Un topo sur les topos

Alain Connes

May 18, 2019

Abstract

Je retrace[1] quelques étapes dans la démarche intellectuelle qui a conduit Alexandre Grothendieck, à partir d'une "emmerdante rédaction" qu'il devait faire sur l'algèbre homologique, à découvrir et mettre au point la notion de topos. Je cite de longs passages de "Récoltes et Semailles" qui éclairent la notion de topos. J'essaie d'expliquer en quel sens cette notion a une portée considérable grâce en particulier aux nuances qu'elle introduit entre le vrai et le faux. Je donne à la fin de mon exposé, et pour en assurer l'originalité, un exemple d'un paysage mathématique insolite, celui de la caractéristique 1, qui se dévoile naturellement en suivant cette "naïveté du petit enfant" que Grothendieck chérissait. Le point de départ est sa présentation des catégories additives décrite par Pierre Gabriel en 1962, ainsi que le besoin de ne jamais rajouter d'axiome artificiel. Le point d'arrivée est le "Site Arithmétique" qui joue un rôle essentiel dans nos travaux en collaboration avec C. Consani, et qui m'a convaincu de la pertinence du concept de topos.

Contents

1 Introduction **1**

2 Deuxième thèse **2**

3 Le Tohoku **3**

4 Tous les chevaux du roi **5**

5 Topos **6**

6 Nouveau paradigme **8**

[1]Conférence du 7 novembre 2017, dans le cadre du séminaire "Lectures grothendieckiennes" de l'ENS. (*organisateur du séminaire* : Frédéric Jaëck (ENS), *transcription* : Denise Vella-Chemla). Je remercie Denise Vella-Chemla pour son aide et Laurent Lafforgue pour ses critiques pertinentes d'une version préliminaire de ce texte et pour m'avoir signalé la référence [22].

7 Une métaphore **11**

8 Vérité dans un topos **12**
8.1 À deux pas de la vérité 14
8.2 La vérité chez les carquois 16

9 Cribles **17**

10 Points d'un topos **19**

11 Éloge de la lenteur **22**

12 Le monde de la caractéristique 1 **24**

13 Le site arithmétique **27**

1 Introduction

Pour me conformer à l'esprit de ce séminaire: "Grothendieck, avant tout" je vais essayer de m'effacer le plus possible devant lui[2] et de retracer, de manière hypothétique bien entendu, le parcours qui l'a amené aux topos. Et surtout, je vais essayer de vous donner une métaphore éclairante pour ce que c'est qu'un topos, et vous expliquer ce qu'il y a d'extraordinaire dans cette découverte, d'un point de vue philosophique, au sens où donner un topos introduit des nuances considérables dans la notion de vérité. J'essaierai d'expliquer cela par des exemples, rien de tel qu'un bon exemple pour comprendre de quoi il s'agit. Je vais vous donner un exemple d'un topos qui permet de formuler être à 3 pas de la vérité, ou à 5 pas de la vérité, etc. Mais l'essentiel sera de laisser la parole à Grothendieck. Il a donné cent heures de conférences à Buffalo en 1973, qui ont été enregistrées en audio. Au tout début (que nous écouterons), il explique comment il va faire son cours sur les topos. Il s'est exprimé sur les topos dans "Récoltes et semailles" [23], et son texte, que nous citerons abondamment en ce qui concerne les topos, donne, de manière non technique, de nombreuses clefs pour comprendre l'originalité et l'intérêt de cette découverte.
Nous verrons, à la fin de cet exposé, un exemple où la méthode de pensée chère à Grothendieck, qui consiste à ne pas se satisfaire quand on rajoute une condition artificielle pour se simplifier la vie, nous permettra d'accéder naturellement au "monde de la caractéristique 1". Nous décrirons brièvement ce monde et montrerons qu'il débouche en particulier sur le site arithmétique, un topos semi-annelé que nous avons rencontré dans nos travaux avec C. Consani, rencontre qui m'a converti au concept de topos.

[2] sauf dans les deux dernières sections

2 Deuxième thèse

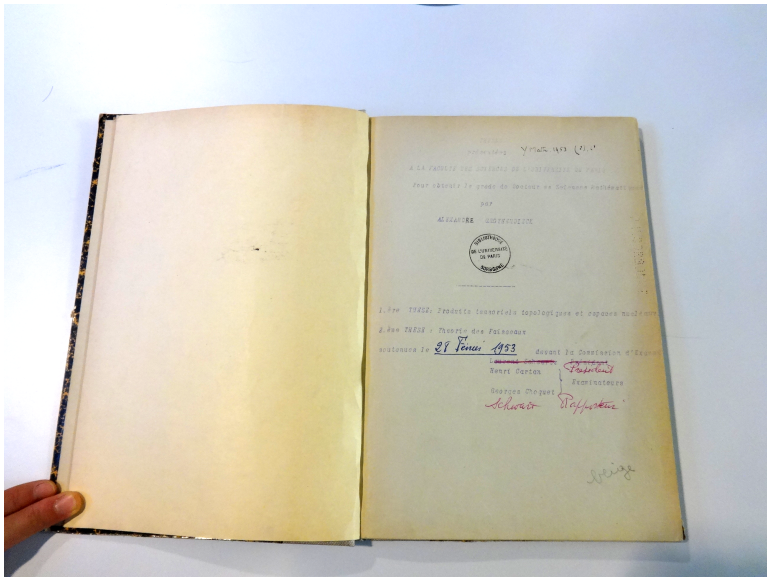


Figure 1: Thèse Grothendieck

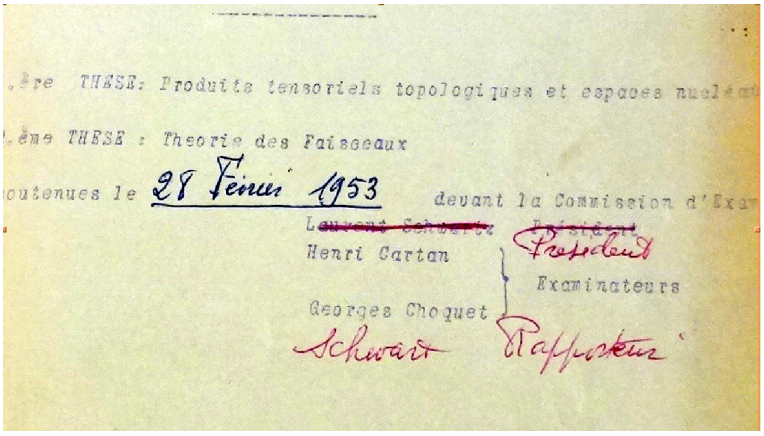


Figure 2: Détails première page

La première image que je vous montre, c'est une image que je dois à Charles Alunni qui m'a envoyé un courriel un jour en me disant qu'il aurait bien voulu avoir la deuxième thèse de Grothendieck. À l'époque, quand on passait une thèse, quand j'ai passé ma thèse par exemple, on défendait toujours une deuxième thèse. Cette deuxième thèse n'était pas écrite. On devait la défendre oralement devant le jury, le sujet nous était imposé et était par définition éloigné de notre sujet de thèse. Dans le cas de Grothendieck, il a fait sa thèse sur les produits tensoriels topologiques et les espaces nucléaires, avec ses contributions fondamentales à l'analyse fonctionnelle. Ce qui est amusant, c'est

qu'on peut penser que ce qui a fait bifurquer Grothendieck, premier pas sur le chemin qui éventuellement l'a amené à l'idée du topos, c'est sa deuxième thèse. En effet, la deuxième thèse de Grothendieck (c'est écrit sur la première page, voir figure 2) avait pour sujet la théorie des faisceaux.

D'ailleurs sur cette page, si vous regardez bien, vous allez trouver qu'il s'est glissé une erreur. En effet il y a 3 examinateurs, il y a Henri Cartan, Laurent Schwartz et puis il y a un troisième examinateur qui s'appelle *Georges* Choquet! Intrigué j'ai cherché sur wikipedia pour voir s'il n'y avait pas un mathématicien appelé Georges Choquet. J'ai trouvé un ecclésiastique du nom de Georges Choquet, qui est mort pendant la deuxième guerre mondiale. Il faut se rendre à l'évidence, c'est bien une erreur, et c'est bien Gustave Choquet, né le 1 mars 1915, qui était examinateur de Grothendieck, dont la thèse a été soutenue le 28 Février 1953.

3 Le Tohoku

En 1955, Grothendieck s'intéressait bien sûr aux faisceaux, qui sont une découverte cruciale de Jean Leray, avec celle des suites spectrales. Les échanges de lettres [6] entre Jean-Pierre Serre et Grothendieck sont très instructifs et j'ai choisi un passage où l'on voit apparaître l'article fameux qu'on appelle familièrement "Le Tohoku". Cet article est paru dans un journal qui s'appelle le Tohoku Mathematical Journal mais l'article lui même en fait, on l'appelle Tohoku. Voici (Figure 3) un extrait d'une lettre de Grothendieck à J. P. Serre.

Mon cher Serre,

Merci pour les divers papiers que généreusement tu m'as envoyés, ainsi que pour ta lettre. Rien de neuf de mon côté. J'ai fini mon emmerdante rédaction d'algèbre homologique (mais c'est la seule façon que j'aie pour comprendre, à force d'insister, comment marchent les choses) que j'ai envoyée à Delsarte, qui justement manquait de rédactions pour la dactylo ; je l'ai proposée à Tannaka pour le Tôhoku, il paraît que les articles-fleuves ne les rebutent pas. J'ai lu au moins les énoncés des livres de Weil sur les variétés abéliennes, dans l'espoir qu'on a arrangé depuis les démonstrations, vraiment décourageantes chez Weil ; son langage me dégoûte en plus. Je passe mon temps soit à apprendre, soit à rédiger les variétés, c'est amusant mais long bien sûr ; mais il n'est pas question de recherche avant d'avoir avalé une montagne de choses nouvelles.

Figure 3: Passage d'une lettre de A. Grothendieck à J. P. Serre.

