ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

194

EXPOSÉS DE GÉOMÉTRIE

Publiés sous la direction de

M. E. CARTAN

Membre de l'Institut

Professeur à la Sorbonne

IV

LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE

LA THÉORIE DES GROUPES CONTINUS

ET LES ESPACES GÉNÉRALISÉS

PAR

Elie CARTAN

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY



PARIS

HERMANN ET Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1935

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

Copyright 1935 by Librairie scientifique Hermann et Cie
Paris.

INTRODUCTION

Les pages qui suivent constituent le développement de cinq conférences faites à Moscou du 16 au 20 juin 1930 sur l'invitation de l'Institut mathématique de Moscou. Elles ont été traduites et publiées en russe en 1933. Il m'a paru qu'il ne serait pas inutile, en les insérant dans la collection des *Exposés de Géométrie*, de les soumettre à l'appréciation d'un plus grand nombre de géomètres. Certains théorèmes, qui auraient exigé des connaissances techniques sur la théorie des équations aux dérivées partielles, ont été énoncés sans démonstration.

Elie Cartan.

LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE, LA THÉORIE DES GROUPES CONTINUS ET LES ESPACES GÉNÉRALISÉS

PAR

Elie CARTAN

I

1. — Tous les géomètres connaissent le parti que G. Darboux a tiré, dans l'étude des courbes et des surfaces, de l'emploi d'un trièdre mobile attaché, suivant une loi intrinsèque, aux différents points de la courbe ou de la surface (1). Dans le cas d'une courbe, le trièdre, connu sous le nom de trièdre de Frenet, a pour axes la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe. Dans le cas d'une surface, ses axes sont les deux tangentes principales et la normale à la surface ; Darboux a aussi utilisé des trièdres trirectangles assujettis à la seule condition que le troisième axe soit normal à la surface. L'emploi du trièdre mobile est aussi tout indiqué dans un certain nombre d'autres théories géométriques, par exemple dans la théorie des systèmes triples orthogonaux.

Si l'on veut bien réfléchir aux raisons profondes de la fécondité de la méthode du trièdre mobile, on peut remarquer d'abord que

(1) Voir les *Leçons sur la théorie des surfaces* de G. DARBOUX, spécialement les t. I et II. Voir aussi RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (J. de Math., 4e série, t. 7, 1891).

le champ d'application de cette méthode est la géométrie *différentielle*; elle n'est d'aucun secours dans la théorie des courbes algébriques, considérées en tant que courbes algébriques. La méthode n'est adaptée qu'aux problèmes qui font intervenir exclusivement les propriétés infinitésimales de la courbe ou de la surface. Mais dans ce domaine de la géométrie différentielle, le succès de la méthode tient à deux raisons :

1° Le trièdre attaché à un point donné d'une courbe ou d'une surface constitue le système de référence le plus simple pour étudier les propriétés infinitésimales de la courbe ou de la surface au voisinage de ce point.

2° La courbe (ou la surface) est complètement déterminée, *à un déplacement près dans l'espace*, par la connaissance des composantes, rapportées au trièdre mobile, du déplacement infinitésimal de ce trièdre quand on passe d'un point à un point infiniment voisin de la courbe (ou de la surface).

2. — La première raison a un caractère de simple commodité, on pourrait dire d'esthétique. En ce sens elle n'impose au choix du trièdre aucune condition rigoureuse. On conçoit même que dans certaines questions on puisse regarder comme plus commode de prendre un trièdre non trirectangle, dont la forme pourrait même varier d'un point à un autre. Quoi qu'il en soit, le trièdre doit être déterminé par celles des propriétés différentielles de la courbe ou de la surface qui se présentent en premier lieu, c'est-à-dire qui font intervenir les éléments différentiels d'ordres inférieurs. Dans le cas d'une courbe ou d'une surface, ce sont effectivement les éléments différentiels des deux premiers ordres qui déterminent le trièdre mobile de Darboux.

3. — La seconde raison indiquée plus haut repose sur le théorème bien connu suivant : *Si l'on a deux familles continues de trièdres trirectangles et si l'on peut établir entre les trièdres de ces deux familles une correspondance biunivoque telle que les composantes relatives du déplacement infinitésimal d'un trièdre de la première famille soient égales aux composantes relatives du déplacement infinitésimal du trièdre correspondant de la seconde famille, il existe un déplacement déterminé amenant simultanément en coïncidence les trièdres de la première famille avec les*

trièdres correspondants de la seconde. Les composantes *relatives* du déplacement infinitésimal d'un trièdre trirectangle mobile sont les six composantes, par rapport aux axes de ce trièdre, de la translation infinitésimale subie par l'origine du trièdre et de la rotation infinitésimale supplémentaire subie par le trièdre.

Le théorème n'exige pas en toute rigueur qu'on ait à faire à des trièdres trirectangles, mais il exige tout au moins que les trièdres considérés soient tous égaux entre eux : les six quantités qui définissent analytiquement, par rapport aux axes du trièdre mobile, le déplacement infinitésimal de ce trièdre auront une signification plus ou moins compliquée, mais le théorème n'en subsistera pas moins. Si au contraire on utilisait des trièdres de forme variable, on pourrait bien définir analytiquement le passage d'un trièdre au trièdre infiniment voisin, mais on ferait ainsi intervenir les variations de forme du trièdre, c'est-à-dire des éléments parasites sans rapport avec les propriétés de la courbe ou de la surface à étudier.

4. — Les considérations précédentes montrent que la méthode du trièdre mobile, pour conserver toute sa portée, doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° *Le trièdre attaché à chaque point de la variété à étudier doit être déterminé d'une manière intrinsèque par les éléments différentiels des premiers ordres de la variété.*

2° *Les différents trièdres sont rectangulaires ou du moins doivent être tous égaux entre eux.*

Dire que le trièdre est déterminé d'une manière intrinsèque, c'est dire que si l'on fait, suivant la loi choisie, la détermination du trièdre en deux points homologues de deux variétés égales, les deux trièdres obtenus viennent en coïncidence par le déplacement qui amène en coïncidence les deux variétés.

Quant à la condition de commodité envisagée plus haut, ce sera une question d'espèce. Au point de vue purement logique, rien n'empêcherait par exemple de substituer au trièdre de Frenet d'une courbe gauche tout autre trièdre, trirectangle ou non, qui lui serait invariablement lié.

II

5. — Dans les applications classiques de la méthode du trièdre mobile, le choix du trièdre est indiqué de lui-même sans que le géomètre éprouve aucune hésitation. Mais, sans sortir de la géométrie euclidienne, il est des cas où il n'en est plus de même. Considérons par exemple, en géométrie euclidienne complexe, une courbe minima. Le trièdre de Frenet, qu'on peut considérer comme constitué par trois vecteurs unitaires portés sur la tangente, la normale principale et la binormale, ne peut plus exister ici, puisque tout vecteur porté sur la tangente est de longueur nulle. On pourrait, il est vrai, choisir des trièdres dont les *vecteurs de coordonnées* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ seraient, le premier et le dernier de longueur nulle avec un produit scalaire égal à 1, le second de longueur 1 et perpendiculaire aux deux premiers ; on prendrait alors le vecteur $\vec{e_1}$ tangent à la courbe ; mais on ne voit, au moins immédiatement, aucune raison de prendre pour $\vec{e_1}$ tel vecteur plutôt que tel autre tangent à la courbe (ils sont du reste tous égaux entre eux) ; d'autre part le plan normal à la courbe étant confondu avec le plan osculateur, il n'existe aucune raison apparente de faire jouer à telle normale plutôt qu'à telle autre le rôle de la normale principale. On ne sait donc ni comment choisir le vecteur $\vec{e_1}$, ni comment choisir le vecteur $\vec{e_2}$.

Cet exemple montre bien la légitimité du problème suivant.

Est-il possible d'attacher d'une manière intrinsèque à chaque point d'une courbe minima un trièdre déterminé toujours égal à lui-même ?

D'une manière plus générale *la méthode du trièdre mobile est-elle susceptible d'être généralisée dans toutes les questions de géométrie différentielle* ?

6. — Avant de nous occuper de cette question générale, remarquons qu'il existe certainement des cas où la détermination intrinsèque d'un trièdre attaché à un point variable d'une courbe ou d'une surface est impossible. Il suffit de songer au cas d'une droite (non isotrope) ; le premier axe du trièdre de Frenet est

bien déterminé, mais il ne peut y avoir aucune raison de choisir pour le second axe telle ou telle perpendiculaire à la droite. Remarquons que dans ce cas, et on verra plus loin l'importance de cette remarque, l'impossibilité tient à la nature même des choses ; il existe en effet un groupe de déplacements laissant invariants simultanément tous les points de la droite. Il suffit même, pour l'impossibilité logique de la détermination du trièdre, que la variété à étudier soit invariante par un groupe de déplacements, pourvu qu'il y ait une infinité de déplacements de ce groupe laissant fixe un point quelconque donné M de cette variété, car alors la détermination intrinsèque du trièdre attaché à M, si elle était possible, donnerait aussi bien ce trièdre que tous ceux qui s'en déduisent par les déplacements considérés. C'est ainsi par exemple que la détermination intrinsèque d'un trièdre trirectangle attaché à un point M d'une sphère est impossible, car il y a une infinité de déplacements laissant invariante la sphère et laissant fixe le point M.

7. — Laissons ce cas de côté (nous verrons plus loin que c'est le seul où la détermination intrinsèque du trièdre soit impossible). Avant d'examiner le cas d'une courbe minima, reprenons le cas classique d'une courbe gauche ordinaire et analysons, un peu pédantesquement, le processus par lequel, bannissant autant que possible toute intuition géométrique, on pourrait être conduit au trièdre de Frenet.

Attachons d'abord à un point donné M d'une courbe gauche, supposée définie au moyen d'un paramètre t, toute une famille de trièdres trirectangles, à savoir ceux qui ont le point M pour origine : nous les appellerons les *trièdres d'ordre zéro*. Ils dépendent de trois paramètres u_1, u_2, u_3, que nous appellerons *paramètres secondaires* d'ordre zéro. Si l'on fait varier le point M, les trièdres d'ordre zéro dépendent alors des quatre paramètres u_1, u_2, u_3 et t. Désignons par ω_1, ω_2, ω_3 les composantes sur les axes mobiles de la translation subie par l'origine M du trièdre et par ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} les composantes relatives de la rotation instantanée subie par le trièdre. Il est clair que les trois composantes ω_1, ω_2, ω_3, qui s'annulent lorsque le point M reste fixe, sont de la forme

$$\omega_1 = p_1 dt, \quad \omega_2 = p_2 dt, \quad \omega_3 = p_3 dt ;$$

quant aux composantes ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} de la rotation, elles font intervenir non seulement dt, mais encore les différentielles des paramètres secondaires du_1, du_2, du_3 ; on voit même facilement qu'elles sont linéairement indépendantes par rapport à ces trois différentielles.

