DIAGRAMMES

R. GUITART
L. VAN DEN BRIL

Note sur la détermination des homologies par les carrés exacts

Diagrammes, tome 6 (1981), exp. n° 3, p. GV1-GV7
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__6__A3_0>

© Université Paris 7, UER math., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol. 6, 1981.

NOTE SUR LA DETERMINATION DES HOMOLOGIES PAR LES CARRES EXACTS.

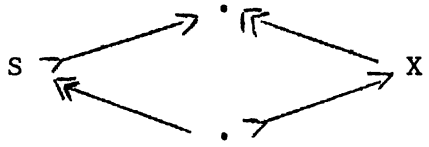
R. Guitart et L. Van den Bril

1. Rappels. Dans une catégorie abélienne $\underline{A}$ une 0-suite est un diagramme $A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} B$ où $v.u = 0$, i.e. $\text{im } u \subset \ker v$. La 0-suite (u,v) est dite exacte si et seulement si $\text{im } u = \ker v$; sinon son défaut d'exactitude est mesuré par $H(u,v) = \ker v / \text{im } u$, objet de $\underline{A}$ appelé homologie de (u,v).

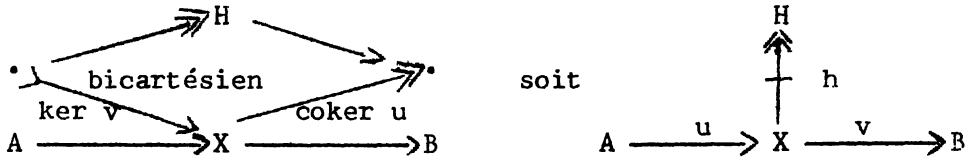
La catégorie $\text{Rel } \underline{A}$ des relations additives de $\underline{A}$ a pour objets ceux de $\underline{A}$ et pour morphismes de A vers B les sous-objets $R \longrightarrow A \oplus B$; la composition de R avec $S \longrightarrow B \oplus C$ est donnée par $S.R \longrightarrow A \oplus C$, avec:

" $(a,c) \in S.R$ si et seulement si il existe $b \in B$ tel que $(a,b) \in R$ et $(b,c) \in S$ ".

La symétrie $A \oplus B \xrightarrow{\sim} B \oplus A$ permet d'associer à toute relation R de A vers B la relation opposée R° , et ainsi $\text{Rel } \underline{A}$ est une catégorie à involution. En particulier, dans $\text{Rel } \underline{A}$ il y a identité entre les sous-objets de X et les quotients de X, et un sous-objet S de X dans $\text{Rel } \underline{A}$ est la même chose qu'un sous-objet d'un quotient de X dans $\underline{A}$, ou un quotient d'un sous-objet (voir {1} , {3} et {4}); $S \rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow X$ peut se représenter par :



ce carré étant bicartésien. Autrement dit, les quotients (i.e. les sous-objets) de X dans Rel A sont exactement les homologies H(u,v), puisque l'on a :

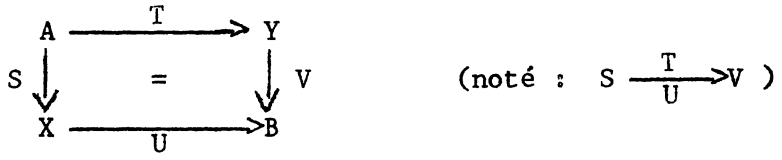


avec, en notation "ponctuelle" ,

$$X \times H \supset h = \{(x,c) \; ; \; vx = 0 \text{ et } x \bmod \operatorname{im} u = c\}.$$

En fait, on a $h.u = 0$ et $v.h^\circ = 0$, et (voir {4}) h est universelle pour cette propriété : soit $r : X \dashrightarrow L$ une relation telle que $r.u = 0$ et $v.r^\circ = 0$, alors il existe une unique $\bar{r} : H \dashrightarrow L$ appartenant à Rel A telle que $r = \bar{r}.h$. En effet, si $(x,d) \in r$, alors $vx = 0$, donc r est définie par sa valeur sur ker v ; de plus, si $x_o \in \operatorname{im} u$, $r(x_o) = 0$, donc r ne dépend de x que modulo im u , et factorise par H .

Enfin (voir par exemple {3}) un carré exact de A est un carré commutatif



tel que la suite

$$A \xrightarrow{(S,T)} X \oplus Y \xrightarrow{\langle U,-V\rangle} B$$

soit exacte, ou bien, ce qui est équivalent, tel que $S.T^\circ \leq U^\circ.V$ dans Rel A. On sait aussi ({2}) décrire inversement Rel A à l'aide

de $\underline{A}$ et des carrés exacts dans $\underline{A}$.