(voir [6]) où il mentionne son article comme une *emmerdante rédaction*. Cet extrait donne d'ailleurs un aperçu de la méthode que Grothendieck utilise tout le temps quand il travaille. Il va au fond des choses et n'hésite jamais devant une tâche que n'importe quel mathématicien considérerait comme étant sans intérêt, rébarbative, n'allant rien lui rapporter.
Dans le *Tohoku*, Grothendieck introduit les catégories abéliennes et développe leurs propriétés générales, puis il met au point l'algèbre homologique dans ce cadre[3]. Cet aspect de son article est bien situé historiquement dans la ligne des travaux de S. MacLane (voir [27]) et par exemple du livre de Cartan-Eilenberg (voir [4]) sur l'algèbre homologique. La raison pour laquelle je reconnais un signe avant-coureur des topos dans cet article, c'est à cause d'un exemple de catégorie abélienne que donne Grothendieck (voir §1.6 dans [21]). L'exemple de la catégorie abélienne des modules sur un anneau est le sujet du livre de Cartan-Eilenberg. L'exemple des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique est central bien entendu ; là encore, pas de surprise puisque c'était pour unifier ces deux exemples qu'il avait fait son travail de généralisation. Mais il avait en tête un troisième exemple, c'est ce qu'il appelait les catégories de diagrammes. Avant de s'intéresser à l'aspect additif, Grothendieck définit la catégorie des foncteurs d'une petite catégorie à valeurs dans une catégorie quelconque. Il s'intéresse en particulier à celle des groupes abéliens et aux diagrammes de groupes abéliens et montre qu'ils forment encore une catégorie abélienne. En fait on reconnait là les deux piliers de la notion de topos. Pourvu que l'on ait l'idée – que Grothendieck a eue – de ne pas se limiter aux faisceaux de groupes abéliens mais de passer aux faisceaux d'ensembles, on découvrira que la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ des foncteurs[4] d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles est d'une richesse insoupçonnée. Il est trompeur de l'envisager comme *discrète* et pour s'en convaincre, il suffit de prendre l'exemple des ensembles simpliciaux, il s'agit bien là d'une catégorie de diagrammes mais qui est l'un des modèles pour la théorie de l'homotopie[5]!

4 Tous les chevaux du roi

Écoutons la voix[6] de Grothendieck au début de ses conférences à Buffalo en 1973:

"A topos is just what could be considered being the main object of study of topology. And so the theory of topoi is, I mean, a generalization of classical general topology, it's what I really like to consider. So as background it requires to have some familiarity with handling topological spaces and continuous maps, homeomorphisms and such things, and, on the other hand, familiarity with the language of categories and that's about all. So later we will give some

[3]Il mets en particulier au point les axiomes qui permettent d'assurer l'existence de suffisamment d'objets injectifs, ce qui joue un rôle essentiel pour les faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique quelconque.

[4]contravariants par convention

[5]On consultera avec profit la lettre de Grothendieck à Thomason du 2 Avril 1991, accessible en cliquant ici.

[6]Il suffit de cliquer dessus pour l'écouter.

explanations, motivation for introducing something more general than topological spaces and give examples but in order to understand the notion of the topos, and its relevance to general topology, one will require some familiarity with the language of sheaves on a topological space. Now I guess that this notion is not that familiar to everybody, therefore I think I will have to give a rather sound introduction to sheaves on topological spaces, I will not assume anything known about this notion. I will start by a review of standard sheaf theory on topological spaces "

Il s'engage alors, avec cette incroyable patience à laquelle il faut qu'on s'habitue, à expliquer tous les détails, à aller jusqu'au bout de tous les détails de la théorie des faisceaux. Cette patience est une qualité absolument essentielle dans sa démarche.
Maintenant, je vais vous lire du Grothendieck, puisque le principe du séminaire est de s'effacer devant lui. Voilà ce qu'il dit dans Récoltes et Semailles [23] sur le passage aux topos:

Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amenés à regarder les "espaces" et "variétés" en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels "espaces", déjà familiers à tous. Or, il s'est avéré que cette notion d'espace est inadéquate pour rendre compte des "invariants topologiques" les plus essentiels qui expriment la "forme" des variétés algébriques "abstraites" (comme celles auxquelles s'appliquent les conjectures de Weil), voire celle des "schémas" généraux (généralisant les anciennes variétés).
Pour les "épousailles" attendues, "du nombre et de la grandeur", c'était comme un lit décidément étriqué, où l'un seulement des futurs conjoints (à savoir, l'épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois ! Le "principe nouveau" qui restait à trouver, pour consommer les épousailles promises par des fées propices, ce n'était autre aussi que ce "lit" spacieux qui manquait aux futurs époux, sans que personne jusque-là s'en soit seulement aperçu. . . . Ce "lit à deux places" est apparu (comme par un coup de baguette magique. . .) avec l'idée du topos. Cette idée englobe, dans une intuition topologique commune, aussi bien les traditionnels espaces (topologiques), incarnant le monde de la grandeur continue, que les (soi-disant) "espaces" (ou "variétés") des géomètres algébristes abstraits impénitents, ainsi que d'innombrables autres types de structures, qui jusque-là avaient semblé rivées irrémédiablement au "monde arithmétique" des agrégats "discontinus" ou "discrets".
C'est le point de vue des faisceaux qui a été le guide silencieux et sûr, la clef efficace (et nullement secrète), me menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde. . .), que

"tous les chevaux du roi
y pourraient boire ensemble. . ."

– comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou au moins entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu'aucun de mes savants élèves et amis d'antan. . .

5 Topos

Toujours dans Récoltes et Semailles ([23]) Grothendieck donne alors une description conceptuelle de la notion de topos:

La clef a été la même, tant dans l'approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque, du "site"), que dans celle du topos. C'est l'idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire. Considérons l'ensemble formé de tous les faisceaux sur un espace (topologique) donné, ou, si on veut, cet arsenal prodigieux formé de tous ces "mètres" servant à l'arpenter[7]*(*).*
Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez" ; à savoir, une structure dite de "catégorie". (Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n'en aura nul besoin pour la suite.) C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace.
C'est bien là chose licite (pour le "bon sens mathématique"), car il se trouve qu'on peut "reconstituer" de toutes pièces un espace topologique[8]*(**) en termes de cette "catégorie de faisceaux" (ou de cet arsenal d'arpentage) associée. (De le vérifier est un simple exercice – une fois la question posée, certes...). Il n'en faut pas plus pour être assuré que (s'il nous convient pour une raison ou une autre) nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" (ou de l'"arsenal") associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer.*
Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion (celle d'"espace" en l'occurence) en termes d'une autre (celle de "catégorie"). À chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre.
Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque-là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète").
Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" – une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment

[7](*) (À l'intention du mathématicien.) À vrai dire, il s'agit ici des faisceaux d'*ensembles*, et non des faisceaux *abéliens*, introduits par Leray comme coefficients les plus généraux pour former des "groupes de cohomologie". Je crois d'ailleurs être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d'ensembles (à partir de 1955, dans mon article "A general theory of fibre spaces with structure sheaf" à l'Université de Kansas).

[8](**) (À l'intention du mathématicien.) À strictement parler, ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres". Ceux-ci comprennent cependant la quasi-totalité des espaces qu'on rencontre communément, et notamment tous les espaces "séparés" chers aux analystes.

en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir[9]*(*), ces "catégories" (ou "arsenaux") sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière.*
Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées[10]*(**), qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles – celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point.*
Ceci dit, un "espace nouveau style" (ou topos), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés (explicitement désignées une fois pour toutes, bien sûr) d'une telle "catégorie de faisceaux".
Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points[11]*(*), et les relations de proximité etc. entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray – et ceci fait, franchir le pas.*

6 Nouveau paradigme

Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d'"évidence", par sa simplicité (à la limite, dirait-on, du naïf ou du simpliste, voire du "bébête") – par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça !", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. À ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance...
La notion de schéma constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace. Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au-delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle (surtout à travers les thèmes cohomologiques ℓ-adique et cristallin qui en sont issus, et à travers eux, dans la démonstration des conjectures de Weil).

[9](*) Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, est celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée, considérée comme une sorte de "double" de l'espace, "de l'autre côté du miroir"...

[10](**) (À l'intention du mathématicien.) Il s'agit ici surtout de propriétés que j'ai introduites en théorie des catégories sous le nom de "propriétés d'exactitude" (en même temps que la notion catégorique moderne de "limites" inductives et projectives générales). Voir "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohoku Math. Journal*, 1957 (pp. 119-221).

[11](*) Ainsi, on peut construire des topos très "gros", qui n'ont qu'un seul "point", ou même pas de "points" du tout !

Comme sa sœur aînée (et quasi-jumelle), elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.
Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux "espaces" (appelés plutôt "topos", pour ne pas indisposer des oreilles délicates[12](**)), les intuitions et les constructions "géométriques" les plus essentielles[13](*), familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Autrement dit, on dispose pour les nouveaux objets de toute la riche gamme des images et associations mentales, des notions et de certaines au moins des techniques, qui précédemment restaient restreintes aux objets ancien style.
Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque-là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" – aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires (et pour cause. . .).
La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est assez vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" du schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes" !) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" pour donner tout leur sens à ces conjectures, et (qui sait !) de fournir peut-être les moyens de les démontrer.
C'est dans ces pages que je suis en train d'écrire que, pour la première fois dans ma vie de mathématicien, je prends le loisir d'évoquer (ne serait-ce qu'à moi-même) l'ensemble des maîtres-thèmes et des grandes idées directrices dans mon œuvre mathématique. Cela m'amène à mieux apprécier la place et la portée de chacun de ces thèmes, et des "points de vue" qu'ils incarnent, dans la grande vision géométrique qui les unit et dont ils sont issus. C'est par ce travail que sont apparues en pleine lumière les deux idées novatrices névralgiques dans le premier et puissant essor de la géométrie nouvelle : l'idée des schémas, et celle des topos.
C'est la deuxième de ces idées, celle des topos, qui à présent m'apparaît comme la plus profonde des deux. Si d'aventure, vers la fin des années cinquante, je n'avais pas retroussé mes manches, pour développer obstinément jour après jour, tout au long de douze longues années, un "outil schématique" d'une délicatesse et d'une puissance parfaites – il me semblerait quasiment impensable pourtant que dans les dix ou vingt ans déjà qui ont suivi, d'autres que moi auraient pu à la longue s'empêcher d'introduire à la fin des fins (fût-ce à leur corps défendant. . .) la notion qui visiblement s'imposait, et de dresser tant bien que mal tout au moins quelques vétustes baraquements en "préfab", à défaut des spacieuses et confortables demeures que j'ai eu à cœur d'assembler pierre par pierre et de monter de mes mains.

[12](**) Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécificité "topologique" de la notion. (Ainsi, il y a des "espaces vectoriels", mais pas de "topos vectoriels" jusqu'à nouvel ordre !) Il s'impose de garder les deux expressions conjointement, chacune avec sa spécificité propre.