Les coefficients p_1, p_2, p_3 dépendent manifestement des valeurs numériques des paramètres secondaires ; on peut alors établir entre ces paramètres et t deux relations telles que les rapports $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ et $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ s'annulent ; cela revient géométriquement à choisir le premier axe du trièdre tangent à la courbe. Les repères satisfaisant à cette condition s'appelleront les repères du premier ordre et on aura, en se limitant à ces repères,

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.$$

Les repères du premier ordre ne dépendant plus que d'un paramètre, les composantes ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} de la rotation infinitésimale, lorsqu'on y fait $dt = 0$, sont liées par deux relations linéaires. Géométriquement, quand on fixe le point M, le repère du premier ordre n'est plus susceptible que d'une rotation autour de son premier axe, de sorte que les composantes ω_{31}, ω_{12} de la rotation par rapport aux deux derniers axes s'annulent. Il en résulte qu'on a, en faisant varier le point M,

$$\omega_{31} = p_{31}dt, \quad \omega_{12} = p_{12}dt.$$

Les rapports

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_1} = \frac{p_{31}}{p_1}, \qquad \frac{\omega_{12}}{\omega_1} = \frac{p_{12}}{p_1}$$

dépendent maintenant du paramètre secondaire du premier ordre, et on peut choisir ce paramètre de manière à annuler l'un de ces rapports, par exemple p_{31}. On arrive ainsi à un repère du second ordre parfaitement déterminé. L'expression ω_1 est l'arc élémentaire ds, le rapport $\frac{p_{12}}{p_1}$ est la courbure de la courbe ; la composante $\omega_{23} = p_{23}dt$ donne alors la torsion $\frac{p_{23}}{p_1}$.

On voit qu'on est passé, par restrictions successives, des trièdres d'ordre zéro dépendant de trois paramètres aux trièdres

d'ordre 1 dépendant d'un paramètre et au trièdre définitif d'ordre 2, qui est le trièdre de Frenet.

8. — Passons maintenant au cas d'une courbe minima. Nous allons utiliser, pour raison de commodité, un trièdre formé de trois vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ attachés à un point M de la courbe et satisfaisant aux conditions

$$(1) \qquad \vec{e_1}^2 = \vec{e_3}^2 = \vec{e_1}\vec{e_2} = \vec{e_2}\vec{e_3} = 0, \qquad \vec{e_2}^2 = \vec{e_1}\vec{e_3} = 1.$$

Les composantes relatives du déplacement infinitésimal du trièdre sont les coefficients qui s'introduisent dans les formules

$$d\mathrm{M} = \omega^1\vec{e_1} + \omega^2\vec{e_2} + \omega^3\vec{e_3},$$
$$d\vec{e_i} = \omega_i{}^1\vec{e_1} + \omega_i{}^2\vec{e_2} + \omega_i{}^3\vec{e_3}.$$

Les neuf composantes $\omega_i{}^j$ ne sont pas indépendantes. En différentiant les relations (1), on trouve facilement

$$(2) \qquad \begin{cases} \omega_1{}^3 = \omega_3{}^1 = \omega_2{}^2 = 0, \\ \omega_1{}^2 + \omega_2{}^3 = \omega_2{}^1 + \omega_3{}^2 = \omega_1{}^1 + \omega_3{}^3 = 0. \end{cases}$$

Nous conserverons, comme composantes du déplacement infinitésimal, les six quantités ω^1, ω^2, ω^3, $\omega_1{}^1$, $\omega_1{}^2$, $\omega_3{}^2$.

Nous pouvons tout de suite faire l'économie des trièdres d'ordre zéro et commencer par les trièdres d'ordre 1, pour lesquels $\vec{e_1}$ est un vecteur quelconque tangent à la courbe ; ces trièdres dépendent de deux paramètres secondaires, l'un servant à fixer le vecteur $\vec{e_1}$ lui-même, le second à fixer la direction du vecteur $\vec{e_2}$ perpendiculaire à $\vec{e_1}$. On a d'abord

$$\omega^2 = \omega^3 = 0.$$

Des quatre composantes qui restent, deux s'annulent si on laisse fixe le point M, à savoir ω^1 et $\omega_1{}^2$: la différentielle $d\vec{e_1}$ du vecteur $\vec{e_1}$ doit en effet être un vecteur porté sur la tangente fixe à la courbe et ne doit pas avoir de composante parallèle à $\vec{e_2}$. Quant aux deux autres composantes $\omega_1{}^1$ et $\omega_3{}^2$, elles dépendent linéairement des différentielles des deux paramètres secondaires. On aura

donc, en faisant varier le paramètre principal t et les deux paramètres secondaires,

$$\omega^1 = p^1 dt, \quad \omega_1^2 = p_1^2 dt.$$

Les coefficients p^1 et p_1^2 dépendent *a priori* des paramètres secondaires. Pour voir de quelle manière ils en dépendent, substituons au trièdre $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un autre trièdre du premier ordre $(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2}, \vec{\eta_3})$. On a facilement

$$\vec{\eta_1} = \lambda \vec{e_1}, \quad \vec{\eta_2} = \vec{e_2} + \mu \vec{e_1}, \quad \vec{\eta_3} = \frac{1}{\lambda} \vec{e_3} - \frac{\mu}{\lambda} \vec{e_2} - \frac{\mu^2}{2\lambda} \vec{e_1}.$$

Les nouvelles valeurs des composantes ω^1 et ω_1^2 se calculent alors sans difficulté, et on trouve

$$\overline{\omega}^1 = \frac{1}{\lambda} \omega^1, \quad \overline{\omega_1}^2 = \lambda \omega_1^2,$$

d'où

$$\overline{p}^1 = \frac{1}{\lambda} p^1, \quad \overline{p_1}^2 = \lambda p_1^2.$$

On peut alors disposer de λ de manière à réduire à une valeur numérique fixe, par exemple à 1, le rapport $\frac{p_1^2}{p^1}$. On obtient ainsi la famille des trièdres du second ordre, qui ne dépend plus que d'un paramètre secondaire, et pour laquelle on a

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega_1^2 = \omega^1.$$

Si maintenant on fait varier le trièdre du second ordre en laissant fixe le point M, les deux composantes ω_1^1 et ω_3^2 ne sont plus indépendantes ; elles sont liées par une relation. On l'obtient facilement en remarquant que le vecteur $\vec{e_1}$ étant maintenant fixé, sa différentielle est nulle et que par suite la composante ω_1^1 s'annule avec dt. En faisant varier M, on a donc

$$\omega_1^1 = p_1^1 dt.$$

Pour voir comment p_1^1 dépend du paramètre secondaire des trièdres du second ordre, substituons au trièdre $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ le trièdre $(\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2}, \vec{\eta_3})$ avec

$$\vec{\eta_1} = \vec{e_1}, \quad \vec{\eta_2} = \vec{e_2} + \mu \vec{e_1}, \quad \vec{\eta_3} = \vec{e_3} - \mu \vec{e_2} - \frac{1}{2} \mu^2 \vec{e_1}.$$

On trouve, en remarquant que ω_1^1 n'est autre que le produit scalaire $\vec{e_3}\,\vec{de_1}$,

$$\overline{\omega_1}^1 = \omega_1^1 - \mu\omega_1^2 = (p_1^1 - \mu p^1)dt.$$

On peut donc disposer de μ de manière à annuler p_1^1. On arrive ainsi à un trièdre déterminé du troisième ordre, pour lequel on a

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega_1^2 - \omega^1 = \omega_1^1 = 0 \ ;$$

la composante ω_3^2 est alors de la forme $k\omega^1$, et le coefficient k est un *invariant différentiel* de la courbe ; c'est sa *pseudo-courbure*.

Du reste l'expression ω^1, qui était indéterminée quand on se servait des trièdres du premier ordre, a pris une valeur déterminée dès qu'on est arrivé aux trièdres du second ordre. C'est le *pseudo-arc* élémentaire $d\sigma$ de la courbe minima.

On peut alors maintenant écrire les formules de Frenet des courbes minima, à savoir

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{M}}{d\sigma} = \vec{e_1}, \\ \dfrac{\vec{de_1}}{d\sigma} = \vec{e_2}, \\ \dfrac{\vec{de_2}}{d\sigma} = -k\vec{e_1} - \vec{e_3}, \\ \dfrac{\vec{de_3}}{d\sigma} = k\vec{e_2}. \end{cases}$$

Deux courbes minima sont égales si la pseudo-courbure est pour ces deux courbes la même fonction du pseudo-arc σ, ou plutôt si $\dfrac{dk}{d\sigma}$ est la même fonction de k.

9. — Remarquons que nous avons fait, chemin faisant, une hypothèse implicite, c'est lorsque nous avons réduit à 1 le rapport

$$\frac{\overline{p_1}^2}{\overline{v_1}} = \lambda^2 \frac{p_1^2}{p_1} \ ;$$

cela suppose que le coefficient p_1^2 n'est pas nul ; c'est-à-dire, géométriquement, qu'on n'a pas affaire à une droite. Si la ligne donnée était une droite, on n'aurait aucun moyen de différen-

cièr les uns des autres les trièdres d'ordre 1, et on n'aurait non plus aucun moyen de définir sur la droite un *paramètre naturel* σ, ce qui est du reste évident géométriquement.

Remarquons en outre que nous nous sommes servis de considérations géométriques pour prévoir, dans le passage des trièdres d'un ordre donné aux trièdres de l'ordre supérieur, quelles étaient les composantes nouvelles du déplacement infinitésimal qui ne devaient plus dépendre des différentielles des paramètres secondaires. La méthode dont nous nous sommes servis, si elle donne la forme des équations de Frenet, *ce qui est du reste la seule chose intéressante dans les recherches théoriques*, ne nous donne explicitement ni l'expression de $d\sigma$, ni l'expression de k.

On peut obvier à ces différents inconvénients en calculant explicitement dès le début les composantes du déplacement infinitésimal pour un trièdre d'ordre zéro. C'est ce que nous allons faire dans le cas d'une courbe minima.

10. — Définissons, avec Weierstrass ([2]), la courbe minima par les équations en coordonnées rectangulaires

$$(4)\quad x=\int\frac{1-t^2}{2}\mathfrak{F}(t)dt,\quad y=\int i\frac{1+t^2}{2}\mathfrak{F}(t)dt,\quad z=\int t\mathfrak{F}(t)dt,$$

où x, y et z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, $\mathfrak{F}(t)$ une fonction analytique de t. Désignons par α_i, β_i, γ_i les projections sur les axes rectangulaires fixes du vecteur $\vec{e_i}$. On a

$$\omega^1=\vec{e_3}d\mathrm{M}=\alpha_3dx+\beta_3dy+\gamma_3dz,$$
$$\omega^2=\vec{e_2}d\mathrm{M}=\alpha_2dx+\beta_2dy+\gamma_2dz,$$
$$\omega^3=\vec{e_1}d\mathrm{M}=\alpha_1dx+\beta_1dy+\gamma_1dz,$$
$$\omega_1^{\,1}=\vec{e_3}d\vec{e_1}=\alpha_3d\alpha_1+\beta_3d\beta_1+\gamma_3d\gamma_1,$$
$$\omega_1^{\,2}=\vec{e_2}d\vec{e_1}=\alpha_2d\alpha_1+\beta_2d\beta_1+\gamma_2d\gamma_1,$$
$$\omega_3^{\,2}=-\vec{e_3}d\vec{e_2}=-\alpha_3d\alpha_2-\beta_3d\beta_2-\gamma_3d\gamma_2.$$

On peut prendre, pour définir un trièdre du premier ordre,

([2]) WEIERSTRASS, *Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleïch Null ist* (Sitzungsb. Berlin, 1866).

