{L}' \longrightarrow \underline{L} \right)$$

qui existe bien, vu le lemme 6 et l'axiome (M1).

En utilisant (M4) , on établit immédiatement que $L_{F_L} \simeq L$, naturellement en tout objet L de $\underline{L}$.

De même, en utilisant (M2) et le lemme 6, un raisonnement classique permet d'établir que $F_{L_F} \simeq F$, naturellement en tout objet F de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$. //

3. Les catégories θ-esquissables sont θ-modelables.

Dans toute la suite de ce §2 , θ désigne encore un ordinal inaccessible et l'on suppose que $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ est une esquisse mixte θ-petite.

Nous notons:

- i la borne supérieure des cardinaux $\overline{F\Pi}$ des bases $\underline{I}$ des limites projectives $(p_I : S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ appartenant à $\mathbb{P}$,

- α l'ordinal régulier w_{i+1} d'indice $i+1$,

- s le cardinal de $F\mathrm{l}\underline{S}$,

- i' le cardinal de $\mathbb{P}$,

- j la borne supérieure des cardinaux $\overline{F\mathrm{l}\underline{J}}$ des bases $\underline{J}$ des limites inductives $(s_J\colon S_J \longrightarrow S)_{J\in\underline{J}}$ appartenant à $\mathbb{H}$,

- j' le cardinal de $\mathbb{H}$,

- β l'ordinal régulier $w_{\sup(\alpha,s,i',j,j')+1}$.

Puisque θ est inaccessible, il est évidnet que:

Lemme 7. L'ordinal régulier β est strictement inférieur à l'ordinal inaccessible θ .

Prouvons, maintenant, que:

Lemme 8. La catégorie $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ possède toutes les limites inductives petites β-filtrantes et le foncteur d'inclusion $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ commute avec ces limites.

Preuve. La catégorie $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ possède évidemment toutes les limites inductives petites et elles s'y calculent point par point.

Les limites inductives petites β-filtrantes commutent dans Ens d'une part avec toutes les limites inductives petites et d'autre part avec les limites projectives β-petites. Comme les limites inductives appartenant à $\mathbb{H}$ sont petites et comme les limites projectives appartenant à $\mathbb{P}$ sont β-petites (car elles sont certainement α-petites et $\alpha < \beta$), on conclut facilement. //

Notons $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})_\beta$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ dont les objets sont les réalisations $F'\colon //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$

telles que $F' < \beta$. Comme θ est inaccessible, $\beta < \theta$ et $\underline{S} < \theta$, il est trivial de constater:

Lemme 9. La catégorie $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})_\beta$ est équivalente à une sous-catégorie pleine θ-petite, notée $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta$.

Etablissons, aussi, que:

Lemme 10. Les objets de $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta$ sont des objets β-présentables de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$.

Preuve. Supposons que $F' : //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un objet de $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta$ (et donc, en particulier, que $F' < \beta$) et que $F = \varinjlim_{J \in \underline{J}} F_J$ est une limite inductive petite β-filtrante dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$.

Nous avons, successivement:

$$- \quad \mathrm{Hom}(F', \varinjlim_J F_J) = \int_S \mathrm{Hom}(F'S, (\varinjlim_J F_J)(S)) \quad ,$$

la catégorie $\underline{S}$ étant petite,

$$- \quad \mathrm{Hom}(F', \varinjlim_J F_J) = \int_S \mathrm{Hom}(F'S, \varinjlim_J (F_J(S))) \quad ,$$

vu le lemme 8 ,

$$- \quad \mathrm{Hom}(F', \varinjlim_J F_J) = \int_S (\varinjlim_J F_J(S))^{F'(S)}$$

$$= \int_S (\varinjlim_J F_J(S)^{F'(S)}) \quad ,$$

puisque, pour tout objet S de $\underline{S}$, on a $F'(S) < \beta$ et les limites inductives petites β-filtrantes commutent dans Ens avec les limites projectives β-petites,

$$- \quad \mathrm{Hom}(F', \varinjlim_{J} F_J) = \varinjlim_{J} \left(\int_S \left(F_J(S)^{F'(S)} \right) \right)$$

$$= \varinjlim_{J} \left(\int_S \mathrm{Hom}(F'(S), F(S)) \right)$$

$$= \varinjlim_{J} \mathrm{Hom}(F', F_J) \quad ,$$

puisque les limites petites β-filtrantes commutent dans Ens avec les limites projectives β-petites et, $\underline{S}$ étant β-petite, sa catégorie subdivision l'est aussi.
On peut donc conclure. //

