à la myopie. Un peu de presbytie ferait à nos sociétés le plus grand bien; elle leur permettrait de mieux évaluer la rentabilité réelle qu'il y a à cultiver "l'honneur de l'esprit humain".

DE LA VICTOIRE DE PLATON ET D'UN CERTAIN TECHNO-POPULISME HOSTILE AUX MATHÉMATIQUES

Gilles CHÂTELET

Université Paris 8 et IHES

"Cette vision platonicienne abstraite qui a infecté l'enseignement français depuis deux cents ans.[6]*"*

"La France ne peut plus se payer le luxe de produire du mathématicien pur.[7]*"*

Nous devons reconnaître un mérite au livre de Monsieur Allègre, "La défaite de Platon" : exhiber sans complexe le point de vue que nous qualifierons de techno-populiste, qui souhaite réconcilier deux spiritualités : celles de l'épicier du coin – un sou est un sou – et celle, jusqu'à présent un peu plus ambitieuse, de l'Inspecteur des Finances.

Ces deux spiritualités marchent désormais mains dans la main, sûres de leur bon droit, distribuant les ultimatums : "A quoi servez-vous? Vous devriez avoir honte d'être aussi abstraits, aussi élitistes", agacés sinon exaspérés par toute activité qui ne laisse pas enfermer dans un horizon borné de chef comptable et apparaissant donc comme un défi insupportable au "pragmatisme" contemporain dont aime à se réclamer le *techno-populisme.* Nous touchons ici un point sensible de sa tartufferie : se sentir insulté par tout ce qui le dépasse et dénoncer comme "élitiste" toute démarche tant soit peu éloignée des affairements de l'homme de la rue et de ce qu'il est convenu d'appeler le "sérieux de la vie". C'est pourquoi la Philosophie et les Mathématiques, associés depuis vingt cinq siècles à une discipline totalement étrangère à la vie de tous les jours – la "survie" – constituent des cibles à la fois redoutées et détestées.

Pour punir ce qu'il considère comme une insolence, le folklore techno-populiste aime à se nourrir de deux figures caricaturales de l'activité mathématique : celle du "prof de maths" un peu sadique et garde-champêtre de la logique élémentaire, acharné à détruire la créativité expérimentale des élèves et celle du Nimbus évaporé, inspecteur des travaux finis, toujours prêt à piller les "vrais savants" qui n'hésitent pas à se salir les mains.

---

[6] Page de couverture de "La défaite de Platon", Claude Allègre, éditions Fayard.
[7] Commentaire privé d'un enseignant de marketing à l'Ecole Polytechnique.

Nous prétendons au contraire que les mathématiques visent la plus haute concrétude et ne succombent jamais dans l'"abstraction" privée de toute la richesse de la détermination; les "généralisations" des mathématiques ne se confondent jamais avec des généralités inoffensives : il y a bien une audace propre aux mathématiciens, certes associée à une stricte discipline de la vérification, mais permettant surtout l'accès à un champ où s'esquissent des déterminations virtuelles, non encore explicitées. L'installation dans un tel champ possède tous les caractères d'un *diagnostic* qui opère de manière décisive bien avant toute analyse exhaustive : l'exemple le plus flagrant est celui d'attaque de telle ou telle conjecture par une conjecture plus forte – et donc a priori plus difficile à déduire – qui déplace complètement un problème et révèle l'ancienne conjecture comme étant un problème mal posé. Confondre les mathématiques avec de simples chaînes déductives et ignorer le caractère crucial du sens de la "bonne conjecture" – de ce que nous avons appelé le *diagnostic du mathématicien* – nous semble une conception aussi mutilante que celle qui prétendrait réduire la Physique à un simple exercice de Calcul Différentiel.

