DIAGRAMMES

C. LAIR

Conditions syntaxiques de plongement. II. Prolongements de faisceaux et faisceaux associés

Diagrammes, tome 3 (1980), exp. n° 1, p. L1-L29

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1980__3__A1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol. 3 , 1980.

CONDITIONS SYNTAXIQUES DE PLONGEMENT.

II. PROLONGEMENTS DE FAISCEAUX ET FAISCEAUX ASSOCIES.

C. Lair.

Introduction.

En (P.F.E.K.), lorsque $R: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur d'une catégorie petite vers une catégorie localement petite, nous avons établi une condition nécessaire et suffisante (C), ne portant que sur R, pour que l'adjoint à gauche S au foncteur Ens^R soit fidèle, autrement dit pour que, pour tout foncteur $F: \underline{A} \longrightarrow Ens$, la transformation naturelle canonique $u_F: F \longrightarrow \overline{F}$ de F vers son extension de Kan $\overline{F}$ le long de R soit un monomorphisme.

Nous supposons ici, plus généralement, que R définit un homomorphisme entre catégories munies de limites projectives.

Précisément, nous distinguons dans $\underline{B}$ une classe de limites projectives petites: on munit ainsi $\underline{B}$ d'une structure de prototype localement petit (E.T.S.A.), que l'on note $/\underline{B}/$. On appelle réalisation de $/\underline{B}/$ vers Ens, et on note $F': /\underline{B}/ \longrightarrow Ens$, tout foncteur $F': \underline{B} \longrightarrow Ens$ qui transforme les limites projectives distinguées de $/\underline{B}/$ en des limites projectives de Ens. On désigne par

$\mathrm{Ens}^{/\underline{B}/}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{B}}$ dont les objets sont ces réalisations.

Nous distinguons aussi dans $\underline{A}$ un ensemble de limites projectives petites: on munit $\underline{A}$ d'une structure de prototype petit que l'on note encore $/\underline{A}/$.

Si $R: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ transforme les limites distinguées de $/\underline{A}/$ en des limites distinguées de $/\underline{B}/$, on dit qu'il définit un homomorphisme $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$. Il induit alors un foncteur $\mathrm{Ens}^{/R/} : \mathrm{Ens}^{/\underline{B}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{A}/}$ qui est une restriction de Ens^{R} .

Dans ces conditions, nous recherchons une condition syntaxique (i. e. ne portant que sur $/R/$) pour que l'adjoint à gauche $\overline{S}$ à $\mathrm{Ens}^{/R/}$, s'il existe, soit fidèle, autrement dit pour que l'on ait la propriété de plongement:

(P). Pour toute réalisation $F: /A/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$, la transformation naturelle canonique $\overline{u}_F: F \longrightarrow \overline{S}F.R$ est un monomorphisme.

En général, on ne peut affirmer que $\mathrm{Ens}^{/R/}$ possède un adjoint à gauche. Cependant c'est certainement vrai lorsque l'extension de Kan $\overline{F}$, le long de R , de toute réalisation F de $/\underline{A}/$ vers Ens est encore une réalisation de $/\underline{B}/$ vers Ens , c'est-à-dire quand S possède une restriction $\overline{S}$: on dit alors que $/R/$ est un homomorphisme clos. Dans cette partie II , nous étudions le problème précédent du plongement dans ce seul cas.

La définition d'un homomorphisme clos étant sémantique, pour donner quelque consistance à une condition syntaxique permettant d'affirmer que $/R/$ vérifie (P) , il est tout d'abord souhaitable de disposer de critères également syntaxiques propres à assurer que l'homomorphisme $/R/$

est bien clos. Au §1 nous prouvons que c'est le cas si les limites distinguées de /B/ sont toutes à bases α-petites (resp. finies et connexes, finies et discrètes) et si, alors, /A/ est "complet" pour ce type de limites. On généralise ainsi une propriété bien connue, valable pour les homomorphismes entre théories de Lawvere ou types de Bénabou (voir (S.A.A.T.) par exemple).

Au §2 nous établissons trois conditions suffisantes de plongement: intuitivement elles signifient que /R/ doit relever dans /A/ la connexité de /B/. La première est très forte: c'est exactement la condition (C) de (P.F.E.K.). La deuxième, plus faible, est la plus pratique et d'utilisation la plus courante. La dernière est, en un certain sens, également nécessaire comme nous l'établissons au §3: précisément, si le prolongement de /R/ à des complétions projectives convenables de /A/ et /B/ vérifie (P) alors elle vérifie nécessairement cette troisième condition.

Les §§4 et 5 sont consacrés à des applications et à des exemples. Nous prouvons tout d'abord que, relativement à un foncteur d'oubli d'une catégorie algébrique (i. e. localement présentable au sens de (L.P.L.G.)) vers Ens , tout ensemble se plonge dans la structure libre qu'il engendre, dès que ce foncteur n'est pas constant sur 1 (à l'isomorphisme près). Ensuite, nous avons choisi de re-démontrer le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (plongement d'une algèbre de Lie dans son algèbre enveloppante, pourvu que l'anneau de base soit à entiers non nul inversibles) en utilisant une des conditions suffisantes du §2. Cette démonstration se trouve simplifiée de beaucoup, elle a également l'avantage d'isoler et d'exhiber explicitement le seul résultat technique propre aux algèbres

aux algèbres de Lie et aux algèbres associatives unitaires dont on se sert, parmi beaucoup d'autres, dans la démonstration classique (voir par exemple (R.B.W.T.)).

Nous pensons que l'exemple choisi du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (dans le cas où l'anneau de base est à entiers non nuls inversibles) est caractéristique tant de la commodité d'utilisation que de l'efficacité des résultats de ce travail. Bien entendu, ces résultats s'appliquent aussi au théorème de Stone (plongement de toute algébre de Boole dans une algèbre de Boole complète qui se trouve être atomique) et au théorème récent de plongement de toute catégorie double dans une catégorie double de 2-carrés d'une 2-catégorie (voir (M.F.M.C.)). Cependant, dans ces cas, la présentation à en faire est un peu plus longue et technique, c'est pourquoi nous ne les avons pas incorporés à ce texte.

1. Exemples d'homomorphismes clos.

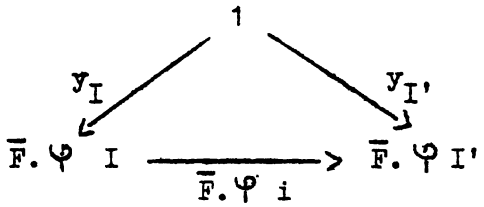
1.1. Montrons que:

(Cl 1). *Si* α *est un cardinal infini, si* A *est une catégorie petite* α*-complète, si* /A/ *est le prototype obtenu en distinguant dans* A *toutes les* α*-limites projectives, si* B *est une catégorie localement petite et si* /B/ *est une structure de prototype pour lequel les limites projectives distinguées sont nécessairement* α*-petites, alors tout homomorphisme* /R/: /A/ $\longrightarrow$ /B/ *est clos.*

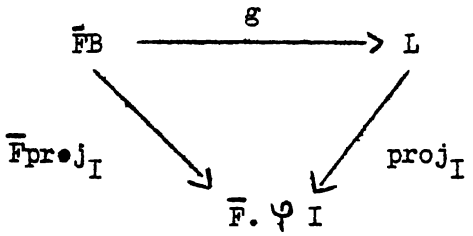
Supposons, en effet, que F: /A/ $\longrightarrow$ Ens est une

réalisation. Il s'agit de prouver que $\overline{F}$ est encore une réalisation du prototype $/\underline{B}/$ vers Ens.

