DIAGRAMMES

FRANÇOIS FOLTZ

# Sur la commutation des limites

*Diagrammes*, tome 5 (1981), exp. n° 1, p. F1-F33

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__5__A1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol. 5, 1981.

# SUR LA COMMUTATION DES LIMITES

François Foltz

## Introduction.

Certaines catégories de modèles de théories du 1^er ordre sont équivalentes à des catégories Mod($\underline{S}$) de foncteurs $\underline{S} \longrightarrow \underline{Ens}$ qui commutent aux limites projectives indexées par certaines catégories petites $\underline{P}$ et aux limites inductives indexées par certaines catégories petites $\underline{I}$ : il en est ainsi, notamment, des catégories d'algèbres d'une théorie de Lawvere, ou des catégories $\alpha$- présentables au sens de Gabriel-Ulmer, ou encore des catégories $\alpha$- localisables au sens de Diers.

En général, les catégories telles que Mod($\underline{S}$) ne possèdent pas nécessairement toutes les limites projectives et inductives petites : par exemple, la catégorie - localisable - des corps ne possède pas tous les produits. De plus, même si Mod($\underline{S}$) possède certaines de ces limites, elles ne s'y calculent pas obligatoirement point par point (i.e. Mod($\underline{S}$) $\longrightarrow \underline{Ens}^{\underline{S}}$ n'y commute pas forcément) : par exemple, les limites inductives petites ne se calculent pas toutes point par point dans une catégorie $\alpha$-présentable. Cependant, il est suffisant que les $\underline{J}$ - limites inductives commutent dans $\underline{Ens}$ avec les $\underline{P}$ - limites projectives pour que Mod($\underline{S}$) possède les $\underline{J}$ - limites inductives et pour qu'elles

s'y calculent point par point : ainsi, les catégories $\alpha$- présentables ont des limites inductives $\alpha$- filtrantes qui se calculent point par point. De même, il est suffisant que les $\underline{Q}$ - limites projectives commutent dans $\underline{Ens}$ avec les $\underline{I}$ - limites inductives pour qu'elles existent dans $Mod(\underline{S})$ et s'y calculent point par point : ainsi, les catégories $\alpha$- localisables sont à limites projectives connexes et celles-ci s'y calculent point par point. D'ailleurs ce sont justement ces classes de catégories $\underline{Q}$ et de catégories $\underline{J}$ qui classifient, en un sens certain, les théories du premier ordre considérées : c'est ce sens qu'il faut donner aux travaux de Gabriel-Ulmer et de Diers.

Le but du présent travail, qu'il faut donc comprendre comme une première étape dans la classification des théories du 1$^{er}$ ordre, consiste à caractériser, lorsqu'une catégorie petite $\underline{P}$ est donnée, la classe $\underrightarrow{COMM}(\underline{P})$ de toutes les petites catégories $\underline{I}$ telles que les $\underline{I}$ - limites inductives commutent aux $\underline{P}$ - limites projectives dans $\underline{Ens}$. Une telle caractérisation systématique une fois menée permet, a contrario, lorsque la petite catégorie $\underline{I}$ est donnée, de déterminer la classe $\underleftarrow{COMM}(\underline{I})$ des petites catécories $\underline{P}$ telles que les $\underline{P}$ - limites projectives commutent aux $\underline{I}$ - limites inductives dans $\underline{Ens}$.

Le § 0 est destiné à fixer quelques notations et quelques définitions techniques qui permettent une lecture plus synthétique de la suite. Au § 1 nous établissons que, pour calculer en toute généralité $\underrightarrow{COMM}(\underline{P})$, il suffit de savoir le faire d'une part lorsque $\underline{P}$ est connexe et d'autre part lorsque $\underline{P}$ est discrète. Au § 2 nous calculons donc $\underrightarrow{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est connexe, et au § 3 nous calculons $\underrightarrow{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est discrète. Au § 4 nous fournissons quelques compléments et quelques exemples de calculs explicites de $\underrightarrow{COMM}(\underline{P})$.

## 0. Notations et définitions préliminaires.

0.0. Si $\underline{P}$ et $\underline{I}$ sont deux petites catégories et si $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ est un foncteur, nous notons :

$$c_F : \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) \longrightarrow \varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$$

l'application canonique de comparaison.
Lorsque $\underline{P}$ est donnée, on note :

- $\overrightarrow{\mathrm{Inj}}\ \underline{P}$ la classe des petites catégories $\underline{I}$ telles que pour tout foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$, l'application de comparaison $c_F$ est injective,

- $\overrightarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{P}$ la classe des petites catégories $\underline{I}$ telles que, pour tout foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$, l'application de comparaison $c_F$ est surjective.

Alors, $\overrightarrow{\mathrm{COMM}}\ (\underline{P}) = \overrightarrow{\mathrm{Inj}}\ \underline{P} \cap \overrightarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{P}$. On utilise des notations analogues $\overleftarrow{\mathrm{Inj}}\ \underline{I}$, $\overleftarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{I}$ et $\overleftarrow{\mathrm{COMM}}\ (\underline{I})$ pour le cas dual (où c'est $\underline{I}$ qui est donnée et c'est la classe des $\underline{P}$ que l'on veut déterminer).

0.1. Soit $\underline{P}$ une catégorie petite. On désigne par $\underline{P} / -$ le foncteur de $\underline{P}$ dans $\underline{Ens}$ défini par :

$$(\underline{P} / -)(P) = \underline{P} / P = \coprod_{P' \in \mathrm{ob}\underline{P}} \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(P',P).$$

0.2. Soit $\underline{P}$ une petite catégorie. On dit que $\underline{P}$ est dégénérée si, et seulement si, il existe un cône projectif $(P_o \xrightarrow{p_P} P)_{P \in \underline{P}}$ de base $\mathrm{Id}_{\underline{P}}: \underline{P} \longrightarrow \underline{P}$ dans $\underline{P}$, i.e. $\varprojlim_{P \in \mathrm{ob}\underline{P}} \underline{P} / P \neq \emptyset$.

0.3. Soit $\underline{P}$ une catégorie (petite). On note $\S\ \underline{P}$ sa catégorie subdivision :

- ses objets sont, d'une part les objets P de $\underline{P}$ et d'autre part les flèches $p: P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$,

- ses flèches sont, d'une part les $(d,p)$: $P \longrightarrow p$ et d'autre part les $(c,p)$: $P' \longrightarrow p$ , lorsque $p$: $P \longrightarrow P'$ est une flèche de $\underline{P}$.

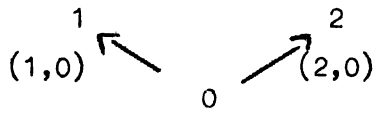
Si $G$: $\underline{P}_1 \longrightarrow \underline{P}_2$ est un foncteur, on en déduit évidemment un foncteur $\S\, G$: $\S\, \underline{P}_1 \longrightarrow \S\, \underline{P}_2$ .

0.4. Soit $\underline{P}$ une catégorie(petite) . On note $\underline{P}^{\wedge}$ la catégorie telle que:

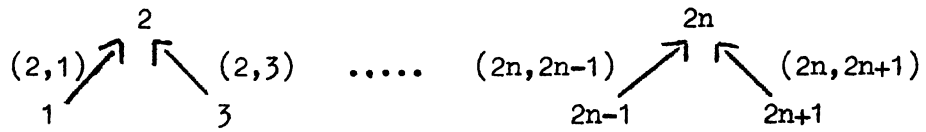
- ses objets sont d'une part les objets P de $\underline{P}$ et d'autre part deux autres objets 1 et 2 ,
- ses flèches sont d'une part les $(P,1)$: $1 \longrightarrow P$ et d'autre part les $(P,2)$: $2 \longrightarrow P$ , lorsque P est objet de $\underline{P}$ .

Evidemment, $\underline{P}^{\wedge} = (ob\underline{P})^{\wedge}$ et c'est une catégorie subdivision d'une catégorie convenable.

0.5. On note $\underline{V}$ la catégorie représentée par :




0.6. Pour tout entier naturel n (nul ou non), on note $\underline{Z}_n$ la catégorie représentée par :




0.7. Soit $\underline{C}$ une catégorie (petite) et n un entier naturel (nul ou non). On appelle zigzag (d'ordre n) de $\underline{C}$ tout foncteur $D$: $\underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C}$ . On dit alors que $D(1)$ en est l'origine et $D(2n+1)$ l'extrémité .

0.8. Soit $\underline{C}$ une catégorie(petite) , C un objet de $\underline{C}$ et $\Delta$ : $\underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C} / C$ un zigzag de $\underline{C} / C$ . On en déduit un zigzag

$$D: \underline{Z}_n \xrightarrow[\Delta]{} \underline{C} \;/\; C \xrightarrow[\text{canonique}]{} \underline{C}$$

appelé <u>base de</u> $\Delta$ .

Alors, on dira que $\Delta$ est un zigzag <u>clos dans</u> $\underline{C}$ <u>de base</u> D <u>et de sommet</u> C (il s'identifie aussi à un cône inductif de $\underline{C}$ , de base D et de sommet C).

0.9. Soit $\underline{C}$ une catégorie(petite) et soient $D: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C}$ et $D': \underline{Z}_{n'} \longrightarrow \underline{C}$ deux zigzags de $\underline{C}$. Si $D(2n+1) = D'(1)$ , on en déduit un zigzag <u>juxtaposé</u> :

$$D' \perp D: \underline{Z}_{n+n'} \longrightarrow \underline{C}$$

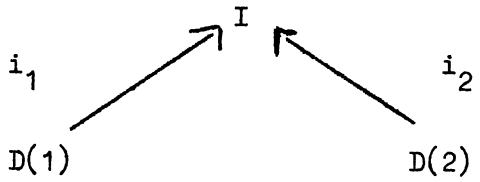
d'origine l'origine de D et d'extrémité l'extrémité de D'.