L'exactitude de $S \xrightarrow[U]{T} V$ peut finalement se tester d'une manière non additive : le carré $S \xrightarrow[U]{T} V$ est exact si et seulement si pour tout carré

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{N} & Y \\ {\scriptstyle M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G} \\ X & \xrightarrow[F]{} & T \end{array}$$

satisfaisant les égalités

$U.M = V.N$ et $F.S = G.T$, on a : $F.M = G.N$.

2. Lemme. Dans une catégorie abélienne un carré $s \xrightarrow[u]{t} v$ est exact si et seulement si on a (i) et (ii) :

(i) $\ker t \xrightarrow{a} \ker u$ est un épimorphisme,

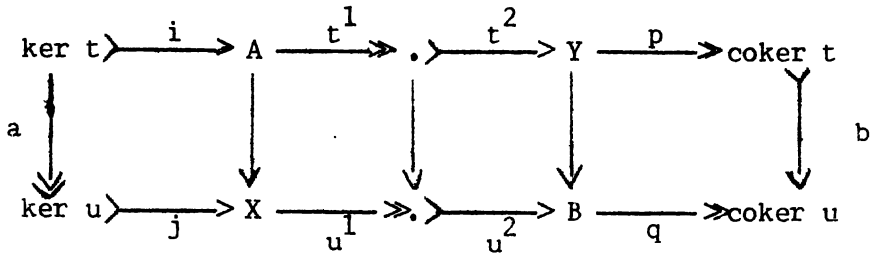
(ii) $\operatorname{coker} t \xrightarrow{b} \operatorname{coker} u$ est un monomorphisme .

Preuve. Supposons d'abord le carré exact. On a donc

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ {\scriptstyle s}\downarrow & \text{ex.} & \downarrow{\scriptstyle v} \\ X & \xrightarrow[u]{} & B \\ \downarrow & \text{ex.} & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} u \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ \downarrow & \text{ex.} & \downarrow{\scriptstyle e} \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} t \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} u \end{array}$$

donc, $\ker(b.e) = \operatorname{im} t = \ker e$, donc $e^{-1}(0) = e^{-1}(\ker b)$, et comme e est un épi, $\ker b = 0$, et b est un monomorphisme. On obtient (i) de manière duale.

Réciproquement, supposons (i) et (ii), et montrons que $s \xrightarrow[u]{t} v$ est exact. Pour cela, considérons la figure suivante :



dans laquelle $t^2.t^1 = t$ et $u^2.u^1 = u$, et soit $m : Z \longrightarrow X$ $n : Z \longrightarrow Y$, $f : X \longrightarrow T$, $g : Y \longrightarrow T$. Si $u.m = v.n$, on a $g.u.m = g.v.n$, $0 = b.p.n$, $0 = p.n$, $n = t^2.h$.
Si $f.s = g.t$, on a $f.s.i = g.t.i$, $f.j.a = 0$, $f.j = 0$, $f = l.u^1$.
Alors, $f.m = l.u^1.m$ et $g.n = g.t^2.h$. Or, $u.m = u^2.u^1.m = v.n = v.t^2.h = u^2.k.h$, d'où $u^1.m = k.h$.
D'autre part, $g.t = g.t^2.t^1 = f.s = l.u^1.s = l.k.t^1$, d'où $g.t^2 = l.k$.
On conclut que $f.m = l.k.h = g.n$.

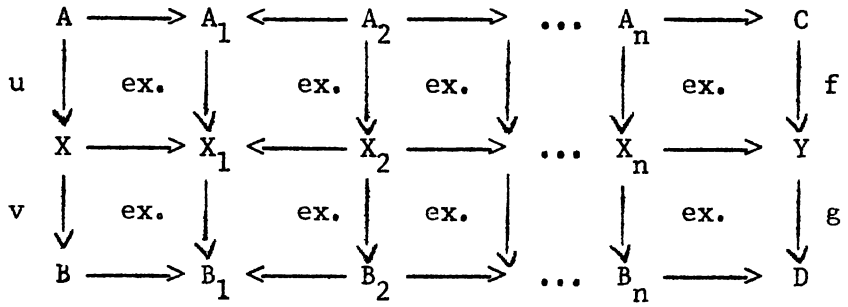
Remarque 1. On utilise en fait seulement les conditions suivantes de la figure :

- a est épi et b est mono,
- $t.i = 0$ et $q.u = 0$,
- $A \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{p} .$ et $. \xrightarrow{j} X \xrightarrow{u} B$ sont exactes.