Des énoncés du type "Considérons tel point,... tel sous-ensemble... Prolongeons tel segment de droite" sont fréquents au cours d'une démonstration.[8] Ils sont bien insérés dans la chaîne déductive mais possèdent en quelque sorte un caractère stratégique apprécié par les connaisseurs et introduisent subrepticement un autre rythme. "C'est là que quelque chose se passe. Il fallait avoir l'idée de considérer ceci ou cela...". Ces données, ces énoncés ou ces constructions étaient bien disponibles mais endormis et semblent brusquement s'animer par la vertu de ce "considérons" qui porte toute l'attention sur ce qui devient un *élément-charnière*, un levier d'Archimède qui fait basculer et qui manifeste un type de concrétude bien plus intense que le soi-disant "concret" rencontré au coin de la rue.

Nous sommes aux antipodes de l'"abstraction" qui résulte toujours du prélèvement violent d'une partie et donc d'une mutilation alors que le "levier" ne soustrait rien et agit comme certains fragments d'un puzzle qui, d'emblée, esquissent et imposent la solution. Etre absolument concret, c'est persévérer en quelque sorte dans une *espèce de démarche tangentielle de la pensée qui saisit son propre mouvement*; c'est pourquoi le grand mathématicien est tenaillé par une passion du concret comme en témoigne l'entreprise révolutionnaire d'Alexandre Grothendieck.[9] Grothendieck, dans ses écrits, réfère quelquefois à la théorie de Galois, comme exemple toujours

[8] L'exemple des démonstrations et des constructions de la Géométrie dite élémentaire est très éclairant : il suffit de penser à la preuve de caractère concourant en un même point des hauteurs d'un triangle, transformées par des prolongements astucieux en médiatrices d'un autre triangle. Il y a un "effet de synthèse" provoqué par certains points ou constructions remarquable et nullement donné par la simple représentation en figure. La figure devient diagramme car elle suggère en pointillé.

[9] Rappelons que Grothendieck fut le "Prince des géomètres algébristes" des années 60 qui voulait conduire un vaste programme de traduction entre Algèbre et Géomètrie par l'utilisation systématique

à repenser, de ce que l'on pourrait appeler une concrétude algébrique pure, aussi bien à l'oeuvre dans les théories classiques comme celles des groupes de Lie et Sylow que dans les théories les plus récentes. On peut comprendre la Théorie de Galois comme *apprentissage* : celui du discernement progressif des racines, les conditions formelles d'un tel discernement portant sur des séquences de réduction[10], et les formules explicites de résolution devenant subsidiaires. Porter tout l'effort de recherche sur les séquences de groupes, de fibrés, de "faisceaux", etc., capables de saisir au vol *le geste même de l'apprendre...* telle serait selon Grothendieck, l'inoubliable leçon de Galois.

Cette concrétude algébrique peut alors épouser une autre concrétude, celle de la Géométrie, qui est celle de l'apprendre des gestes de saisie de l'Espace. Nous aimerions analyser en détail quelques exemples de cette concrétude "géométrico-algébrique" dans l'oeuvre de Grothendieck. Sa conception du point est particulièrement éclairante : le point "classique" de la Géométrie est simplement la trace dans l'espace-temps de l'acte de désignation de ce point-ci alors que le point conçu par Grothendieck (et maintenant par tous les géomètres-algébristes contemporains) est un dispositif, une panoplie infinie de virtualités – dont la désignation serait la plus triviale – un point monadique capable de "concentrer en un point" tout ce qui