0.10. Soit $\underline{C}$ une catégorie (petite) et $\Delta : \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C} \;/\; C$ un zigzag clos dans $\underline{C}$ de sommet C et $c: C \longrightarrow C'$ une flèche de $\underline{C}$. On en déduit un zigzag <u>composé de</u> c <u>par</u> $\Delta$ :

$$c.\Delta : \underline{Z}_n \xrightarrow[\Delta]{} \underline{C} \;/\; C \xrightarrow[\text{composition par } c]{} \underline{C} \;/\; C'$$

0.11. Soit $\underline{P}$ et $\underline{I}$ deux catégories petites. Nous dirons que $\underline{I}$ <u>est</u> $\underline{P}$-<u>bornée</u> si, et seulement si :

- pour tout foncteur $D: \underline{P}^{\wedge} \longrightarrow \underline{I}$ , il existe un diagramme de $\underline{I}$ :




tel que , pour tout objet P de $\underline{P}$ , il existe un diagramme commutatif de $\underline{I}$ , dans lequel les objets $P_1$ , $P_2$ , $P_3$ ,..., $P_{2n_P+1}$ sont tels qu'il existe toujours au moins une flèche de chacun d'entre eux vers P :

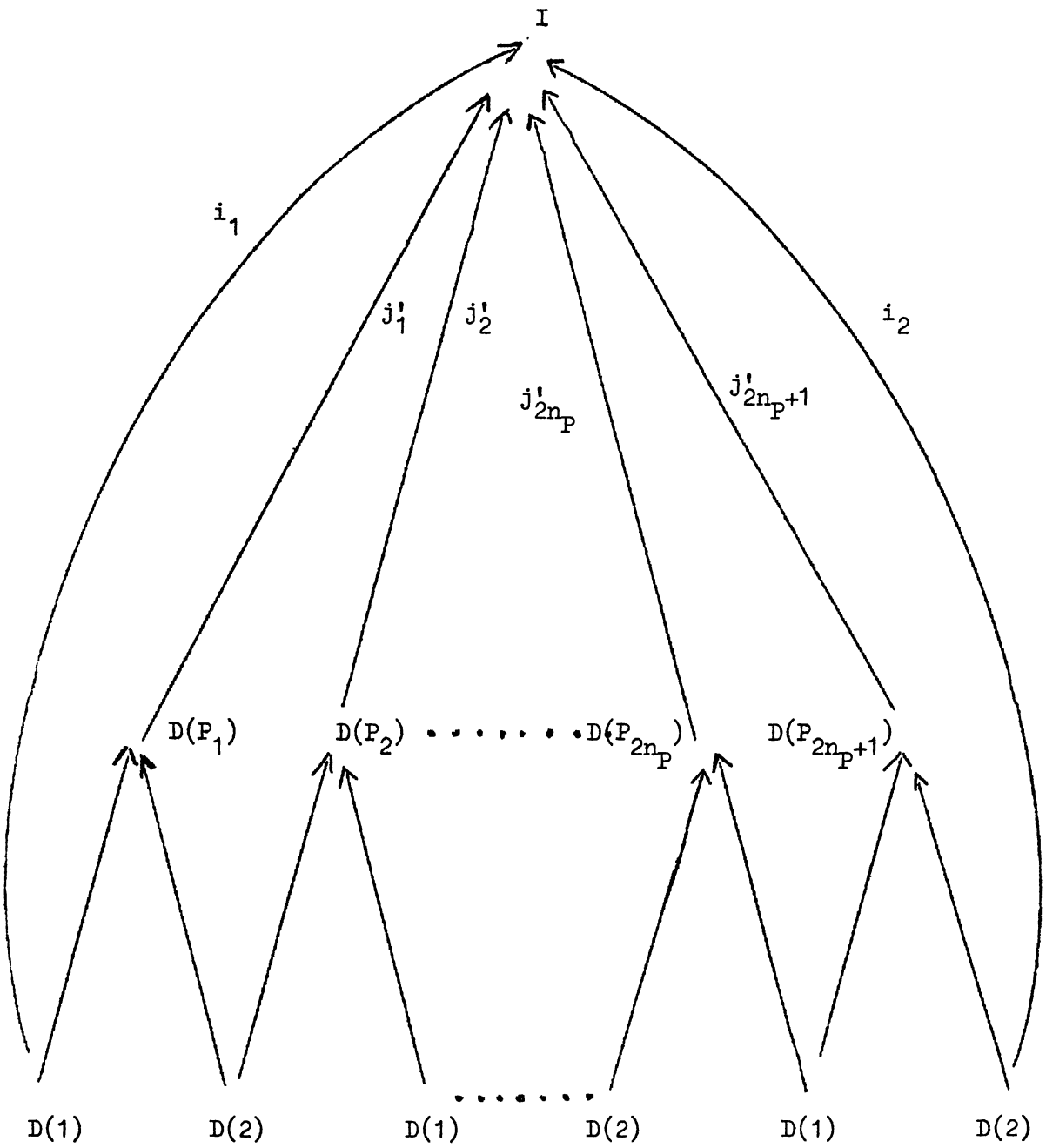



Diagramme 1

0.12. Soient $\underline{P}$ et $\underline{I}$ deux catégories petites. Nous dirons que $\underline{I}$ est $Z\underline{P}$ - bornée si, et seulement si :

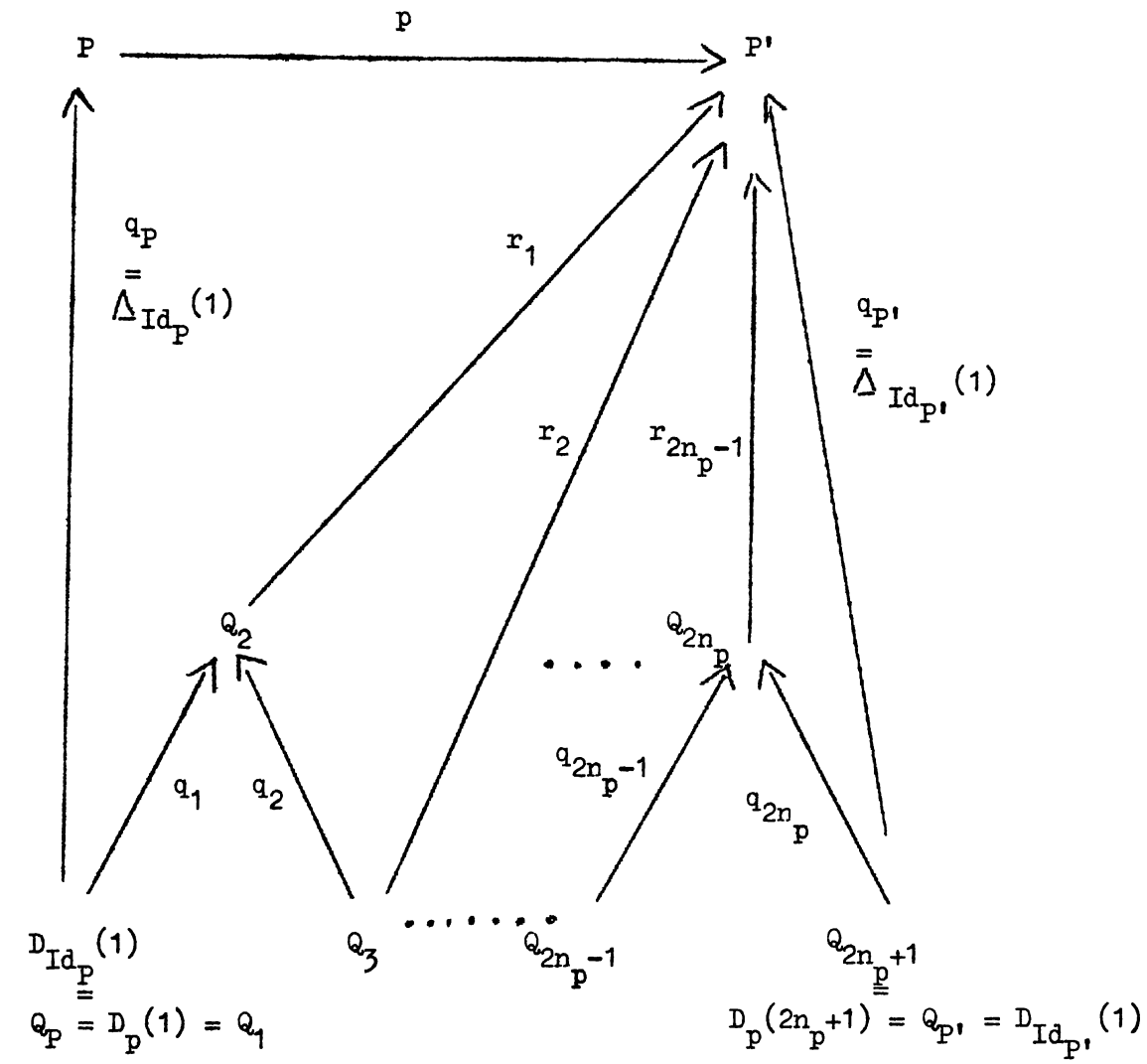
- pour tout foncteur $D: \S\,\underline{P} \longrightarrow \underline{I}$, il existe une famille $(\Delta_p)_{p \in Fl\underline{P}}$ de zigzags (d'ordres $n_p$) clos dans $\underline{P}$ (dont la famille des bases est notée $(D_p)_{p \in Fl\underline{P}}$) et une famille $(\Delta'_p)_{p \in Fl\underline{P}}$ de zigzags clos dans $\underline{I}$ (dont la famille des bases est notée $(D'_p)_{p \in Fl\underline{P}}$) telles que :