[13](*) Parmi ces "constructions", il y a notamment celle de tous les "invariants topologiques" familiers, y compris les invariants cohomologiques. Pour ces derniers, j'avais fait tout ce qu'il fallait dans l'article déjà cité ("Tohoku" 1955), pour pouvoir leur donner un sens pour tout "topos".



Figure 4: Poster “Topos à l’IHES" 2015

Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites"). Et, à supposer même cette idée-là déjà gracieusement fournie, et avec elle la timide promesse qu'elle semblait receler – je ne vois personne d'autre, que ce soit parmi mes amis d'antan ou parmi mes élèves, qui aurait eu le souffle, et surtout la foi, pour mener à terme cette humble idée (si dérisoire en apparence, alors que le but semblait infiniment lointain. . .) : depuis ses premiers débuts balbutiants, jusqu'à la pleine maturité de la "maîtrise de la cohomologie étale", en quoi elle a fini par s'incarner entre mes mains, au cours des années qui ont suivi.
[14](*)
Oui, la rivière est profonde, et vastes et paisibles sont les eaux de mon enfance, dans un royaume que j'ai cru quitter il y a longtemps. Tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble à l'aise et tout leur soûl, sans les épuiser ! Elles viennent des glaciers, ardentes comme ces neiges lointaines, et elles ont la douceur de la glaise des plaines. Je viens de parler d'un de ces chevaux, qu'un enfant avait amené boire et qui a bu son content, longuement. Et j'en ai vu un autre venant boire un moment, sur les traces du même gamin si ça se trouve – mais là ça n'a pas traîné. Quelqu'un a dû le chasser. Et c'est tout, autant dire.
Je vois pourtant des troupeaux innombrables de chevaux assoiffés qui errent dans la plaine – et pas plus tard que ce matin même leurs hennissements m'ont tiré du lit, à une heure indue, moi qui vais sur mes soixante ans et qui aime la tranquillité. Il n'y a rien eu à faire, il a fallu que je me lève. Ça me fait peine de les voir, à l'état de rosses efflanquées, alors que la bonne eau pourtant ne manque pas, ni les verts pâturages. Mais on dirait qu'un sortilège malveillant a été jeté sur cette contrée que j'avais connue accueillante, et a condamné l'accès à ces eaux généreuses. Ou peut-être est-ce un coup monté par les maquignons du pays, pour faire tomber les prix qui sait ? Ou c'est un pays peut-être où il n'y a plus d'enfants pour mener boire les chevaux, et où les chevaux ont soif, faute d'un gamin qui retrouve le chemin qui mène à la rivière. . .

7 Une métaphore

Voici une métaphore qui, je l'espère, vous aidera à acquérir une image mentale de ce que c'est qu'un topos[15].

[14](*) (À l'intention du lecteur mathématicien.) Quand je parle de "mener à terme cette humble idée", il s'agit de l'idée de la cohomologie étale comme approche vers les conjectures de Weil. C'est inspiré par ce propos que j'avais découvert la notion de site en 1958, et que cette notion (ou la notion très voisine de topos) et le formalisme cohomologique étale ont été développés entre 1962 et 1966 sous mon impulsion (avec l'assistance de quelques collaborateurs dont il sera question en temps et lieu).

Quand je parle de "souffle" et de "foi", il s'agit là des qualités de nature "non-technique", et qui ici m'apparaissent bien comme les qualités essentielles. À un autre niveau, je pourrais y ajouter aussi ce que j'appellerais le "flair cohomologique", c'est-à-dire le genre de flair qui s'était développé en moi pour l'édification des théories cohomologiques. J'avais cru le communiquer à mes élèves cohomologistes. Avec un recul de dix-sept ans après mon départ du monde mathématique, je constate qu'il ne s'est conservé en aucun d'eux.

[15]Cette métaphore est directement reliée au point de vue développé par Lawvere et Tierney sur l'axiomatisation de la théorie des ensembles (voir [28])

On avait l'habitude, comme le dit Grothendieck, de mettre l'espace à étudier sur le devant de la scène. On décrivait un espace topologique X comme un ensemble de points muni d'une notion de proximité qui est donnée par la classe des sous-ensembles ouverts (*i.e.* les sous-ensembles V pour lesquels il suffit d'être assez proche d'un des points de V pour être dans V). Ce que fait Grothendieck, c'est d'opérer un changement radical de point de vue. L'espace X n'occupe plus le devant de la scène. Grothendieck lui fait jouer le rôle de Deus ex machina, qui n'est pas présent, qui reste dans les coulisses.
Les acteurs sur la scène sont les mêmes que dans les mathématiques ordinaires, ce sont les ensembles, munis de leurs structures familières, groupes, anneaux etc, etc, mais ils possèdent une variabilité nouvelle qui est due au topos et qui caractérise celui-ci. Ils dépendent d'un aléa.
Ainsi, lorsque l'on travaille dans un topos, tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires, sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers exclu, comme la situation dépend d'un aléa, on ne peut plus raisonner par l'absurde: il se peut qu'une propriété soit vraie pour certaines valeurs de l'aléa sans être vraie pour toutes. Heureusement, ceci n'empêche nullement d'appliquer tout raisonnement *constructif* qui n'utilise pas la règle du tiers exclu. Quand on travaille dans un topos, on peut faire toutes les manipulations usuelles, on peut parler de groupes abéliens, on peut parler d'algèbres, etc.
Quand le topos est celui des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, ces constructions usuelles vous donnent les faisceaux de groupes abéliens, les faisceaux d'algèbres, etc. On dispose donc d'un outil conceptuel très efficace qui consiste à savoir, lorsqu'on travaille dans un topos, que tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires pourvu que l'on ne fasse que des raisonnements constructifs.
En fait, quand on étudie les fibrés vectoriels sur un espace on prend vite l'habitude de penser à un fibré comme à un espace vectoriel variable, mais il s'agit là d'une variabilité très contrainte. Dans le cas des faisceaux d'ensembles et plus généralement des topos, on a la **bonne** notion de variabilité, celle dans laquelle toutes les opérations usuelles de la théorie des ensembles restent possibles.

8 Vérité dans un topos

Sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers-exclus. Donc ce qui apparaît, c'est qu'on ne peut plus affirmer que ou bien la proposition p est vraie, ou bien la proposition $non\ p$ est vraie, on n'a plus la règle du tiers-exclus. On va très vite voir un exemple concret d'un topos pour lequel la notion de vérité devient plus subtile que le simple vrai ou faux que nous utilisons familièrement. En fait l'on est souvent, même dans la vie courante, confrontés à des situations comme des discussions qui impliquent un jugement, "x est-il meilleur mathématicien que y ?", ou quand on assiste à une discussion politique, et pour lesquelles la simple alternative : "x a raison ou tort ?" est bien trop simpliste. On n'a pas l'outil conceptuel qu'il faut pour juger en tenant compte des subtilités du contexte. J'ai trouvé parmi les réponses de Grothendieck aux nombreuses questions qui ont suivi son exposé au CERN en 1972, une description par-

faite de ce manque de subtilité dans la dichotomie usuelle “vrai–faux". Voici ce que dit Grothendieck dans sa réponse:

A propos de votre image de l'homme ange et démon, je ne crois pas à cette dichotomie du bien et du mal. Je ne partage pas cette façon de voir ; il y a plutôt un mélange complexe de deux principes opposés. Si vous le permettez, je vais faire une petite digression philosophique concernant le mode de pensée mathématique et son influence sur la pensée générale. Une chose m'avait déjà frappé avant d'en arriver à une critique d'ensemble de la science depuis prés de deux ans : c'est la grossiéreté, disons, du mode de raisonnement mathématique quand on le confronte avec les phénoménes de la vie, avec les phénoménes naturels. Les modéles que nous fournit la mathématique, y compris les modéles logiques, sont une sorte de lit de Procuse pour la réalité. Une chose toute particuliére aux mathématiques, c'est que chaque proposition, si l'on met à part les subtilités logiques, est ou bien vraie ou bien fausse ; il n'y a pas de milieu entre les deux, la dichotomie est totale. En fait, cela ne correspond absolument pas à la nature des choses. Dans la nature, dans la vie, il n'y a pas de propositions qui soient absolument vraies ou absolument fausses. Il y a même lieu souvent, pour bien appréhender la réalité, de prendre en ligne de compte des aspects en apparence contradictoires, en tout cas, des aspects complémentaires, et tous les deux sont importants. D'un point de vue plus élémentaire, aucune porte n'est jamais entiérement fermée ou entiérement ouverte, ça n'a pas de sens. Cette dichotomie qui provient peut-être de la mathématique, de la logique aristotélicienne, a vraiment imprégné le mode de pensée, y compris dans la vie de tous les jours et dans n'importe quel débat d'idées ou même de vie personnelle. C'est une chose que j'ai souvent remarquée en discutant avec des personnes, que ce soit en privé ou en public. En général, les personnes voient deux alternatives extrêmes et ne voient pas de milieu entre les deux. Si mon interlocuteur a choisi une certaine alternative et que j'aie une vision qui se situe au-delà de celle qu'il considére comme bonne, tout aussitôt, il m'accusera d'avoir choisi l'alternative extrême opposée, parce qu'il ne voit pas le milieu.

