ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Au sujet de l'existence d'adjoints à droite aux foncteurs « image réciproque » dans la catégorie des catégories.*

Note (*) de M. **François Conduché**, présentée par M. René Garnier.

Dans une catégorie **C**, à produits fibrés finis, si f est un morphisme on sait lui associer un foncteur image réciproque : f^*, l'étude des topos élémentaires (Lawvere) a mis en valeur l'intérêt de l'existence d'adjoints à droite à de tels foncteurs, notés π_f. Ici, en prenant $\mathbf{C} = \mathbf{Cat}$ on caractérise ce qu'est un tel π_f s'il existe; puis on montre qu'en conséquence il n'existe pas toujours; enfin on donne un théorème d'existence.

1. (I) Notations. — **1, 2, 3** désignent les catégories totalement ordonnées à 1, 2 ou 3 objets, les diagrammes ci-dessous donnent le nom de leurs éléments,



4 sera la catégorie à 4 objets définissant un carré commutatif.

(II) Proposition. — *Pour toute catégorie* **C** *on a les relations*

(R 1) $$\hom(\mathbf{1}, \mathbf{C}) \cong \mathrm{Ob}(\mathbf{C});$$

(R 2) $$\hom(\mathbf{2}, \mathbf{C}) \cong \mathrm{Fl}(\mathbf{C});$$

(R 3) $$\hom(\mathbf{3}, \mathbf{C}) \cong \mathrm{Fl}(\mathbf{C}) \underset{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}{\times} \mathrm{Fl}(\mathbf{C}) = \mathrm{Comp}(\mathbf{C}).$$

Un foncteur $\mathbf{I} \to \mathbf{C}$ où **I** est une de ces trois catégories, sera désigné de la même manière que l'objet, la flèche, le couple de flèches qu'il définit.

On suppose donné un foncteur $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$; on note f^* le foncteur image réciproque par f, et π_f sera son adjoint à droite, s'il existe. $f^{-1}(c)$, resp. $f^{-1}(\gamma)$, resp. $f^{-1}(\gamma, \delta)$, où c, γ et (γ, δ) sont respectivement éléments de Ob (**C**), Fl (**C**). Comp (**C**), désigneront les images réciproques des foncteurs associés à ces éléments; $f_{-1}(\gamma, \delta)$ sera la sous-catégorie de $f^{-1}(\gamma, \delta)$ engendrée par $f^{-1}(\gamma) \cup f^{-1}(\delta)$ et $f_{-1}(\gamma \circ \delta) = f^{-1}(\gamma, \delta) \cap f^{-1}(\gamma\delta)$.

Si π_f existe et si $h : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ est un foncteur, on doit avoir :

(i) $\mathrm{Ob}(\pi_f(\mathbf{D})) \cong \hom(\mathbf{1}, \pi_f(\mathbf{D})) = \bigcup_{c \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})} (\hom_{\mathbf{C}}(c, \pi_f(\mathrm{D})))$, et par propriété du π_f,

(A 1) $$\mathrm{Ob}(\pi_f(\mathrm{D})) \cong \bigcup_{c \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})} (\hom_{\mathbf{B}}(f^{-1}(c), \mathbf{D}));$$

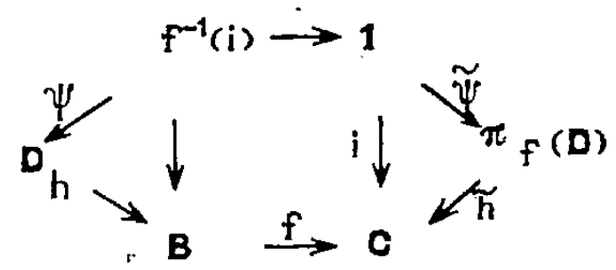
de même

(A 2) $$\mathrm{Fl}(\pi_f(\mathbf{D})) \cong \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Fl}(\mathbf{C})} \hom_{\mathbf{B}}(f^{-1}(\gamma), \mathbf{D})$$

Source gallica.bnf.fr / Archives de l'Académie des sciences

et

(A 3) $$\mathrm{H}\,1 = \mathrm{Comp}\,(\pi_f\,(\mathbf{D})) \cong \bigcup_{(\gamma,\,\delta)} \hom_{\mathbf{B}}\,(f^{-1}\,(\gamma,\,\delta),\,\mathbf{D}).$$



Les éléments des trois membres de gauche seront appelés des sections.