$$\alpha_1 = \lambda\frac{1-t^2}{2}, \qquad \beta_1 = i\lambda\frac{1+t^2}{2}, \qquad \gamma_1 = \lambda t,$$

$$\alpha_2 = -t + \mu\frac{1-t^2}{2}, \quad \beta_2 = it + i\mu\frac{1+t^2}{2}, \quad \gamma_2 = 1 + \mu t,$$

$$\alpha_3 = \rho\frac{1-u^2}{2}, \qquad \beta_3 = i\rho\frac{1+u^2}{2}, \qquad \gamma_3 = \rho u,$$

avec les conditions

$$u - t = \frac{2}{\mu}, \quad \lambda\rho = -\frac{1}{2}\mu^2.$$

Le calcul donne alors

$$\omega^1 = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}(t)dt, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0,$$

$$\omega_1{}^1 = \frac{d\lambda}{\lambda} - \mu dt, \quad \omega_1{}^2 = \lambda dt, \quad \omega_3{}^2 = 2\rho\frac{d\mu}{\mu^2} - \rho dt.$$

On voit que le rapport

$$\frac{\omega_1{}^2}{\omega^1} = \frac{\lambda^2}{\mathcal{F}(t)}$$

peut être réduit à 1 en posant

$$\lambda^2 = \mathcal{F}(t).$$

On a alors

$$\omega^1 = d\sigma = \sqrt{\mathcal{F}(t)}dt, \tag{5}$$

$$\omega_1{}^1 = \left(\frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}'(t)}{\mathcal{F}(t)} - \mu\right)dt,$$

et on peut réduire $\omega_1{}^1$ à zéro en posant

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}'(t)}{\mathcal{F}(t)}, \quad \text{d'où} \quad \rho = -\frac{1}{8}\frac{\mathcal{F}'^2}{\lambda\mathcal{F}^2}.$$

On a enfin

$$\omega_3{}^2 = \frac{5\,\mathcal{F}'^2 - 4\,\mathcal{F}\mathcal{F}''}{8\,\lambda\mathcal{F}^2}dt = \frac{5\,\mathcal{F}'^2 - 4\,\mathcal{F}\mathcal{F}''}{8\,\mathcal{F}^3}d\sigma,$$

ce qui donne la courbure

$$k = \frac{5\,\mathcal{F}'^2 - 4\,\mathcal{F}\mathcal{F}''}{8\,\mathcal{F}^3}. \tag{6}$$

On voit que $d\sigma$ n'est défini qu'au signe près, mais que k est défini rationnellement au moyen des dérivées des deux premiers

ordres de $\mathcal{F}(t)$. Les deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$ sont également définis au signe près (le second étant complètement déterminé quand on fixe le premier) ; quant au vecteur $\vec{e}_2$, il est défini sans ambiguïté.

Une fois le trièdre de Frenet déterminé, ce sera au géomètre à préciser la signification géométrique des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ qui le déterminent, ainsi que celle du pseudo-arc et de la courbure. Mais il est clair que la connaissance préalable des formules de Frenet est d'une aide puissante dans cette étude purement géométrique et qu'elle suggère des interprétations auxquelles on aurait pu ne pas songer *a priori*.

III

11. — Avant d'aborder une étude systématique de la méthode du repère mobile, examinons encore quelques exemples sortant du cadre de la géométrie euclidienne proprement dite.

On peut se proposer d'étudier les propriétés des courbes qui ne sont pas seulement indépendantes de leur position particulière dans l'espace, mais qui ne changent pas par une homothétie. A ce point de vue, deux figures semblables doivent être regardées comme égales. Il est clair que deux trièdres trirectangles construits sur trois vecteurs de même longueur doivent être regardés comme égaux, même si la longueur commune des vecteurs du premier trièdre n'est pas la même que celle des vecteurs du second. Le passage d'un trièdre trirectangle à un autre infiniment voisin se fait alors par une translation et une rotation infinitésimales, accompagnées d'une homothétie de rapport infiniment voisin de 1. Il faudra sept quantités au lieu de six pour définir analytiquement cette nouvelle espèce de déplacement, et on aura des formules

$$
\begin{aligned}
d\mathrm{M} &= \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3, \\
d\vec{e}_1 &= \omega \vec{e}_1 + \omega_{12} \vec{e}_2 + \omega_{13} \vec{e}_3, \\
d\vec{e}_2 &= \omega_{21} \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_2 + \omega_{23} \vec{e}_3, \\
d\vec{e}_3 &= \omega_{31} \vec{e}_1 + \omega_{32} \vec{e}_2 + \omega \vec{e}_3,
\end{aligned}
$$

dans lesquelles ω_1, ω_2, ω_3 sont les composantes de la translation, $\omega_{23} = -\omega_{32}$, $\omega_{31} = -\omega_{13}$, $\omega_{12} = -\omega_{21}$ les composantes de la rotation et $1 + \omega$ le rapport d'homothétie.

Etant donnée une courbe gauche, on n'aperçoit pas immédiatement quel est le vecteur $\vec{e_1}$ qu'il convient de choisir tangent à la courbe, et en effet, à s'en tenir aux éléments du premier ordre de la courbe, il n'y a aucune raison de choisir un vecteur plutôt qu'un autre. Il y a cependant une unité de longueur qu'on peut attacher d'une manière intrinsèque à chaque point M de la courbe, c'est la longueur du rayon de courbure relatif à ce point; le trièdre cherché est ainsi complètement déterminé par des considérations géométriques. En désignant par $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ les vecteurs unitaires du trièdre de Frenet ordinaire, par $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ la courbure et la torsion, on prendra donc

$$\vec{e_1} = \rho\vec{T}, \quad \vec{e_2} = \rho\vec{N}, \quad \vec{e_3} = \rho\vec{B},$$

et les formules de Frenet deviendront

$$\begin{aligned}
d\mathrm{M} &= \frac{ds}{\rho}\vec{e_1},\\
d\vec{e_1} &= \frac{d\rho}{\rho}\vec{e_1} + \frac{ds}{\rho}\vec{e_2},\\
d\vec{e_2} &= -\frac{ds}{\rho}\vec{e_1} + \frac{d\rho}{\rho}\vec{e_2} + \frac{ds}{\tau}\vec{e_3},\\
d\vec{e_3} &= -\frac{ds}{\tau}\vec{e_2} + \frac{d\rho}{\rho}\vec{e_3}.
\end{aligned}$$

Le nouveau paramètre naturel est défini par

$$d\sigma = \frac{ds}{\rho} \tag{7}$$

et l'on a

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{M}}{d\sigma} &= \vec{e_1},\\
\frac{d\vec{e_1}}{d\sigma} &= k\vec{e_1} + \vec{e_2},\\
\frac{d\vec{e_2}}{d\sigma} &= -\vec{e_1} + k\vec{e_2} + h\vec{e_3},\\
\frac{d\vec{e_3}}{d\sigma} &= -h\vec{e_2} + k\vec{e_3},
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

avec les deux *invariants fondamentaux*

$$k = \frac{d\rho}{ds}, \quad h = \frac{\rho}{\tau}. \tag{9}$$

Deux courbes pour lesquelles k et h sont les mêmes fonctions de σ sont *égales*, au sens de la géométrie des similitudes, c'est-à-dire qu'au sens vulgaire du mot, elles sont semblables.

12. — Prenons maintenant un exemple encore plus éloigné de la géométrie euclidienne ordinaire. Proposons-nous d'étudier les propriétés d'une courbe plane qui sont invariantes par une transformation affine unimodulaire, c'est-à-dire par une transformation définie, dans un système de coordonnées cartésiennes, par des formules de la forme

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= a'x + b'y + c', \end{aligned}$$

avec la condition

$$ab' - ba' = 1.$$

Les systèmes de référence, ou *repères*, qui vont remplacer les trièdres trirectangles sont les systèmes de coordonnées cartésiennes définis par deux vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ assujettis à l'unique condition que le parallélogramme construit sur ces deux vecteurs ait une aire donnée, qui sera l'unité d'aire.

Donnons encore le nom de *déplacement* à une transformation affine unimodulaire. Pour un déplacement infinitésimal du repère, supposé d'origine M, on aura les formules

$$\begin{cases} d\mathrm{M} = \omega^1 \vec{e_1} + \omega^2 \vec{e_2}, \\ d\vec{e_1} = \omega_1{}^1 \vec{e_1} + \omega_1{}^2 \vec{e_2}, \\ d\vec{e_2} = \omega_2{}^1 \vec{e_1} + \omega_2{}^2 \vec{e_2}; \end{cases} \tag{10}$$

mais la condition relative à l'aire du parallélogramme $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ donne

$$\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2 = 0. \tag{11}$$

Le déplacement infinitésimal considéré a donc, par rapport au repère mobile, cinq composantes ω^1, ω^2, $\omega_1{}^1$, $\omega_1{}^2$, $\omega_2{}^1$.

On peut démontrer que si l'on a deux familles de repères mobiles se correspondant avec égalité des composantes ω^i et $\omega_i{}^j$,

on peut passer de l'une des familles à l'autre par une transformation affine unimodulaire déterminée.

Cela posé, supposons choisi un système de référence fixe ; soient x et y les coordonnées d'un point d'une courbe plane supposée, pour simplifier, donnée par son équation $y = f(x)$. Attachons à chaque point un *repère du premier ordre* pour lequel le vecteur $\vec{e_1}$ sera tangent à la courbe. Les composantes des deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ seront alors de la forme

pour $\vec{e_1}$: $\alpha, \quad \alpha y'$;

pour $\vec{e_2}$: $\beta, \quad \beta y' + \frac{1}{\alpha}$.

Le calcul des composantes ω^i et ω_i^j se fait sans difficulté en se servant des équations (10), et il donne

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^1 = \frac{dx}{\alpha}, \quad \omega_1^2 = \alpha^2 y'' dx,$$
$$\omega_1^1 = \frac{d\alpha}{\alpha} - \alpha\beta y'' dx, \quad \omega_2^1 = \frac{d\beta}{\alpha} + \beta \frac{d\alpha}{\alpha^2} - \beta^2 y'' dx.$$

Nous aurons les repères du second ordre en égalant à 1 le rapport $\frac{\omega_1^2}{\omega^1}$ (ce qui suppose $y'' \neq 0$). Ces repères dépendent d'un seul paramètre β ; on a

$$\alpha = y''^{-\frac{1}{3}} ;$$

de plus, ω^1 étant parfaitement déterminé, définit la différentielle $d\sigma$ de l'arc affine

$$d\sigma = y''^{\frac{1}{3}} dx. \tag{12}$$

Pour les repères du second ordre, la composante ω_1^1 ne dépend pas de la différentielle du paramètre secondaire unique β ; on a

$$\omega_1^1 = \left(-\frac{1}{3} \frac{y'''}{y''} - \beta y''^{\frac{2}{3}} \right) dx.$$

On aura un repère du troisième ordre en annulant ω_1^1, ce qui donne

$$\beta = -\frac{1}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y''' = \frac{1}{2} \left(y''^{-\frac{2}{3}} \right)'.$$

Pour le repère du troisième ordre, qui est le repère définitif cherché, on a, en posant

$$y''^{-\frac{2}{3}} = z,$$

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z'' dx = \frac{1}{2} z' d\sigma = k d\sigma.$$

Les formules de Frenet sont donc

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{M}}{d\sigma} = \vec{e}_1, \\ \dfrac{d\vec{e}_1}{d\sigma} = \vec{e}_2, \\ \dfrac{d\vec{e}_2}{d\sigma} = k\vec{e}_1. \end{cases}$$

L'invariant différentiel k est la *courbure affine*. Les coniques sont caractérisées par la propriété d'être à courbure affine constante, conformément à l'équation différentielle des coniques

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0$$

due, à la forme près, à Monge.