de la Théorie des schémas. Comme toute "traduction", elle ne se contente pas de définir une simple banque de références réciproques entre concepts "purement algébriques" et "purement géométriques" laissés intacts. La théorie déplace presque de force l'attention du mathématicien des "points" et des ensembles fixés vers des flèches (ces morphismes) et permet de comprendre algébriquement des effets de synthèse géométriques que nous avons évoqués dans la note (8). On a presque envie de dire que, grâce à l'introduction de la topologie, les structures de l'algèbre commutative se fabriquant elles-mêmes un environnement sans demeurer sous la tutelle de coordonnées, prennent corps et s'organisent en diagrammes suggestifs aussi vivaces que les figures de la géométrie élémentaire... et beaucoup plus puissant! Prenons quelques exemples très simples : a) celui de la notion d'idéal : on ne doit pas le considérer comme une simple "généralisation" des multiples de l'arithmétique mais comme une entité autonome, un point qui a son lieu et qui tient à la fois de l'ensemble (I majuscule) et de l'élément –c'est le point de vue du spectre– b) celui des A-modules M de type fini : il semble plus compliqué de les définir par l'existence de suites exactes du type $A^p \to M \to O$ que par la voie habituelle. C'est pourtant ce type de définition qui incite à se concentrer sur un "bloc" –la suite exacte– qui se révèle aussi condensé qu'un point géométrique et qui se trouve être au cœur du développement de la Théorie des Faisceaux. deux intuitions centrales traversent l'œuvre de Grothendieck : a) la substitution du point de vue de la "flèche" au point de vue –trop fixe– des ensembles, la "flèche" détrônant alors les sources et les cibles. b) saisir le point comme capable de condensation (les structures les plus sophistiquées peuvent devenir des "points" : c'est le cas des classes de fibrés vectoriels sur X vus comme point de $K(X)$) et aussi comme amplification (c'est le cas des points multiples, des points singuliers etc.). Grothendieck n'a jamais caché la difficulté d'une telle entreprise qui oblige à renoncer et même à détruire les intuitions spatiales ordinaires et à se familiariser avec des espaces insolites, sinon pathologiques. C'est le prix à payer pour articuler Arithmétique et Algèbre. La Théorie des schémas apparaît comme le couronnement d'une tradition de découverte et d'approfondissement des analogies entre Théorie des nombres et Géométrie amorcée par Kronecker et développée par Weil (analogie entre corps de nombres algébriques et corps de fonctions algébriques, entre "tours" de corps de nombres et "tours" de revêtement d'une courbe algébrique etc.). On pourrait dire –en paraphrasant une remarque célèbre– un peu d'"abstraction" éloigne de l'intuition mais beaucoup y ramène comme le souligne Grothendieck dans son introduction au langage des schémas (Publications IHES n°4) : "comme dans beaucoup de parties de la mathématique moderne l'intuition première s'éloigne de plus en plus, en apparence, du langage propre à l'exprimer avec toute la précision et la généralité voulue".

[10] Séquences de réduction du groupe de Galois.

auparavant, prétendait retenir séparément l'attention du mathématicien. Le point moderne renoue avec cette "évidence" toujours pressentie, mais jamais saisie avant Grothendieck comme évidence mathématique, rendant disponible une nouvelle puissance opérative et surtout une formidable *puissance allusive* : la "concentration en un point" est tout le contraire d'un affaissement en un point mais se révèle au contraire comme un dispositif de libération et de multiplication des virtualités géométriques.

L'"évidence" de Grothendieck n'est pas liée à la proximité de deux termes dans une chaîne déductive, mais à l'effet de "naturel" lié à l'abolition de l'espace entre le symbole qui capte et le geste qui est capté.

Nous sommes ici bien loin des vociférations utilitaires dont se gorge le pragmatisme contemporain, qui, quelquefois aime se montrer bienveillant et daigne apprécier les mathématiques si elles restent bien sagement à leur place de "boîte à outils" et de bonne à tout faire. On peut soupçonner que les mathématiques ont bien vocation à intervenir dans toutes les disciplines, mais de manière spécifique pour chacune et n'impliquent surtout aucun rapport de subordination. L'exemple de la Physique contemporaine montre à quel point Platon est victorieux : l'enjeu dépasse de très loin un vulgaire rapport d'application en tentant de saisir ce qu'il y a de "physique" dans les mathématiques et amorçant du même coup une épopée encore plus ambitieuse que les grands bouleversements du début du siècle.[11]