Pour ce faire, supposons que $B = \varprojlim(\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{B})$ est une limite projective distinguée de $/\underline{B}/$. Notons L la limite projective canonique de $\overline{F}.\varphi$: c'est l'ensemble des familles $(y_I : 1 \longrightarrow \overline{F}.\varphi\ I)_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}}$ telles que, pour toute flèche $i : I \longrightarrow I'$ de $\underline{I}$, le diagramme ci-dessous commute:



Evidemment, il existe une unique application $g : \overline{F}B \longrightarrow L$ telle que, pour tout objet I de $\underline{I}$, le diagramme ci-dessous commute:



Montrons que g est injective. Soit y et y' deux éléments de $\overline{F}B$: en vertu de la construction de $\overline{F}$ (rappelée en (P.F.E.K.), dont nous reprenons les notations) y et y' sont les composantes connexes respectives de deux objets (b,A,x) et (b',A',x') de $1/F/B$. Si $g(y) = g(y')$, il existe alors, pour tout objet I, un zig-zag

Z_I: $z_{n_I} \longrightarrow 1/F/\varphi I$ tel que:

$$z_{n_I} \xrightarrow[Z_I]{} 1/F/\varphi I \xrightarrow[\text{canonique}]{} 1/F$$

$$1 \longmapsto (A,x)$$

$$2n_I+1 \longmapsto (A',x')$$

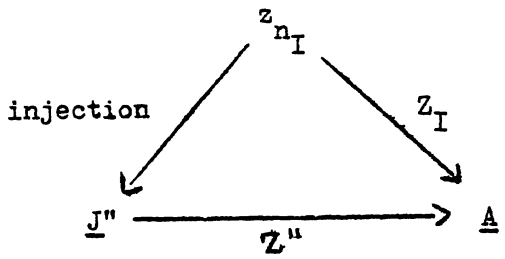
et

$$z_{n_I} \xrightarrow[Z_I]{} 1/F/\varphi I \xrightarrow[\text{canonique}]{} R/\varphi I$$

$$1 \longmapsto (proj_I.b,A)$$

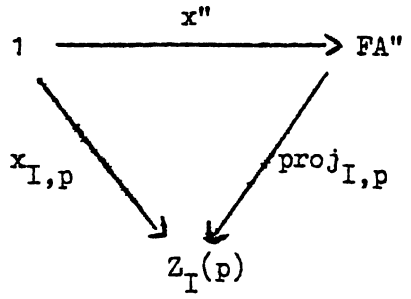
$$2n_I+1 \longmapsto (proj_{I'}.b',A').$$

Soit $\underline{J}''$ la catégorie obtenue en identifiant à un même objet les différents "premiers" objets 1 des catégories z_{n_I} et en identifiant à un même objet ∞ les différents "derniers" objets $2n_I+1$ des catégories z_{n_I}. Il existe alors un unique foncteur Z'': $\underline{J}'' \longrightarrow \underline{A}$ tel que, pour tout objet I, le diagramme ci-dessous commute:



Comme $\underline{I}$ est α-petite et α est infini, $\underline{J}''$ est également α-petite et Z'' possède une limite projective A'', distinguée dans $/\underline{A}/$. Comme F est une réalisa-

tion, il existe une unique application $x'' : 1 \longrightarrow FA''$ telle que, pour tout objet I et tout entier $1 \leqslant p \leqslant 2n_I+1$, le diagramme ci-dessous commute:

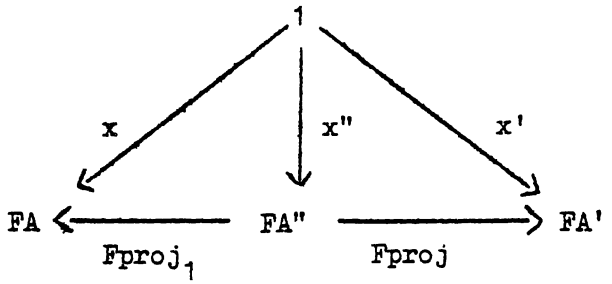


(où l'on a posé:

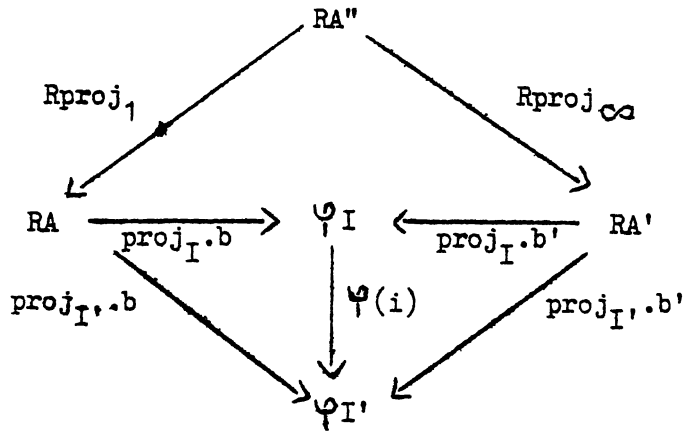
$$z_{n_I} \xrightarrow{Z_I} 1/F/\wr I \xrightarrow[\text{canonique}]{} 1/F$$
$$p \longmapsto x_{I,p} \qquad).$$

En particulier (pour $p = 1$ ou $p = 2n_I+1$), le diagramme ci-dessous commute:

(*)



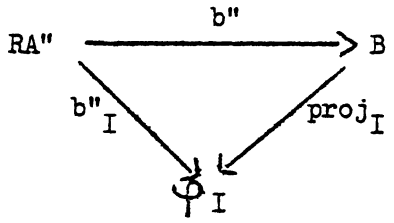
Des raisons claires de connexité assurent également que, pour toute flèche $i : I \longrightarrow I'$, le diagramme ci-dessous commute:



Donc, si pour tout objet I on pose

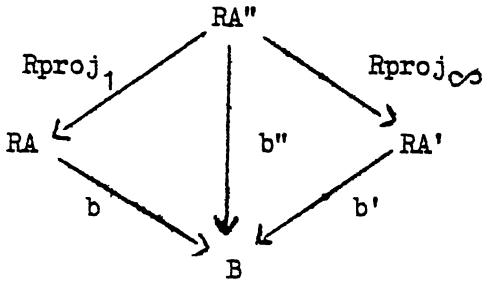
$$b''_I = proj_I.b.Rproj_1 = proj_I.b'.Rproj_\infty \quad ,$$

il existe une unique flèche b": RA" $\longrightarrow$ B de $\underline{B}$ telle que le diagramme ci-dessous commute:



En particulier, ceci assure que le diagramme ci-dessous commute:

(**)

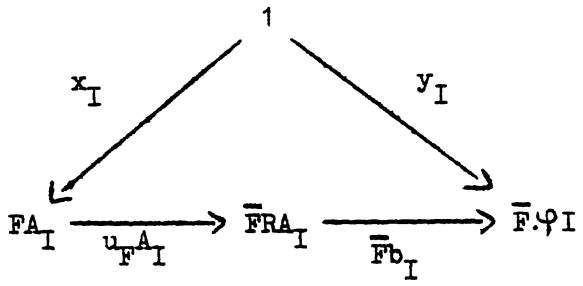


De la commutation de (*) et (**) on déduit que (b,A,x) et (b',A',x') sont dans la même composante connexe de $1/F/B$, donc que $y = y'$. Ceci signifie bien que g est injective.