En réalité, il y a trois choix possibles pour le repère ; si j désigne une racine cubique quelconque de l'unité, on peut remplacer respectivement

$$d\sigma, \quad \vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad k$$

par

$$jd\sigma, \quad j^2\vec{e}_1, \quad j\vec{e}_2, \quad jk.$$

Pour que deux courbes soient *égales*, c'est-à-dire ne diffèrent que par une transformation affine unimodulaire, il faut et il suffit, ou bien que k^3 ait la même valeur constante pour les deux courbes, ou bien que $\frac{dk}{d\sigma}$ soit la même fonction de k^3 pour les deux courbes.

IV

13. — Nous allons maintenant signaler une autre méthode, assez rapide dans certains cas, sinon pour obtenir explicitement les invariants différentiels et le repère mobile à attacher à la

variété étudiée, du moins pour obtenir les formules de Frenet. Cette nouvelle méthode utilise la méthode des *équations réduites*, développée systématiquement par M. Tresse (3) pour la recherche des invariants différentiels. Nous nous contenterons de l'exposer sur deux exemples particuliers.

Le premier est celui que nous venons de traiter dans le numéro précédent. Nous allons attacher à un point M d'une courbe plane un système de coordonnées cartésiennes d'origine M tel que l'équation de la courbe au voisinage du point M soit aussi simple que possible. Nous astreindrons les vecteurs de coordonnées $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ à la condition que le parallélogramme qu'ils déterminent soit d'aire égale à 1. En choisissant le premier axe tangent à la courbe, l'équation de la courbe, supposée analytique, sera de la forme

$$y = \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \dots ;$$

on pourra multiplier x et y par deux facteurs λ et $\frac{1}{\lambda}$, ce qui correspond à un changement de coordonnées permis, de manière à donner au coefficient a_2 la valeur 1. En posant ensuite

$$x = X + \mu Y, \quad y = Y,$$

ce qui est encore permis, on constate facilement qu'on pourra annuler le coefficient a_3. On arrive ainsi à l'*équation réduite*, que nous écrirons sous la forme

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} k x^4 + \dots \tag{14}$$

Si nous considérons un point M′ infiniment voisin de M, l'abscisse x de ce point est une quantité liée d'une manière intrinsèque à l'arc de courbe MM′ ; nous pouvons l'appeler l'*arc affine* élémentaire. En prenant sur la courbe un point origine, on pourra attribuer à chaque point M de la courbe une *abscisse curviligne affine* σ, et les coefficients k, ... de l'équation réduite seront des fonctions déterminées de l'abscisse σ du point M correspondant.

Cela posé, on aura manifestement, en se déplaçant sur la courbe,

(3) A. Tresse, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* (Acta Math., 18, 1894).

$$\frac{dM}{d\sigma} = \vec{e}_1,$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{d\sigma} = p_1^{\,1}\vec{e}_1 + p_1^{\,2}\vec{e}_2,$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{d\sigma} = p_2^{\,1}\vec{e}_1 - p_1^{\,1}\vec{e}_2.$$

Tout revient à déterminer les coefficients inconnus $p_1^{\,1}$, $p_1^{\,2}$, $p_2^{\,1}$.

Considérons pour cela sur la courbe un point *fixe* P ; désignons par x, y ses coordonnées relatives au repère attaché au point M d'abscisse σ ; ce sont des fonctions de σ satisfaisant à certaines équations différentielles faciles à former. Il suffit en effet d'exprimer que le point $M + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ est fixe, ce qui donne

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\sigma} + 1 + p_1^{\,1}x + p_2^{\,1}y = 0, \\ \dfrac{dy}{d\sigma} \qquad + p_1^{\,2}x - p_1^{\,1}y = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées x et y satisfont d'autre part, quel que soit σ, à la relation

$$(14)\qquad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}k(\sigma)x^4 + \ldots = f(x, \sigma).$$

On en déduit, par différentiation et utilisation des formules (15),

$$(16)\quad -p_1^{\,2}x + p_1^{\,1}f(x,\sigma) = f'_x[-1 - p_1^{\,1}x - p_2^{\,1}f(x,\sigma)] + f_\sigma'.$$

Cette relation doit avoir lieu quel que soit σ, mais aussi quel que soit le point P qu'on a fixé sur la courbe ; c'est donc une *identité* en x et σ. Nous allons alors égaler les coefficients des différentes puissances de x dans les deux membres de l'identité (16), qui s'écrit, en développant,

$$(16')\quad -p_1^{\,2}x + p_1^{\,1}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}kx^4 + \ldots\right) = \left(x - \frac{1}{2}kx^3 + \ldots\right) \times \left(-1 - p_1^{\,1}x - \frac{1}{2}p_2^{\,1}x^2 + \ldots\right) - \frac{1}{8}k'x_4 + \ldots$$

On trouve successivement

$$-p_1^{\,2} = -1,$$

$$\frac{1}{2}p_1^{\,1} = -p_1^{\,1},$$

$$0 = -\frac{1}{2}p_2^{\,1} + \frac{1}{2}k,$$

d'où

$$p_1^2 = 1, \quad p_1^1 = 0, \quad p_2^1 = k.$$

On retrouve ainsi les formules de Frenet (13) déjà obtenues. Mais en poursuivant l'identification on aurait, en fonction de la courbure affine et de ses dérivées successives, les coefficients du développement de y en fonction de x. Cela confirme bien ce que nous avons déjà dit, que la courbe est complètement déterminée, à une affinité unimodulaire près, par la connaissance de k en fonction de σ (4).

14. — Nous allons encore appliquer la même méthode à un problème de géométrie euclidienne. Nous allons considérer une surface imaginaire, analytique, qui ne soit pas une développable minima, mais telle que sa seconde forme fondamentale ait un facteur linéaire commun et un seul avec la première forme fondamentale, de sorte que la surface admette une famille double de lignes de courbure minima. Nous utiliserons ici les mêmes trièdres que dans la théorie des courbes minima, les vecteurs isotropes $\vec{e_1}$ et $\vec{e_3}$ étant tangents à la surface, le vecteur unitaire $\vec{e_2}$ lui étant normal. L'équation réduite de la surface sera de la forme

$$y = \frac{1}{2} ax^2 + bxz + \dots$$

Comme on peut multiplier respectivement x et z par λ et $\frac{1}{\lambda}$, on pourra réduire à l'unité la valeur du coefficient a, et nous écrirons

$$(17) \quad y = \frac{1}{2} x^2 + kxz + \frac{1}{6} \alpha x^3 + \frac{1}{2} \beta x^2 z + \frac{1}{2} \gamma x z^2 + \frac{1}{6} \delta z^3 + \dots$$

Si l'on considère un point M′ infiniment voisin de M, les quantités infiniment petites x et z sont intrinsèquement liées au couple de ces deux points : ce sont les composantes ω^1 et ω^3 du déplacement infinitésimal du trièdre mobile. Posons alors, comme au n° 8,

$$(18) \quad \begin{cases} d\mathrm{M} = \omega^1 \vec{e_1} + \omega^3 \vec{e_3}, \\ d\vec{e_1} = \omega_1^1 \vec{e_1} + \omega_1^2 \vec{e_2}, \\ d\vec{e_2} = -\omega_3^2 \vec{e_1} - \omega_1^2 \vec{e_3}, \\ d\vec{e_3} = \omega_3^2 \vec{e_2} - \omega_1^1 \vec{e_3}. \end{cases}$$

(4) Voir, pour la même méthode appliquée à la géométrie projective plane, E. CARTAN, *Sur un problème du calcul des variations* (Recueil Soc. Math. Moscou, 34, 1927).

Les coordonnées x, y, z, d'un point fixe P de la surface rapporté au trièdre d'origine M satisfont à l'équation (17), où k, a, β, ... dépendent de M, et aux équations différentielles qui expriment que le point P est fixe, à savoir

$$(19)\qquad \begin{cases} dx + \omega^1 + x\omega_1^{\,1} - y\omega_3^{\,2} = 0, \\ dy \qquad\quad + x\omega_1^{\,2} + z\omega_3^{\,2} = 0, \\ dz + \omega^3 - y\omega_1^{\,2} - z\omega_1^{\,1} = 0. \end{cases}$$

On en déduit, comme dans l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} -x\omega_1^{\,2} - z\omega_3^{\,2} = {} & \left(x + kz + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xz + \frac{1}{2}\gamma z^2 + \ldots\right)\times \\ & \times\left[-\omega^1 - x\omega_1^{\,1} + \left(\frac{1}{2}x^2 + kxz + \ldots\right)\omega_3^{\,2}\right] \\ & + \left(kx + \frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma xz + \frac{1}{2}\delta z^2 + \ldots\right)\times \\ & \times\left[-\omega^3 + z\omega_1^{\,1} + \left(\frac{1}{2}x^2 + kxz + \ldots\right)\omega_1^{\,2}\right] \\ & + xzdk + \frac{1}{6}x^3 d\alpha + \frac{1}{2}x^2 z d\beta + \frac{1}{2}xz^2 d\gamma + \frac{1}{6}z^3 d\delta + \ldots \end{aligned}$$

Par identification, on trouve successivement

$$\begin{aligned} -x\omega_1^{\,2} - z\omega_3^{\,2} &= -(x + kz)\,\omega^1 - kx\omega^3, \\ 0 &= -x(x + kz)\,\omega_1^{\,1} - \left(\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xz + \frac{1}{2}\gamma z^2\right)\omega^1 \\ &\quad + kxz\omega_1^{\,1} - \left(\frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma xz + \frac{1}{2}\delta z^2\right)\omega^3 + xzdk, \end{aligned}$$

d'où

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega_1^{\,2} = \omega^1 + k\omega^3, \quad \omega_3^{\,2} = k\omega^1, \quad \omega_1^{\,1} = -\frac{1}{2}\alpha\omega^1 - \frac{1}{2}\beta\omega^3, \\ \gamma = \delta = 0, \quad dk = \beta\omega^1. \end{cases}$$

On voit que les termes du troisième ordre dans le développement de y ne sont pas arbitraires. Cela tient à ce que les lignes de courbure minima, qui sont en même temps des lignes asymptotiques, sont des droites. On les obtient en effet en faisant $\omega^1 = 0$; le vecteur $\vec{e_3}$ leur est tangent et, en se déplaçant le long d'une de ces lignes, on voit que $d\vec{e_3}$ est encore tangent à cette ligne, ce qui prouve que la ligne a une tangente fixe.

L'invariant différentiel k (du second ordre) est la courbure principale unique de la surface, dont la courbure totale est k^2. Des invariants différentiels α et β on peut déduire par différentia-

tions successives tous les autres invariants différentiels de la surface en posant

$$d\alpha = \alpha_1\omega^1 + \alpha_3\omega^3,$$
$$d\beta = \beta_1\omega^1 + \beta_3\omega^3,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots;$$

les coefficients α_1, α_3, β_1, β_3, ..., sont les invariants différentiels cherchés.