+ pour tout objet P de $\underline{P}$, le zigzag $\Delta_{Id_P}$ est trivial
+ pour toute flèche $p: P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}'$, l'origine (resp. l'extrémité) de $\Delta_p$ est celle de $p.\Delta_{Id_P}$ (resp. $\Delta_{Id_{P'}}$)
+ $\Delta_{p'.p} = \Delta_{p'} \perp \Delta_p$, dès que $p'.p$ est défini dans $\underline{P}$,
+ pour toute flèche p de $\underline{P}$ on a :

$$D'_p: \underline{Z}_{2n_p} \overset{\sim}{=} \S\,\underline{Z}_{n_p} \xrightarrow[\S\,D_p]{} \S\,\underline{P} \xrightarrow[D]{} \underline{I}$$

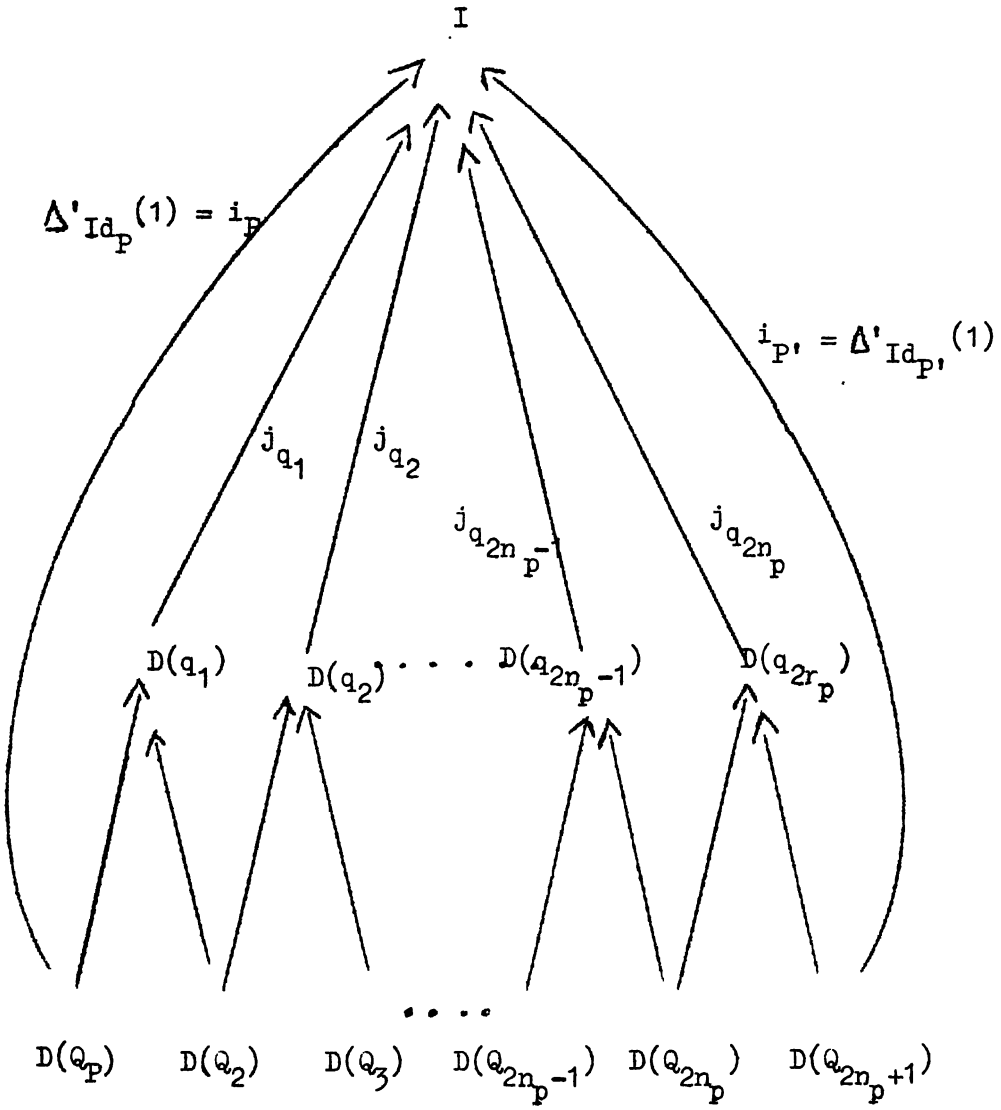
+ pour tout objet P de $\underline{P}$, le zigzag $\Delta'_{Id_P}$ est d'ordre 1,
+ $\Delta'_{p'}$ et $\Delta'_p$ sont juxtaposables (i.e. $\Delta'_{p'} \perp \Delta'_p$ est défini) dès que $p'.p$ est défini dans $\underline{P}$.

Evidemment, les diverses conditions précédentes signifient que l'on dispose, pour toute flèche $p: P \longrightarrow P'$ dans $\underline{P}$, du diagramme 2, commutant dans $\underline{P}$, et du diagramme 3, commutant dans $\underline{I}$, ci-après, (voir page suivante).




(où $Q_k = D_p(k)$ , $r_k = \Delta_p(k+1)$ , pour tout $1 \leqslant k \leqslant 2n_p$ ,
et $q_{2k'} = D_p(2k'+1 \longrightarrow 2k')$ , $q_{2k'-1} = D_p(2k'-1 \longrightarrow 2k')$,
pour tout $1 \leqslant k' \leqslant n_p$) .

Diagramme 2




(où l'on a posé $j_{q_k} = \Delta'(q_k)$ , pour tout $1 \leqslant k \leqslant 2n_p$ , et où l'on a identifié § $\underline{Z}_{n_p}$ et $\underline{Z}_{2n_p}$ qui sont isomorphes) .

Diagramme 3

0.13. Si $\underline{C}$ et $\underline{I}$ sont deux catégories (petites), on dit que $\underline{I}$ est $\underline{C}$-filtrante si, et seulement si, à tout foncteur $D: \underline{C} \longrightarrow \underline{I}$ on peut associer un cône inductif $(i_C: D(C) \longrightarrow I)_{C \in \underline{C}}$ de base D dans $\underline{I}$ . Dans la suite, on se bornera aux cas où $\underline{C}$ est ou bien discrète ou bien égale à $\underline{V}$ .

0.14. Soit $\underline{P}$ et $\underline{I}$ deux catégories petites. On dit que $\underline{I}$ est $Z\underline{P}$ - filtrante si, et seulement si :

- pour tout couple d'objets I et I' de $\underline{I}$ et pour toute famille $(D_P: \underline{Z}_{n_P} \longrightarrow \underline{I})_{P \in ob\underline{P}}$ de zigzags de $\underline{I}$ d'origine I et d'extrémité I', il existe un zigzag $D: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{I}$ d'origine I et d'extrémité I' tel que, pour tout objet P de $\underline{P}$, les images respectives de $Id_I$ et $Id_{I'}$ par les coprojections dans $\varinjlim_{(X,Y) \in \underline{Z}^{op}_{n_P} \times \underline{Z}_n} \mathrm{Hom}_{\underline{I}} (D_P^{op}(X) , D(Y))$ sont égales.

Ceci signifie encore que l'on dispose d'un zigzag $D'_P: \underline{Z}_{m_P} \longrightarrow \underline{Z}^{op}_{n_P} \times \underline{Z}_n$ et d'un diagramme commutatif de $\underline{I}$ :

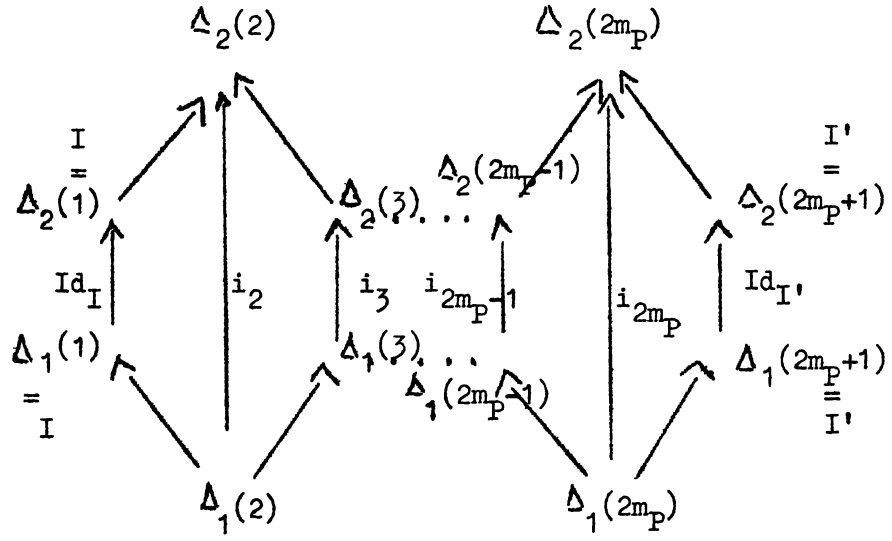



Diagramme 4

où $\Delta_1 : \underline{Z}_{m_P} \xrightarrow[D'_P]{} \underline{Z}^{op}_{n_P} \times \underline{Z}_n \xrightarrow[proj]{} \underline{Z}^{op}_{n_P} \xrightarrow[D_P]{} \underline{I}^{op}$

et $\Delta_2 : \underline{Z}_{m_P} \xrightarrow[D'_P]{} \underline{Z}^{op}_{n_P} \times \underline{Z}_n \xrightarrow[proj]{} \underline{Z}_n \xrightarrow[D]{} \underline{I}$

## 1. Résultats préliminaires.

On vérifie facilement que :

Proposition 1. Si $\underline{P}' \longrightarrow \underline{P}$ est un foncteur initial entre catégories petites, alors $\overrightarrow{COMM}(\underline{P}') \subset \overrightarrow{COMM}(\underline{P})$.