Montrons, maintenant, que g possède une section, ce qui suffira à établir que g est une bijection et donc que $\overline{F}B$ est une limite projective de $\overline{F}.\varphi$, autrement dit que $\overline{F}$ est encore une réalisation de $/\underline{B}/$.

Si $(y_I : 1 \longrightarrow \overline{F}.\varphi I)_{I \in ob\underline{I}}$ est élément de L, par construction on peut choisir:

- pour tout objet I, un objet A_I de $\underline{A}$, une application $x_I : 1 \longrightarrow FA_I$ et une flèche $b_I : RA_I \longrightarrow \varphi I$ de $\underline{B}$ tels que le diagramme ci-dessous commute:



,

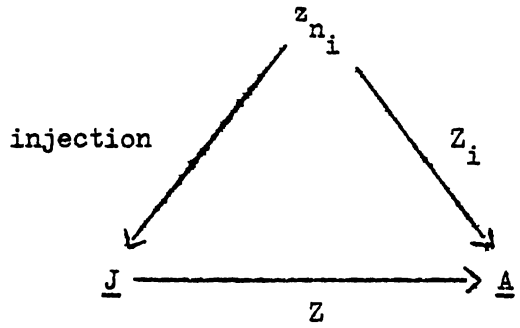
- pour toute flèche $i : I \longrightarrow I'$, un zig-zag $Z_i : z_{n_i} \longrightarrow 1/F/\varphi I'$ tel que:

$$z_{n_i} \xrightarrow[Z_i]{} 1/F/\varphi I' \xrightarrow[\text{canonique}]{} 1/F$$
$$1 \longmapsto x_I$$
$$2n_i+1 \longmapsto x_{I'}$$

et

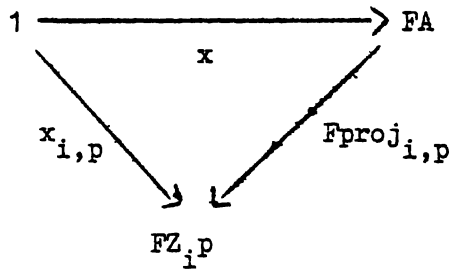
$$z_{n_i} \xrightarrow[Z_i]{} 1/F/\varphi I' \xrightarrow[\text{canonique}]{} R/\varphi I'$$
$$1 \longmapsto (A_I, \varphi i.b_I)$$
$$2n_i+1 \longmapsto (A_{I'}, b_{I'}) \quad .$$

Désignonc par $\underline{J}$ la catégorie obtenue en identifiant, pour tout diagramme $I \xrightarrow[i]{} I' \xrightarrow[i']{} I''$ de $\underline{I}$, le "premier" objet 1 de $z_{n_{i'}}$ au "dernier" objet $2n_i+1$ de z_{n_i}. Il existe donc un unique foncteur $Z: \underline{J} \longrightarrow \underline{A}$ tel que, pour toute flèche $i: I \longrightarrow I'$, le diagramme ci-dessous commute:



.

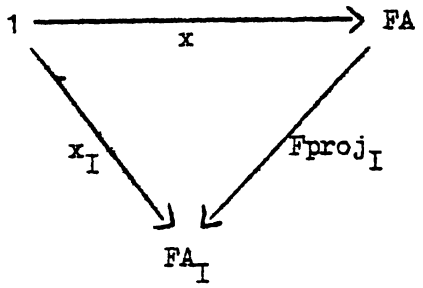
Comme $\underline{I}$ est α-petite et α est infini, $\underline{J}$ est également α-petite et Z possède une limite projective A distinguée dans $/\underline{A}/$. Comme F est une réalisation de $/\underline{A}/$ vers Ens, il existe une unique application $x: 1 \longrightarrow FA$ telle que, pour toute flèche $i: I \longrightarrow I'$ et tout entier $1 \leqslant p \leqslant 2n_i+1$, le diagramme ci-dessous commute:



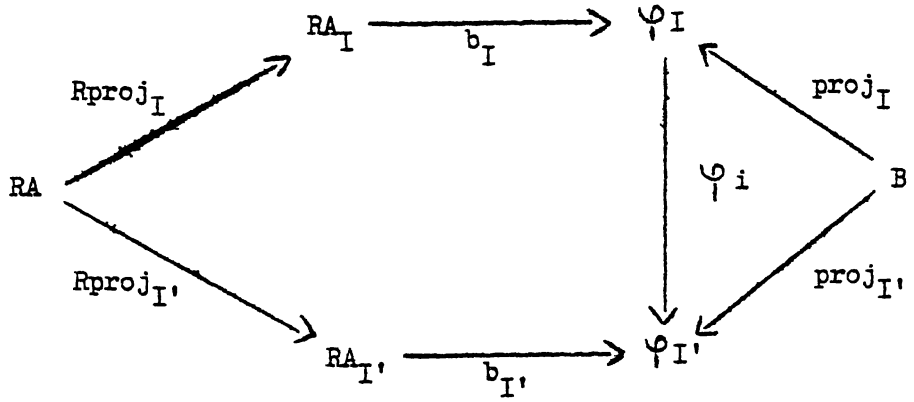
(où $z_{n_i} \xrightarrow{Z_i} 1/F/\varphi\, I' \xrightarrow[\text{canonique}]{} 1/F$

$p \longmapsto x_{i,p}$).

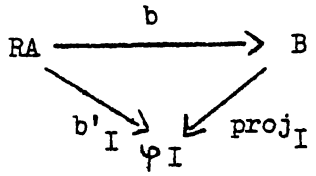
En particulier, pour tout objet I , le diagramme ci-dessous commute:



Des raisons claires de connexité assurent aussi que, pour toute flèche $i: I \longrightarrow I'$, le diagramme ci-dessous commute:



On en déduit qu'il existe une unique flèche $b: RA \longrightarrow B$ de $\underline{B}$ rendant, pour tout objet I , le diagramme ci-dessous commutatif, où l'on pose $b'_I = b_I.Rproj_I$:



Ainsi, on a construit une application g': $L \longrightarrow \overline{FB}$: c'est celle qui associe à la famille $(y_I)_{I \in ob\underline{I}}$, appartenant à L , la composante connexe de (b,A,x) dans $1/F/B$. Par construction, on vérifie facilement que g' est bien une section de g .