2. *Il existe des foncteurs f tels que π_f ne soit pas défini.*

On a une application canonique par restriction :

$$\Phi : \quad \mathrm{H}\,1 \to \mathrm{Fl}\,(\pi_f\,(\mathbf{D})) \underset{\mathrm{Ob}(\pi_f(\mathbf{D}))}{\times} \mathrm{Fl}\,(\pi_f\,(\mathbf{D})) = \mathrm{H}\,2;$$

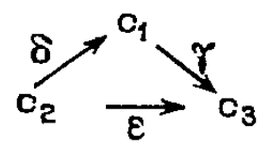
si on considère les membres de droite au lieu de ceux de gauche, cette application existe toujours.

Proposition. — (A 1), (A 2), (A 3) *définissent une catégorie* $\pi_f\,(\mathbf{D})$ *si et seulement si* Φ *est un isomorphisme, et dans ce cas c'est une costructure libre sur* **D**; *sinon il n'y a pas de costructure libre sur* **D**.

N. B. — On remarquera que l'être mathématique défini par (A 1), (A 2) et (A 3) est en un certain sens toujours la costructure libre, mais n'est pas toujours une catégorie.

Montrons que Φ n'est pas nécessairement une bijection :

Soit (γ, δ) un foncteur de $\mathbf{3} \to \mathbf{C}$, suivant le diagramme



(*a*) Soit s une section définie sur (γ, δ) [i. e. sur la catégorie $f^{-1}\,(\gamma, \delta)$]; on a

$$(s) = (s/f^{-1}\,(\gamma),\, f^{-1}\,(\delta)) = (s',\, s'');$$

par ailleurs, soit $b \in f_{-1}\,(\gamma \circ \delta)$ et $b = b'\,b''$, avec $b' \in f^{-1}\,(\gamma)$, $b'' \in f^{-1}\,(\delta)$; alors $s\,(b) = s'\,(b')\,s''\,(b'')$ (R).

(*b*) Soit $(s',\, s'')$ dans H 2; la seule condition qu'elles vérifient est $s'/f^{-1}\,(c_1) = s''/f^{-1}\,(c_1)$; d'où deux conditions pour que Φ soit surjective :

(i) tout couple $(s',\, s'')$ dans H 2 définit une section $\hat{s}$ sur $f_{-1}\,(\gamma, \delta)$;

(ii) toute section $\hat{s}$ définie sur $f_{-1}\,(\gamma, \delta)$ s'étend en une section sur $f^{-1}\,(\gamma, \delta)$.

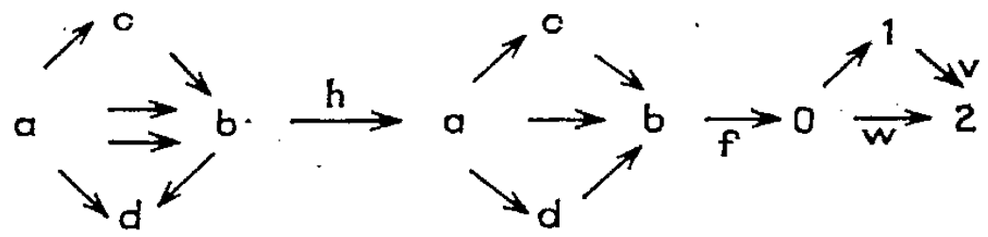
Pour finir l'injectivité s'écrit :

(iii) toute section $\hat{s}$ sur $f_{-1}\,(\gamma, \delta)$ s'étend en au plus une section s définie sur $f^{-1}\,(\gamma, \delta)$.

PROPOSITION. — *Soit* $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *un foncteur*; *le foncteur* f^* *admet un adjoint à droite si et seulement si, pour tout foncteur* $h : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$, *les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *sont vérifiées.*

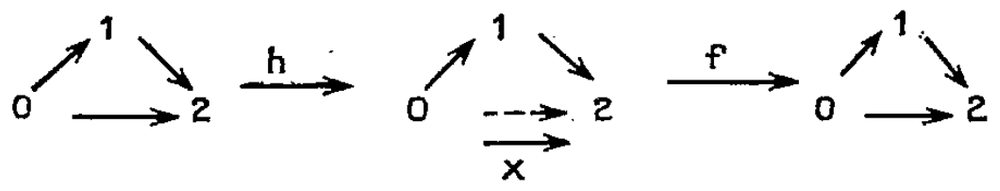
On va construire trois exemples de situations où respectivement (i), (ii), (iii) ne sont pas vérifiés.