Montrons, maintenant, que:

Lemme 11. Pour tout objet F de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, la catégorie $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_{\beta}/F$ (comma des deux foncteurs

$$(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_{\beta} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longleftarrow \{F\} \quad)$$

est β-filtrante.

Preuve. Soit $f: \underline{J} \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_{\beta}/F$

$$J \longmapsto (f_J: F'_J \longrightarrow F)$$

un foncteur où $\underline{J}$ est β-petite.
Le foncteur

$$\underline{J} \xrightarrow[f]{} (\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_{\beta}/F \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$$

admet une limite inductive, calculée point par point, $(g_J: F_J \longrightarrow G')_{J \in \underline{J}}$.
Par conséquent, on a donc $G' < \beta$ et il existe une unique flèche $g: G' \longrightarrow F$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ telle que, pour tout objet J de $\underline{J}$, on ait $g.g_J = f_J$.

En conséquence (voir l'Appendice), le foncteur projection canonique

$$G'/(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$$

est un petit diagramme localement libre sur G', relativement au foncteur d'inclusion $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$.
Nous en déduisons qu'il existe au moins un objet F' de $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta$ et deux flèches $g' : G' \longrightarrow F'$ et $g'' : F' \longrightarrow F$ tels que $g = g''.g'$.
On conclut alors facilement. //

Notons $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})_\beta$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les objets sont les foncteurs $G' : \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ tels que $G' < \beta$. Elle est évidemment équivalente à une de ses sous-catégories pleines θ-petite $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta$ contenant $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta$.
Nous avons alors:

Lemme 12. Pour tout objet F de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, le foncteur d'inclusion

$$(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta/F \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta/F$$

est final.

Preuve. Il suffit d'utiliser le fait que tout objet G' de $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta$ admet (voir l'Appendice)

$$G'/(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta$$

pour petit diagramme localement libre, relativement à l'inclusion $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$. //

Nous en déduisons:

Lemme 13. Le foncteur d'inclusion

$$(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$$

est dense.

Preuve. Le plongement de Yoneda $Y: \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ est évidemment dense. De plus, comme $\underline{S} < \beta$, le foncteur

$$Y(S): \underline{S} \longrightarrow Ens$$

est, pour tout objet S de $\underline{S}$, un foncteur β-petit.
Il en résulte que $(Ens^{\underline{S}})'_\beta$ est également dense dans $Ens^{\underline{S}}$.
On conclut donc en utilisant le lemme 12. //

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer:

Proposition 2. Toute catégorie θ-esquissable est θ-modelable.

Preuve. C'est exactement ce que signifient les lemmes 8,9,10,11 et 13 lorsque l'on pose:

- $\underline{L} = Ens^{//\underline{S}//}$,
- $\underline{L}' = (Ens^{//\underline{S}//})'_\beta$. //

4. Commentaires.

De la définition des catégories θ-modelables du §1 et des résultats de (C.M.L.L.), on déduit immédiatement que les catégories de modèles de Π^0_n-théories sont esquissables (ce qui justifie la terminologie adoptée). On retrouve ainsi "globalement" un résultat de (C.F.P.O.) qui y est établi directement.