1.2. Dans la démonstration précédente, on remarque que, si $\underline{I}$ est une catégorie finie connexe non vide, les foncteurs Z'' et Z possèdent des limites projectives dans $\underline{A}$ qui se calculent par une succession (finie) de produits fibrés. Même si ces limites ne sont pas distinguées dans $/\underline{A}/$, elles sont nécessairement transformées en des limites de Ens par toute réalisation F: $/\underline{A}/ \longrightarrow$ Ens , dès lors que les produits fibrés sont distingués dans $/\underline{A}/$ (voir aussi la remarque 3.1 du §3). En conséquence, nous pouvons également affirmer que:

(Cl 2). Si $\underline{A}$ est une catégorie petite à produits fibrés (resp. à produits fibrés et possédant un élément final), si $/\underline{A}/$ est une structure de prototype petit sur $\underline{A}$ pour lequel les produits fibrés (resp. les produits fibrés et cet élément final) sont distingués, si $\underline{B}$ est une catégorie localement petite, si $/\underline{B}/$ est une structure de prototype sur $\underline{B}$ pour lequel les limites projectives distinguées sont indexées par des catégories finies connexes non vides (resp. des catégories finies et connexes), alors tout homomorphisme $/R/$: $/\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est clos.

1.3. Remarquons, enfin, que dans la démonstration de 1.1 , si $\underline{I}$ est discrète et finie, alors $\underline{I} = \underline{J}$ et il suffit que $\underline{A}$ soit à produits finis, distingués dans $/\underline{A}/$,

pour que Z possède une limite projective et donc pour que $g: \overline{FB} \longrightarrow L$ admette une section. Dans ce cas, on adapte facilement l'argument qui permet aussi d'affirmer que g est injective, afin de n'utiliser que des produits finis de $\underline{A}$. Autrement dit, on retrouve la condition suffisante bien connue (voir, par exemple, (S.A.A.T.)) que nous énonçons sous la forme:

(Cl 3). Si $\underline{A}$ est une catégorie petite à produits finis, si $/\underline{A}/$ est la structure de prototype obtenue en ne distinguant que ces produits finis, si $\underline{B}$ est une catégorie localement petite, si $/\underline{B}/$ est une structure de prototype pour lequel seuls des produits finis sont distingués, alors tout homomorphisme $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est clos.

2. Conditions syntaxiques suffisantes de plongement pour les homomorphismes clos.

2.1. Si $/\underline{A}/$ est un prototype petit, si $/\underline{B}/$ est un prototype localement petit et si $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est un homomorphisme clos, une première condition suffisante assurant que la propriété (P) de plongement est vérifiée s'énonce (en reprenant les notations de (P.F.E.K.)):

(C 1). Pour tout objet A de $\underline{A}$, tout zig-zag Z de $\underline{A}$, fermé en A , est image par le foncteur canonique $\underline{A}/A \longrightarrow \underline{A}$ d'un zig-zag X de $\underline{A}/A$, fermé en 1_A , dès que le zig-zag R.Z de $\underline{B}$, fermé en RA , est image par le foncteur canonique $B/RA \longrightarrow \underline{B}$ d'un zig-zag Y de B/RA , fermé en 1_{RA} .

Ceci est évident: si l'homomorphisme $/R/$ vérifie (C 1) , le foncteur R vérifie la condition (C) de (P.F.E.K.); l'ad-

joint S à Ens^R est donc fidèle et sa restriction $\bar{S}$ également, ce qui assure bien que (P) est satisfaite.

2.2. La condition (C 1), rappelée ici pour mémoire, est évidemment trop forte en pratique: $\bar{S}$ peut être fidèle sans que S le soit. Nous devons donc établir une condition susceptible d'être plus facilement utilisable. Ainsi, si $/\underline{A}/$ est un prototype petit, si $/\underline{B}/$ est un prototype localement petit et si $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est un homomorphisme clos, une deuxième condition suffisante assurant que la propriété (P) de plongement est satisfaite s'énonce:

(C 2). *Pour tout objet* A *de* $\underline{A}$, *tout zig-zag* Z *de* $\underline{A}$, *fermé en* A, *et tout zig-zag* Y *de* $\underline{B}/RA$, *fermé en* 1_{RA}, *d'image* R.Z *par le foncteur canonique* $\underline{B}/RA \longrightarrow \underline{B}$, *il existe une limite projective* $A = \varprojlim(\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{A})$ *distinguée dans* $/\underline{A}/$ *et, pour tout objet* I *de* $\underline{I}$, *il existe un zig-zag* X_I *de* $\underline{A}/\varphi I$, *fermé en* $proj_I : A \longrightarrow \varphi I$, *d'image* Z *par le foncteur canonique* $\underline{A}/\varphi I \longrightarrow \underline{A}$.

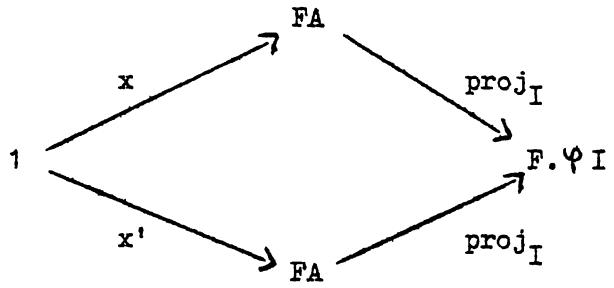
En effet, supposons (C 2) vérifiée et soit $F: /\underline{A}/ \longrightarrow Ens$ une réalisation. Comme $/R/$ est clos, $\bar{F}$ est construit comme en (P.F.E.K.) dont nous reprenons les notations.

Soit A un objet de $\underline{A}$ et $x,x' : 1 \longrightarrow FA$ deux éléments de FA tels que $u_F A(x) = u_F A(x')$. Par construction, il existe un zig-zag $Z' : z_n \longrightarrow 1/F/RA$ tel que:

- le zig-zag $Y : z_n \xrightarrow{Z'} 1/F/RA \xrightarrow[\text{canonique}]{} \underline{B}/RA$ est fermé en 1_{RA},
- on a

$$\begin{array}{ccccc} z_n & \xrightarrow{Z'} & 1/F/RA & \xrightarrow[\text{canonique}]{} & 1/F \\ 1 & \longmapsto & & & x \\ 2n+1 & \longmapsto & & & x' \end{array} .$$

Posons Z: $z_n \xrightarrow{Z'} 1/F/RA \xrightarrow[\text{canonique}]{} 1/F$. Par hypothèse il existe une limite projective $A = \varprojlim(\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{A})$, distinguée dans $/\underline{A}/$, et pour tout objet I le zig-zag X_I: $z_n \longrightarrow \underline{A}/\varphi I$. Par connexité, on en déduit que, pour tout objet I , le diagramme ci-dessous commute:



Comme F est une réalisation, on sait que $FA = \varprojlim F$. . En conséquence $x = x'$ et $u_F A$ est bien une application injective. D'où notre affirmation.