Signalons qu'en général cette inclusion est stricte, mais qu'une condition suffisante pour que $\overrightarrow{COMM}(\underline{P}') = \overrightarrow{COMM}(\underline{P})$ est que $\underline{P}' \longrightarrow \underline{P}$ soit le foncteur injection canonique dans $\underline{P}$ d'une sous-catégorie pleine $\underline{P}'$ de $\underline{P}$, car alors tout foncteur de $\underline{P}' \times \underline{I}$ vers $\underline{Ens}$ admet au moins un prolongement à $\underline{P} \times \underline{I}$.

Montrons maintenant la

Proposition 2. Soit $\underline{P}$ une catégorie petite. Pour qu'une catégorie petite $\underline{I}$ appartienne à $\overrightarrow{Surj}\,\underline{P}$, il est nécessaire qu'elle soit $\underline{P}^{op}$ - filtrante.

Preuve. Supposons que $D: \underline{P}^{op} \longrightarrow \underline{I}$ soit un foncteur et considérons le foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ égal à $\underline{Hom}_{\underline{I}}(D(-), -)$. Pour tout objet P de $\underline{P}$, l'ensemble $\varprojlim_{I \overrightarrow{\in} \underline{I}} \underline{Hom}_{\underline{I}}(D(P), I)$ n'a qu'un élément dont un représentant est $1_{DP}$. Il en résulte que $\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} \underline{Hom}_{\underline{I}}(DP, I)$ n'a aussi qu'un élément, de même que $\varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} \underline{Hom}_{\underline{I}}(DP, I)$ puisque $c_F$ est surjective. En conséquence, il existe au moins un objet $I_o$ de $\underline{I}$ et un élément de

$\varprojlim_{P \in \underline{P}} \mathrm{Hom}_{\underline{I}}(DP , I_o)$ qui représente cet unique élément. C'est exactement un cône inductif $(DP \longrightarrow I_o)_{P \in \underline{P}^{op}}$ de base G dans $\underline{I}$. //

Prouvons enfin que :

Proposition 3. Si $\underline{P} = \coprod_{C \in \underline{C}} \underline{P}_C$ est une petite catégorie présentée comme somme dans Cat de ses composantes connexes $\underline{P}_C$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{I}$ est une petite catégorie appartenant à $\overrightarrow{\mathrm{COMM}}(\underline{C})$ (en identifiant l'ensemble $\underline{C}$ des composantes connexes de $\underline{P}$ à une catégorie discrète ) et à $\overrightarrow{\mathrm{COMM}}(\underline{P}_C)$ pour tout objet C de $\underline{C}$.

(ii) $\underline{I}$ est une petite catégorie appartenant à $\overrightarrow{\mathrm{COMM}}(\underline{P})$.

Preuve . a) Montrons que (i) implique (ii).
Si $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ est un foncteur et si, pour tout objet C de $\underline{C}$, on désigne par $F_C : \underline{P}_C \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ sa restriction, on a:

$$\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I) \simeq \prod_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F_C(P,I)$$

$$\simeq \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \prod_{C \in \underline{C}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F_C(P,I)$$

(les $\varprojlim$ commutant dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ ),

$$\simeq \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \varinjlim_{I \in \underline{I}} \prod_{C \in \underline{C}} F_C(P,I)$$

($\underline{I}$ appartenant à $\overrightarrow{\mathrm{COMM}}(\underline{C})$) ,

$$\simeq \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \prod_{C \in \underline{C}} F_C(P,I)$$

( $\underline{I}$ appartenant à $\overrightarrow{\mathrm{COMM}}(\underline{P}_C)$ pour tout objet C de $\underline{C}$ ),

$$\simeq \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) .$$

b) Montrons maintenant que (ii) implique (i).

Pour ce faire, notons $Q: \underline{P} \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur composante connexe, i.e. tel que $Q(\underline{P}_C) = \{C\}$.

- Si $F': \underline{C} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ est un foncteur, on lui associe le foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \xrightarrow{Q \times 1_{\underline{I}}} \underline{C} \times \underline{I} \xrightarrow{F'} \underline{Ens}$. Alors on a :

$$\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) \simeq \prod_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} F(P,I)$$

$$\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} F'(QP,I)$$

$$\simeq \prod_{C \in \underline{C}} F'(C,I)$$

(car Q est constant sur $\underline{P}_C$, et $\underline{P}_C$ est connexe pour tout objet C de $\underline{C}$),

$$\simeq \varprojlim_{C \in \underline{C}} F'(C,I),$$

$$\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I) \simeq \prod_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F_C(P,I)$$

$$\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F'(QP,I)$$

$$\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F'(C,I)$$

(car Q est constant sur $\underline{P}_C$, et $\underline{P}_C$ est connexe pour tout objet C de $\underline{C}$).

$$\simeq \varprojlim_{C \in \underline{C}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F'(C,I).$$

On en déduit que le diagramme ci-après est commutatif dans $\underline{Ens}$ :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{I\in \underline{I}} \varprojlim_{P\in \underline{P}} F(P,I) & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_{I\in \underline{I}} \varinjlim_{C\in \underline{C}} F'(C,I) \\ \downarrow c_F & & \downarrow c_{F'} \\ \varprojlim_{P\in \underline{P}} \varinjlim_{I\in \underline{I}} F(P,I) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_{C\in \underline{C}} \varinjlim_{I\in \underline{I}} F'(C,I) \end{array}$$

Par conséquent, si $\underline{I} \in \underrightarrow{COMM}\,(\,\underline{P}\,)$, on peut affirmer que $c_F$ est un iso et donc $c_{F'}$ aussi. D'où l'on peut conclure que $\underline{I}$ appartient aussi à $\underrightarrow{COMM}(\,\underline{C}\,)$.

- Si $\underline{C}$ n'a qu'un objet C, il est clair que $\underline{I}$ est un élément de $\underrightarrow{COMM}\,(\,\underline{P}_C\,)$ si c'est un élément de $\underrightarrow{COMM}\,(\,\underline{P}\,)$ (car $\underline{P} = \underline{P}_C$).

- Supposons donc que $\underline{C}$ ait au moins deux objets distincts $C_1$ et $C_2$. Si $I_1$ et $I_2$ sont deux objets distincts de $\underline{I}$, soit $D: \underline{P}^{op} \longrightarrow \underline{I}$ le foncteur tel que $D(\underline{P}_{C_1}) = \{I_1\}$ et $D(\underline{P}_C) = \{I_2\}$ pour tout objet $C \neq C_1$. D'après la proposition 2, puisque $\underline{I}$ est élément de $\underrightarrow{COMM}\,(\,\underline{P}\,)$, donc de $\underrightarrow{Surj}\,\underline{P}$, il existe un cône inductif de base D dans $\underline{I}$. Par conséquent, $I_1$ et $I_2$ sont connectés et $\underline{I}$ est donc connexe.

- Si $\underline{C}$ a au moins deux objets, si C est l'un d'entre eux, si $\underline{I}$ est élément de $\underrightarrow{COMM}(\,\underline{P}\,)$ et si $F_C: \underline{P}_C \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ est un foncteur, notons $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ le foncteur tel que:

  - la restriction de F à $\underline{P}_C \times \underline{I}$ est $F_C$
  - la restriction de F à $\underline{P}_{C'} \times \underline{I}$ est, pour tout objet $C' \neq C$, le foncteur constant sur 1.

On a alors :

$$\varprojlim_{P\in \underline{P}} F(P,I) \xrightarrow{\sim} \prod_{C'\in \underline{C}} \varprojlim_{P\in \underline{P}_{C'}} F_{C'}(P,I)$$

$$\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{P\in \underline{P}_C} F_C(P,I)\ .$$

$$- \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F_C(P,I) \quad , \text{ si } P \in \underline{P}_C \ ,$$

$$- \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I) \xrightarrow{\sim} 1 \quad , \text{ si } P \in \underline{P}_{C'} \text{ et } C' \neq C \ ,$$

car $\underline{I}$ est connexe et $F_{C'}$ est constant sur 1.

On en déduit que le diagramme ci-dessous commute dans $\underline{Ens}$ :

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} F_C(P,I) \\
\Big\downarrow c_F & & \Big\downarrow c_F \\
\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I) & & \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F_C(P,I) \\
\Big\downarrow \wr & & \Big\downarrow \wr \\
\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{C' \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_{C'}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F_{C'}(P,I)
\end{array}$$

et donc que $c_{F_C}$ est un iso car $c_F$ en est un (puisque $\underline{I}$ est élément de $\underrightarrow{COMM}\,(\underline{P})$). D'où l'on déduit que $\underline{I} \in \underrightarrow{COMM}\,(\underline{P}_C)$. //

2. Calcul de $\underrightarrow{COMM}\,(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est connexe.

2.1. Calcul de $\underrightarrow{Inj}\,\underline{P}$, $\underrightarrow{Surj}\,\underline{P}$ et $\underrightarrow{COMM}\,(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est dégénérée (et donc, en particulier connexe). Nous avons la

Proposition 4. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite et dégénérée, alors $\underrightarrow{Inj}\,\underline{P} = \underrightarrow{Surj}\,\underline{P} = \underrightarrow{COMM}\,\underline{P} = ob(\underline{Cat})$.