On peut montrer que les catégories θ-modelables sont aussi les catégories localement petites $\underline{L}$ pour lesquelles il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ vérifiant:

- $\underline{L}$ possède toutes les limites inductives petites β-filtrantes,
- $\underline{L}$ possède les petits diagrammes limites inductives locales d'objets β-présentables et ils sont constitués d'objets β-présentables,

- $\underline{L}$ possède un ensemble générateur propre constitué d'objets β-présentables,

- si $\underline{L}_\beta$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{L}$ dont les objets sont tous les objets β-présentables de $\underline{L}$, alors $\underline{L}_\beta$ est équivalente à une de ses sous-catégories pleines $\underline{L}'$ qui est θ-petite.

Il s'agit donc d'une définition tout à fait analogue à celle des catégories β-présentables (de (L.P.L.G.)) ou β-localisables (de (C.A.L.O.)). Si nous avons opté pour la présentation qui en est fournie au §1 c'est parce qu'elle nous a semblé mieux adaptée aux preuves des §§2 et 3 que nous avions en vue et parce qu'elle souligne explicitement le lien avec les catégories de modèles (compte tenu des résultats de (C.M.L.L.) signalés plus haut).

Si $//\underline{S}//$ = $(\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ est une esquisse mixte (pour laquelle nous reprenons les notations du §2) et si $Y: \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ désigne le plongement de Yoneda, alors, pour tout objet S de $\underline{S}$, le foncteur $Y(S): \underline{S} \longrightarrow Ens$ possède (voir l'Appendice) un petit diagramme localement libre relativement à l'inclusion $Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$.
Il convient de remarquer, dans ces conditions, que:

- si Π est vide (cas des catégories α-présentables), ce diagramme peut être choisi discret et même réduit à un objet (théorème du faisceau associé) qui est alors α-présentable dans $Ens^{//\underline{S}//}$,

- si Π n'est constitué que de sommes (cas des catégories α-localisables) ce diagramme peut être encore choisi discret (mais pas toujours réduit à un objet) et ses objets sont encore α-présentables dans $Ens^{//\underline{S}//}$,

- si Π n'est ni vide ni constitué que de sommes, ce diagramme

ne peut pas toujours être choisi discret et ses objets ne sont plus nécessairement α-présentables dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ (avec les notations précédentes, on peut seulement affirmer qu'ils sont β-présentables) dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$.

Ceci justifie l'intervention de l'ordinal inaccessible θ .

Appendice.

Dans toute la suite de cet Appendice, on suppose que $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathbb{P}, \mathbb{H})$ est une esquisse mixte. On note (comme au §3):

- i la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\underline{I}}$ des bases $\underline{I}$ des limites projectives appartenant à $\mathbb{P}$,
- α l'ordinal régulier w_{i+1} ,
- s le cardinal de $\mathrm{Fl}\underline{S}$,
- i' le cardinal de $\mathbb{P}$ et j' le cardinal de $\mathbb{H}$,
- j la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\underline{J}}$ des bases $\underline{J}$ des limites inductives appartenant à $\mathbb{H}$,
- β l'ordinal régulier $w_{\sup(\alpha,s,i',j,j')+1}$.

Pour tout ordinal régulier $\beta' > \beta$, on note $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})_{\beta'}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ dont les objets sont les réalisations β'-petites et $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_{\beta'}$ une de ses sous-catégories pleines petites qui lui est équivalente (il en existe au moins une car $\underline{S}$ est petite).

Etablissons, tout d'abord, le lemme qui suit:

Lemme. Pour tout ordinal régulier $\beta' \geq \beta$, tout sous-foncteur β'-petit $G'': \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ d'une réalisation $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est sous-foncteur d'(au moins) une sous-réalisation β'-petite $F'': //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ de F.

Preuve. Désignons par $K(F)$ la catégorie comma des deux foncteurs

$$\underline{1} \longrightarrow \mathrm{Ens} \xleftarrow[F]{} \underline{S}$$
$$0 \longmapsto 1$$

et par $k(F): K(F) \longrightarrow \underline{S}$ la projection canonique. Ainsi:

- les objets de $K(F)$ sont les (x,S) tels que x appartient

à $F(S)$,

- les flèches de $K(F)$ sont les

$$((x,S),s\colon S \longrightarrow S',(x',S'))\colon (x,S) \longrightarrow (x',S')$$

tels que $F(s)(x) = x'$.