Malgré les résultats que nous avons obtenus par cette méthode, nous voyons bien qu'il nous manque encore quelque chose d'essentiel. Nous ne savons pas par exemple s'il n'y a pas des relations nécessaires entre les invariants différentiels trouvés ; si nous pouvons nous donner arbitrairement la relation qui doit exister certainement entre α, β et k, etc. Pour résoudre tous ces problèmes, il faut tenir compte des conditions de compatibilité auxquelles doivent satisfaire les composantes du déplacement infinitésimal d'un trièdre mobile dépendant de *plusieurs* paramètres. Nous retrouverons bientôt ces conditions sous une forme tout à fait générale et, comme nous le verrons, elles contiennent en elles-mêmes toute l'essence de la géométrie différentielle.

Contentons-nous de remarquer pour le moment que les expressions ω^1 et ω^3 ne sont pas en général des différentielles exactes et qu'on ne peut donc attacher à la surface un système de deux paramètres naturels σ_1 et σ_2 analogues au paramètre naturel σ qui s'est introduit toutes les fois que nous avons eu affaire à une courbe.

V

15. — Il est temps maintenant d'aborder la théorie générale du repère mobile, en la rattachant aux principes fondamentaux de la théorie des groupes continus. On sait que, d'après F. Klein ([5]), à tout groupe continu G à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ correspond dans l'espace à n dimensions une géométrie ayant pour objet l'étude des propriétés des figures invariantes par les transformations du groupe ; c'est ainsi que la géométrie élémentaire correspond au groupe des déplacements, la géométrie affine au groupe des transformations affines, la géométrie projective au

([5]) F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (connu sous le nom de Programme d'Erlangen, 1872).

groupe des transformations projectives. Le groupe G est appelé quelquefois le groupe fondamental de la géométrie, ou le groupe fondamental de l'espace dans lequel on étudie les propriétés des figures invariantes par le groupe.

Nous supposerons dans ce qui suit que le groupe est *fini*, c'est-à-dire que sa transformation générale dépend d'un nombre fini de paramètres. Nous supposerons aussi, pour simplifier, que les variables transformées x'_1, x'_2, ..., x'_n sont des fonctions analytiques des variables primitives x_1, x_2, ..., x_n et des paramètres a_1, a_2, ..., a_r. Enfin nous supposerons le groupe *transitif*, ce qui signifie qu'il existe toujours au moins une transformation du groupe amenant en coïncidence deux points arbitrairement donnés de l'espace. Nous donnerons, par extension, le nom de *déplacements* aux transformations du groupe et nous désignerons par S_a le déplacement de paramètres $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

16. — La première question que nous devons nous poser est la suivante : *Qu'est-ce qui va remplacer, dans une géométrie de Klein quelconque, la notion de trièdre trirectangle en géométrie ordinaire ?* Rappelons-nous que l'ensemble des trièdres trirectangles jouit de la propriété suivante : *deux trièdres trirectangles quelconques peuvent être amenés en coïncidence par un déplacement et un seul.* On se rend bien compte que c'est là la propriété qui joue le rôle essentiel dans l'application de la méthode du trièdre mobile.

Cela posé, nous dirons qu'une famille de figures constituera un système de repères *si deux figures quelconques de la famille peuvent être amenées en coïncidence par une transformation et une seule du groupe G.*

Il est clair que si on peut trouver une figure particulière (R_o) telle que toute transformation non identique de G transforme (R_o) en une figure distincte de (R_o), l'ensemble de la figure (R_o) et des figures (R_a) qui s'en déduisent par les différentes transformations S_a de G constituent un système de repères. En effet pour amener (R_a) en (R_b), il suffit d'appliquer à (R_a) successivement la transformation S_a^{-1} qui amène (R_a) en (R_o), puis la transformation S_b qui amène R_o en R_b. La transformation résultante

$$S_c = S_b S_a^{-1}$$

sera encore une transformation S_c de G et cette transformation S_c amène (R_a) en (R_b). Réciproquement si $S_{c'}$ amène (R_a) en (R_b), la transformation $S_b^{-1} S_{c'} S_a$ amène successivement (R_o) en (R_a), puis en (R_b), puis en (R_o) ; c'est donc la transformation identique, ce qui donne

$$S_{c'} S_a = S_b, \quad \text{ou} \quad S_{c'} = S_b S_a^{-1} = S_c.$$

La recherche d'un système de repères revient donc à la recherche d'une figure particulière (R_o) qui ne soit invariante par aucune transformation de G distincte de la transformation identique.

17. — Il est des cas où les repères se présentent tout naturellement. Par exemple, en géométrie affine générale à n dimensions, il est naturel de prendre comme repère la figure formée par un point et n vecteurs issus de ce point, mais non situés dans un même hyperplan. En géométrie projective à n dimensions, la figure formée de $n + 2$ points peut également servir de repère ; mais il est plus commode de prendre la figure formée de $n + 1$ points *analytiques*, un point analytique étant l'ensemble de $n + 1$ nombres non tous nuls. Etant donnés $n + 1$ points analytiques A_1, A_2, ..., A_{n+1} *linéairement indépendants*, tout point analytique peut, d'une manière et d'une seule, être mis sous la forme

$$M = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_{n+1} A_{n+1},$$

et les coefficients x_1, x_2, ..., x_{n+1} peuvent être regardés comme les coordonnées homogènes du point géométrique qu'on peut associer à M et à tous les points analytiques de la forme λM. Mais il faut remarquer que, comme repère proprement dit, l'ensemble ordonné des $n + 1$ points analytiques $(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$ ne doit pas être regardé comme distinct de l'ensemble des $n + 1$ points analytiques $(mA_1, mA_2, \ldots, mA_{n+1})$.

18. — Revenons à un groupe G quelconque. Si le groupe est simplement transitif, c'est-à-dire s'il existe une seule transformation du groupe amenant en coïncidence deux points arbitrairement donnés, les points de l'espace constituent un ensemble de repères.

Supposons le groupe non simplement transitif, ce qui revient à dire que l'ordre r du groupe est supérieur au nombre n des variables. Partons d'un point arbitraire A_o ; il existe par hypothèse une

infinité de transformations de G laissant fixe ce point ; elles forment un sous-groupe g_1 à $r_1 = r - n$ paramètres. Il existe certainement des points non invariants par g_1 ; soit B_o un de ces points. Les transformations de g_1 qui laissent fixe le point B_o forment un sous-groupe g_2 d'ordre $r_2 < r_1$. Si r_2 est positif, il existe certainement des points non invariants par g_2 ; soit C_o un de ces points. Les transformations de g_2 qui laissent fixe le point C_o forment un sous-groupe g_3 d'ordre $r_3 < r_2$. Si r_3 est nul, c'est-à-dire si g_3 se réduit à la transformation identique, la figure formée par les trois points A_o, B_o, C_o peut servir de repère initial (R_o) ; sinon on continuera par le même procédé, qui aura certainement une fin, puisque les ordres des sous-groupes successifs g_1, g_2, ... vont constamment en décroissant.

On peut donc toujours trouver un système de repères dont chacun est formé d'un nombre fini de points rangés dans un certain ordre.

Il est inutile de faire remarquer qu'il existe une infinité d'autres systèmes possibles de repères. On peut aussi observer qu'en géométrie euclidienne, le trièdre trirectangle peut être assimilé à une figure formée de quatre points, à savoir l'origine du trièdre et les extrémités des trois vecteurs unitaires portés sur les axes.

19. — En géométrie euclidienne, le trièdre trirectangle sert de système de coordonnées. Dans le cas général il en est de même. Associons en effet à un repère particulier (R_o), que nous appellerons repère initial, le système de coordonnées x_1, x_2, ..., x_n initialement donné. Soit (R_a) un repère quelconque, M un point quelconque de l'espace, et soit M' le point transformé de M par le déplacement S_a^{-1} qui amène (R_a) en (R_o). Nous conviendrons de dire que les coordonnées initiales de M' sont les *coordonnées de* M *relatives au repère* (R_a). Nous voyons que la figure formée d'un repère (R) et d'un point M et la figure formée d'un repère (R') et d'un point N sont *égales* si les coordonnées de M rapportées au repère (R) sont égales aux coordonnées de N rapportées au repère (R').

Si nous utilisons, au lieu des coordonnées initiales x_1, x_2, ..., x_n, les coordonnées ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n relatives au repère (R_a), les équations qui définissent analytiquement les transformations du groupe G ont exactement la même forme qu'auparavant. En effet soit S_b une transformation quelconque de G, et soit M_b le point transformé de

M par S_b. Soient d'autre part M' et M'_b les points transformés de M et de M_b par S_a^{-1}. Les coordonnées initiales de M' et de M'_b sont les coordonnées ξ de M et de M_b. Or on passe de M' à M'_b par les transformations successives S_a, S_b, S_a^{-1} ; on passe donc analytiquement des coordonnées ξ de M aux coordonnées ξ' du point transformé M_b par la transformation $S_a^{-1} S_b S_a$, qui est une transformation du groupe. Mais il est à remarquer que les paramètres qui figurent dans les équations de cette transformation ($\xi_i \to \xi'_i$) ne sont pas les paramètres b_i de S_b, mais sont les paramètres de la transformation $S_a^{-1} S_b S_a$, dite *transformée de* S_b *par* S_a.

Il est donc indispensable de distinguer entre S_a, considérée comme opération *géométrique*, et S_a considérée comme opération *analytique*. La transformation *géométrique* S_a n'est représentée analytiquement par la transformation *analytique* S_a que si l'on adopte le système de coordonnées initiales attaché au repère (R_o).

20. — Arrivons maintenant au déplacement infinitésimal qui amène en coïncidence deux repères infiniment voisins (R_a) et (R_{a+da}). On passe de (R_a) à (R_{a+da}) par la transformation *géométrique* $S_{a+da} S_a^{-1}$, résultante du déplacement S_a^{-1} qui amène (R_a) en (R_o), et du déplacement S_{a+da} qui amène (R_o) en (R_{a+da}). Mais si on veut exprimer analytiquement ce déplacement infinitésimal à l'*aide des coordonnées relatives au repère* (R_a), il faudra d'abord déplacer la figure formée des deux repères de manière à amener (R_a) en (R_o) ; si (R_ε) est alors la position que viendra occuper (R_{a+da}), le déplacement infinitésimal considéré s'exprimera analytiquement par la transformation *analytique* S_ε. Or on passe de (R_o) à (R_ε) par les déplacements successifs S_{a+da} et S_a^{-1}. *Par suite les paramètres relatifs du déplacement infinitésimal qui amène* (R_a) *en* (R_{a+da}) *sont les paramètres de la transformation analytique infinitésimale* $S_\varepsilon = S_a^{-1} S_{a+da}$.

Si nous supposons que la transformation identique corresponde aux valeurs nulles des paramètres, les composantes relatives ε_i du déplacement infinitésimal du repère seront des quantités infiniment petites qui seront manifestement linéaires par rapport aux da_i, avec des coefficients fonctions des a_i. Nous les désignerons par la notation $\omega_i(a\,;\,da)$:

$$(21) \qquad \omega_i(a\,;\,da) = \alpha_{i_1}(a)da_1 + \alpha_{i_2}(a)da_2 + \ldots + \alpha_{ir}(a)da_r.$$

Envisagé sous un certain aspect, le résultat précédent constitue *le premier théorème fondamental* de la théorie des groupes de Lie (6). Il exprime en effet que si les transformations S_a, supposées dépendre de r paramètres, forment un groupe, la transformation infinitésimale $S_a^{-1} S_{a+da}$ ne dépend que de r paramètres $\omega_i(a; da)$ et non de $2r$. Ce théorème admet une réciproque, mais que nous laisserons de côté.