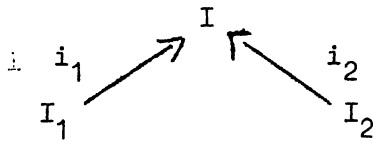
Preuve. Par hypothèse, il existe un cône projectif $(p_P : P_o \longrightarrow P)_{P \in \underline{P}}$

de base $Id_{\underline{P}}$ dans $\underline{P}$ . On a donc, en particulier, $p_{P_o} \cdot p_{P_o} = p_{P_o}$ , d'où l'on déduit que $P_o \xrightarrow[p_{P_o}]{} P_o$ définit une sous-catégorie $\underline{P}'$ de $\underline{P}$ , initiale dans $\underline{P}$ . Comme on prouve facilement que $\overrightarrow{COMM}(\underline{P}') = ob(\underline{Cat})$ , on conclut facilement grâce à la proposition 1 . //

2.2. Calcul de $\overrightarrow{Inj}\,\underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est non dégénérée et connexe. Montrons la

Proposition 5. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, non dégénérée et connexe, pour que la catégorie petite $\underline{I}$ appartienne à $\overrightarrow{Inj}\,\underline{P}$ il faut et il suffit que $\underline{I}$ soit $\underline{V}$ - filtrante et $\underline{P}$ - bornée.

Preuve de la nécessité. Prouvons tout d'abord qu'il est nécessaire que $\underline{I}$ soit $\underline{V}$ - filtrante. Pour ce faire, supposons que le diagramme




n'admette pas de clôture dans $\underline{I}$ . Alors, pour tout objet J de $\underline{I}$ on dispose de la réunion disjointe

$$\mathrm{Hom}_{\underline{I}}(I, J) = H_1^J \amalg H^J \amalg H_2^J ,$$

où l'on a posé, pour s = 1 ou 2 :

$$H_s^J = \left\{ j : I \longrightarrow J \;\middle|\; \text{il existe } j_s : I_s \longrightarrow J \text{ tel que } j_s \cdot i_s = j \right\}$$

Ceci permet de définir un foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ en posant:

$$F(P,J) = H_1^J \amalg (H^J \times \underline{P}/P) \amalg H_2^J ,$$

avec $F(p,j)(p',j') = \begin{cases} j.j' & \text{si } j.j' \text{ se décompose par } i_1 \text{ ou } i_2, \\ (p.p', j.j') & \text{autrement.} \end{cases}$

Comme $\underline{P}$ est non dégénérée, on établit facilement que, pour tout objet J de $\underline{I}$, on a :

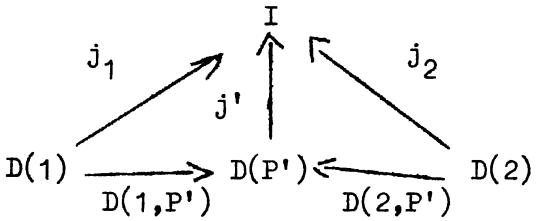
$$\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, J) \xrightarrow{\sim} H_1^J \amalg H_2^J ,$$

Par suite, $\varinjlim_{J \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, J)$ a exactement deux éléments distincts, images de $i_1$ et $i_2$ par coprojection. D'autre part, pour tout objet P de $\underline{P}$, l'ensemble $\varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$ n'a qu'un seul élément, coprojection de $Id_I$. Par suite, l'ensemble $\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$ n'a lui aussi qu'un élément, puisque $\underline{P}$ est connexe. Il en résulte que $c_F$ ne peut pas être injective.

Montrons maintenant qu'il est nécessaire que $\underline{I}$ soit $\underline{P}$ - bornée. Pour ce faire, si $D: \underline{P} \longrightarrow \underline{I}$ est un foncteur, nous lui associons le foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ défini par :

$$F(P, I) = (\mathrm{Hom}_{\underline{I}}(D(1), I) \amalg \mathrm{Hom}_{\underline{I}}(D(2), I)) / r_P$$

en désignant par $r_P$ la relation d'équivalence engendrée par la relation identifiant $j_1: D(1) \longrightarrow I$ et $j_2: D(2) \longrightarrow I$, dès lors qu'il existe un diagramme commutatif dans $\underline{I}$ tel que:




où $\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(P', P) \neq \emptyset$ dans $\underline{P}$. On note alors $\bar{j}^P$ la classe de j modulo $r_P$ et $\bar{\bar{j}}^P$ l'image de $\bar{j}^P$ par la coprojection suivante:

$$F(P, I) \longrightarrow \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P, I)$$

Pour chaque objet P de $\underline{P}$ , on a :

$$\overline{\overline{Id}}^{P}_{D(1)} = D\overline{\overline{(1,P)}}^{P} = D\overline{\overline{(2,P)}}^{P} = \overline{\overline{Id}}^{P}_{D(2)}$$

dans $\varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$ , puisque $D\overline{(1,P)}^{P} = D\overline{(2,P)}^{P}$ dans $F(DP,P)$.

On en déduit que :

$$(\overline{\overline{Id}}^{P}_{D(1)})_{P \in ob\underline{P}} = (\overline{\overline{Id}}^{P}_{D(2)})_{P \in ob\underline{P}}$$

dans $\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$. D'où, puisque $c_F$ est injective, résulte que l'élément $(\overline{Id}^{P}_{D(1)})_{P \in ob\underline{P}}$ de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,D(1))$ et l'élément $(\overline{Id}^{P}_{D(2)})_{P \in ob\underline{P}}$ de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,D(2))$ ont des images égales par les deux coprojections :

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,D(1)) & & & & \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,D(2)) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) & & \end{array}$$

Comme $\underline{I}$ est nécessairement $\underline{V}$ - filtrante (d'après ce qui précède), il existe un diagramme de $\underline{I}$ :

$$\begin{array}{ccccc} D(1) & & & & D(2) \\ & \searrow^{i_1} & & \swarrow_{i_2} & \\ & & I & & \end{array}$$

tel qu'on ait l'égalité suivante :

$$\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,i_1)\ ((\overline{Id}^P_{D(1)})_{P \in ob\underline{P}})$$

$$= \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,i_2)\ ((\overline{Id}^P_{D(2)})_{P \in ob\underline{P}})$$

Par conséquent, $i_1$ et $i_2$ sont équivalents modulo $r_P$, pour tout objet P de $\underline{P}$, ce qui exprime exactement que $\underline{I}$ est $\underline{P}$ - bornée.

Preuve de la suffisance. Supposons que $\underline{I}$ soit $\underline{V}$ - filtrante et $\underline{P}$ - bornée, et soit $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ un foncteur tel que:

- $(x^1_P)_{P \in ob\underline{P}}$ est élément de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I_1)$, d'image $x_1$

  par la coprojection $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I_1) \longrightarrow \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I)$

- $(x^2_P)_{P \in ob\underline{P}}$ est élément de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I_2)$, d'image $x_2$

  par la coprojection $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I_2) \longrightarrow \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I)$

Supposons $c_F(x_1) = c_F(x_2)$. Comme $\underline{I}$ est $\underline{V}$ - filtrante, pour tout objet P de $\underline{P}$, il existe un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} I_1 & & & & I_2 \\ & \searrow^{i^1_P} & & \swarrow_{i^2_P} & \\ & & I_P & & \end{array}$$

dans $\underline{I}$ tel que $F(P,i^1_P)(x^1_P) = F(P,i^2_P)(x^2_P)$.

On peut donc définir un foncteur $D: \underline{P}^{\wedge} \longrightarrow \underline{I}$ en posant : $D(P,s) = i^s_P$, si $s = 1, 2$. Comme $\underline{I}$ est $\underline{P}$ - bornée, on en déduit l'existence d'un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D(1) = I_1 & & & & I_2 = D(2) \\ & \searrow^{i_1} & & \swarrow_{i_2} & \\ & & I & & \end{array}$$

dans $\underline{I}$ ainsi que, pour tout objet P de $\underline{P}$, l'existence d'un diagramme commutatif, dans $\underline{I}$, analogue au diagramme 1 de 0.11., dont nous reprenons les notations. Pour tout objet P de $\underline{P}$, comme $\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(P_k,P) \neq \emptyset \quad \forall\ 1 \leqslant k \leqslant 2n_P+1$, on dispose de flèches $p_l : P_l \longrightarrow P$, où $l = 1,2,\ldots,2n_P+1$, dans $\underline{P}$.

Si l'on pose, pour $s = 1,2$, $y_P^s = F(P,i_s)(x_P^s)$, nous avons donc:

$$\begin{aligned} y_P^1 &= F(p_1,i_1)(x_{P_1}^1) \\ &= F(p_1,j_1'.i_{P_1}^1)(x_{P_1}^1) \\ &= F(p_1,j_1'.i_{P_1}^2)(x_{P_1}^2) \\ &= F(p_2,j_2'.i_{P_2}^2)(x_{P_2}^2) \\ &= \ldots \\ &= F(p_{2n_P+1},i_2)(x_{P_{2n_P+1}}^2) \\ &= y_P^2 . \end{aligned}$$

En conséquence, $x^1 = x^2$ et $c_F$ est injective . //

2.3. Calcul de $\underrightarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est non dégénérée et connexe.

Montrons la

Proposition 6. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, non dégénérée et connexe, pour que la catégorie petite $\underline{I}$ appartienne à $\underrightarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{P}$ il faut et il suffit qu'elle soit $\underline{V}$ - filtrante et $Z\underline{P}$ - bornée.