La catégorie comma $K(G")$ associée à $G"$ est donc une sous-catégorie pleine de $K(F)$ et il s'agit de "saturer" $K(G")$ dans $K(F)$ en une sous-catégorie pleine qui soit effectivement de la forme $K(F")$, où $F"$ est une réalisation. Pour ce faire, pour toute limite inductive $(s_J\colon S_J \longrightarrow S)_{J\in \underline{J}}$ appartenant à Π , tout élément x de $F(S)$ et tout ordinal $\lambda < \alpha$ non limite:

(c). On choisit un objet $J(\lambda)$ de $\underline{J}$ et un élément $x(\lambda)$ de $F(S_{J(\lambda)})$ tels que $F(s_{J(\lambda)})(x(\lambda)) = x$ (un tel couple existe nécessairement puisque, F étant une réalisation, on a

$$F(S) = \varinjlim_{J} F(S_J) \quad),$$

(c'). Pour tout indice J et tout élément x' de $F(S_J)$ tels que $F(s_J)(x') = x$, on choisit un zigzag de $\underline{J}$

$$J = J_1 \xleftarrow[j_1]{} J_2 \xrightarrow[j_2]{} J_3 \longleftarrow \cdots \cdots \longrightarrow J_{2p-1} \xleftarrow[j_{2p-1}]{} J_{2p} \xrightarrow[j_{2p}]{} J_{2p+1} = J(\lambda)$$

et une famille $(x'_k)_{1 \le k \le 2p+1}$ appartenant à $\prod_{1\le k\le 2p+1} F(S_{J_k})$ tels que:

+ $x'_1 = x'$ et $x'_{2p+1} = x(\lambda)$,
+ $F(s_{J_k})(x'_k) = x$, pour tout $1 \le k \le 2p+1$,
+ $F(s_{j_k})(x'_k) = x'_{k+1}$, pour tout entier pair k tel que $2 \le k \le 2p$,

+ $F(S_{j_k})(x'_{k+1}) = x'_k$, pour tout entier impair k tel que $1 \leq k \leq 2p-1$,

(un tel zigzag et une telle famille existent nécessairement puisque $F(S) = \varinjlim_{J} F(S_J)$) .

On construit alors la suite $(K(G")_\lambda)_{\lambda \leq \alpha}$ de sous-catégories pleines de $K(F)$, qui contiennent $K(G")$, de la manière qui suit.

On pose, tout d'abord, $K(G")_0 = K(G")$.

Si $\lambda < \alpha$ est un ordinal admettant un prédecesseur λ' et si $K(G")_{\lambda'}$ est défini, on note $K_1(G")_\lambda$ la plus petite sous-catégorie pleine de $K(F)$ contenant $K(G")_{\lambda'}$ et telle que:

(i). Si $(p_I : S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ est une limite projective appartenant à $\mathbb{P}$, si x est élément de $F(S)$ et si, pour tout objet I de $\underline{I}$, $(F(p_I)(x), S_I)$ est objet de $K(G")_{\lambda'}$, alors (x,S) est objet de $K_1(G")_\lambda$,

(ii). Si $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ est une limite inductive appartenant à $\mathbb{H}$, si (x,S) est objet de $K(G")_{\lambda'}$, alors $(x_{J(\lambda)}, S_{J(\lambda)})$ est objet de $K_1(G")_\lambda$ (en reprenant les notations de (c)),

(ii'). Si $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ est une limite inductive appartenant à $\mathbb{H}$, si (x,S) est objet de $K(G")_{\lambda'}$, si J est objet de $\underline{J}$, si (x', S_J) est objet de $K(G")_{\lambda'}$ et si $F(s_J)(x') = x$, alors, pour tout entier $1 \leq k \leq 2p+1$, le couple (x'_k, S_{J_k}) est objet de $K_1(G")_\lambda$ (en reprenant les notations de (c')).