2.3. Concrètement, il est très souvent commode de tester si (C 2) est vérifiée ou non, de plus, les cas où elle l'est sont nombreux. De ce point de vue pratique (C 2) est donc assez satisfaisante. Cependant, on ne peut s'en contenter complètement: lorsqu'on énonce une condition suffisante, on souhaite évidemment qu'elle soit, sinon nécessaire, du moins "la plus proche possible" d'une condition nécessaire; ce n'est pas le cas de (C 2). Nous allons donc énoncer une troisième condition suffisante (qui, elle, est "nécessaire par passage aux types de $/\underline{A}/$ et $/\underline{B}/$ " , comme nous le montrons au §3).

A cet effet, si $\underline{A}$ (resp. $/\underline{A}/$) est une catégorie petite (resp. un prototype petit dans lequel on peut toujours supposer que les objets sont des limites projectives triviales distinguées), nous notons $Cat//\underline{A}$ (resp. $Cat// /\underline{A}/$) la

catégorie pour laquelle:

- les objets sont les foncteurs $\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{A}$ (resp. les foncteurs $\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{A}$ possédant au-moins une limite projective distinguée dans $/\underline{A}/$) , où $\underline{I}$ est une catégorie petite,
- les flèches sont les couples

$$(V,v): (\varphi: \underline{I} \longrightarrow \underline{A}) \longrightarrow (\varphi': \underline{I}' \longrightarrow \underline{A})$$

tels que $V: \underline{I}' \longrightarrow \underline{I}$ est un foncteur et $v: \varphi.V \longrightarrow \varphi'$ est une transformation naturelle.

Dans ces conditions, nous notons $\underset{\leftarrow}{\mathrm{Lim}}: \mathrm{Cat}// /\underline{A}/ \longrightarrow \underline{A}$ un foncteur choix de limites projectives distinguées dans le prototype $/\underline{A}/$.

En adaptant convenablement la preuve de la suffisance de la condition (C 2) , on prouve facilement que, si $/\underline{A}/$ est un prototype petit, si $/\underline{B}/$ est un prototype localement petit et si $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est un homomorphisme clos, une condition suffisante assurant que la propriété (P) de plongement est satisfaite s'énonce:

(C 3). *Pour tout objet* A *de* $\underline{A}$, *tout zig-zag* $Z: z_n \longrightarrow \underline{A}$, *fermé en* A , *et tout zig-zag* $Y: z_n \longrightarrow \underline{B}/RA$, *fermé en* 1_{RA} *et d'image* R.Z *par le foncteur canonique* $\underline{B}/RA \longrightarrow \underline{B}$, *il existe un zig-zag* $W: z_m \longrightarrow \mathrm{Cat}//z_n$, *il existe une limite projective* $A = \underset{\leftarrow}{\mathrm{lim}}(\varphi: \underline{I} \longrightarrow \underline{A})$, *distinguée dans* $/\underline{A}/$, *et pour tout objet* I *de* $\underline{I}$ *il existe un zig-zag* $X_I: z_m \longrightarrow \underline{A}/\ I$, *fermé en* $\mathrm{proj}_I: A \longrightarrow \varphi I$, *tels que:*

- *on a*

$$\begin{array}{ccc} z_m & \xrightarrow{\quad W \quad} & \mathrm{Cat}//z_n \\ 1 & \longmapsto & (\cdot \xrightarrow{1} z_n) \\ 2m+1 & \longmapsto & (\cdot \xrightarrow{2n+1} z_n) \end{array} ,$$

- le foncteur

$$z_m \xrightarrow{W} Cat//z_n \xrightarrow[\text{par } Z]{\text{composition}} Cat//\underline{A}$$

est à valeurs dans $Cat//\ /\underline{A}/$.

- le foncteur

$$z_m \xrightarrow{W} Cat//z_n \xrightarrow[\text{par } Z]{\text{composition}} Cat//\ /\underline{A}/ \xrightarrow[\longleftarrow]{Lim} \underline{A}$$

est, pour tout objet I , égal au foncteur

$$z_m \xrightarrow{X_I} \underline{A}/\varphi_I \xrightarrow{\text{canonique}} \underline{A} \quad .$$

3. Remarques.

3.1. Si $/\underline{A}/$ est un prototype, on dit qu'une limite projective de $\underline{A}$ est contrainte par $/\underline{A}/$ si, et seulement si, toute réalisation $F: /\underline{A}/ \longrightarrow Ens$ la transforme nécessairement en une limite projective de Ens. Evidemment, les limites projectives distinguées dans $/\underline{A}/$ sont contraintes mais l'inverse n'est pas toujours exact: ainsi, les objets de $\underline{A}$ sont des limites projectives (triviales) nécessairement contraintes; de même, une limite projective de $\underline{A}$ qui se calcule par une succession de limites distinguées dans $/\underline{A}/$ est contrainte.

Dans ces conditions, on peut systématiquement remplacer, dans les énoncés (Cl 1), (Cl 2) et (Cl 3) du §1 et dans les énoncés (C 2) et (C 3) du §2 , "limites projectives distinguées dans $/\underline{A}/$ " par "limites projectives contraintes par $/\underline{A}/$ " , ce qui donne des conditions plus

faibles et parfois plus pratiques. Par contre, il n'est d'aucune utilité d'opérer cette substitution pour le prototype /B/ .

3.2. La condition (P) peut s'affaiblir en la condition (P_A) , relative au seul objet A fixé dans $\underline{A}$, suivante:

(P_A). Pour toute réalisation $F: /\underline{A}/ \longrightarrow$ Ens , la réalisation $\overline{S}(F): /\underline{B}/ \longrightarrow$ Ens en est un prolongement local en A , c'est-à-dire que $\overline{u}_F A: FA \longrightarrow \overline{S}(F)(RA)$ est un monomorphisme .

Lorsque /R/ est clos, il est clair que les conditions (C 1), (C 2) et (C 3) du §2 se relativisent en autant de conditions $(C\ 1_A)$, $(C\ 2_A)$ et $(C\ 3_A)$ (que nous laissons au lecteur le soin de formuler) suffisantes pour que (P_A) soit vérifiée.

Notons aussi que, lorsque /A/ est une théorie de Lawvere dont A est l'objet "générique", les conditions (P) et (P_A) sont équivalentes. De même, les conditions (C 1) et (C 2) le sont aussi.

3.3. Soit $\underline{E}$ une catégorie complète et co-complète. On dit que l'homomorphisme $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est $\underline{E}$-clos si, et seulement si, /A/ est un prototype petit, /B/ est un prototype localement petit et l'adjoint à gauche $S_{\underline{E}}$ à $\underline{E}^R$ possède une restriction $\overline{S}_{\underline{E}}: \underline{E}^{/\underline{A}/} \longrightarrow \underline{E}^{/\underline{B}/}$.

