DIAGRAMMES

FRANÇOIS FOLTZ

Légitimité des catégories de préfaisceaux

Diagrammes, tome 1 (1979), exp. n° 3, p. F1-F5

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__1__A3_0>

© Université Paris 7, UER math., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, vol. 1, 1979.

LEGITIMITE DES CATEGORIES DE PREFAISCEAUX.

par

François FOLTZ.

A quelles conditions la catégorie $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ est-elle légitime lorsque $\underline{A}$ est elle-même une catégorie légitime ? J.BENABOU a remarqué que la condition suivante est suffisante :

"$\underline{A}$ admet un ensemble d'objets $\underline{B}_o$ tel que tout objet de $\underline{A}$ soit rétracte d'un élément de $\underline{B}_o$" ;

il a pensé aussi que cette condition devait être nécessaire. Ceci est exact et nous en donnons ici la preuve.

Soit $\underline{A}$ une catégorie; la relation "$A \leqslant A'$ si et seulement si A est un rétracte de A' " est une relation de préordre dans la classe $\underline{A}_o$ des objets de $\underline{A}$. On considère l'équivalence associée et on choisit un objet dans chaque classe d'équivalence : soit $\underline{B}_o$ la classe des objets ainsi choisis et soit $\underline{B}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ ayant $\underline{B}_o$ pour classe d'objets. Dans $\underline{B}_o$, la relation $\leqslant$ est un ordre cette fois.

Supposons que $\underline{A}$ et $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ soient toutes deux légitimes. Nous allons montrer que, dans ce cas, $\underline{B}_o$ est un ensemble, de la manière suivante : on va construire un certain foncteur $F:\underline{B} \longrightarrow \underline{Ens}$, puis une injection $j: \underline{B}_o \longrightarrow End(F)$; comme $\underline{Ens}^{\underline{B}}$ est légitime en même temps que $\underline{Ens}^{\underline{A}}$, il en résulte que End(F) est un ensemble, et donc $\underline{B}_o$ aussi.

Construction de F. On se place dans la catégorie $\underline{B}$. Dési-

gnons par I(B) la classe des inversibles à gauche de but B.

Lemme. I(B) est un ensemble.

Pour chaque objet $X \lesssim B$ choisissons un couple (i_X, r_X), $i_X : X \longrightarrow B$ et $r_X : B \longrightarrow X$, tel que $r_X . i_X = 1_X$; l'application qui à $X \lesssim B$ fait correspondre l'idempotent $i_X . r_X$ est injective; en effet, si $i_Y . r_Y = i_X . r_X$, on voit que $r_Y . i_X$ et $r_X . i_Y$ sont inverses l'un de l'autre, donc X = Y, car $\underline{B}$ n'a pas d'autres inversibles que ses unités. Ainsi la classe des objets plus petits que B est un ensemble. Il en résulte que I(B) est aussi un ensemble puisque

$$I(B) \subset \bigcup_{X \lesssim B} \underline{B}(X,B) .$$

Pour un objet B de $\underline{B}$, on pose alors F(B) = P(I(B)), où P est le foncteur "parties". Pour une flèche $b : B \longrightarrow B'$, on définit $F(b) : F(B) \longrightarrow F(B')$ par la formule suivante:

$$F(b)(J) = (b.J) \cap I(B').$$

Si $b' : B' \longrightarrow B''$ est composable avec b, on trouve:

$$\begin{aligned} F(b')(F(b)(J)) &= (b'.F(b)(J)) \cap I(B'') \\ &= (b'.b.J) \cap b'.I(B') \cap I(B'') \\ &= (b'.b.J) \cap I(B'') = F(b'.b)(J), \end{aligned}$$

car $b'.I(B') \supset (b'.b.J) \cap I(B'')$,

de sorte que F définit bien un foncteur de $\underline{B}$ dans $\underline{Ens}$.