21. — Il est facile d'avoir les expressions ω_i si on connaît les équations finies

$$x'_i = f_i(x,a) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

du groupe G. On pourra d'abord former les transformations infinitésimales du groupe en donnant aux paramètres a_i des valeurs infiniment petites ε_i, ce qui donnera

$$x'_i = x_i + \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_k}\right)_0 \varepsilon_k = x_i + \sum_k \varepsilon_k \xi_{ki}(x),$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre par rapport aux ε_i. Cela posé, pour obtenir la transformation *analytique* $S_a^{-1} S_{a+da}$, nous voyons qu'elle est la résultante des deux transformations

$$x'_i = f_i(x\,;\, a + da),$$

et

$$x'_i = f_i(x''\,;\, a),$$

les x''_i étant les variables transformées des x_i par la transformation cherchée. En posant

$$x''_i = x_i + \delta x_i$$

et négligeant les infiniment petits du second ordre, on trouve immédiatement

$$\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial a_k}\, da_k = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, \delta x_j\,; \tag{22}$$

ces équations, résolues par rapport aux δx_j, doivent être de la forme

$$\delta x_i = \sum_k \omega_k(a; da)\xi_{ki}(x).$$

(6) Voir S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, unter Mitwirkung von F. Engel (Leipzig, Berlin ; réimprimé en 1930).

Prenons l'exemple du groupe des déplacements euclidiens. Les équations d'un déplacement, en coordonnées rectangulaires, sont

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= y_0 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= z_0 + \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{aligned}$$

Il y a ici six transformations infinitésimales indépendantes, qu'on peut exprimer par les formules

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon_1 + \varepsilon_5 z - \varepsilon_6 y, \\ \delta y &= \varepsilon_2 + \varepsilon_6 x - \varepsilon_4 z, \\ \delta z &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 y - \varepsilon_5 x. \end{aligned}$$

Cela posé, nous avons à résoudre les équations (22), qui s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z &= dx_0 + x d\alpha + y d\beta + z d\gamma, \\ \alpha'\delta x + \beta'\delta y + \gamma'\delta z &= dy_0 + x d\alpha' + y d\beta' + z d\gamma', \\ \alpha''\delta x + \beta''\delta y + \gamma''\delta z &= dz_0 + x d\alpha'' + y d\beta'' + z d\gamma''. \end{aligned}$$

Elles donnent, en se servant des relations entre les neuf cosinus directeurs,

$$\begin{aligned} \delta x = {} & (\alpha dx_0 + \alpha' dy_0 + \alpha'' dz_0) \\ & + (\alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'')z - (\beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'')y, \\ \delta y = {} & (\beta dx_0 + \beta' dy_0 + \beta'' dz_0) \\ & + (\beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'')x - (\gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'')z, \\ \delta z = {} & (\gamma dx_0 + \gamma' dy_0 + \gamma'' dz_0) \\ & + (\gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'')y - (\alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'')x. \end{aligned}$$

On trouve bien des équations de la forme prévue, avec

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha dx_0 + \alpha' dy_0 + \alpha'' dz_0, \\ \omega_2 &= \beta dx_0 + \beta' dy_0 + \beta'' dz_0, \\ \omega_3 &= \gamma dx_0 + \gamma' dy_0 + \gamma'' dz_0, \\ \omega_4 &= \gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' = -(\beta d\gamma + \beta' d\gamma' + \beta'' d\gamma''), \\ \omega_5 &= \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' = -(\gamma d\alpha + \gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha''), \\ \omega_6 &= \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' = -(\alpha d\beta + \alpha' d\beta' + \alpha'' d\beta''). \end{aligned}$$

Faisons ici la remarque importante que les r composantes relatives ω_i du déplacement infinitésimal du repère ne sont définies qu'à une substitution linéaire près à coefficients *constants*.

On démontre du reste facilement qu'elles sont linéairement indépendantes, si du moins les r paramètres du groupe sont essentiels.

22. — Voici maintenant une remarque essentielle. Supposons qu'on effectue sur les deux repères (R_a) et (R_{a+da}) un même déplacement S_c ; *les composantes relatives du déplacement infinitésimal qui amène en coïncidence les deux repères infiniment voisins ne sont pas changées.* Cela est facile à vérifier analytiquement, car S_a étant remplacé par $S_c S_a$ et S_{a+da} par $S_c S_{a+da}$, la transformation $S_a^{-1} S_{a+da}$ est remplacée par

$$(S_c S_a)^{-1} (S_c S_{a+da}) = S_a^{-1} S_c^{-1} S_c S_{a+da} = S_a^{-1} S_{a+da} ;$$

elle n'est donc pas changée.

La réciproque est fondamentale. Supposons qu'on ait deux familles continues de repères (R_u) et (R_v) dépendant du même nombre p de paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Supposons qu'on puisse établir une correspondance biunivoque entre les repères de ces deux familles telle que les composantes relatives $\omega_i(u ; du)$ du déplacement infinitésimal d'un repère de la première famille deviennent égales aux composantes analogues $\omega_i(v ; dv)$ relatives à la seconde famille. Je dis qu'alors il existe un déplacement amenant simultanément tous les repères de la première famille en coïncidence avec les repères correspondants de la seconde.

La démonstration est simple. Désignons en effet par S_u et S_v les déplacements qui amènent respectivement (R_o) en (R_u) et (R_v). On a

$$S_u^{-1} S_{u+du} = S_v^{-1} S_{v+dv},$$

ou

$$S_v S_u^{-1} = S_{v+dv} S_{u+du}^{-1}.$$

Un raisonnement facile montre alors que la transformation $S_v S_u^{-1}$ est une transformation *fixe* S_c de G. On a par suite

$$S_v = S_c S_u,$$

ce qui prouve que le repère (R_v) se déduit du repère (R_u) par le déplacement fixe S_c.

Nous avons ainsi la généralisation du théorème fondamental de la méthode du trièdre mobile.

VI

23. — Nous arrivons maintenant aux conditions de compatibilité auxquelles doivent satisfaire les composantes relatives du déplacement infinitésimal d'un repère mobile dépendant de plusieurs paramètres. Elles sont bien connues dans la théorie des surfaces étudiées à l'aide d'un trièdre mobile dépendant de deux paramètres.

Faisons d'abord précéder la recherche de ces conditions d'une remarque d'ordre analytique bien simple. Les formes ω_1, ω_2, ..., ω_r étant linéairement indépendantes par rapport à da_1, da_2, ..., da_r, on peut réciproquement exprimer toute forme différentielle linéaire en da_1, da_2, ..., da_r, comme une forme linéaire en ω_1, ω_2, ..., ω_r.

Cela posé, considérons d'abord l'ensemble de tous les repères de l'espace, qui dépendent des r paramètres a_i. Considérons deux symboles de différentiation d et δ échangeables entre eux et les expressions

$$d\omega_s(a\,;\,\delta a) - \delta\omega_s(a\,;\,da),$$

qui ne sont autres que les covariants bilinéaires des formes ω_s ; ce sont, comme on sait, des expressions bilinéaires alternées par rapport aux deux séries de variables da_i et δa_i :

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial\alpha_{sj}}{\partial a_i} - \frac{\partial\alpha_{si}}{\partial a_j}\right) da_i\,\delta a_j.$$

Si nous substituons maintenant aux variables da_i les variables $\omega_i(d)$ et aux variables δa_i les variables $\omega_i(\delta)$, nous obtenons encore une forme bilinéaire alternée par rapport aux deux nouvelles séries de variables, de sorte qu'on peut écrire

$$(23)\quad d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i,j} c_{ijs}\,\omega_i(d)\omega_j(\delta)\quad (c_{ijs} + c_{jis} = 0),$$

les c_{ijs} étant *a priori* des fonctions déterminées de a_1, a_2, ..., a_r.

Nous avons à l'égard de ces coefficients c_{ijs} le théorème fondamental suivant, qui n'est autre que le *second théorème fondamental de la théorie des groupes*, vu sous un certain aspect. *Les coefficients* c_{ijs} *des relations* (23) *sont des constantes absolues.*

La démonstration est immédiate. Effectuons sur les différents repères (R_a) un même déplacement fixe S_c; nous avons déjà observé que cela ne change pas les composantes relatives ω_i du déplacement infinitésimal du repère. Dans les formules (23), les premiers membres, ainsi que les quantités $\omega_i(d)$ et $\omega_j(\delta)$ du second membre, ne sont donc pas changées. Cela n'est possible que si les coefficients c_{ijs} ont les mêmes valeurs numériques pour le repère (R_a) et pour le repère $(R_{a'})$ résultant de (R_a) par le déplacement (S_c). Mais comme on peut toujours passer d'un repère arbitraire (R_a) à un repère arbitraire $(R_{a'})$ par un déplacement convenable, cela exige que les coefficients c_{ijs} soient des constantes absolues.

Ces constantes portent le nom de *constantes de structure* [7] du groupe et les équations (23) sont les *équations de structure* du groupe.

On peut les écrire sous une forme moins condensée, en prenant pour d le symbole de la différentiation par rapport à un des paramètres a_k et pour δ le symbole de la différentiation par rapport à un autre des paramètres a_h. Elles deviennent alors, en introduisant les fonctions α_{si} des formules (21),

$$\frac{\partial \alpha_{sh}}{\partial a_k} - \frac{\partial \alpha_{sk}}{\partial a_h} = \sum_{i,j} c_{ijs}\, \alpha_{ik}\, \alpha_{jh}. \tag{24}$$

En donnant aux indices s, k, h toutes les valeurs possibles, on obtient, sous forme explicite, les conditions de compatibilité cherchées.

On peut, en sens inverse, écrire les équations de structure (23) sous une forme encore plus condensée. Remarquons en effet qu'en réunissant dans le second membre les deux termes qui correspondent à la même *combinaison* (i, j) des deux indices i et j, on obtient

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i<j} c_{ijs} \begin{vmatrix} \omega_i(d) & \omega_j(d) \\ \omega_i(\delta) & \omega_j(\delta) \end{vmatrix}, \tag{25}$$

---

[7] Dans la théorie de Lie, ces constantes s'introduisent d'une manière toute différente. Si l'on désigne par $\varepsilon_1 X_1 f + \ldots + \varepsilon_r X_r f$ la transformation infinitésimale générale du groupe, on a

$$(X_i X_j) = \sum_s c_{ijs}\, X_s f.$$

ce qui peut s'écrire sous la forme symbolique suivante

$$\omega'_s = \sum_{i<j} c_{ijs}\,[\omega_i\,\omega_j]. \tag{25'}$$

On remarquera que le symbole $[\omega_i\,\omega_j]$ tient la place d'un déterminant et que par suite le symbole $[\omega_j\,\omega_i]$ doit être regardé comme égal et opposé à $[\omega_i\,\omega_j]$ (8).

24. — Nous avons démontré *a priori* l'existence des équations de structure, avec des coefficients c_{ijs} constants. Il est bien clair qu'il ne peut exister qu'un seul système de relations de cette nature. En géométrie euclidienne, on peut les obtenir sans former effectivement, comme nous l'avons fait au n° 21, les expressions ω_i. Il suffit de partir des équations

$$\begin{aligned}
d\mathrm{M} &= \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_1 &= \omega_{12}\vec{e}_2 - \omega_{31}\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_2 &= \omega_{23}\vec{e}_3 - \omega_{12}\vec{e}_1,\\
d\vec{e}_3 &= \omega_{31}\vec{e}_1 - \omega_{23}\vec{e}_2,
\end{aligned}$$

où ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} sont les produits scalaires $\vec{e}_3 d\vec{e}_2$, $\vec{e}_1 d\vec{e}_3$, $\vec{e}_2 d\vec{e}_1$, par suite sont identiques aux composantes que nous avions désignées par ω_4, ω_5, ω_6.