Dans ces conditions, on vérifie sans difficulté que, si $\underline{E}$ est à petites limites inductives séparantes (au sens de (P.F.E.K.)) et si $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est $\underline{E}$-clos, les conditions (C 1), (C 2) et (C 3) sont également suffisantes pour que:

($P_{\underline{E}}$). *Pour toute réalisation* $F: /\underline{A}/ \longrightarrow \underline{E}$ *, la réalisation associée* $\overline{S}_{\underline{E}}(F): /\underline{B}/ \longrightarrow \underline{E}$ *en est un prolongement.*

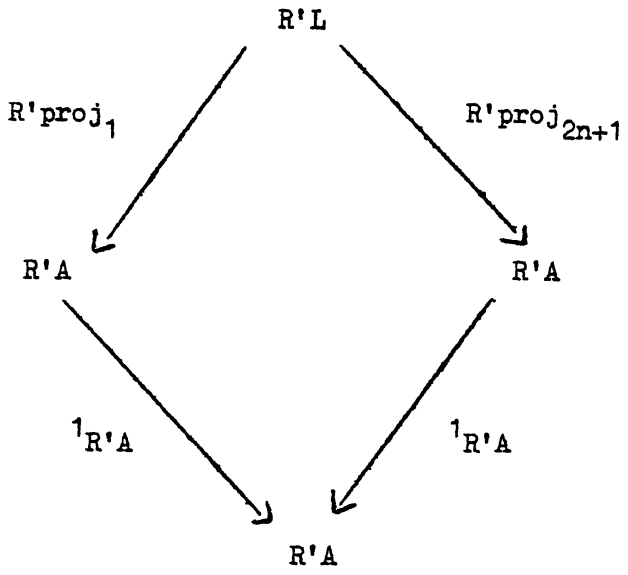
3.4. Supposons que $\underline{A}'$ et $\underline{B}'$ sont deux catégories *petites* α-complètes, où α est un cardinal infini. Notons $/\underline{A}'/$ et $/\underline{B}'/$ les prototypes obtenus en distinguant toutes les α-limites projectives. On dit alors que $/\underline{A}'/$ et $/\underline{B}'/$ sont des α-*types petits*.

Si $/R'/: /\underline{A}'/ \longrightarrow /\underline{B}'/$ est un homomorphisme, il est nécessairement clos en vertu de (Cl 1).

Supposons que l'adjoint à gauche $\overline{S}'$ de $\mathrm{Ens}^{/R'/}$ (restriction de l'adjoint à gauche S' de $\mathrm{Ens}^{R'}$) soit fidèle, i.e. que $/R'/$ vérifie la condition (P). Alors R' est fidèle, car le diagramme ci-dessous commute:

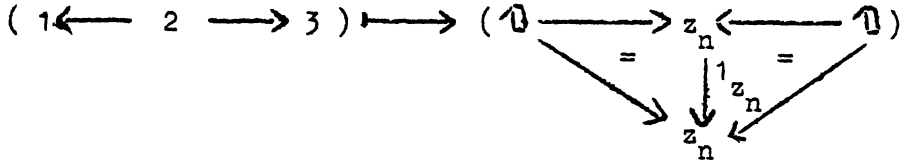
$$\begin{array}{ccc} \underline{A}' & \xrightarrow[\text{Yoneda}]{} & (\mathrm{Ens}^{/\underline{A}'/})^{op} \\ {\scriptstyle R'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{S}'^{,\,op}} \\ \underline{B}' & \xrightarrow[\text{Yoneda}]{} & (\mathrm{Ens}^{/\underline{B}'/})^{op} \end{array}$$

Si Z et Y sont des zig-zags de $\underline{A}'$ et $\underline{B}'/R'A$ comme dans (C 3) , le foncteur $Z: z_n \longrightarrow \underline{A}'$ possède une limite projective L dans $\underline{A}$ pour laquelle les projections extrèmes proj_1 , $\mathrm{proj}_{2n+1} : L \longrightarrow A = Z(1) = Z(2n+1)$ sont égales, car R' est fidèle et, par connexité, le diagramme ci-dessous commute dans $\underline{B}'$:



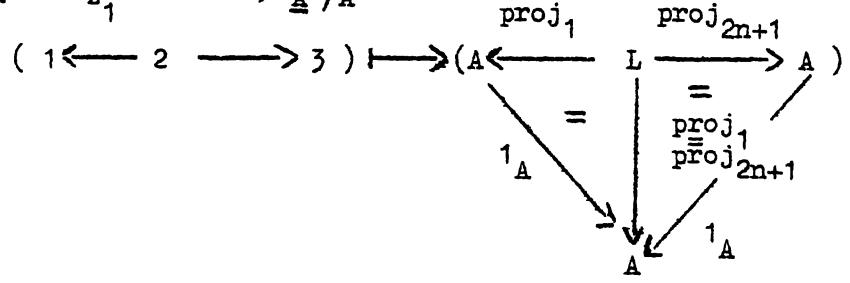
Si, maintenant, on pose:

- W: $z_1 \longrightarrow Cat//z_n$



- $A = \varprojlim (A: \mathbb{1} \longrightarrow \underline{A}')$,

- X_0: $z_1 \longrightarrow \underline{A}'/A$



(où 0 est l'unique objet de $\mathbb{1}$),

on prouve donc que (C 3) est nécessairement vérifiée par tout homomorphisme entre $\mathcal{A}$-types petits qui vérifie (P).

Si $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ est un homomorphisme entre prototypes tous deux petits et si α est un ordinal régulier "suffisamment grand", nous notons $\underline{A}'$ (resp. $\underline{B}'$) la duale de la sous-catégorie pleine de la catégorie $Ens^{/\underline{A}/}$ (resp. $Ens^{/\underline{B}/}$) dont les objets sont les objets α-présentables (au sens de (L.P.L.G.)). Alors $\underline{A}'$ (resp. $\underline{B}'$) est petite et α-complète: elle détermine donc un α-type $/\underline{A}'/$ (resp. $/\underline{B}'/$) et l'on dispose d'une réalisation canonique $y_{/\underline{A}/}: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{A}'/$ (resp. $y_{/\underline{B}/} : /\underline{B}/ \longrightarrow /\underline{B}'/$), qui est une restriction du plongement de Yoneda, telle que $Ens^{y_{/\underline{A}/}}: Ens^{/\underline{A}'/} \longrightarrow Ens^{/A/}$ (resp. $Ens^{y_{/\underline{B}/}}$) est une équivalence. Enfin, $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ se prolonge en un homomorphisme $/R'/: /\underline{A}'/ \longrightarrow /\underline{B}'/$: c'est une restriction de $\overline{S}^{op}: (Ens^{/\underline{A}/})^{op} \longrightarrow (Ens^{/\underline{B}/})^{op}$ et il rend le diagramme ci-dessous commutatif:

$$\begin{array}{ccc} /\underline{A}/ & \xrightarrow[/R/]{} & /\underline{B}/ \\ \downarrow{\scriptstyle y_{/\underline{A}/}} & & \downarrow{\scriptstyle y_{/\underline{B}/}} \\ /\underline{A}'/ & \xrightarrow[/R'/]{} & /\underline{B}'/ \end{array}$$

Dans ces conditions, si $/R/$ vérifie (P), l'homomorphisme $/R'/$ est clos et vérifie (P), donc il vérifie aussi (C 3), d'après précédemment : cette condition est donc bien nécessaire par passage aux α-types (pour α convenable) des prototypes $/\underline{A}/$ et $/\underline{B}/$.