Construction de j. A chaque objet Z de $\underline{B}$ on fait correspondre la transformation naturelle j(Z) = z suivante: en $B \in \underline{B}_o$, l'application $z_B : F(B) \longrightarrow F(B)$ est définie par

$$z_B(J) = \bigcup_{Z \lesssim X \lesssim B} J_X^B \text{ , où } J_X^B = \underline{B}(X,B) \cap J.$$

Il s'agit bien d'une transformation naturelle, car pour $b : B \longrightarrow B'$ donné, on trouve:

$$\begin{aligned} z_{B'}(F(b)(J)) &= \bigcup_{Z \lesssim X \lesssim B'} (b.J \cap I(B'))_X^{B'} \\ &= \bigcup_{Z \lesssim X \lesssim B} (b.J_X^B \cap I(B')) \end{aligned}$$

$$= \Big(\bigcup_{Z \lesssim X \lesssim B} b.J_X^B\Big) \cap I(B')$$

$$= \Big(b.\bigcup_{Z \lesssim X \lesssim B} J_X^B\Big) \cap I(B')$$

$$= F(b)(z_B(J)), \qquad \text{en usant du fait que:}$$

$$(b.J \cap I(B'))_X^{B'} = \underline{B}(X,B') \cap b.J \cap I(B') = b.J_X^B \cap I(B').$$

Il nous reste à prouver que l'application $j:\underline{B}_o \longrightarrow End(F)$ est injective; soient Z et $Z' \in \underline{B}_o$ et posons $z = j(Z)$, $z' = j(Z')$; supposant que $z = z'$, on trouve:

$z'_Z(\{1_Z\}) = z_Z(\{1_Z\}) = \{1_Z\} \neq \emptyset$, ce qui entraîne $Z' \lesssim Z$; on a de même $Z \lesssim Z'$, et donc $Z = Z'$, puisque la relation $\lesssim$ est un ordre dans $\underline{B}_o$.

Il nous reste à décrire une équivalence entre $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ et $\underline{Ens}^{\underline{B}}$. A ce propos, nous pouvons énoncer un résultat un peu plus général. Soit $\underline{H}$ une catégorie satisfaisant la condition suivante:

(S) tout idempotent de $\underline{H}$ se décompose en un produit $j.s$ où j est un mono et s est un épi.

Par exemple les catégories régulières vérifient cette condition, mais d'autres catégories, non régulières, comme $\underline{Cat}$ la vérifient aussi. Soient $\underline{A}$ une catégorie et $\underline{B}$ une sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ telle que tout objet de $\underline{A}$ soit rétracte d'un objet de $\underline{B}$.

Proposition. Les catégories $\underline{H}^{\underline{A}}$ et $\underline{H}^{\underline{B}}$ sont équivalentes.

A l'injection canonique $\underline{B} \longrightarrow \underline{A}$ correspond le foncteur "restriction" $R:\underline{H}^{\underline{A}} \longrightarrow \underline{H}^{\underline{B}}$. Construisons un foncteur "extension" $E:\underline{H}^{\underline{B}} \longrightarrow \underline{H}^{\underline{A}}$ de sorte que $R.E$ soit l'identité de $\underline{H}^{\underline{B}}$ et $E.R$ soit équivalent à l'identité de $\underline{H}^{\underline{A}}$.

A cet effet, procédons d'abord à des choix: à tout objet A de $\underline{A}$ faisons correspondre $r_A:B_A \longrightarrow A$ et $i_A:A \longrightarrow B_A$ tels que $r_A.i_A = 1_A$ et $B_A \in \underline{B}_o$; convenons de prendre $r_A = i_A = 1_A$ lorsque $A \in \underline{B}_o$. De même, à tout idempotent $u:C \longrightarrow C$ dans $\underline{H}$ faisons cor-

respondre (condition S) un épi $s_u : C \longrightarrow \overline{C}$ et un mono $j_u : \overline{C} \longrightarrow C$ tels que $j_u . s_u = u$; convenons de prendre $s_u = j_u = 1_C$ lorsque $u = 1_C$.

Considérons alors un foncteur $F : \underline{B} \longrightarrow \underline{H}$ et définissons son extension $E(F) = \overline{F} : \underline{A} \longrightarrow \underline{H}$ de la manière suivante: si $a : A \longrightarrow A'$ est une flèche de $\underline{A}$ on pose:

$$\overline{F}(a) = s_{A'} . F(i_{A'} . a . r_A) . j_A \ ,$$

où j_A et s_A sont des abrégés de $j_{F(i_A . r_A)}$ et de $s_{F(i_A . r_A)}$; on les notera aussi de façon plus précise, si besoin, par j_A^F et s_A^F.