Si nous exprimons que $d\delta\mathrm{M}$, $d\delta\vec{e}_1$, $d\delta\vec{e}_2$, $d\delta\vec{e}_3$ sont respectivement égaux à $\delta d\mathrm{M}$, $\delta d\vec{e}_1$, $d\delta\vec{e}_2$, $\delta d\vec{e}_3$, nous obtenons précisément les équations de structure cherchées en égalant chacun à chacun les coefficients de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Cela donne

(8) Voir sur le calcul extérieur et ses applications, E. Cartan, *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff* (Ann. Ec. Norm., 16, 1899) ; *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* (Ann. Ec. Norm., 18, 1901) ; *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922) ; E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff* (Paris, Hermann, 1922).

$$(26)\quad \begin{cases} d\omega_1(\delta) - \delta\omega_1(d) = \begin{vmatrix} \omega_3(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_3(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_2(\delta) - \delta\omega_2(d) = \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_3(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_3(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_3(\delta) - \delta\omega_3(d) = \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_{23}(\delta) - \delta\omega_{23}(d) = \begin{vmatrix} \omega_{12}(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_{12}(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_{31}(\delta) - \delta\omega_{31}(d) = \begin{vmatrix} \omega_{23}(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_{23}(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_{12}(\delta) - \delta\omega_{12}(d) = \begin{vmatrix} \omega_{31}(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_{31}(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

On retrouve les formules classiques de Darboux dans le cas du mouvement à deux paramètres en posant

$$(27)\quad \begin{cases} \omega_1 = \xi du + \xi_1 dv, \\ \omega_2 = \eta du + \eta_1 dv, \\ \omega_3 = \zeta du + \zeta_1 dv, \\ \omega_{23} = p du + p_1 dv, \\ \omega_{31} = q du + q_1 dv, \\ \omega_{12} = r du + r_1 dv, \end{cases}$$

et en prenant pour d et δ les symboles de la différentiation par rapport à u et v. On obtient ainsi

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} - \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \zeta q_1 - q\zeta_1 - \eta r_1 + r\eta_1, \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} - \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = \xi r_1 - r\xi_1 - \zeta p_1 + p\zeta_1, \\ \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} = \eta p_1 - p\eta_1 - \xi q_1 + q\xi_1, \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial u} - \dfrac{\partial p}{\partial v} = rq_1 - qr_1, \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial u} - \dfrac{\partial q}{\partial v} = pr_1 - rp_1, \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial u} - \dfrac{\partial r}{\partial v} = qp_1 - pq_1. \end{cases}$$

Les équations (24) sont connues, dans la théorie des groupes, sous le nom d'*équations de Maurer* ; M. Buhl a proposé de les appeler *équations de Maurer-Cartan*. Il est juste de ne pas s'arrêter en si beau chemin et de les appeler *équations de Darboux-Maurer-Cartan*.

25. — On obtient des généralisations immédiates des équations (26) en géométrie affine. En introduisant un repère formé d'un point M et de n vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ issus de ce point, on a

$$d\mathrm{M} = \sum_i \omega^i \vec{e_i},$$
$$\vec{de_i} = \sum_h \omega_i{}^h \vec{e_h}.$$

Le même procédé qui vient d'être employé en géométrie euclidienne donne ici les équations de structure du groupe affine général sous la forme

$$(29)\qquad \begin{cases} d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d) = \sum_k \begin{vmatrix} \omega^k(d) & \omega_k{}^i(d) \\ \omega^k(\delta) & \omega_k{}^i(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_i{}^j(\delta) - \delta\omega_i{}^j(d) = \sum_k \begin{vmatrix} \omega_i{}^k(d) & \omega_k{}^j(d) \\ \omega_i{}^k(\delta) & \omega_k{}^j(\delta) \end{vmatrix}, \end{cases}$$

ou sous la forme encore plus condensée

$$(30)\qquad \begin{cases} (\omega^i)' = \sum_k [\omega^k \omega_k{}^i], \\ (\omega_i{}^j)' = \sum_k [\omega_i{}^k \omega_k{}^j]. \end{cases}$$

Les équations de structure du groupe projectif à n dimensions sont de même

$$(31)\qquad (\omega_i{}^j)' = \sum_k [\omega_i{}^k \omega_k{}^j] \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

les composantes du déplacement infinitésimal étant les quantités $\omega_i{}^j$ $(i \neq j)$ et $\omega_i{}^i - \omega_{n+1}^{n+1}$; elles sont au nombre de $n(n+2)$, nombre de paramètres du groupe projectif.

26. — Avant de passer aux applications, terminons par un théorème important, qui donne toute leur signification aux équations de structure.

Si l'on se donne arbitrairement r *formes différentielles* $\omega_i(u ; du)$ *construites avec un nombre quelconque* p *de variables* $u_1, \ldots, u_p$ *et leurs différentielles* $du_1, \ldots, du_p$, *et si ces formes satisfont aux équations de structure* (23), *on peut faire correspondre à chaque système de valeurs des variables* u_i *un repère* (R_u) *de telle sorte que*

les composantes relatives du déplacement infinitésimal de ce repère soient précisément les formes ω_i *données* (9).

Nous ne démontrerons pas ce théorème pour n'avoir pas à entrer dans la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement intégrables. Nous remarquerons seulement que la détermination des repères (R_u) est possible d'une infinité de manières, car si on a une solution du problème, on en aura manifestement une autre en effectuant sur tous les repères (R_u) un même déplacement quelconque S_c. La solution générale du problème dépend donc de r constantes arbitraires.

Ce théorème contient comme cas particulier le théorème de Darboux, d'après lequel il existe toujours pour un trièdre un mouvement à deux paramètres dans lequel les composantes du déplacement infinitésimal sont des quantités données satisfaisant aux équations (28). On voit en particulier que les équations de Codazzi de la théorie des surfaces ne sont qu'un cas particulier d'application des équations de structure du groupe des déplacements euclidiens.

On peut se demander si on peut choisir arbitrairement les constantes de structure c_{ijs} d'un groupe. La réponse est négative ; il existe des relations algébriques auxquelles doivent satisfaire ces constantes pour qu'on puisse trouver r formes ω_i linéairement indépendantes satisfaisant aux équations de structure. Nous n'entrerons pas dans l'examen de cette question, qui fait l'objet du *troisième théorème fondamental* de la théorie des groupes de Lie.

VII

27. — Nous sommes maintenant en mesure d'exposer dans toute sa généralité la méthode du repère mobile. Nous allons considérer dans un espace à n dimensions doué d'un groupe fondamental G une variété V à p dimensions, à chaque point de laquelle nous allons essayer d'attacher un repère d'une manière intrinsèque. Nous supposerons pour simplifier $p = 3$.

Remarquons avant tout que nous pouvons associer suivant une

(9) E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, Gauthier-Villars, 1929), nos 46-49.

loi déterminée à chaque repère (R_a) un point, que nous appellerons origine du repère ; si le repère est formé, comme au n° 18, d'un nombre fini de points A, B, C, ..., nous pourrons par exemple associer le point A au repère. Si l'on considère alors la famille des repères ayant une origine commune A, elle peut être en un certain sens identifiée au point A, et réciproquement. Les repères de cette famille dépendent évidemment de $r - n$ paramètres et, quand on passe d'un de ces repères à un autre infiniment voisin, les composantes relatives ω_i du déplacement infinitésimal subi sont liées par n relations linéaires, puisque les ω_i ne dépendent que de $r - n$ différentielles. *Ces relations sont à coefficients constants.* Supposons en effet que, résolues par rapport à n des composantes ω_i, elles prennent la forme

$$\omega_1 = \lambda_{11}\omega_{n+1} + \ldots + \lambda_{1,\,r-n}\omega_r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega_n = \lambda_{n1}\omega_{n+1} + \ldots + \lambda_{n,\,r-n}\omega_r.$$

Si l'on effectue sur les deux repères infiniment voisins considérés un déplacement quelconque, les quantités ω_i ne varient pas ; par suite les coefficients λ_{ij} ne dépendent ni du point A ni des deux repères considérés ; ce sont donc des constantes absolues. Comme les ω_i ne sont définies qu'à une substitution linéaire près à coefficients constants, *on peut donc supposer que pour tout déplacement infinitésimal d'un repère laissant fixe son origine, on a*

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0. \tag{32}$$

Les équations (32) peuvent être considérées comme les *équations différentielles des points* de l'espace ; elles sont complètement intégrables, puisque leur solution générale dépend de n constantes arbitraires. On peut remarquer que si l'on désigne par des lettres latines $i, j, \ldots$ les indices $1, 2, \ldots, n$ et par des lettres grecques les indices $n+1, \ldots, r$, les constantes $c_{\alpha\beta i}$ sont toutes nulles. En effet la famille des repères d'origine donnée satisfait, comme toutes les familles de repères, aux équations de structure (23). Par suite, d et δ désignant deux variations élémentaires à l'intérieur de la famille, les $\omega_i(d)$ et $\omega_i(\delta)$ sont tous nuls, par suite aussi $d\omega_i(\delta) - \delta\omega_i(d)$. Il en résulte qu'on a

$$\sum_{\alpha,\,\beta} c_{\alpha\beta i}\,\omega_\alpha(d)\,\omega_\beta(\delta) = 0,$$

et cela, quels que soient les $\omega_\alpha(d)$ et $\omega_\beta(\delta)$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Les transformations infinitésimales dont les n premiers paramètres sont nuls sont celles qui laissent fixe le point origine du repère (R_o). Si l'on modifiait la loi qui associe un point à chaque repère, le sous-groupe engendré par les $r - n$ dernières transformations infinitésimales du groupe serait changé dans le sous-groupe qui laisse fixe le nouveau point associé à (R_o) ; ces deux sous-groupes seraient *homologues* dans le groupe G.

28. — Arrivons maintenant à la méthode du repère mobile. Attachons à chaque point M de la variété donnée V, supposée à 3 dimensions, la famille des repères d'origine M. Ces repères, que nous appellerons repères d'ordre zéro, dépendent de $r - n$ paramètres secondaires. Comme $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ s'annulent lorsque le point M reste fixe, ce sont, lorsque M se déplace sur V, des combinaisons linéaires des différentielles des trois paramètres *principaux* t_1, t_2, t_3 qui fixent la position d'un point sur V. On aura alors $n - 3$ relations linéaires entre les ω_i, relations que nous pourrons écrire sous la forme

$$\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + a_{i3}\omega_3 \quad (i = 4, \ldots, n). \tag{33}$$

Les coefficients a_{ij} peuvent dépendre à la fois de t_1, t_2, t_3 et des paramètres secondaires. On disposera de ces derniers de manière à donner des valeurs numériques fixes au plus grand nombre possible de coefficients. Les autres coefficients prendront alors des valeurs qui seront des fonctions déterminées de t_1, t_2, t_3 et qui constitueront des *invariants différentiels du premier ordre* de la variété. Les repères obtenus en particularisant comme il a été dit les paramètres secondaires constituent la famille des *repères du premier ordre*.