3.5. Bien entendu, les différentes remarques précédentes peuvent être combinées simultanément.

4. Applications.

4.1. Soit $/\underline{A}/ = \mathbb{1}$ le prototype obtenu en ne distinguant aucune limite projective particulière sur la catégorie $\mathbb{1}$.

Supposons que $/\underline{B}/$ est un autre prototype localement petit pour lequel les seules limites projectives distinguées sont finies connexes et non vides. Si B est un objet fixé de $\underline{B}$, il détermine un unique homomorphisme $/R/: \mathbb{1} \longrightarrow /\underline{B}/$ tel que $R(0) = B$ et, alors, $\mathrm{Ens}^{/R/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{B}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathbb{1}} \sim \mathrm{Ens}$ est le foncteur évaluation en B.

D'après (Cl 2), affaiblie par la remarque 3.1, /R/ est clos, de plus (C 1) (ou (C 2)) est trivialement vérifiée. Nous pouvons donc énoncer:

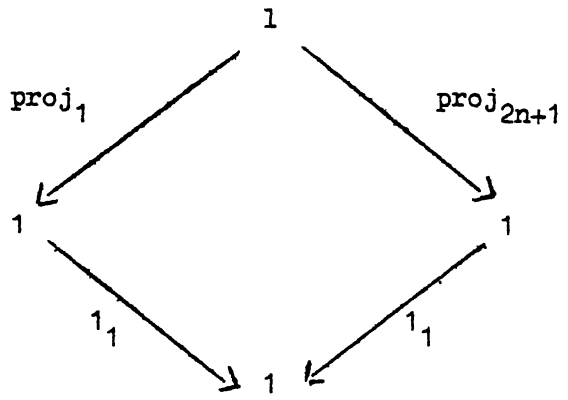
- <u>si $/\underline{B}/$ est un prototype localement petit où seules des limites projectives finies connexes et non vides sont distinguées, tout ensemble se plonge dans la structure libre de type $/\underline{B}/$ qu'il engendre relativement à tout foncteur d'évaluation de $\mathrm{Ens}^{/\underline{B}/}$ vers Ens.</u>

4.2. Soit $/\underline{A}/ = /\underline{N}^{op}/$ le prototype obtenu en distinguant tous les produits finis dans la duale de la sous-catégorie pleine $\underline{N}$ de Ens dont les objets sont les entiers. Ce prototype est une théorie de Lawvere et, bien entendu, les catégories Ens et $\mathrm{Ens}^{/\underline{N}^{op}/}$ sont équivalentes.

Supposons aussi que $/\underline{B}/$ est une autre théorie de Lawvere: il existe alors un unique homomorphisme $/R/: /\underline{N}^{op}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ qui préserve les objets (i.e. les entiers). Evidemment, $\mathrm{Ens}^{/R/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{B}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{N}^{op}/} \sim \mathrm{Ens}$ est le foncteur d'oubli canonique et, en vertu de (Cl 3), /R/ est clos.

Soit Z et Y deux zig-zags comme en (C 3). Posons

$1 = \varinjlim (z_n^{op} \xrightarrow[Z^{op}]{} \underline{N} \xrightarrow[\text{canonique}]{} \text{Ens})$; c'est, bien sûr, un ensemble fini dont on peut toujours supposer que c'est un entier. Alors on vérifie facilement que 1 est une limite projective contrainte de Z dans $/\underline{N}^{op}/$, au sens de la remarque 3.1 . On en déduit, par connexité, que le diagramme ci-dessous commute dans $\underline{B}$:



Si R est fidèle, ce même diagramme commute aussi dans $\underline{N}^{op}$ et la condition (C 3), affaiblie par la remarque 3.1, est vérifiée. Comme R est fidèle si, et seulement si, 1 n'est pas isomorphe à 0 dans $\underline{B}$, nous pouvons énoncer:

- *si $/\underline{B}/$ est une théorie de Lawvere pour laquelle 1 n'est pas isomorphe à 0 (i.e. si $\text{Ens}^{/\underline{B}/}$ n'est pas la catégorie des ensembles de cardinal 1), tout ensemble se plonge dans la structure libre de type $/\underline{B}/$ qu'il engendre relativement au foncteur d'oubli canonique de $\text{Ens}^{/\underline{B}/}$ vers* Ens .

4.3. Le résultat de 4.1 est établi pour fournir une classe d'exemples élémentaires d'application de (C 1) ou (C 2).

Il suggère l'énoncé 4.2 qui est son analogue dans le cas des théories de Lawvere. On remarquera, cependant, que celui-ci ne peut s'établir à l'aide de (C 1) ou (C 2): on prouve ainsi l'aspect également pratique de (C 3) , dont l'intèrêt théorique a été établi en 3.4. Cependant ces deux résultats sont aussi des conséquences indirectes d'un résultat plus général qui se démontre exactement comme en 4.2 et que nous allons énoncer maintenant.

Soit α un cardinal infini. On désigne par $/\underline{A}/$ le α-type (voir 3.4) obtenu en distinguant toutes les α-limites projectives dans la duale de la sous-catégorie pleine $\underline{A}^{op} = \mathrm{Ens}_{\alpha}$ de Ens dont les objets sont les cardinaux strictement inférieurs à α. Evidemment Ens et $\mathrm{Ens}^{/\underline{A}/}$ sont équivalentes.

Supposons, de plus, que $/\underline{B}/$ est un autre α-type localement petit et que B en est un objet fixé: il existe alors un homomorphisme $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ tel que $R(1) = B$ et $\mathrm{Ens}^{/R/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{B}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{A}/} \sim \mathrm{Ens}$ est le foncteur évaluation en B . Alors:

- <u>tout ensemble se plonge dans la structure libre de type $/\underline{B}/$ qu'il engendre relativement à tout foncteur d'évaluation de $\mathrm{Ens}^{/\underline{B}/}$ vers Ens , pourvu que l'objet en lequel on évalue ne soit pas final dans $\underline{B}$</u> .

4.4. Il est clair maintenant que, par analogie avec 4.3 et en vertu de la suffisance de (C 3) et de sa nécessité aux types (voir 3.4), nous pouvons énoncer:

- (test standard de plongement) <u>si α est un ordinal régulier, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories localement α-présentables (au sens de (L.P.L.G.)) et si $\overline{S}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$</u>

est un foncteur préservant les objets α-présentés et admettant un adjoint à droite $T: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$, pour que $\bar{S}$ soit fidèle (i.e. pour que tout objet F de $\mathcal{A}$ se plonge dans $T.\bar{S}F$) il faut et il suffit que sa restriction aux sous-catégories pleines de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ayant pour objets les objets α-présentés soit fidèle.

5. Exemples.

5.1. En particularisant le prototype /B/ utilisé tant en 4.1 qu'en 4.2, on obtient nombre d'exemples élémentaires pour lesquels les critères (C 1) ou (C 2) et (C 3) sont d'application immédiate et facile.