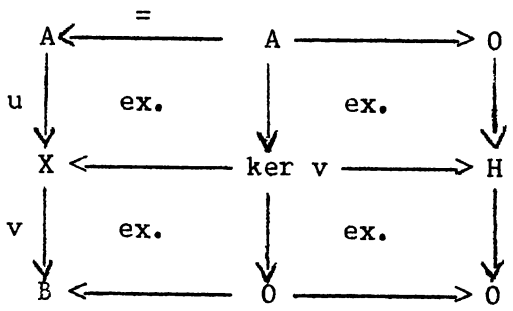
Remarque 2. Du lemme résulte aussitôt que les carrés exacts se composent.

Remarque 3. Du lemme résulte aussitôt que si $s \xrightarrow[u]{t} v$ est exact (par exemple si c'est un pull back ou un push out) et si u est un épi, alors t est un épi. Et de même si $s \xrightarrow[u]{t} v$ est exact et si t est un mono, alors u est un mono.

3. Théorème. Dans une catégorie abélienne les 0-suites $A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} B$ et $C \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} D$ ont même homologie si et seulement si il existe un diagramme du type suivant :



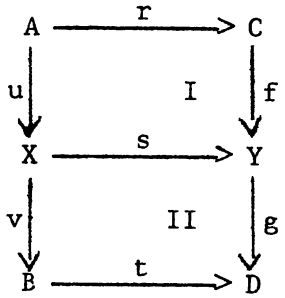
Preuve. Soit H = ker v / im u . On a alors :



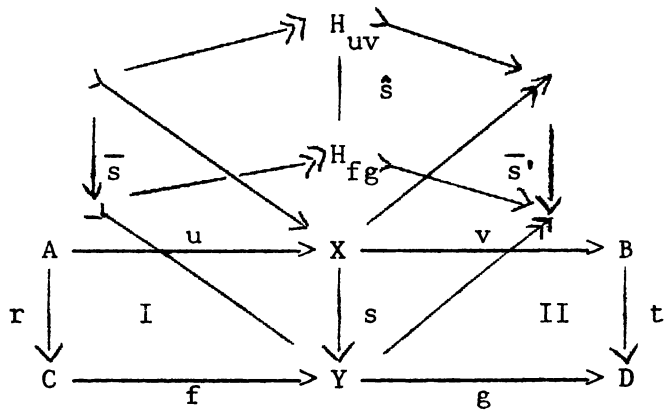
Les quatre exactitudes indiquées résultent aisément d'une vérification utilisant le lemme du n° 2.

On obtient de même un diagramme "exact" de (f,g) vers H = ker g / im f .

Pour la réciproque, on montre que si I et II sont exacts:



alors ker v / im u est égal (mod $\hat{s}$) à ker g / im f . En effet, on a, d'après le n° 1 :



Comme $\bar{s}$ est le ker de II et que II est exact, $\bar{s}$ est un épi, et $\hat{s}$ aussi, et comme $\bar{s}'$ est le coker de I et que I est exact, $\bar{s}'$ est un mono, et $\hat{s}$ aussi.

Remarque 1. Si dans une catégorie abélienne $\underline{A}$ on se donne une classe $\underline{E}$ de 0-suites appelées axiomatiquement "suites $\underline{E}$-exactes" le lemme du n° 2 produit alors une description des carrés $\underline{E}$-exacts correspondants ,et puis le théorème du n° 3 indique la définition de la $\underline{E}$-homologie des 0-suites. Pour que cette $\underline{E}$-homologie soit "bonne" , il faut imposer à $\underline{E}$ des axiomes qui ne seront pas discutés ici .

Remarque 2. Soit $X \rightarrowtail Y$ une inclusion entre espaces topologiques. Pour que $H(X) \longrightarrow H(Y)$ soit un isomorphisme, il suffit que pour toute chaîne singulière $c \in \Delta_{q+1}Y$, la condition $\partial_q c \in \Delta_q X$ entraîne $c \in \Delta_{q+1}X$. En effet, ceci signifie, compte tenu du lemme du n° 2, que le carré suivant est exact:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{q+1}X & \rightarrowtail & \Delta_{q+1}Y \\ \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ \Delta_q X & \rightarrowtail & \Delta_q Y \end{array}$$

ou encore, que le carré "renversé" , obtenu en renversanthorizontales et verticales, est exact. On conclut en utilisant le théorème, dont on voit ainsi, sur un exemple, la manière d'être utilisé en topologie.

4. Références.

{1} M.GRANDIS, Sous-quotients et relations induites dans les catégories exactes, Cahiers de Top. et Géo. Diff.,XXII, 3, 1981, pp. 231-238.

{2} R.GUITART, Relations et carrés exacts, Ann.SC.Math. Québec, IV-2, 1980, pp. 103-125.

{3} P.HILTON, Correspondences and exac squares, Proc.Conf.on Cat.alg., La Jolla Springer, 1966.

{4} V.ZÖBERLEIN, Spectral sequences and bi-Grothendieck filtrations, Oberwolfach,Kategorien, 33, 1975, pp. 107-109.