$\overline{F}$ est bien un foncteur, car

- $\overline{F}(1_A) = s_A . F(i_A . r_A) . j_A = s_A . j_A . s_A . j_A = 1_{\overline{F(B_A)}}$,
- pour $a : A \longrightarrow A'$ et $a' : A' \longrightarrow A''$, on trouve:

$$\begin{aligned}
\overline{F}(a' . a) &= s_{A''} . F(i_{A''} . a' . a . r_A) . j_A \\
&= s_{A''} . F(i_{A''} . a' . r_{A'} . i_{A'} . r_{A'} . i_{A'} . a . r_A) . j_A \\
&= s_{A''} . F(i_{A''} . a' . r_{A'}) . F(i_{A'} . r_{A'}) . F(i_{A'} . a . r_A) . j_A \\
&= s_{A''} . F(i_{A''} . a' . r_{A'}) . j_{A'} . s_{A'} . F(i_{A'} . a . r_A) . j_A \\
&= \overline{F}(a') . \overline{F}(a) \ .
\end{aligned}$$

C'est bien une extension de F, car si $b : B \longrightarrow B'$ est une flèche de $\underline{B}$, on trouve:

$$\overline{F}(b) = s_{B'} . F(i_{B'} . b . r_B) . j_B \ ,$$

et comme $i_{B'} = r_{B'} = 1_{B'}$ et $i_B = r_B = 1_B$, il vient $s_{B'} = s_{1_{F(B')}} = 1_{F(B')}$ et $j_B = j_{1_{F(B)}} = 1_{F(B)}$, donc $\overline{F}(b) = F(b)$.

Définissons l'extension E sur les transformations naturelles; soit $t : F \longrightarrow G$ une tranformation naturelle; son extension $E(t) = \overline{t} : \overline{F} \longrightarrow \overline{G}$ est donnée par la formule suivante:

$$\overline{t}(A) = s_A^G . t(B_A) . j_A^F \quad , \text{ où } A \in \underline{A}_o .$$

On vérifie sans peine que c'est bien une transformation naturelle et les choix effectués au début montrent que $\overline{t}(B) = t(B)$ pour un objet B de $\underline{B}$.

Reste à définir l'équivalence n entre l'identité de $\underline{H}^{\underline{A}}$ et l'endofoncteur E.R de $\underline{H}^{\underline{A}}$. Soit $F^* : \underline{A} \longrightarrow \underline{H}$; posons $F = R(F^*)$ et

$\overline{F} = E(F)$; alors $n(F^*):F^* \longrightarrow F$ est donnée en un objet A par:

$$n(F^*)(A) = s_A^F.F^*(i_A) .$$

On vérifie sans peine que $n(F^*)$ est une transformation naturelle inversible (l'inverse de $s_A^F.F^*(i_A)$ étant $F^*(r_A).j_A^F$) et que l'application qui à F^* fait correspondre $n(F^*)$ définit bien n comme transformation naturelle de l'identité de $\underline{H}^{\underline{A}}$ vers E.R .

Remarques.

1- Le résultat obtenu en termes de "classes" et d'ensembles s'énonce aisément en termes d'univers emboîtés. En particulier, on peut remplacer la notion de "légitimité" par celle de "f-légitimité": $\underline{A}$ est dite f-légitime lorsque $\underline{A}(A,A')$ est un ensemble fini pour toute paire (A,A') d'objets de $\underline{A}$; le résultat s'énonce alors: si $\underline{A}$ est une catégorie f-légitime, la catégorie $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ est encore f-légitime à la condition nécessaire et suffisante que $\underline{A}$ admette un ensemble fini $\underline{B}_o$ d'objets tel que tout objet de $\underline{A}$ soit rétracte d'un objet de $\underline{B}_o$.

2- Si $\underline{A}$ est la catégorie associée à une classe ordonnée $(\underline{A}_o, \leqslant)$, la catégorie $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ est légitime (resp. f-légitime) si et seulement si $\underline{A}_o$ est un ensemble (resp. un ensemble fini).

3- Soit q un foncteur de $\underline{Ens}$ vers une catégorie légitime $\underline{H}$ satisfaisant la condition (S). Alors $\underline{H}^{\underline{A}}$ est légitime sous la même condition que $\underline{Ens}^{\underline{A}}$.