Je vais essayer de vous montrer à quel point l'idée du topos, due bien entendue à Grothendieck, permet précisément de formaliser la notion de vérité de manière beaucoup plus subtile! Donc on va illustrer cela par des exemples. On va utiliser des topos qui sont autres que les topos qui proviennent d'un espace topologique et qui ont une nature extrêmement simple : ce sont les topos qui consistent à prendre une petite catégorie $\mathcal{C}$ et à prendre simplement la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ de tous les foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles. Donc là, on ne fait pas de distinction entre faisceaux et pré-faisceaux. On prend tous les pré-faisceaux. On dit que ce sont tous des faisceaux. Donc à une petite catégorie $\mathcal{C}$, on associe un topos $\hat{\mathcal{C}}$ qui est en quelque sorte son dual, qui est formé de tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles, et cette classe de topos est suffisamment riche pour illustrer les nuances sur la notion de vérité.
Pour définir la notion de vérité dans un topos et voir en quel sens cette notion est différente dans un topos de la simple alternative “vrai-faux" de la théorie des ensembles, on commence par se placer dans cette théorie et on essaye de classifier les sous-objets d'un objet, *i.e.* les sous-ensembles d'un ensemble. Cela définit un foncteur $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ qui à un ensemble X associe tous ses sous-ensembles. C'est un foncteur contravari-

ant parce que si f est une application de X dans Y, on peut prendre l'image inverse $f^{-1}(B)$ des sous-ensembles de Y, donc $\mathcal{P}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des ensembles vers la catégorie des ensembles. On peut alors poser la question : "Ce foncteur est-il représentable ?". C'est à dire peut-on trouver un ensemble Ω de telle sorte que $\mathcal{P}$ soit équivalent au foncteur contravariant $X \mapsto \mathrm{Hom}(X, \Omega)$. La réponse est "oui", il est représentable à cause d'une notion que nous connaissons bien : c'est qu'à un sous-ensemble $A \subset X$ on associe sa fonction caractéristique $1_A(x)$ qui vaut 1 si x est dans A, et 0 si x n'est pas dans A. Dans la théorie des ensembles, il y a un objet privilégié Ω qui est l'objet $\Omega = \{0, 1\}$, et le foncteur $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ est le même que $X \mapsto \mathrm{Hom}(X, \Omega)$. De plus les opérations logiques d'intersection, de réunion (et de passage au complémentaire) se traduisent simplement sur l'objet Ω par les opérations

$$0 \vee x = x \vee 0 = x,\ \forall x,\ 1 \vee 1 = 1,\ \ 0 \wedge x = x \wedge 0 = 0,\ \forall x,\ 1 \wedge 1 = 1$$

Dans un topos général on peut alors poser la même question, celle de représenter le foncteur contravariant du topos vers la théorie des ensembles, qui associe à un objet l'ensemble de ses sous-objets. On montre qu'il existe un objet privilégié Ω et un morphisme $1 \xrightarrow{vrai} \Omega$ de l'objet final 1 vers Ω qui classifie les sous-objets dans le topos,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & 1 \\ \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle vrai} \\ X & \xrightarrow{\quad h \quad} & \Omega \end{array}$$

au sens où le diagramme ci-dessus donne le sous-objet Y de X comme un produit fibré. De plus cet objet Ω est muni naturellement d'une structure d'algèbre de Heyting (voir l'exposé [5] de P. Cartier au séminaire Bourbaki pour approfondir l'aperçu ci-dessus, ainsi que [28] IV. 8) dans le topos, et cette structure correspond aux opérations logiques sur les sous-objets mentionnées plus haut dans le cas du topos des ensembles. De plus J. Benabou a mis au point (voir [2]) un langage interne qui permet d'utiliser les termes du langage de la théorie usuelle des ensembles pour raisonner dans un topos donné.

8.1 À deux pas de la vérité

Passons à un exemple. Prenons un topos qui est un tout petit peu plus compliqué que celui des ensembles. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie qui n'a qu'un seul objet, et qui a pour morphismes les puissances τ^n, $n \geq 0$, d'un seul endomorphisme τ. Qu'est-ce qu'un objet du topos $\hat{\mathcal{C}}$, *i.e.* un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles? C'est simplement un ensemble muni d'une application T de X dans X. C'est tout. On a un ensemble X car la catégorie $\mathcal{C}$ n'a qu'un objet. Et il suffit de connaître la transformation T de de X dans X qui correspond au morphisme τ. Ainsi les objets du topos $\hat{\mathcal{C}}$ sont les ensembles munis d'une transformation. Les morphismes de l'objet (X, T) vers l'objet (Y, S) sont les applications f de X dans Y qui respectent la transformation, c'est à dire

qui vérifient $f(Tx) = Sf(x)$. On a donc une catégorie, et cette catégorie est un topos car elle est le dual de la petite catégorie $\mathcal{C}$.
Cherchons Ω pour ce topos $\hat{\mathcal{C}}$, *i.e.* cherchons à classifier les sous-objets d'un objet. Essayons d'abord de classifier les sous-objets d'un objet en utilisant le $\Omega = \{0, 1\}$ qui marchait pour la catégorie des ensembles. On essaye la fonction caractéristique, comme on faisait tout à l'heure. Après tout, si je prends un objet (X, T) et un sous-objet, c'est un sous-ensemble $Y \subset X$ qui est stable par l'application, *i.e.* $TY \subset Y$ et il est donc déterminé par sa fonction caractéristique. Donc je vais considérer la fonction caratéristique 1_Y pour commencer. Pourquoi est-ce que je ne peux pas donner la valeur 0, sur le complémentaire ? Eh bien parce qu'il peut y avoir des points du complémentaire de Y qui vont finir par atterrir dans l'ensemble Y, le complémentaire n'est pas, en général, invariant par T. Il peut très bien se produire qu'un point $x \notin Y$ du complémentaire vérifie $Tx \in Y$. Alors comment faire ? Pour tout élément x de X, il va exister un plus petit entier n tel que $T^n(x) \in Y$, donc on va associer à x cet entier $n(x)$ et on lui donne la valeur $n(x) = \infty$, bien sûr, si on arrive jamais dans le sous-ensemble, *i.e.* si $T^n(x) \notin Y$ pour tout n.

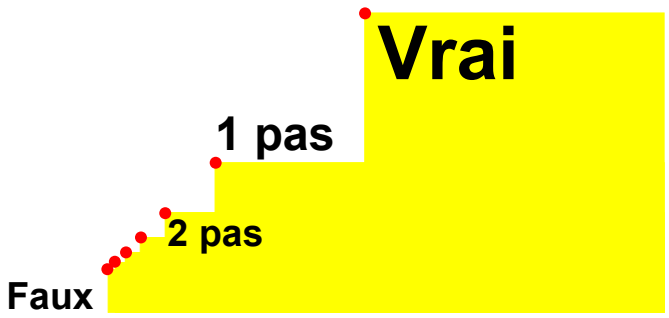


Figure 5: A deux pas

Donc on comprend que le classifiant des sous-objets dans le topos $\hat{\mathcal{C}}$ n'est autre que l'ensemble infini $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, muni de la transformation qui remplace n par $n - 1$ si $n > 0$ mais laisse fixe $n = 0$. Donc vous voyez que pour ce topos, la notion de vérité qui, pour la théorie des ensembles, était simplement "vrai ou faux", est donnée par la figure 5, avec la transformation qui consiste à faire un pas vers la vérité. Alors qu'est-ce que ça veut dire ? Eh bien, ça veut dire qu'on a un exemple fort simple d'un topos qui permet de formaliser l'expression "être à trois pas de la vérité" et d'exprimer avec précision toutes sortes de subtilités. Bien entendu ce topos là va s'appliquer à des situations relativement simples dans lesquelles on peut estimer le nombre de pas, d'étapes, qu'il reste à effectuer pour atteindre la vraie compréhension d'un phénomène.

J'espère que cet exemple vous donnera à réfléchir sur les faiblesses de notre formation logique, qui reste bien primitive. Mon rêve est qu'il existe des philosophes qui connaissant les maths, comprennent les topos de l'intérieur, et soient capables de donner

des modèles, qui seraient utiles pour beaucoup mieux apprécier les subtilités de la notion de vérité. Donc, je voulais absolument vous donner cet exemple pour que vous le gardiez en tête, et que vous essayiez de construire d'autres exemples semblables. Je vais vous en donner un autre encore plus simple car ce sera le dual d'une petite catégorie dont les objets et les morphismes forment un ensemble fini ! Nous verrons que même dans les constructions finies, il y a une richesse combinatoire surprenante.

En fait, en général, pour le topos $\hat{\mathcal{C}}$ donné par tous les foncteurs contravariants d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles, on construit le classifiant des sous-objets Ω à partir des cribles. Un crible sur un objet X d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une famille $C(X)$ de morphismes dont le codomaine est X, et qui est stable par composition à droite. Quels sont les cribles, dans l'exemple de tout à l'heure ? On avait un seul objet ; les morphismes étaient les puissances de τ, il y avait $\mathrm{Id}, \tau, \tau^2, \ldots$. Donc dans cet exemple, un crible est toujours de la forme

$$C = \{\tau^n \mid n \geq m\}$$

où m est un entier, qui peut être $+\infty$ (cas dans lequel le crible est vide, ce qui correspond à la valeur "faux") et peut aussi être nul (ce qui correspond à la valeur "vrai").

8.2 La vérité chez les carquois

Un autre exemple très simple d'un topos dans lequel la notion de vérité devient plus subtile que le simple "vrai, faux" est l'exemple du topos des carquois. Plus précisément[16] considérons la petite catégorie $\mathcal{C}$ qui admet pour objets les deux ensembles finis $\{0\}$ et $\{0,1\}$ et pour morphismes les applications ensemblistes.
Soit $\hat{\mathcal{C}}$ le topos des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers les ensembles. Un objet de $\hat{\mathcal{C}}$ est la donnée de deux ensembles, un ensemble $S = F(\{0\})$ de sommets et un ensemble $A = F(\{0,1\})$ d'arêtes, avec deux applications $\partial_j : A \to S$ qui associent à une arête sa source et son but ainsi qu'une application $s : S \to A$ qui à un sommet associe l'arête dégénérée qui lui correspond. Il s'agit donc essentiellement d'un graphe orienté. On vérifie que l'on obtient le même topos en prenant le dual de la petite catégorie qui a un seul objet et dont les morphismes forment le monoïde $\mathcal{M}$ qui a trois éléments $1, m_0, m_1$ avec la table de multiplication

$$m_j x = m_j\,, \quad \forall j \in \{0,1\}.$$

On peut alors déterminer l'objet Ω à partir des cribles de ce monoïde $\mathcal{M}$. Le classifiant des sous-objets est construit à partir de l'ensemble $\mathcal{J}$ des idéaux à droite de $\mathcal{M}$ et de l'action à droite de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{J}$ définie par

$$J.m := \{n \in \mathcal{M} \mid mn \in J\}\,, \quad \forall J \in \mathcal{J},\ m \in \mathcal{M}.$$

[16] Dans la définition usuelle des carquois on n'inclut pas les arêtes dégénérées mais cette inclusion nous simplifiera la tâche.