Preuve de la nécessité. Montrons d'abord que $\underline{I}$ est nécessairement $\underline{V}$ - filtrante . Pour ce faire, supposons que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & \swarrow_{i_1} & & \searrow^{i_2} & \\ I_1 & & & & I_2 \end{array}$$

n'admette pas de clôture dans $\underline{I}$ . On désigne donc (comme dans la première partie de la preuve de la nécessité de la condition de la proposition 4) de la somme disjointe :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{I}}\,(\,I\,,\,J\,) \;=\; H_1^J \amalg H^J \amalg H_2^J$$

Ceci permet de définir un foncteur $F:\underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ en posant:

$$-\;\; F(P,J) \;=\; (H_1^J \times \{1\} \times \underline{P}/P) \amalg (H^J \times \underline{P}/P \times \underline{P}/P) \amalg (H_2^J \times \{2\} \times \underline{P}/P)$$

$$-\;\; F(p,j)(i,p_1,p_2) \;=\; \begin{cases} (j.i,1,p.p_2) \text{ s'il existe } j' \text{ tel que } j.i = j'.i_1 \\ (j.i,p.p_2) \quad \text{si} \quad j.i \in H^J \\ (j.i,2,p.p_1) \text{ s'il existe } j' \text{ tel que } j.i = j'.i_2. \end{cases}$$

Alors, il est clair que, pour tout objet P de $\underline{P}$ , tout couple d'éléments$(p_1,p_2)$ de $\underline{P}/P$ , tout objet J de $\underline{I}$ et toute flèche $j: I \longrightarrow J$, les triplets $(j,p_1,p_2)$ , $(i_1,1,p_2)$ et $(Id_I,Id_P,p_2)$ ont même image (par les coprojections) dans $\varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P,J)$ ; de même que les triplets $(j,p_1,p_2)$ , $(Id_I,p_1,p_2)$ , $(i_2,2,p_1)$ et $(Id_I,p_1,Id_P)$ . On en déduit que $\varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P,J)$ n'a qu'un seul élément , image par coprojection de $(Id_I,Id_P,Id_P)$ . Comme $\underline{P}$ est connexe, l'ensemble $\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P,J)$ n'a donc aussi qu'un seul élément.

Par contre, l'ensemble $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,J)$ est vide , en particulier parce que $\underline{P}$ est non dégénérée. D'où il résulte que l'ensemble $\varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,J) = \emptyset$ et $c_F$ ne pourrait être surjective.

Montrons maintenant que $\underline{I}$ est nécessairement $Z\underline{P}$ - bornée. Considérons le foncteur $E : \underline{P} \times \S\, \underline{P} \longrightarrow \underline{Ens}$ tel que, pour

toute flèche $p : P \longrightarrow P'$ et tout objet $Q$ de $\underline{P}$ :

- $E(Q,P) = E(Q,p) = \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(P,Q)$ ,
- $E(Q,(d,p)) = \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(\mathrm{Id}_P,Q)$
- $E(Q,(c,p)) = \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(p,Q)$ .

On vérifie facilement que l'ensemble $\varinjlim_{X \in \S \underline{P}} E(Q,X)$ n'a qu'un élément, représenté par $\mathrm{Id}_Q$. Si $D: \S \underline{P} \longrightarrow \underline{I}$ est un foncteur, nous lui associons le foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ en posant :

- pour tout objet $Q$ de $\underline{P}$ , $F(Q,-): \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ est l'extension de Kan inductive de $E(Q,-): \S \underline{P} \longrightarrow \underline{Ens}$ le long de $D$ . Il en résulte que l'ensemble $\varinjlim_{I \in \underline{I}} F(Q,I) \overset{\sim}{\longrightarrow} \varinjlim_{X \in \S \underline{P}} E(Q,X)$ n'a qu'un élément et, par suite, l'ensemble $\varprojlim_{Q \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(Q,I)$ aussi puisque $\underline{P}$ est connexe. Comme $c_F$ est surjective, il existe donc au moins un objet $I$ de $\underline{I}$ tel que l'ensemble $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I)$ soit non vide. C'est dire que l'on dispose, pour tout objet $P$ de $\underline{P}$ , d'éléments $(\overline{q_P,i_P})$ de $F(P,I)$ représentés par $q_P: Q_P \longrightarrow P$ et $i_P: D(Q_P) \longrightarrow I$ tels que, pour toute flèche $p: P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$ , on ait : $F(p,I)(\overline{q_P,i_P}) = (\overline{p.q_P,i_P}) = (\overline{q_{P'},i_{P'}})$ ,

ce qui signifie précisément que $\underline{I}$ est $Z\underline{P}$ - bornée .

Preuve de la suffisance. Soit $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ un foncteur et $(\overline{x}_P)_{P \in \mathrm{ob}\underline{P}}$ un élément de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$ . Pour chaque objet $P$ de $\underline{P}$ , l'élément $\overline{x}_P$ de $\varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$ est image par la coprojection d'un certain élément $x_P$ de $F(P,I_P)$ ; de plus, si $p : P \longrightarrow P'$ est une flèche de $\underline{P}$ , on a :

$$\overline{x}_{P'} = F(\overline{p,I_P})(x_P) \quad \text{dans} \quad \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P',I) .$$

Ceci signifie donc, puisque $\underline{I}$ est $\underline{V}$ - filtrante, qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} D(P) = I_P & & I_{P'} = D(P') \\ & {\scriptstyle D(d,p)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle D(c,p)} & \\ & I_p = D(p) & \end{array}$$

de $\underline{I}$ tel que $F(p,D(d,p))(x_P) = F(P',D(c,p))(x_{P'})$. On définit ainsi un foncteur $D: \S\, \underline{P} \longrightarrow \underline{I}$ et, puisque $\underline{I}$ est $Z\underline{P}$ - bornée, on dispose donc de deux diagrammes analogues aux diagrammes 2 et 3 de 0.12. dont nous reprnons les notations.
Posons, pour tout objet P de $\underline{P}$ : $y_P = F(q_P,i_P)(x_{Q_P})$ .

C'est un élément de $F(P,I_o)$. Bien entendu, $x_P$ et $y_P$ ont même image dans $\varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$ par la coprojection $F(P,I_o) \longrightarrow \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$.
De plus, pour toute flèche $p: P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(p,I)(y_P) &= F(p.q_P,i_P)(x_{Q_P}) \\ &= F(\, r_1.q_1, j_{q_1}.D(d,q_1))(x_{Q_P}) \\ &= F(\, r_1, j_{q_1}.D(c,q_1))(x_{Q_2}) \\ &= F(\, r_1.q_2, j_{q_2}.D(c,q_2))(x_{Q_3}) \\ &= F(\, r_3.q_3, j_{q_2}.D(c,q_2))(x_{Q_3}) \\ &\quad \vdots \\ &= F(\, q_{P'}, i_{P'})(x_{Q_{P'}}) = y_{P'} \quad . \end{aligned}$$

En conséquence, la famille $(y_P)_{P \in \mathrm{ob}\underline{P}}$ appartient à l'ensemble $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I_o)$ et son image y par la coprojection dans l'ensemble

$\varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I)$ est telle que $c_F(y) = (\bar{x}_P)_{P \in ob\underline{P}}$. Donc $c_F$ est surjective . //

2.4. Calcul de $\overrightarrow{COMM}$ ( $\underline{P}$ ) lorsque $\underline{P}$ est non dégénérée et connexe.

Comme $\overrightarrow{Inj}\ \underline{P} \cap \overrightarrow{Surj}\ \underline{P} = \overrightarrow{COMM}$ ( $\underline{P}$ ), nous avons donc, en vertu des propositions 5 et 6, la

Proposition 7. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite , non dégénérée et connexe, une petite catégorie est élément de $\overrightarrow{COMM}$ ( $\underline{P}$ ) si et seulement si elle est $\underline{V}$ - filtrante, $\underline{P}$ - bornée et $Z\underline{P}$- bornée.

## 3. Calcul de $\overrightarrow{COMM}$ ( $\underline{P}$ ) lorsque $\underline{P}$ est discrète.

3.1. Calcul de $\overrightarrow{Inj}\ \underline{P}$ , $\overrightarrow{Surj}\ \underline{P}$ , et $\overrightarrow{COMM}$ ( $\underline{P}$ ) lorsque $\underline{P} = \emptyset$. On vérifie immédiatement la

Proposition 8. Les éléments de $\overrightarrow{Inj}\ \emptyset$ sont les catégories petites connexes (éventuellement vide). Les éléments de $\overrightarrow{Surj}\ \emptyset$ sont les catégories petites et non vides. Les éléments de $\overrightarrow{COMM}$ ( $\emptyset$ ) sont les catégories petites connexes et non vides.

3.2. Calcul de $\overrightarrow{Inj}\ \underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est discrète non vide . Prouvons la

Proposition 9. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, discrète non vide, pour que la petite catégorie $\underline{I}$ appartienne à $\overrightarrow{Inj}\ \underline{P}$ il faut et il suffit qu'elle soit $Z\underline{P}$ - filtrante .

Preuve de la nécessité. Soient I et I' deux objets de $\underline{I}$ et, pour tout objet P de $\underline{P}$ , soit $D_P : \underline{Z}_{n_P} \longrightarrow \underline{I}$ un zigzag de $\underline{I}$ tel que $D_P(1) = I$ et $D_P(2n_P+1) = I'$. On définit alors un

foncteur $F : \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ en posant :

$$F(P,J) = \varinjlim_{X \in \underline{Z}_{n_P}} \mathrm{Hom}_{\underline{I}}(D_P(X),J)$$

Si $X$ est objet de $\underline{Z}_{n_P}$ et si $j : D_P(X) \longrightarrow J$ dans $\underline{I}$, nous noterons $\overline{j}^P$ son image dans $F(P,J)$ par la coprojection $\mathrm{Hom}_{\underline{I}}(D_P(X),J) \longrightarrow F(P,J)$. De même, nous noterons $\overline{\overline{j}}^P$ l'image de $\overline{j}^P$ dans l'ensemble $\varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,J)$ par la coprojection $F(P,J) \longrightarrow \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,J)$. Alors on vérifie facilement que, pour tout objet P de $\underline{P}$, et pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n_P$, on a:

$$D_P(\overline{2k-1 \longrightarrow 2k})^P = \overline{Id_{D_P}}^P \quad \text{dans} \quad F(P,D_P(2k)) .$$

On en déduit que, pour tout objet P de $\underline{P}$ et tout entier $k'$ tel que $1 \leqslant k' \leqslant 2n_P+1$, on a : $\overline{\overline{Id}}^P_I = \overline{\overline{Id}}^P_{D_P(k')} = \overline{\overline{Id}}^P_{I'}$ dans l'ensemble $\varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P,J)$. Comme $c_F$ est injective, cela impose que l'élément $(\overline{Id}^P_I)_{P \in \underline{P}}$ de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) = \overline{\prod_{P \in \underline{P}}} F(P,I)$ et l'élément $(\overline{Id}^P_{I'})_{P \in \underline{P}}$ de $\overline{\prod_{P \in \underline{P}}} F(P,I)$ ont des coprojections égales dans l'ensemble $\varinjlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I)$. C'est précisément dire que $\underline{I}$ est $Z\underline{P}$ - filtrante . //

Preuve de la suffisance. Soit $F : \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ un foncteur, $(x_P)_{P \in \underline{P}}$ un élément de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) = \overline{\prod_{P \in \underline{P}}} F(P,I)$ et $(x'_P)_{P \in \underline{P}}$ un élément de $\overline{\prod_{P \in \underline{P}}} F(P,I')$, dont nous notons $x$ et $x'$ les images respectives par les coprojections dans $\varinjlim_{J \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,J)$ .