On note alors $K(G")_\lambda$ la plus petite sous-catégorie pleine de

$K(F)$ contenant $K_1(G")_\lambda$ et telle que:

(iii). Si (x,S) est objet de $K_1(G")_\lambda$ et si $s: S \longrightarrow S'$ est flèche de $\underline{S}$, alors $(F(s)(x),S')$ est objet de $K(G")_\lambda$.

Si, maintenant, $\lambda \leq \alpha$ est un ordinal limite et si $K(G")_\lambda$, est défini pour tout ordinal $\lambda' < \lambda$, on pose

$$K(G")_\lambda = \bigcup_{\lambda' < \lambda} K(G")_{\lambda'}, \quad .$$

On vérifie, alors, facilement que $K(G")_\alpha$ est bien de la forme $K(F")$, où $F": \underline{S} \longrightarrow Ens$ est bien une réalisation de $//\underline{S}//$ qui, de plus, est β'-petite. //

Nous pouvons, alors, énoncer:

Théorème. Si $\beta' \geq \beta$ est un ordinal régulier, tout foncteur $G': \underline{S} \longrightarrow Ens$ qui est β'-petit possède

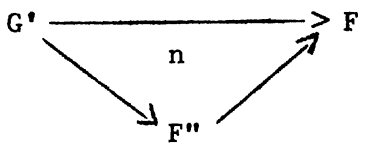
$$G'/(Ens^{//\underline{S}//})'_{\beta'} \longrightarrow Ens^{//\underline{S}//}$$

pour petit diagramme localement libre relativement à l'inclusion $Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ (et en notant $G'/(Ens^{//\underline{S}//})'_{\beta'}$, la catégorie comma des deux foncteurs

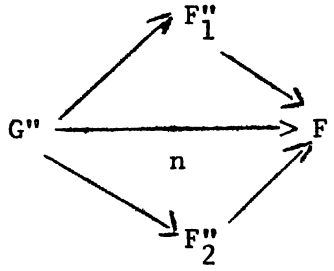
$$\{G'\} \longrightarrow Ens^{\underline{S}} \longleftarrow (Ens^{//\underline{S}//})'_{\beta'}).$$

Preuve. Supposons, en effet, que $F: //\underline{S}// \longrightarrow Ens$ soit une réalisation et que $n: G' \longrightarrow F$ soit une transformation naturelle.

Notons $G": \underline{S} \longrightarrow Ens$ le foncteur image de n (calculée point par point). On a évidemment $G" < \beta'$ et l'on peu t donc appliquer le lemme précédent. On en déduit une factorisation



où F'' est une réalisation β'-petite.
Si l'on dispose de deux factorisations de n :



au moyen de deux réalisations F''_1 et F''_2 qui sont β'-petites, on peut construire les images respectives G''_1 et G''_2 de F''_1 et F''_2 dans F (elles sont calculées point par point).
On a donc $G''_1 < \beta'$ et $G''_2 < \beta'$. Le plus petit sous-foncteur G''' de F possédant G''_1 et G''_2 comme sous-foncteurs est donc également β'-petit. On peut donc lui appliquer le lemme précédent, ce qui permet de conclure. //

De ce Théorème, nous déduisons immédiatement:

Corollaire. Tout foncteur $G: \underline{S} \longrightarrow Ens$ possède un petit diagramme localement libre relativement au foncteur d'inclusion $Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$.

Preuve. En effet, il existe toujours un ordinal régulier β' tel que $\beta' \geq \beta$ et G soit β'-petit. //

Bibliographie.

(C.A.L.O.) Y. Diers, Catégories localisables, Thèse, Paris 1977 .

(C.F.P.O.) R. Guitart et C. Lair, La continuité pour représenter les formules du 1^{er} ordre, à paraître.

(C.M.F.I.) R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4 , Paris 1980 .

(C.M.L.L.) J. Rosicky, Categories of models of languages $L_{K,\lambda}(\mu)$, multigraphié, 1980 .

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iaşi, XIV,1968.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, 1971.