On obtient que $\mathcal{J}$ contient cinq éléments

$$\mathcal{J} = \{\emptyset, \{m_0\}, \{m_1\}, \{m_0, m_1\}, \mathcal{M}\}$$

et que l'action à droite T_j de $m_j \in \mathcal{M}$ fixe $\emptyset$ et $\mathcal{M}$ (qui sont des arêtes dégénérées *i.e.* des sommets) alors que $T_j\{m_j\} = \mathcal{M}$ et $T_i\{m_j\} = \emptyset$ pour $i \neq j$. Ainsi l'ensemble V des sommets est formé des deux éléments $\emptyset$ et $\mathcal{M}$ et les arêtes non dégénérées sont celles de la Figure 6. La raison pour renommer les sommets $\emptyset$ comme "Faux" et $\mathcal{M}$ comme "Vrai" et les arêtes comme ci-dessous vient de la construction du morphisme classifiant associé à un sous-objet G' d'un objet G. Plus précisément, le morphisme classifiant f est obtenu comme suit, comme application de $\epsilon \mapsto f(\epsilon)$ de G vers Ω:

1. $\epsilon \in G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ Vrai
2. $\epsilon \notin G',\ \partial_j\epsilon \notin G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ Faux
3. $\epsilon \notin G',\ \partial_0\epsilon \notin G',\ \partial_1\epsilon \in G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ Correction
4. $\epsilon \notin G',\ \partial_0\epsilon \in G',\ \partial_1\epsilon \notin G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ Erreur
5. $\epsilon \notin G',\ \partial_0\epsilon \in G',\ \partial_1\epsilon \in G' \Rightarrow f(\epsilon) =$ Verification.

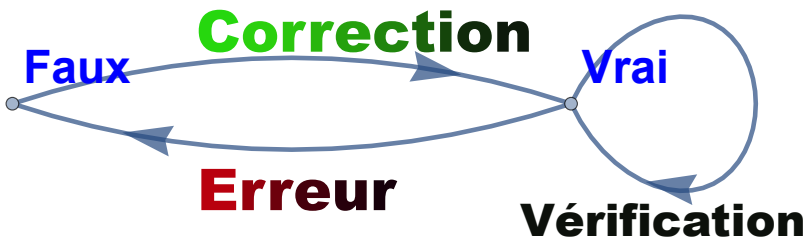


Figure 6: La vérité chez les carquois

Nous laissons au lecteur le soin d'identifier les opérations de l'algèbre de Heyting sur Ω. Ces lois sont internes au topos mais deviennent des opérations ensemblistes usuelles quand on les envisage du point de vue d'un point du topos. Le topos ci-dessus a deux points et les foncteurs d'image réciproque associés sont les foncteurs qui donnent l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes. Du point de vue des arêtes on vérifiera par exemple l'égalité : erreur $\vee$ correction = vérification.

9 Cribles

J'ai été longtemps intrigué par l'idée que Grothendieck avait utilisé le nom de "crible" dans la théorie des topos en connaissance de cause, *i.e.* en sachant que ce terme avait

déjà été utilisé par les théoriciens des nombres, chez lesquels on trouve par exemple un crible bien connu qui est le crible d'Eratosthène. J'ai fini par comprendre pourquoi le crible d'Eratosthène est un crible au sens de Grothendieck. La réponse provient d'un topos qui joue un rôle important dans nos travaux avec C. Consani (voir [10, 11] et la Section 13 ci-dessous). Ce topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ est très semblable à celui des ensembles muni d'une seule transformation, mais cette fois, c'est un peu plus compliqué quand-même, parce que, au lieu d'avoir une seule transformation, on a une action du monoïde $\mathbb{N}^\times$ des entiers multiplicatifs. C'est-à-dire que pour chaque entier, on a une transformation, et quand on fait le produit de deux entiers, les morphismes se composent. Alors c'est très amusant de voir le crible d'Eratosthène comme un crible, au sens intuitif que nous avons développé plus haut. Le crible d'Eratosthène, consiste à tamiser d'abord tous les nombres pairs sauf le premier d'entre eux qui est 2. Ils sont tous passés dans les trous sauf le premier nombre pair. Ensuite, parmi les nombres impairs, on tamise tous les multiples de 3 sauf 3 lui-même. Puis tous les multiples de 5 sauf 5. Prenons la petite catégorie qui n'a qu'un seul objet et dont les morphismes forment le monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^\times$ des entiers. On vérifie que les entiers qui passent dans les trous dans chacune des étapes forment un crible. Par exemple l'ensemble de tous les entiers pairs sauf 2 forme un crible $\Gamma(2)$, de même tous les multiples de 3 sauf 3 forment un crible $\Gamma(3)$ et ainsi de suite. Par construction une réunion quelconque de cribles est encore un crible et c'est le cas bien entendu en avançant pas à pas parmi les nombres qui ne sont pas passés dans les trous. Ceux qui restent sont les nombres premiers. Cela montre à quel point la notion de vérité est subtile pour ce topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$.

Une fois appréciée la notion de crible, on va passer brièvement à celle de topologie de Grothendieck. On peut alors comprendre la notion générale de "site" qui permet de construire tous les topos. La possibilité de définir ce qu'est une topologie de Grothendieck sur le dual de n'importe quelle petite catégorie $\mathcal{C}$ a joué, dans mon cas, un rôle clef dans mon appréciation de la notion de topos. Avant ce tournant crucial, je résistais à la présentation d'un topos sous la forme "On prend une petite catégorie, on suppose qu'elle est stable par produit fibré." A ce moment-là, mon oreille se fermait et je pensais à autre chose.... Ce qui me dérangeait dans cette présentation, et dans la description des recouvrements ouverts, c'est que je me retrouvais coincé dans l'intuition topologique usuelle ; quand on dit que la catégorie a des produits fibrés, on pense à deux ouverts et à leur intersection. Et à partir de là on peut bien sûr généraliser mais on n'a pas l'impression d'acquérir une intuition nouvelle par rapport à la topologie usuelle, on a même l'impression de compliquer singulièrement les choses en se privant des points. En effet en général pour un espace topologique X, il ne suffit pas de connaître la petite catégorie formée des ouverts, avec un morphisme unique de V dans W si $V \subset W$ pour déterminer l'espace, il faut aussi donner les recouvrements ouverts, *i.e.* les familles V_j d'ouverts dont la réunion est X. Prenons par exemple la topologie usuelle de l'intervalle $[0, 1]$ et la base dénombrable des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles. Vue comme sous-catégorie pleine de celle des ouverts, c'est une petite catégorie $\mathcal{C}$ stable par produit fibré (il est donné par l'intersection des intervalles ouverts). Soit alors X l'ensemble des nombres rationnels dans l'intervalle $[0, 1]$.

Cet ensemble est dense dans $[0,1]$ et l'application qui associe à un intervalle ouvert V de $[0,1]$ l'intersection $X \cap V$ est injective. Ainsi la catégorie ne change pas quand on passe de $[0,1]$ à X. Qu'est-ce qui va changer ? Pourquoi est-ce que si je prends le topos qui est donné par les rationnels avec ces ouverts-là, j'obtiens quelque-chose de différent du topos qui est donné par l'intervalle $[0,1]$ avec ses ouverts ordinaires ? Ils se ressemblent, ils ont l'air d'être les mêmes. Si vous cherchez, vous allez trouver qu'en fait, il y a beaucoup plus de recouvrements ouverts pour X qu'il n'y en a pour l'intervalle $[0,1]$ des nombres réels. Typiquement, prenez une suite croissante d'intervalles rationnels I_n (resp. J_n) dont la réunion est l'intervalle $[0,a)$ avec a irrationnel, (resp. $(a,1]$). La famille formée des I_n et des J_n est un recouvrement ouvert de X, *i.e.* au niveau rationnel : $\cup I_n \cup \cup J_n = X$ mais ce n'est pas un recouvrement au niveau réel car a n'est pas dans la réunion. Donc on voit qu'il y a beaucoup moins de recouvrements ouverts pour les réels qu'il n'y en a pour les rationnels. Quand on pense topologiquement, on pense ainsi, mais, comme je le disais, on reste sur l'impression de compliquer les choses en se passant des points!

Ce qui pour moi a été crucial, c'est le moment où j'ai compris que, déjà dans SGA4, Grothendieck avait réussi à définir les sites *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, on n'a absolument pas besoin de supposer *quoi que ce soit* sur la petite catégorie, et l'avantage c'est que lorsqu'on fait ça, on acquière une intuition totalement différente de la vielle intuition topologique. Vous savez, en mathématiques, l'une des difficultés quand on est devant un problème, c'est d'arriver à **penser juste**. Et penser juste, ça a l'air idiot... mais une fois qu'on arrive à regarder un paysage mathématique avec le bon point de vue, bien des difficultés s'évanouissent. Et ici, traiter le cas général (sans produits fibrés) conduit à penser juste. Alors, qu'est-ce que c'est qu'une topologie de Grothendieck dans le cas général? C'est une collection de cribles, on donne pour chaque objet une collection de cribles, et on a des conditions de compatibilité. Nous n'allons pas nous préoccuper du détail des axiomes mais de l'intuition qu'il faut avoir derrière ? Quand on pense au niveau des topos, on pense différemment : on ne pense plus au recouvrement ouvert mais à la classe des ouverts qui sont *suffisamment petits* pour être contenus dans un des ouverts du recouvrement! Passer au crible, cela revient à sélectionner les objets qui passent dans les trous. Et avec ce point de vue-là, les axiomes des cribles deviennent évidents.

10 Points d'un topos

Il y a une notion essentielle dans les topos : c'est la notion de morphisme géométrique. Elle a pour cas particulier la notion de point d'un topos, *i.e.* un point est simplement un morphisme géométrique du point, *i.e.* du topos des ensembles, vers le topos considéré. Pour comprendre ce que c'est qu'un morphisme géométrique, c'est-à-dire un morphisme d'un topos vers un autre topos, il faut avoir une certaine familiarité avec les faisceaux sur un espace. Pourquoi ? Parce que le cas des topos associés aux espaces topologiques donne la marche à suivre pour définir les morphismes géométriques. En