Si $c_F(x) = c_F(x')$ , alors, pour tout objet P de $\underline{P}$ , les coprojections de $x_P$ et $x'_P$ dans $\varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P,J)$ sont égales, et donc, il existe un zigzag $D_P: \underline{Z}_{n_P} \longrightarrow \underline{I}$ et une famille $(y_P^k)_{1 \leq k \leq 2n_P+1}$ tels que :

- $D_P(1) = I$ , $D_P(2n_P+1) = I'$ ,
- $y_P^1 = x_P$ , $y_P^{2n_P+1} = x'_P$ ,
- $F(P,D_P(2h-1 \longrightarrow 2h))(y_P^{2h-1}) = y_P^{2h}$
  $= F(P,D_P(2h+1 \longrightarrow 2h))(y_P^{2h+1})$ , pour tout $1 \leq h \leq n_P$.

Comme $\underline{I}$ est $Z\underline{P}$ - filtrante, il existe un zigzag $D: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{I}$ vérifiant les conditions de 0.14 (où l'on pourra uitliser le diagramme 4). Par conséquent, pour tout entier $1 \leq k' \leq 2n+1$ , il existe un élément $(t_P^{k'})_{P \in \underline{P}}$ de l'ensemble $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,D(k'))$ de telle sorte que , pour tout objet P de $\underline{P}$ et tout entier $1 \leq l' \leq n$, on ait :

- $t_P^1 = x_P$ , $t_P^{2n+1} = x'_P$ ,
- $F(P,D(2l'-1 \longrightarrow 2l'))(t_P^{2l'-1})$
  $= t_P^{2l'} = F(P,D(2l'+1 \longrightarrow 2l'))(t_P^{2l'+1})$ .

Il suffit de prendre pour $t_P^{k'}$ l'image d'un $y_P^k$ par une application $F(P,i)$ telle que $i: D_P(k) \longrightarrow D(k')$ , $Id_I$ et $Id_{I'}$ aient même coprojections dans $\varinjlim_{(X,Y) \in \underline{Z}_{n_P}^{op} \times \underline{Z}_n} \mathrm{Hom}_{\underline{I}}(D_P^{op}(X),D(Y))$ ,

ce qui est possible puisque $\underline{I}$ est $Z\underline{P}$ - filtrante et puisque deux flèches $i: D_P(k) \longrightarrow D(k')$ et $j: D_P(h) \longrightarrow D(k')$ sont nécessairement telles que $i(y_P^k) = j(y_P^h)$ .

On en déduit que tous les $t_P^{k'}$ ,où $P \in \underline{P}$ et $1 \leq k' \leq 2n+1$,

ont une image commune par coprojections dans $\varinjlim_{J \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I)$.

D'où il résulte que $x = x'$ et donc que $c_F$ est injective. //

3.3. Calcul de $\overrightarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est discrète non vide. Démontrons la

Proposition 10. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, discrète et non vide, pour que la petite catégorie $\underline{I}$ appartienne à $\overrightarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{P}$, il faut et il suffit qu'elle soit $\underline{P}$ - filtrante.

Preuve de la nécessité. Si $(I_P)_{P \in \underline{P}}$ est une famille d'objets de $\underline{I}$, elle définit un foncteur $D: \underline{P}^{op} \longrightarrow \underline{I}$ si l'on pose $D(P) = I_P$ ! Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.

Preuve de la suffisance. Si $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{Ens}$ est un foncteur, un élément $x$ de $\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P,I)$ est déterminé par une famille $(x_{P,I_P})_{P \in \underline{P}}$ d'éléments de $F(P,I_P)$. Soit $(I_P \xrightarrow{i_P} I)_{P \in \underline{P}}$ un cône inductif dans $\underline{I}$ de base la famille $(I_P)_{P \in \underline{P}}$ et dont l'existence est assurée puisque $\underline{I}$ est $\underline{P}$ - filtrante. Posons $y_P = F(P,i_P)(x_{P,I_P})$ pour tout objet $P$ de $\underline{P}$. Notons $y$ l'image dans $\varinjlim_{J \in \underline{J}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,J)$ de la famille $(y_P)_{P \in \underline{P}}$ par la coprojection $\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,I) \longrightarrow \varinjlim_{J \in \underline{J}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P,J)$. On a alors $c_F(y) = x$ car $x_{P,I_P}$ et $y_P$ ont même image, pour tout P, dans l'ensemble $\varinjlim_{J \in \underline{J}} F(P,J)$. //

3.4. Calcul de $\overrightarrow{\mathrm{COMM}}\ (\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est discrète non vide. Comme $\overrightarrow{\mathrm{Inj}}\ \underline{P} \cap \overrightarrow{\mathrm{Surj}}\ \underline{P} = \overrightarrow{\mathrm{COMM}}\ (\underline{P})$, nous avons, en vertu des propositions 9 et 10, la

Proposition 11. Si $P$ est une catégorie petite, discrète non vide, pour qu'une catégorie petite $I$ soit élément de $\overrightarrow{COMM}(P)$, il faut et il suffit qu'elle soit $P$ - filtrante et $\mathbb{Z}P$ - filtrante.

4. Remarques, compléments et exemples.

4.1. On vérifie immédiatement que, si $I' \longrightarrow I$ est un foncteur final entre catégories petites, alors $\overleftarrow{COMM}(I')$ est inclus dans $\overleftarrow{COMM}(I)$ ; ce qui "dualise" la proposition 1.

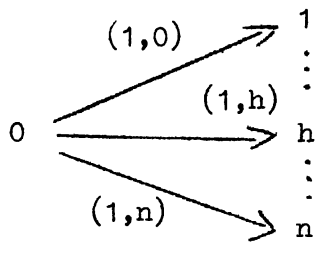
De même, il est facile d'établir que les éléments de $\overleftarrow{COMM}(\emptyset)$ sont les petites catégories non vides ; ce qui "dualise" la proposition 8.

En utilisant un calcul direct ou encore les propositions 7 et 11, on voit enfin que, si $I$ est une catégorie petite possédant un cône inductif $(i_I : I \longrightarrow I_o)_{I \in I}$ de base $Id_I : I \longrightarrow I$, on a $\overleftarrow{Inj}\, I = \overleftarrow{Surj}\, I = \overleftarrow{COMM}(I)$ et ses éléments sont toutes les catégories petites ; ce qui "dualise" la proposition 4.

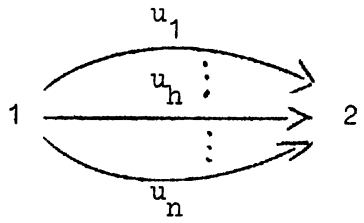
De même, la proposition 3 se dualise. Si $I = \coprod_{C \in \underline{C}} I_C$ est la décomposition de $I$ en somme de ses composantes connexes, on a encore $\overleftarrow{COMM}(I) = (\overleftarrow{COMM}(\underline{C})) \cap (\bigcap_{C \in \underline{C}} \overleftarrow{COMM}(I_C))$.

4.2. De la caractérisation des éléments de $\overrightarrow{COMM}(P)$, lorsque $P$ est une petite catégorie donnée, on peut déduire, a contrario, une caractérisation des éléments (ou d'une classe remarquable d'éléments) de $\overleftarrow{COMM}(I)$ lorsque $I$ est donnée. Ainsi, notons :

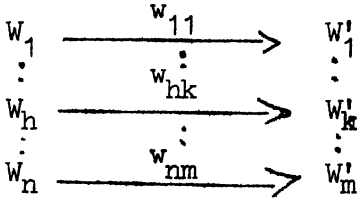
- pour tout entier $n \geqslant 2$, $V_n$ la catégorie représentée par



- pour tout entier $n \geqslant 2$ , $\underline{U}_n$ la catégorie représentée par :




- pour tout couple d'entiers (n,m), avec $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 2$, $\underline{W}_{n,m}$ la catégorie représentée par :

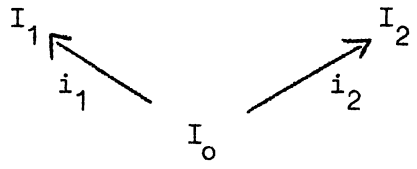



Comme ni $\underline{V}_n$ , ni $\underline{U}_n$ , ni $\underline{W}_{n,m}$ ne sont $\underline{V}$ - filtrantes , de la proposition 5 résulte que les seules catégories connexes appartenant soit à $\underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{V}_n)$ soit à $\underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{U}_n)$ soit à $\underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{W}_{n,m})$ sont nécessairement dégénérées. De la proposition 4 on déduit alors que ces catégories (connexes) dégénérées sont bien éléments de $\underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{V}_n)$ , $\underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{U}_n)$ et $\underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{W}_{n,m})$.