5.2. Plus significativement, re-démontrons le théorème de Poincaré-Birhoff-Witt:

(P.B.W.). Si H est un anneau commutatif unitaire contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau commutatif unitaire, toute H-algèbre de Lie se plonge dans son H-algèbre associative unitaire enveloppante (voir par exemple (R.B.W.T.)).

Il nous faut, tout d'abord, traduire dans le cas particulier qui nous préoccupe les considérations générales qui concernent tout foncteur algébrique (i.e. de la forme $Ens^{/R/}$).

Pour ce faire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note B_n la H-algèbre associative unitaire libre à n générateurs x_1, x_2, ..., x_n. Ses éléments sont donc les polynomes non commutatifs mais associatifs, à coefficients dans H, en les indéterminées x_1, x_2, ..., x_n. De même, on note A_n la H-algèbre de Lie libre à n générateurs x_1, x_2, ..., x_n. Ses

éléments sont donc <u>représentés</u> (mais non canoniquement) par les polynomes non commutatifs et non associatifs (i. e. munis de parenthèsages), à coefficients dans H, en les indéterminées $x_1, x_2, \dots, x_n$. Plus suggestivement, plutôt que d'utiliser des parenthèses pour écrire ces polynomes, nous utiliserons évidemment des crochets.

Si $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) désigne la catégorie des H-algèbres de Lie (resp. des H-algèbres associatives unitaires), la théorie de Lawvere $/\underline{A}/$ (resp. $/\underline{B}/$) des H-algèbres de Lie (resp. des H-algèbres associatives unitaires) est telle que $\underline{A}$ (resp. $\underline{B}$) est la duale de la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) dont les objets sont les A_n (resp. les B_n). Si $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est le foncteur " H-algèbre associative unitaire enveloppante associée", la restriction de U^{op} à $\underline{A}$ et $\underline{B}$ définit un homomorphisme $/R/: /\underline{A}/ \longrightarrow /\underline{B}/$ pour laquelle $Ens^{/R/}$ est le foncteur "H-algèbre de Lie associée", qui est adjoint à droite de U.

Dans ces conditions, si $Q: A_n \longrightarrow A_m$ est un morphisme de $\mathcal{A}$, il est entièrement déterminé par ses valeurs $Q(x_i) = Q_i$, lorsque $1 \leqslant i \leqslant n$. Chacun des Q_i est donc représenté par (au-moins) un polynome non associatif et non commutatif (que l'on choisit) noté $Q_i[x_1, \dots, x_m]$. De même, si $P: B_n \longrightarrow B_m$ est un morphisme de $\mathcal{B}$, il est déterminé par les $P(x_i) = P_i$, si $1 \leqslant i \leqslant n$. Ces P_i sont des polynomes associatifs et non commutatifs notés $P_i(x_1, \dots, x_m)$. Enfin, lorsqu'à tout $[x, x']$ de A_m est associé son développement $xx'-x'x$ dans B_m, on sait associer à chacun des polynomes $Q_i[x_1, \dots, x_m]$ son développement $\tilde{Q}_i(x_1, \dots, x_m)$; ainsi:

- ceci définit, pour tout entier m, une représentation li-

néaire r_m: $A_m \longrightarrow B_m$, $Q_i \longmapsto \tilde{Q}_i$,

- si le morphisme $Q: A_n \longrightarrow A_m$ est représenté par la famille $(Q_i[x_1, \ldots, x_m])_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors $U(Q)$ est représenté par la famille $(\tilde{Q}_i(x_1, \ldots, x_m))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Outre ces considérations qui se bornent à interpréter, dans le cas particulier considéré, les généralités propres à tout homomorphisme entre théories de Lawvere (ou même entre prototypes) rappelons maintenant le seul résultat attaché à l'homomorphisme particulier choisi /R/ que nous allons utiliser dans la suite et que l'on démontre facilement de manière purement combinatoire (voir par exemple (A.L.E.N.)):

(L). Pour tout entier non nul q , il existe une unique application H-linéaire $t_q: B_q \longrightarrow A_q$ telle que, pour tout entier non nul p et toute application $l: p \longrightarrow q$ on ait:

$$t_q(x_{l(1)} \cdots x_{l(p)}) = \sum_{p'=1}^{p'=p} (-1)^{p'-1} (pp')^{-1} \binom{p}{p'}^{-1} \sum_{s} \sum_{G_{p,p'}} [x_{l(s(1))}, \ldots, x_{l(s(p))}]$$

(ce qui a bien un sens car l'anneau commutatif unitaire H admet $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau commutatif unitaire),

où l'on a posé:

- pour tout $a \in A_q$, $[a] = a$ et, pour tout entier $p > 1$ et toute famille $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de A_q , $[a_1, \ldots, a_p] = [[a_1, \ldots, a_{p-1}], a_p]$,
- si s est une permutation de $\{1, \ldots, p\}$, C_s est l'ensemble des intervalles $\{p', p'+1, \ldots, p''\}$ de $\{1, \ldots, p\}$

tels que $s(p') \leqslant s(p'+1) \leqslant \dots \leqslant s(p'')$,
- si s est une permutation de $\{1, \dots, p\}$, D_s est l'ensemble des éléments maximaux de C_s ,
- $G_{p,p'}$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p\}$ telles que Card $D_s = p'$.

Alors, pour tout entier q non nul, on a $t_q . r_q = 1_{A_q}$.
Ceci permet de définir un foncteur $R' : \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$ qui est inverse à gauche de $R : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$:

- si $P : B_n \longrightarrow B_m$ est représenté par la famille $(P_i(x_1, \dots, x_m))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors $R'(P) : A_n \longrightarrow A_m$ est représenté par la famille $(t_m(P_i(x_1, \dots, x_m)))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

On en déduit, évidemment, que /R/ vérifie (C 1) .

La présente démonstration du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (sous sa forme de propriété de plongement) est réellement syntaxique, malgré les apparences. Elle n'utilise comme seul résultat attaché en particulier aux algèbres de Lie et aux algèbres associatives unitaires que la propriété (L) . Dans les démonstrations classiques, cette propriété (ou certaines de ses variantes) est utilisée ... mais avec nombre d'autres: ces dernières sont donc inutiles; plus exactement, elles ne sont qu'une traduction (involontaire) des considérations syntaxiques des §§ 1 et 2.

Bibliographie.

(A.L.E.N.) J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Cah. scient., fasc. XXXVII, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iaşi, XIV, 1968.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(M.F.M.C.) A. et C. Ehresmann, Multiple functors IV, Cah. de Top. et Géom. Diff. XX,1 , Amiens 1979.

(P.F.E.K.) C. Lair, Prolongement de foncteurs I , Diagrammes 2 , Paris, 1979.

(R.B.W.T.) P. M. Cohn, A remark on the Birkhoff-Witt theorem, Journ. of the London Math. Soc., 38, 1963.

(S.A.A.T.) F. W. Lawvere, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, Lect. Notes in Math. 61, Springer, 1968.