fait lorsqu'on a une application continue f d'un espace X vers un espace Y il se fait qu'il y a deux manières de relier les faisceaux sur X avec les faisceaux sur Y. Il y en a une qui est tautologique, presque triviale, et qui consiste à prendre un faisceau $\mathcal{O}$ sur X et à l'envoyer en avant vers un faisceau $f_*(\mathcal{O})$ sur Y. C'est trivial parce qu'il vous suffit, quand vous prenez un ouvert sur Y, de prendre son image inverse et de regarder les sections du faisceau sur X sur cet ouvert, sur l'image inverse. Cela donne un faisceau, cette définition va de soi. Mais il y a une autre manière de relier les faisceaux de X et les faisceaux de Y qui va dans l'autre sens, c'est-à-dire qui envoie un faisceau sur Y vers un faisceau sur X, et celle-là est beaucoup plus intéressante et moins triviale. Elle est visuellement évidente si on pense à un faisceau comme un espace étalé sur l'espace de base, et c'est en particulier le cas pour les faisceaux d'ensembles, mais, là où elle est vraiment intéressante, c'est que cette application, qui va dans l'autre sens, a une propriété totalement inattendue. D'abord, elle est adjointe à gauche de l'autre. Cela se vérifie, ce n'est pas surprenant, on aurait pu la définir ainsi. Donc elle est adjointe à gauche de celle qui va en avant, très bien. Mais elle a une propriété additionnelle, c'est qu'elle est exacte à gauche, c'est-à-dire qu'elle commute avec les limites finies! C'est une propriété remarquable, et pour vous en convaincre on va prendre un exemple. Tant que vous n'êtes pas frappé par un exemple, vous ne comprendrez pas. L'exemple c'est celui des ensembles simpliciaux. On part de la petite catégorie Δ dont les objets sont les ensembles finis $[n] := \{0, 1, \ldots, n\}$, totalement ordonnés, et dont les morphismes sont les applications non décroissantes. Cette catégorie joue un rôle important pour la raison suivante : en topologie, dans les années 1930, s'est développée la notion de complexe simplicial. On triangule un espace et on encode la triangulation en donnant l'ensemble X des sommets et la classe C, héréditaire, des sous-ensembles de X qui forment les sommets d'un simplexe de la triangulation. C'est ce qu'on appelle un complexe simplicial. Mais cette approche ne marche pas très bien pour les produits d'espaces car le produit de deux simplexes n'est pas un simplexe : par exemple le produit de deux intervalles est un carré qui n'est pas un simplexe. On pourrait alors penser qu'il faut rajouter les produits de simplexes mais ce ne serait pas penser juste. Il suffit en fait de mieux comprendre la réalisation géométrique d'un complexe simplicial au niveau conceptuel. Trianguler le carré implique le choix d'un ordre entre les sommets de l'intervalle et en général le choix d'un ordre sur l'ensemble X des sommets d'un complexe simplicial donne un *ensemble simplicial* : celui qui à l'entier n associe l'ensemble des applications non-décroissantes de $\{0, \ldots, n\}$ vers X dont l'image est dans C. C'est un objet du topos $\hat{\Delta}$, le topos bêbête des foncteurs contravariants de la catégorie Δ vers la catégorie des ensembles. Un théorème, que l'on peut démontrer comme cas particulier de la détermination des points d'un topos dual d'une petite catégorie, dit que les points de ce topos sont exactement les intervalles, c'est-à-dire les ensembles totalement ordonnés possédant un plus petit élément et un plus grand élément. Quand on a un point d'un topos on a un foncteur d'image inverse, qui ici est un foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux vers la catégorie des ensembles. Et si l'on prend le point associé à l'ensemble totalement ordonné qui est l'intervalle $[0, 1]$, ce foncteur est le foncteur de réalisation géométrique. Il faut bien entendu tenir compte de la topologie héritée en utilisant la topologie usuelle (associée

à l'ordre) de l'intervalle $[0,1]$ ce qui n'est pas difficile. Cela donne exactement la réalisation géométrique du complexe simplicial, et celle-ci acquière un sens beaucoup plus général.

Alors maintenant, merveille : ce foncteur d'image inverse préserve les limites finies et en particulier préserve les produits. Et donc, quand on prend le produit ponctuel de deux ensembles simpliciaux $[n] \mapsto X_n$ et $[n] \mapsto Y_n$ c'est-à-dire le foncteur contravariant $[n] \mapsto X_n \times Y_n$ de la petite catégorie Δ vers la catégorie des ensembles, la réalisation géométrique du produit est égale au produit des réalisations géométriques. La topologie suit sans difficulté. C'est un théorème de John Milnor. Mais, ce qu'il faut bien voir, c'est que la notion de topos comprend ce résultat de manière conceptuelle et le généralise de manière remarquable : cela reste vrai pour tout point d'un topos ! Le foncteur correspondant d'image inverse préserve non seulement les colimites arbitraires, mais aussi les limites finies, il préserve en particulier les produits!

Et c'est pourquoi, quand on prend un point d'un topos, le foncteur d'image inverse qui lui est associé (et qui généralise le procédé de réalisation géométrique) nous donne un point de vue ensembliste en respectant les propriétés naturelles. Dans la métaphore de la Section 7 cela revient à choisir une valeur de l'aléa, et quand on a fait ce choix on retourne dans la théorie classique des ensembles. C'est à dire que le foncteur va transformer un groupe abélien dans le topos en un vrai groupe abélien ; il va transformer toutes les notions élémentaires qu'on peut avoir en leur incarnation usuelle en théorie des ensembles.
Pour finir cette section, il y a un aspect crucial des topos sur lequel je ne vais pas m'attarder, mais qui est extrêmement important c'est celui des topos classifiants[17]. C'est-à-dire qu'un peu comme il y a un espace classifiant pour les fibrés, il y a un topos classifiant pour des notions logiques et l'on obtient ainsi une source incroyable d'exemples de topos intéressants et un lien vraiment fructueux avec la logique. Et un des exemples qui m'a convaincu, c'est l'exemple du topos qui classifie les intervalles. On définit abstraitement une théorie logique qui correspond aux intervalles (on pense à un ensemble totalement ordonné, mais il ne faut pas parler d'ensemble) eh bien on s'aperçoit que cette notion a un topos classifiant et que ce topos classifiant, c'est exactement le dual de la catégorie Δ. Ce topos est donc naturel et ne doit rien au choix quelque peu arbitraire de la petite catégorie Δ que l'on retrouve à postériori pour des raisons conceptuelles (voir [3]).

[17]Je vous renvoie à la conférence d'Olivia Caramello dans cette série, elle a fait des contributions essentielles à ce sujet et a développé un programme remarquable, ceci malgré l'hostilité à laquelle elle s'est heurté par son originalité, sa créativité et sa vision à long terme.

11 Éloge de la lenteur

Il était important de parler des topos, j'y tenais beaucoup! Mais il est également important d'essayer d'apprécier la manière de travailler de Grothendieck, cela peut nous être très utile! Je pense que l'on a besoin de corriger les mauvaises habitudes dans notre comportement. Par exemple quand on assiste de nos jours à un laïus de maths ou de physique, on s'aperçoit qu'il y a un tiers des auditeurs qui ont leur ordinateur ouvert devant eux et qui font leurs courriels, ou qui font autre chose, et ne méritent pas d'être là. C'est une évolution désastreuse, parce que je pense que ces gens là croient gagner du temps, alors que la qualité de leur concentration pour comprendre l'orateur est proche de zéro. Je pense toujours à la photo des années 60 (Figure 7) qui montre Grothendieck donnant un exposé à l'IHES, et à la qualité d'écoute de son auditoire! Ce qui frappe le plus, c'est le temps dont il semblait disposer. On a l'impression qu'il disposait d'un temps infini, qu'il n'était pas constamment dérangé. La génération Y, capable de faire 3 choses à la fois, croit gagner du temps, mais ça n'est pas vrai. On a un besoin crucial, dans notre civilisation de l'internet, de s'isoler, de pouvoir penser lentement, et de prendre le temps de se pénétrer de notions nouvelles, d'être sûr des raisonnements, de tout vérifier deux fois, trois fois sans avoir peur de perdre son temps.

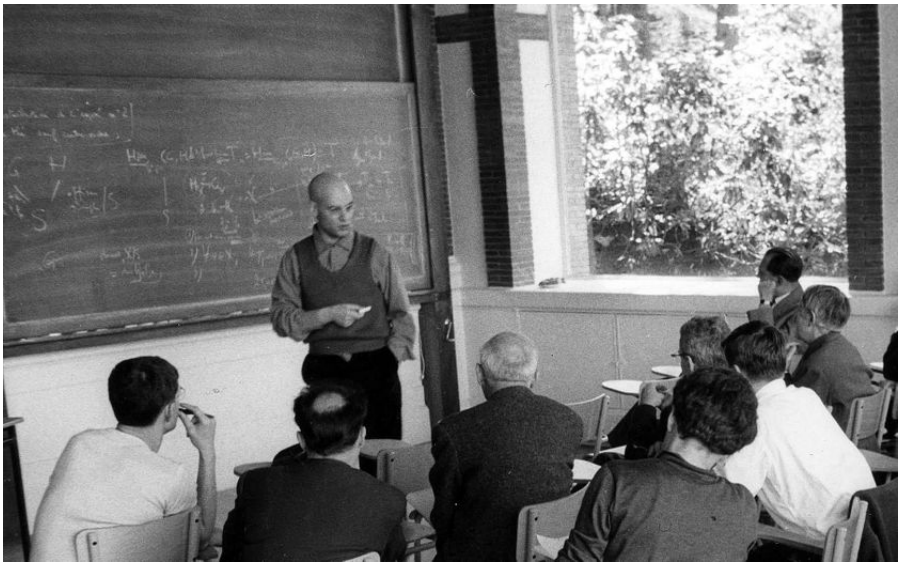


Figure 7: Grothendieck à l'IHES

C'est une question de tempo, et je voulais que vous vous rendiez compte, en écoutant parler Grothendieck, de cette lenteur fondamentale, qui, quand on la ressent au premier degré, peut sembler irritante. C'est la lenteur de la tortue, mais dans la fable c'est elle qui l'emporte. Donc voilà ce que dit Grothendieck :

"Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout

prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre. Souvent, il suffisait de l'écrire.".

Une autre qualité de Grothendieck, c'est qu'il est capable d'écrire une idée qui n'est pas encore mûre. Il est capable de se mettre directement à écrire, c'est remarquable.

"Souvent, il suffisait de l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ca permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque". Plus souvent encore, l'affirmation prise au pied de la lettre s'avère fausse, mais l'intuition qui, maladroitement encore, a essayé de s'exprimer à travers elle est juste, tout en restant floue."

Je m'arrête une seconde : en ce qui concerne l'écriture, j'avoue préférer écrire au crayon à papier, plutôt que d'utiliser l'ordinateur ... Quand on utilise l'ordinateur, on risque de se laisser parasiter par des idioties, comme se poser des questions de LaTex, ce qui est complètement ridicule, car à ce stade chercher l'"apparence" n'a aucun sens, on a envie de laisser le crayon en liberté sur la feuille de papier. C'est important, je pense. Mais laissons parler Grothendieck :

"Cette intuition peu à peu va se décanter d'une gangue toute aussi informe d'abord d'idées fausses ou inadéquates, elle va sortir peu à peu des limbes de l'incompris qui ne demande qu'à être compris, de l'inconnu qui ne demande qu'à se laisser connaître, pour prendre une forme qui n'est qu'à elle, affiner et aviver ses contours, au fur et à mesure que les questions que je pose à ces choses devant moi se font plus précises ou plus pertinentes, pour les cerner de plus en plus près. Mais il arrive aussi que par cette démarche, les coups de sonde répétés convergent vers une certaine image de la situation,..."