(1) (i)



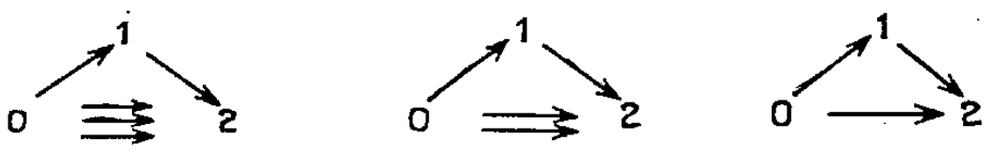
C est la catégorie **3**; **B** est **4** et f est l'unique foncteur qui n'envoie que les identités sur les identités; **D** est la catégorie définissant un carré non commutatif; h est le foncteur égal à l'identité sur les objets. On peut trouver un couple (s, s') de sections définies respectivement sur $f^{-1}(v)$ et $f^{-1}(u)$ et non prolongeables à $f_{-1}(n, v)$. [En effet, $\hom_{\mathbf{B}}(f_{-1}(u, v), \mathbf{D}) = \emptyset$.]

(2) (ii)



D et **C** sont égaux à **3** et **B** est la somme amalgamée de **2** et de **3** au-dessus de $\{0, 2\}$; les foncteurs h et f sont entièrement définis par le fait que, restreints aux objets, ils sont égaux à l'identité; dans ce cas (i) est vérifié mais pas (ii).

(3) (iii)



D est la somme amalgamée de **B** (ii) et de **2** sur $\{0, 2\}$; à part cela, c'est le même cas que dans (ii); (i) et (ii) sont vérifiés mais pas (iii).

COROLLAIRE. — *Il existe des foncteurs* f *tels que* π_f *n'existe pas.*

3. CARACTÉRISATION DES FONCTEURS f TELS QUE π_f EXISTE.

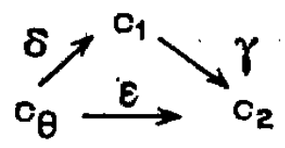
PROPOSITION. — *Soit* $f : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ *un foncteur*; *les conditions* (ii) *et* (iii) *sont réalisées pour tout foncteur* $h : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ *si et seulement si, pour tout couple de flèches* $(\gamma, \delta) \in \mathrm{Comp}\ (\mathbf{C})$, *on a* $f_{-1}(\gamma \circ \delta) = f^{-1}(\gamma \circ \delta)$.

Démonstration. — Que ce soit suffisant est évident; pour la nécessité prendre comme couple $(\mathbf{D}, h)$ le couple de $f_{-1}(\gamma \circ \delta)$ et de son « plongement » canonique dans **B**; (ii) n'est pas vérifié.

N. B. — Écrivons ce que signifie cette égalité et on obtient la condition,

(II 1) $$(\forall\, (\gamma, \delta) \in \mathrm{Comp}\ (\mathbf{C}),\ \forall\, b \in \mathbf{B},\ f(b) = \gamma \circ \delta) \Rightarrow (\exists\, b' \in f^{-1}(\gamma),\ \exists\, b'' \in f^{-1}(\delta) \wedge b' \circ b'' = b).$$

LEMME. — *Soit un triangle commutatif dans* **C**,



(b', b'') et (b'_1, b''_1) des éléments de $f^{-1}(\gamma)\times f^{-1}(\delta)$ tels que $b'\,b'' - b'_1\,b''_1$; s'il existe t tel que $t\,b'' = b''_1$ et $b'_1\,t = b'$, pour toute section s' sur $f^{-1}(\gamma)$ et toute section s'' sur $f^{-1}(\delta)$ compatibles, $s'(b')\,s''(b'') = s'(b'_1)\,s''(b''_1)$.

Notons Def (b), où $b \in f^{-1}(\varepsilon)$, la catégorie dont les objets sont les couples (b', b'') de $f^{-1}(\gamma)\times f^{-1}(\delta)$ tels que $b'\,b'' = b$; les morphismes sont les t dans $f^{-1}(c_1)$ vérifiant les conditions du lemme.

PROPOSITION. — *Soit* $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *un foncteur*; *la condition* (i) *est réalisée si et seulement si, pour tout couple* (γ, δ) *dans* Comp $(\mathbf{C})$ *et tout* b *dans* $f_{-1}(\gamma \circ \delta)$, *la catégorie* Def (b) *est connexe* (II 2).

En effet, soit $h : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$: la règle R définit pour tout b une flèche unique de **D**; il est immédiat que l'application obtenue est un foncteur.

Dans le cas contraire un contre-exemple s'obtient en généralisant celui du (1).

PROPOSITION. — *Soit* $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *un foncteur;* π_f *est défini si et seulement si les conditions* (II 1) *et* (II 2) *sont réalisées.*

(*) Séance du 2 octobre 1972.

(1) BÉNABOU, Séminaire 1971-1972 (multigraphié).

(2) BASTIANI-EHRESMANN, *Catégories de foncteurs structurés* (*Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, 11, n° 3, 1969).

(3) LAWVERE, Notes multigraphiées.

Département de Mathématiques,
Tour 45-55,
Université Paris VII,
2, *place Jussieu,*
75005 *Paris.*