Participer à cette épopée suppose naturellement de la part de la communauté physico-mathématique une intelligence des rapports entre physique et mathématique toujours située en amont des différentes pratiques symboliques, qui sont souvent d'ailleurs aussi des pratiques intuitives. Se situer en aval – en laissant aux autres communautés le "luxe" d'être aux avants-postes de la recherche mathématique –, c'est se résigner très vite à appartenir aux provinces subsidiaires de la production des connaissances, à perdre le fil si fragile et si implacable de la concrétude mathématique et se condamner très vite à la sous-traitance théorique qui reçoit des instructions, et obéit à des codes déjà forgés. Mais la démarche d'une "Ecole" – de savants, de philosophes – ne se réduit nullement à la délivrance de prestations informatives de seconde main, mais de définir et de conduire *une problématique de première main*. Le techno-populisme toujours affamé de "visibilité sociale" et de remises de pendule à l'heure, sait-il ce qu'il en "coûte" de siècles et de patience pour former une Ecole mathématique[12] ? Car une Ecole c'est d'abord la patience d'une première main capable d'articuler la génèse des connaissances et

[11] Rappelons, entre autres exemples, celui de la Théorie de Jauge utilisant la géométrie différentielle et celui des groupes quantiques.

[12] Cf les difficultés pour reconstruire l'Ecole Allemande et la liquidation de l'Ecole Soviétique par l'accouchement aux forceps du néo-libéralisme. Rappelons aussi que Galois et Abel avaient critiqué le caractère en général "trop appliqué" de l'Ecole mathématique française au début du XIXe siècle alors que s'ébauchait l'Ecole allemande qui, bientôt, allait dominer.

celles des individus-élèves, à mille lieues de la trivialité fébrile du rapport instrumental, aux pratiques symboliques dont se gargarisent ceux qui aimeraient se faire reconnaître comme les "ennemis de Platon" en agitant l'épouvantail du principe de Réalité et d'Efficacité, en inondant des "débats d'idées" de pacotille pragmatique pour masquer leur servilité devant la commande socio-économique et les borborygmes des Marchés.

DÉFENSE DES MATHÉMATIQUES

Jean-Jacques RISLER

Président de la SMF

Il est de bon ton ces temps-ci, chez certains scientifiques médiatiques et de renom, d'attaquer les mathématiques : celles-ci sont considérées comme marginales, périphériques, stérilisant l'imagination, élitistes, etc.[13]

Si on analyse un peu ce flot de reproches, on constate qu'il repose essentiellement sur deux arguments : le rôle (indéniable) que jouent les mathématiques dans la sélection des élites scientifiques, techniques et administratives, et l'inutilité, voire la perversité, des mathématiques.

Ces attaques semblent malheureusement commencer à porter leur fruits, comme le montre par exemple la diminution des horaires de mathématiques dans les classes de cinquième...

Mon propos ici n'est pas de répondre sur le premier point (je dirais simplement pour résumer que ce rôle de sélection est assumé par les mathématiciens, mais non revendiqué, et que c'est faire aux mathématiques un bien mauvais procès que de leur reprocher leur fonction dans le concours d'entrée à l'Ecole polytechnique, qui est a priori une école scientifique et non une préparation à la haute administration), mais d'essayer de rappeler l'importance cruciale des mathématiques dans le monde technique et scientifique. Je laisserai aussi de côté l'aspect purement conceptuel des mathématiques, pourtant essentiel, mais souvent mal compris du grand public, défendu par exemple par le regretté Jean Dieudonné[14], ou Pierre Schapira[15].

Les mathématiques interviennent et s'appliquent dans les sciences me semble-t-il à trois niveaux différents.

Tout d'abord, les sciences s'expriment à travers des mathématiques. Je veux parler ici des sciences qui appréhendent les phénomènes naturels avec des mesures quantitatives, et non pas de sciences comme par exemple la

[13] Claude Allègre, La défaite de Platon.
[14] Pour l'honneur de l'esprit humain.
[15] Défense du conceptuel, le Monde du 26 avril 1996. (Reproduit dans ce numéro NDRL)