Cela veut dire qu'on est en train de construire une image mentale.

"...sortant des brumes avec des traits assez marqués pour entraîner un début de conviction que cette image-là exprime bien la réalité - alors qu'il n'en est rien pourtant, quand cette image est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux ; qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse. à partir des premiers "décollages" constatés entre l'image obtenue et certains faits patents, ou entre cette image et d'autres qui avaient également notre confiance".

Il faut dire là, que c'est très bien, dans ces cas-là de prendre un peu de recul, de faire autre chose, et Pierre Cartier me disait, que Grothendieck avait souvent 100 fers au feu. Quand on voit que les choses ont tendance à foirer un petit peu, il vaut mieux prendre du champ, parce qu'en fait, quand on est viscéralement attaché à une idée on a du mal

à accepter qu'elle soit fausse.

"Ce travail est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du noeud de la contradiction, qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante - jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense, comme une libération. La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte, qu'il s'agisse d'un travail mathématique, ou d'un travail de découverte de soi. C'est un moment où notre connaissance de la chose sondée soudain se renouvelle."

Et voilà maintenant un des paragraphes les plus magnifiques que je connaisse :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mûs, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée.".

Si un jour, vous n'avez pas le moral, relisez ce texte. C'est une espèce de talisman.

12 Le monde de la caractéristique 1

Dans le Tohoku, Grothendieck donne la définition d'une catégorie additive en demandant la donnée sur les morphismes entre deux objets d'une structure de groupe abélien. Mais il s'est rendu compte ensuite (voir par exemple [22]) que cette structure supplémentaire est en fait uniquement déterminée et découle d'une hypothèse naturelle sur la catégorie. Ce résultat remonte en fait à l'article [27] de S. MacLane[18]. La catégorie doit posséder un "0" c'est à dire un élément à la fois initial et final, et de plus des produits et coproduits. On demande alors simplement que l'unique morphisme naturel du coproduit vers le produit (de deux objets) soit toujours un isomorphisme. Les conditions correspondantes sur la catégorie sont notées CAd1, CAd2, CAd3 dans le texte de P. Gabriel [17] reproduit dans la Figure 8.
L'opération de somme des morphismes est alors automatiquement définie et l'on voit qu'il ne s'agit pas d'une donnée supplémentaire ce qui est bien satisfaisant (mais bien entendu cette présentation ne change rien en pratique).

Ensuite quand on définit une catégorie additive on doit ajouter une condition supplémentaire car l'opération de somme définit un monoïde commutatif mais ce n'est pas un groupe en général.

[18]Je remercie Bruno Kan pour me l'avoir signalé.

4. **Catégories additives (d'après Grothendieck).** — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

C Ad 1 : Il existe un objet nul O.

C Ad 2 : Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, le produit direct de M et de N, de même que la somme directe de M et de N existent.

LEMME 1. — *Si M et N sont deux objets de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul morphisme $h(M, N) : M \Sigma N \to M \amalg N$ tel qu'on ait*

$$q_M \circ h(M, N) \circ j_M = 1_M, \qquad q'_N \circ h(M, N) \circ j_M = 0, \qquad q'_N \circ h(M, N) \circ j'_N = 1_N,$$
$$q_M \circ h(M, N) \circ j'_N = 0.$$

Si nous désignons par $\amalg$ (resp. Σ) le foncteur

$$(M, N) \rightsquigarrow M \amalg N \text{ [resp. } (M, N) \rightsquigarrow M \Sigma N]$$

de la catégorie produit $\mathcal{C} \amalg \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, le lemme 1 peut être complété par le

LEMME 2. — *Les morphismes $h(M, N)$ définissent un morphime fonctoriel du foncteur Σ dans le foncteur $\amalg$.*

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ satisfait à un axiome de plus :

C Ad 3 : Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, le morphisme $h(M, N)$ de $M \Sigma N$ dans $M \amalg N$ est un isomorphisme.

Figure 8: Texte de Gabriel [17] décrivant l'approche de Grothendieck

La raison pour laquelle je m'appesantis sur ce point, que l'on pourrait négliger en le considérant comme purement esthétique, est la suivante. Si l'on pousse au bout le caractère artificiel de l'axiome CAd4 dans la définition des catégories additives, on obtient que, sans cet axiome, les endomorphismes $\mathrm{End}(M)$ d'un objet M de la catégorie forment alors un semi-anneau.
Cette structure mathématique hérite donc de ses lettres de noblesse, elle devient naturelle et n'a nul besoin d'une autre justification pour que l'on s'y intéresse en la mettant sur le même plan que la notion d'anneau. Les Lemmes 3 et 4 du texte de Gabriel [17] reproduits dans la Figure 9 donnent les conditions pour qu'un ensemble muni de deux lois $x + y$ et $x \circ y$ soit un semi-anneau, la seule propriété des anneaux qui n'est plus demandée est l'existence d'un inverse pour la loi d'addition.

LEMME 3. — *La loi interne* $(f, g) \to f + g$ *est commutative et associative. Le morphisme* $0_{N,M}$ *est un élément neutre pour cette loi.*

LEMME 4. — *Soient* $f, f' : M \to N$ *et* $g, g' : N \to P$ *des morphismes de* $\mathbf{C}$. *On a les égalités* $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$ *et* $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$.

Il existe des catégories satisfaisant aux axiomes C Ad 1, 2 et 3 et pour lesquelles les monoïdes Hom (M, N) ne sont pas des groupes abéliens. Ceci ne peut avoir lieu si la catégorie $\mathbf{C}$ satisfait à l'axiome C Ad 4.

C Ad 4 : Pour tout objet M, il existe un morphisme $c(M) : M \to M$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{0} & M \\ {\scriptstyle \Delta_M}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \Sigma_M} \\ M \oplus M & \xrightarrow{1_M \oplus c(M)} & M \oplus M \end{array}$$

Figure 9: Axiome CAd4

À ma connaissance Grothendieck a adopté CAd4 sans franchir le pas, si naturel de son point de vue (et de celui du petit enfant), qui consiste à considérer plus généralement les catégories "semi-additives" *i.e.* celles qui satisfont CAd1, CAd2, CAd3 mais pas CAd4. Ce que l'on découvre quand on passe des anneaux aux semi-anneaux (et bien entendu des corps aux semi-corps) c'est une nuance subtile déjà dans la classification des objets finis. Le lecteur s'en convaincra en cherchant par lui-même à démontrer l'assertion suivante sans en chercher la démonstration dans les livres[19] ou sur internet:

Assertion 12.1. *Il existe un seul semi-corps fini (commutatif ou non) qui n'est pas un corps.*

Ainsi le passage aux semi-corps rajoute un nouveau personnage parmi les corps de Galois. Un corps de Galois est de caractéristique p où p est un nombre premier. Le nouveau personnage $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ est de caractéristique 1, *i.e.* on a $x + x = x$ pour tout[20] $x \in \mathbb{B}$. Comment ne pas entendre une petite voix dire d'un ton mi-déçu, mi-envieux: "Oh, ce n'est que ça !".
On sait que le groupe multiplicatif d'un corps fini est un groupe cyclique, on peut se demander si il existe un corps dont le groupe multiplicatif soit cyclique d'ordre infini. La réponse est non pour les corps mais oui pour les semi-corps:

Assertion 12.2. *Il existe un seul semi-corps dont le groupe multiplicatif soit cyclique d'ordre infini.*

[19] Voir [20]

[20] Cette règle remplace la règle $px = 0$ de la caractéristique p, écrite trop brutalement en caractéristique 1 celle-ci serait stupide.

Il est de caractéristique 1 (*i.e.* il contient $\mathbb{B}$), c'est la réunion $q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ muni de l'"addition"

$$q^n + q^m := q^s, \;\; s = \max(n, m)$$

Il s'agit à nouveau pour le lecteur de faire la démonstration de l'assertion 12.2 en exercice, ainsi que pour la suivante:

Assertion 12.3. *Soit K un semi-corps de caractéristique 1, alors pour tout entier $n > 0$ l'application $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme injectif de K dans K.*

Ces endomorphismes Fr_n jouent le rôle du Frobenius dans le monde de la caractéristique 1. Ainsi alors qu'en caractéristique $p > 1$ on a un seul Frobenius $x \mapsto x^p$ et ses puissances, lorsqu'on travaille en caractéristique 1 on a un analogue Fr_n pour chaque entier positif n et ils vérifient la règle $\mathrm{Fr}_n \circ \mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr}_{nm}$ pour tous n, m. Dans le cas où ils sont aussi surjectifs on en déduit une action du groupe multiplicatif $\mathbb{Q}_+^*$, et cette action se prolonge naturellement en une action du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ pour le semi-corps $\mathbb{R}_+^{\max}$ qui joue un rôle essentiel dans la théorie de l'optimisation, en géométrie tropicale ainsi que dans l'école russe d'analyse semi-classique[21]. L'une des découvertes les plus convaincantes dans ce domaine est due à Maslov, Kolokolstov et Litvinov [26]. Ils montrent que la transformation de Legendre qui joue un rôle fondamental dans la physique n'est autre que la transformation de Fourier dans le cadre de l'analyse idempotente! De plus l'algèbre de caractéristique 1 est le bon cadre pour développer la thermodynamique (il serait profitable de s'atteler à la tâche de la réécrire en utilisant $\mathbb{R}_+^{\max}$) ainsi que tout ce qui concerne le passage à la limite semi-classique. Par exemple alors qu'un trait caractéristique du monde quantique est la variabilité qui provient du choix arbitraire, dans la réduction du paquet d'ondes, d'un élément du spectre d'un opérateur, cette variabilité disparait dans la limite classique–interprétée comme le passage en caractéristique 1 en utilisant les passages à la limite:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(x^{\frac{1}{\epsilon}} + y^{\frac{1}{\epsilon}} \right)^{\epsilon} = \max\{x, y\}, \;\; \sum e^{-\frac{S_j}{\hbar}} \sim e^{-\frac{\inf S_j}{\hbar}}, \;\; \text{quand } \hbar \to 0$$

–et le résultat de R. Cuninghame-Green qui montre qu'un opérateur générique en caractéristique 1 a un spectre réduit à un seul élément!