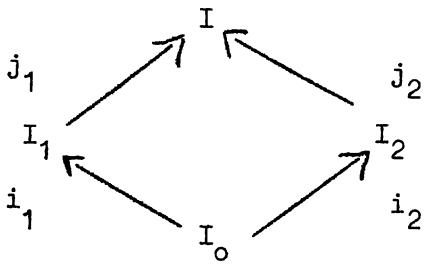
Comme de plus, ni $\underline{V}_n$ ni $\underline{W}_{n,m}$ ne sont $\underline{P}$ - filtrantes, lorsque $\underline{P}$ est une catégorie discrète ayant au moins deux objets distincts , on en conclut que les seuls éléments de $\underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{V}_n)$ $= \underset{\leftarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{W}_{n,m})$ sont les catégories petites dégénérées .

4.3. Il suffit de "réécrire" la proposition 7 pour déterminer les limites inductives commutant dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ avec les noyaux de 2 (ou même $n \geqslant 2$) flèches de même source et de même but. En effet, il est clair que les éléments de $\underset{\rightarrow}{\mathrm{COMM}}\,\underline{U}_n$ sont les petites catégories vérifiant :

(1) tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme :

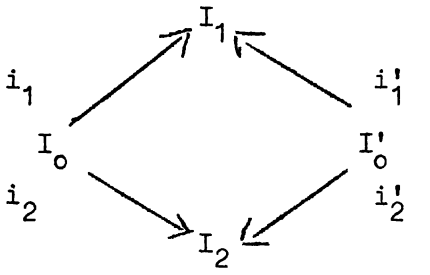



se clôt dans $\underline{I}$ en un diagramme commutatif de la forme :

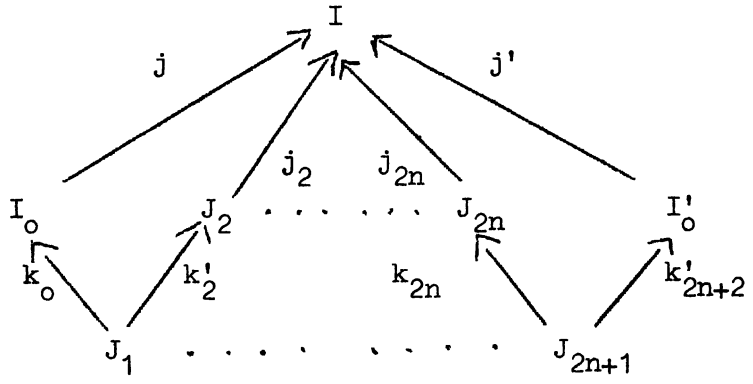



c'est-à-dire que $\underline{I}$ est $\underline{V}$ - filtrante.

(2) Tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme suivante:




se clôt dans $\underline{I}$ en un diagramme commutatif :

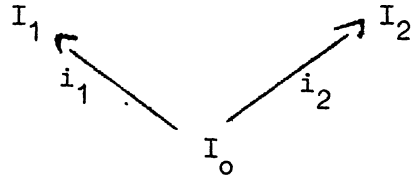



où les $J_i$ sont égaux à l'un des éléments de $\{I_o, I_1, I_2, I'_o\}$

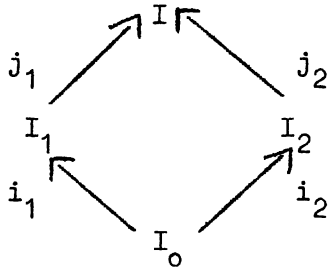
et les $k_i$ , $k'_i$ sont égaux à l'un des éléments de $\{i_1, i_2, i'_1, i'_2\}$ .

De la même manière, on peut caractériser les limites inductives qui commutent dans Ens avec les produits fibrés de 2 (ou même $n \geqslant 2$) flèches de même but. Ainsi, les éléments de $\underset{\Rightarrow}{\mathrm{COMM}}\,(\underline{V}_n^{op})$ sont les petites catégories $\underline{I}$ vérifiant :

(1) tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme suivante

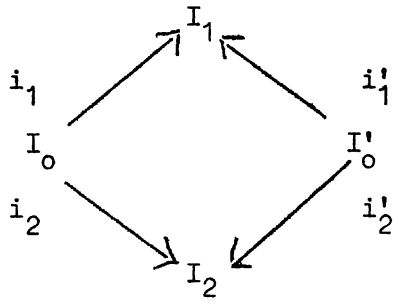



se clôt dans $\underline{I}$ en un diagramme commutatif de la forme



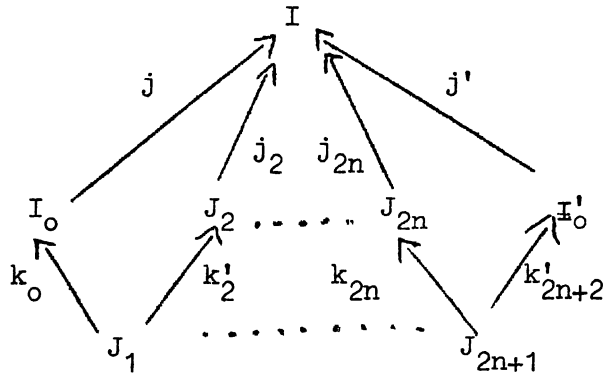

c'est-à-dire que $\underline{I}$ est $\underline{V}$ - filtrante .

(2)' Tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme suivante :



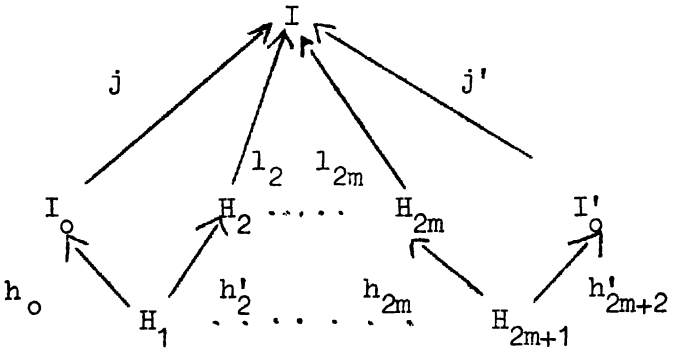

détermine deux diagrammes commutatifs dans $\underline{I}$ , ci-après désignés (*) et (**) :

(*)




où les $J_i$ sont pris dans $\{I_o, I'_o, I_1\}$ et les $k_i$, $k'_i$ sont pris dans $\{i_1, i'_1\}$.

(**)




où les $H_i$ sont pris dans $\{I_o, I'_o, I_2\}$ et les $h_i$, $h'_i$ sont pris dans $\{i_2, i'_2\}$.

4.4. De la proposition 7, on peut aussi déduire une description de $\underset{\rightarrow}{\mathrm{COMM}}(\mathcal{P}) = \bigcap_{\underline{P} \in \mathcal{P}} \underset{\rightarrow}{\mathrm{COMM}}(\underline{P})$, lorsque $\mathcal{P}$ est une classe donnée de petites catégories. Ainsi, si $\alpha$ est un ordinal régulier, et si $\mathcal{P}_\alpha$ désigne la classe des catégories $\alpha$-petites, on retrouve que $\underset{\rightarrow}{\mathrm{COMM}}\,\mathcal{P}_\alpha$ contient la classe $\mathcal{J}_{\alpha\text{-f}}$ des catégories petites $\alpha$-filtrantes. De plus, on vérifie que $\underset{\rightarrow}{\mathrm{COMM}}(\mathcal{P}_\alpha) = \mathcal{J}_{\alpha\text{-f}}$.

De même, si $\mathcal{P}_c$ désigne la classe des catégories petites

et connexes, on retrouve que $\underset{\rightarrow}{\mathrm{COMM}}(\mathcal{P}_c)$ contient la classe $\mathcal{J}_d$ des catégories petites et discrètes. De plus, on établit que $\underset{\rightarrow}{\mathrm{COMM}}(\mathcal{P}_c) = \mathcal{J}_{ld}$ où $\mathcal{J}_{ld}$ est la classe des petites catégories $\underline{I}$ dont chaque composante connexe $\underline{I}_C$ possède un cône inductif de base $\mathrm{Id}_{\underline{I}_C} : \underline{I}_C \longrightarrow \underline{I}_C$ .

4.5. Soit ob : $\underline{\mathrm{Cat}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ (resp. Fl : $\underline{\mathrm{Cat}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ ) le foncteur "objet" (resp. "flèches") . Ces deux foncteurs commutent aux $\underline{I}$ - limites inductives dès que $\underline{I}$ est une catégorie petite vérifiant les conditions (1) et (2)' de 4.3. En effet , $\underline{\mathrm{Cat}}$ est équivalente à une catégorie de foncteurs continus de $\underline{S}$ vers $\underline{\mathrm{Ens}}$ , où $\underline{S}$ est une petite catégorie où sont distingués des produits fibrés ; les $\underline{I}$ - limites inductives dans $\underline{\mathrm{Cat}}$ se calculent donc comme dans $\underline{\mathrm{Ens}}^{\underline{S}}$ , c'est-à-dire point par point, dès que les $\underline{I}$ - limites inductives dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ commutent aux produits fibrés .

De même , une catégorie localisable au sens de Diers est à limites projectives connexes (par exemple la catégorie des corps) car elle est toujours équivalente à une catégorie de foncteurs continus et co-continus $\underline{S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ où l'on a distingué dans $\underline{S}$ des limites projectives petites et des sommes petites.