13 Le site arithmétique

L'unique semi-corps caractérisé dans l'assertion 12.2 s'appelle le semi-corps des entiers tropicaux et est noté $\mathbb{Z}_{\max} := (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ en référence aux exposants dans

[21] Historiquement, avant les utilisations de $\mathbb{R}_+^{\max}$ dans l'analyse idempotente et la géométrie tropicale, les travaux de R. Cuninghame–Green à Birmingham ont établi, dans les années 50, la théorie spectrale des matrices irréductibles à coefficients dans $\mathbb{R}_+^{\max}$ (voir [16]). Le groupe INRIA a développé une utilisation systématique du semi-corps $\mathbb{R}_+^{\max}$ au début des années 80 dans le cadre de ses travaux sur la modélisation des systèmes à événements discrets. Nous nous référons à [18, 19] pour une histoire plus détaillée du sujet et pour une preuve accablante de sa pertinence en mathématiques qui remonte à des travaux de Jacobi au dix-neuvième siècle.

q^n. Il est doté de l'opération $n \vee m := \sup(n,m)$ qui joue le rôle de l'addition et de l'addition $n, m \mapsto n+m$ qui joue le rôle de la multiplication. Les opérations sur $\mathbb{Z}$ sont étendues à $\mathbb{Z}_{\max}$ par les règles:

$$n \vee -\infty = -\infty \vee n = n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad n - \infty = -\infty + n = -\infty\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Les Frobenius en caractéristique 1 de l'assertion 12.3 dotent le semi-anneau $\mathbb{Z}_{\max}$ d'une action canonique du monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^\times$ des entiers positifs non-nuls. Elle est donnée concrètement par les endomorphismes $\mathrm{Fr}_k \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}_{\max})$:

$$\mathbb{N}^\times \to \mathrm{End}(\mathbb{Z}_{\max}) \qquad k \mapsto \mathrm{Fr}_k(n) := kn. \tag{1}$$

On note $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ le topos des ensembles dotés d'une action de $\mathbb{N}^\times$. Il est le dual de la petite catégorie ayant un seul objet $\{*\}$ dont les endomorphismes forment le semigroupe $\mathbb{N}^\times$.

Definition 13.1. *Le* Site Arithmétique *est le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ muni du faisceau structurel $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_{\max}$, considéré comme un semi-anneau dans le topos.*

Cette structure géométrique très simple de topos (semi)annelé a les propriétés requises pour que lorsque l'on prend ses points sur le semi-corps $\mathbb{R}_+^{\max}$, munis de l'action naturelle du "groupe de Galois"

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}_+^{\max}) = \mathbb{R}_+^*,\ \ \mathrm{Fr}_\lambda(x) := x^\lambda$$

on retrouve l'espace non-commutatif que j'avais introduit dans [7] et qui permet [8], par la formule de traces de [7, 24] d'obtenir la distribution $N(u)$ de comptage sous-jacente à la géométrie des nombres premiers. En particulier, avec C. Consani, nous avons montré dans nos travaux [8], que *la fonction zêta de type Hasse-Weil associée à $N(u)$ est la fonction zêta de Riemann complète*.

Theorem 13.2. *L'ensemble des points du site arithmétique sur $\mathbb{R}_+^{\max}$ s'identifie au quotient de l'espace de classes d'adèles $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ par l'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$. L'action des automorphismes de Frobenius Fr_λ de $\mathbb{R}_+^{\max}$ sur ces points correspond à l'action du groupe des classes d'idèles sur le quotient de $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ par l'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$.*

Pour calculer la distribution $N(u)$ qui "compte" le nombre de points fixes de l'action du flot de Frobenius sur les points de $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ sur $\mathbb{R}_+^{\max}$, on définit l'action $\vartheta_u \xi(x) = \xi(u^{-1}x)$ du groupe des classes d'idèles $G = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q})$ sur les fonctions à valeurs complexes sur l'espace des classes d'adèles $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ et on utilise la version distributionnelle de la formule des traces de [7, 24] sous la forme

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{distr}}\left(\int_G h(u)\vartheta(u)d^*u\right) = \sum_{v \in \Sigma_\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{Q}_v^\times}{}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u. \tag{2}$$

Le site des fréquences est obtenu à partir du site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ de [10,11] par extension des scalaires du semicorps booléen $\mathbb{B}$ au semi-corps tropical $\mathbb{R}_+^{\max}$. C'est, en

tant que topos, le produit semi-direct $[0,\infty) \rtimes \mathbb{N}^\times$ de la demi-droite Euclidienne $[0,\infty)$ par l'action du semi-groupe $\mathbb{N}^\times$ des entiers positifs par multiplication. Ses points, simplement cette fois en tant que points d'un topos, sont les mêmes que ceux du site arithmétique définis sur $\mathbb{R}_+^{\max}$ et forment le quotient $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ par l'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$, du Théorème 13.2. Ce que l'on gagne en décrivant ce même espace comme les points du site des fréquences c'est un faisceau structurel, qui s'obtient canoniquement à partir de celui du site arithmétique. Le faisceau structurel du site des fréquences est donné par les fonctions convexes affines par morceaux et il donne au site des fréquences la structure d'une courbe tropicale dans le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$. La restriction de cette structure aux orbites périodiques donne, pour chaque nombre premier p, un analogue $C_p = \mathbb{R}_+^*/p^\mathbb{Z}$ d'une courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^\mathbb{Z}$. Les fonctions rationnelles, les diviseurs et le problème de Riemann-Roch ont un sens et le degré d'un diviseur prend toute valeur réelle. Nous déterminons, dans [12, 13], le quotient du groupe des diviseurs par le sous-groupe des diviseurs principaux et montrons que c'est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/((p-1)\mathbb{Z})$. A chaque diviseur D est associé un problème de Riemann-Roch dont l'espace des solutions est noté $H^0(D)$. Nous définissons la dimension continue $\dim(H^0(D)) \in \mathbb{R}_+$ de ce $\mathbb{R}_+^{\max}$-module comme limite des dimensions topologiques normalisées. Nous montrons la formule de Riemann-Roch pour C_p. Les dimensions à valeurs réelles impliquées dans la formule de Riemann-Roch viennent de la densité dans $\mathbb{R}$ du sous-groupe $H_p \subset \mathbb{Q}$ des fractions ayant pour dénominateur une puissance de p et de la définition des dimensions comme limites quand $n \to \infty$ des dimensions normalisées $p^{-n}\dim(H^0(D)^{p^n})$. C'est l'analogue en caractéristique 1 de la dimension continue de type II pour les modules sur les C^*-algèbres [15].
Le prochain objectif est celui de développer une théorie de (co)homologie de Weil appropriée pour donner l'interprétation de la distribution $N(u)$ du site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ en termes de l'action du Frobenius sur cette (co)homologie, puis de démontrer un théorème de Riemann-Roch sur le carré du site arithmétique et de l'appliquer aux diviseurs associés aux combinaisons linéaires des correspondances de Frobenius comme esquissé dans [14].

References

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J-L. Verdier, eds. (1972), SGA_4, LNM 269-270-305, Berlin; New York: Springer-Verlag.

.

[2] J. Benabou, *Catégories et logiques faibles*. Journées sur les catégories. Oberwolfach, 1973.

[3] O. Caramello *Theories, sites, toposes*. Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'. Oxford University Press, Oxford, 2018.

[4] Cartan, Henri; Eilenberg, Samuel *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956. xv+390

[5] Cartier, Pierre *Logique, catégories et faisceaux* [d'après F. Lawvere et M. Tierney [Myles Tierney]]. (French) Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78), Exp. No. 513, pp. 123–146

[6] P. Colmez, J. P. Serre, *Correspondance Grothendieck-Serre*, Société Mathématique de France (2001).

[7] A. Connes. *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, *Selecta Math. (N.S.)*, **5**(1), 1999, 29–106.

[8] A. Connes, C. Consani, *Schemes over $\mathbb{F}_1$ and zeta functions*, Compositio Mathematica 146 (6), (2010) 1383–1415.

[9] A. Connes, C. Consani, *Absolute algebra and Segal's Gamma sets*, J. Number Theory 162 (2016), 518–551.

[10] A. Connes, C. Consani, *The Arithmetic Site*, Comptes Rendus Mathématiques Ser. I 352 (2014), 971–975.

[11] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Arithmetic Site*. Adv. Math. 291 (2016), 274–329.

[12] A. Connes, C. Consani, *The scaling site*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354 (2016), no. 1, 1–6.

[13] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the scaling site*. Selecta Math. (N.S.) 23 (2017), no. 3, 1803–1850.

[14] A. Connes, *An essay on the Riemann hypothesis*. Open problems in mathematics, Springer, 2016.

[15] J. Dixmier, *On some C^*-algebras considered by Glimm*. J. Functional Analysis, 1, (1967), 182–203.

[16] R. Cuninghame-Green, *Minimax algebra*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Volume 166, Springer, 1979.

[17] Gabriel, Pierre *Des catégories abéliennes*. (French) Bull. Soc. Math. France 90 1962 323–448.

[18] S. Gaubert, *Methods and applications of (max, +) linear algebra*, STACS 97 (Lubek), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 1200, Springer, Berlin, (1997), 261–282.

[19] S. Gaubert, *Two lectures on the max-plus algebra*. Proceedings of the 26th Spring School of Theoretical Computer Science, (1998), 83–147.

[20] J. Golan, *Semi-rings and their applications*, Updated and expanded version of The theory of semi-rings, with applications to mathematics and theoretical computer science [Longman Sci. Tech., Harlow, 1992. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[21] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*. (French) Tohoku Math. J. (2) 9 1957 119–221.

[22] A. Grothendieck, *Introduction au Langage Fonctoriel*. Faculté des Sciences d'Alger. Séminaire 1965-1966.

[23] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*. Non publié. Voir wikipedia.org/wiki/Récoltes–et–Semailles

[24] R. Meyer. *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions*, Duke Math. J. **127**, n. 3 (2005), 519–595.

[25] M. V. Fedoriuk, V. P. Maslov, *Semiclassical approximation in quantum mechanics*. Translated from the Russian by J. Niederle and J. Tolar. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 7. Contemporary Mathematics, 5. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, Mass., 1981.

[26] G. Litvinov, *Tropical Mathematics, Idempotent Analysis, Classical Mechanics and Geometry*. Spectral theory and geometric analysis, 159–186, Contemp. Math., 535, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[27] S. Mac Lane, *Duality for groups*. Bull. Amer. Math. Soc. 56, (1950). 485–516.

[28] S. Mac Lane, I Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*. Corrected reprint of the 1992 edition. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.