Soit $\rho_1 \leqslant r - n$ le nombre de paramètres dont dépendent les repères du premier ordre. Si ρ_1 est effectivement inférieur à $r - n$, les composantes relatives $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_r$ du déplacement infinitésimal d'un repère du premier ordre ne sont plus, lorsqu'on fixe le point M, linéairement indépendantes, mais elles doivent être liées par $r - n - \rho_1$ relations linéaires indépendantes. *Les coefficients de ces relations sont des fonctions déterminées des invariants différentiels du premier ordre.*

En effet, si on n'utilise que des repères du premier ordre, les coefficients des formules (33) sont tous, ou des constantes, ou des fonctions des invariants différentiels du premier ordre ; ils ne dépendent donc pas des paramètres secondaires du premier ordre. Appliquons alors les équations de structure (23), le symbole δ se rapportant à une variation élémentaire du repère du premier ordre laissant fixe le point M, le symbole d à une variation quelconque. Posons pour abréger e_i à la place de $\omega_i(\delta)$ et ω_i à la place de $\omega_i(d)$. Comme $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont tous nuls, on a

$$\delta\omega_i = \sum_{\alpha > n}^{k \leqq n} c_{\alpha k i}\, e_\alpha \omega_k ;$$

par suite, en remarquant que $\delta a_{ij} = 0$,

$$\sum_{\alpha > n}^{k \leqq n} (c_{\alpha k i} - a_{i_1} c_{\alpha k_1} - a_{i_2} c_{\alpha k_2} - a_{i_3} c_{\alpha k_3}) e_\alpha \omega_k = 0,$$

ou, en remplaçant les ω_k par leurs valeurs,

$$\sum_{\alpha,\, k} (c_{\alpha k i} - a_{i_1} c_{\alpha k_1} - a_{i_2} c_{\alpha k_2} - a_{i_3} c_{\alpha k_3}) a_{k_1} e_\alpha = 0,$$

$$\sum_{\alpha,\, k} (c_{\alpha k i} - a_{i_1} c_{\alpha k_1} - a_{i_2} c_{\alpha k_2} - a_{i_3} c_{\alpha k_3}) a_{k_2} e_\alpha = 0,$$

$$\sum_{\alpha,\, k} (c_{\alpha k i} - a_{i_1} c_{\alpha k_1} - a_{i_2} c_{\alpha k_2} - a_{i_3} c_{\alpha k_3}) a_{k_3} e_\alpha = 0.$$

Ces équations, où on fait successivement $i = 4, 5, \ldots, n$, donnent les relations qui existent entre les e_α, c'est-à-dire entre les ω_α, quand on laisse fixe le point M. On voit bien que les coefficients ne dépendent que des a_{ij}, c'est-à-dire des invariants différentiels du premier ordre de V.

29. — Supposons qu'en effectuant au besoin une substitution linéaire à coefficients fonctions des invariants différentiels du premier ordre, les relations qui existent entre $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_r$, lorsqu'on laisse fixe le point M, soient

$$\omega_{n+1} = \ldots = \omega_{n_1} = 0 \quad (n_1 - n = r - n - \rho_1).$$

On aura alors, en faisant varier le point M sur V,

$$\omega_{n+i} = a_{n+i,1}\omega_1 + a_{n+i,2}\omega_2 + a_{n+i,3}\omega_3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1 - n), \tag{34}$$

les coefficients des seconds membres dépendant des paramètres principaux et des paramètres secondaires du premier ordre.

On aura alors deux moyens pour différencier certains repères du premier ordre des autres et pour arriver à la famille des repères du second ordre :

1° On cherchera à réduire à des valeurs numériques fixes le plus grand nombre possible des coefficients $a_{n+i,j}$;

2° S'il y a des invariants différentiels du premier ordre, s'il y en a deux, par exemple, indépendants l'un de l'autre, I et J, on formera les différentielles $d\mathrm{I}$ et $d\mathrm{J}$, qu'on exprimera linéairement au moyen de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$(35)\qquad \begin{cases} d\mathrm{I} = \mathrm{I}_1\omega_1 + \mathrm{I}_2\omega_2 + \mathrm{I}_3\omega_3, \\ d\mathrm{J} = \mathrm{J}_1\omega_1 + \mathrm{J}_2\omega_2 + \mathrm{J}_3\omega_3 ; \end{cases}$$

on établira encore entre les paramètres secondaires du premier ordre et les paramètres principaux les relations permettant de réduire à des valeurs numériques fixes le plus grand nombre possible des coefficients qui entrent dans les formules (35). Les repères du premier ordre dont les paramètres satisfont à ces relations constituent la famille des *repères du second ordre*. Quant aux coefficients des équations (34) et (35) qui n'ont pas été réduits à des valeurs numériques fixes, ils prendront des valeurs constantes ou fonctions des seuls paramètres principaux t_1, t_2, t_3 ; ce seront les *invariants différentiels du second ordre*.

Les composantes $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_r$ du déplacement infinitésimal d'un repère du second ordre sont maintenant liées par $r - n - \rho_2$ relations, lorsqu'on laisse fixe le point M, ρ_2 étant le nombre des paramètres secondaires du second ordre. On démontre, comme tout à l'heure, que les coefficients de ces relations sont des fonctions des invariants différentiels des deux premiers ordres. On passera alors des repères du second ordre aux repères du troisième ordre comme on a fait pour passer des repères du premier ordre à ceux du second. Néanmoins on n'utilisera les relations telles que (35) que s'il existe un invariant différentiel du second ordre qui ne soit pas une fonction des deux invariants déjà utilisés I et J. On poursuivra ainsi indéfiniment.

30. — Supposons que, les repères d'ordre p étant obtenus :

1° les repères d'ordre $p + 1$ soient confondus avec ceux d'ordre p ;

2° les invariants différentiels d'ordre $p + 1$ soient fonctions des invariants différentiels d'ordre inférieur ou égal à p.

On peut démontrer alors que M et M′ étant deux points de la variété pour lesquels tous les invariants différentiels d'ordre inférieur ou égal à p ont les mêmes valeurs numériques, (R) et (R′) étant d'autre part deux repères d'ordre p d'origines respectives M et M′, le déplacement qui amène (R) en (R′) laisse invariante la variété V. Il est clair alors qu'il est impossible de différencier les uns des autres les repères d'ordre p. La variété admet un groupe de déplacements g dont l'ordre est égal au nombre des paramètres secondaires d'ordre p augmenté de la différence entre 3 et le nombre des invariants différentiels indépendants. Si en particulier il existe trois invariants différentiels indépendants d'ordre inférieur ou égal à p, tout déplacement du groupe g laisse fixes tous les points de la variété ([10]).

Si la circonstance qui vient d'être envisagée ne se présente jamais, on arrivera à déterminer complètement le repère à attacher à chaque point de la variété. En effet on ne sera arrêté dans les particularisations successives des repères que si, à un moment donné, les repères d'ordre $p + 1$ sont confondus avec ceux d'ordre p, un invariant différentiel au moins d'ordre $p + 1$ étant indépendant de ceux déjà obtenus. Mais comme il ne peut pas y avoir plus de trois invariants différentiels indépendants, cette circonstance ne pourra se présenter qu'un nombre fini de fois, à la suite de quoi le nombre des paramètres secondaires des repères d'ordres croissants ira toujours en décroissant jusqu'à s'annuler.

31. — Supposons qu'on soit dans le cas général et qu'on arrive à un repère déterminé, que nous supposerons d'ordre q. Les invariants différentiels d'ordre inférieur ou égal à q sont les *invariants fondamentaux*.

Pour reconnaître si deux variétés V et V′ sont égales, on forme les invariants différentiels d'ordre $q + 1$. Si, pour la variété V, ce sont des fonctions des invariants différentiels fonda-

([10]) Un exemple assez général de variétés dans lesquelles il est impossible de déterminer intrinsèquement un repère est fourni, en géométrie projective, par les surfaces réglées admettant deux directrices rectilignes. Si on regarde ces surfaces comme des lieux de droites, il existe manifestement un groupe de ∞^1 transformations homographiques laissant fixes les deux directrices, *ainsi que chaque droite qui les rencontre.*

mentaux, il faudra et il suffira qu'il en soit de même pour V′ et que les relations qui existent entre les invariants différentiels d'ordre $\leq q + 1$ soient les mêmes pour les deux variétés.

Si l'un au moins des invariants différentiels d'ordre $q + 1$ est indépendant de ceux d'ordre inférieur, on formera les invariants différentiels d'ordre $q + 2$. S'ils ne fournissent pas d'invariant indépendant des précédents, il faudra et il suffira que les relations qui existent entre les invariants différentiels d'ordre $\leq q + 2$ soient les mêmes pour les deux variétés.

On continuera ainsi jusqu'à ce que les invariants différentiels d'un certain ordre $q + h$ soient tous des fonctions des invariants d'ordre inférieur, ce qui arrivera sûrement au bout d'un nombre fini d'opérations.

Nous remarquerons que, dans les exemples précédemment traités, les invariants différentiels ne se présentent jamais qu'une fois le repère complètement déterminé.

32. — Donnons un exemple du rôle joué par les invariants différentiels avant la particularisation définitive du repère.

Prenons pour G le groupe à trois paramètres des translations et des homothéties dans le plan ; prenons pour repère la figure formée d'un point M et de deux vecteurs rectangulaires $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de même longueur et de directions fixes. On a, pour un déplacement infinitésimal du repère,

$$\begin{aligned} d\mathrm{M} &= \omega_1 \vec{e_1} + \omega_2 \vec{e_2}, \\ d\vec{e_1} &= \omega \vec{e_1}, \\ d\vec{e_2} &= \omega \vec{e_2}. \end{aligned}$$

Soit alors une courbe $y = f(x)$; soient respectivement

$$\lambda,\ 0\ ;$$
$$0,\ \lambda,$$

les projections de $\vec{e_1}$ et de $\vec{e_2}$ sur les axes fixes. Les repères d'ordre zéro sont ceux d'origine M (x, y) ; ils dépendent d'un paramètre secondaire λ. On a du reste

$$\omega_1 = \frac{dx}{\lambda}, \quad \omega_2 = \frac{y'dx}{\lambda}, \quad \omega = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1} = y'$ étant indépendant de λ, les repères d'ordre 1 sont les mêmes que ceux d'ordre zéro, et on a un invariant différentiel du premier ordre y'.

Pour avoir les repères du second ordre, on forme

$$dy' = \lambda y''. \frac{dx}{\lambda} = \lambda y'' \omega_1.$$

Le coefficient $\lambda y''$ dépendant de λ, on peut disposer de λ de manière à le rendre égal à 1. On a ainsi un repère déterminé du second ordre.

L'expression $\omega = \frac{d\lambda}{\lambda}$ donne alors

$$\omega = -\frac{y'''}{y''} dx = -\frac{y'''}{y''^2} \omega_1.$$

Par suite la courbe est déterminée, à une transformation près du groupe G, par la relation qui existe entre l'invariant différentiel du troisième ordre $\frac{y'''}{y''^2}$ et l'invariant différentiel y'.

Nous avons supposé chemin faisant $y'' \neq 0$. Si on avait $y'' = 0$, on ne pourrait pas différencier les uns des autres les repères du premier ordre ; la courbe serait une droite et admettrait un sous-groupe à 2 paramètres de G.

VIII

33. — La méthode générale du repère mobile, telle qu'elle a été exposée dans les numéros précédents, suppose la variété V donnée effectivement et les calculs successifs effectués complètement. Mais, comme nous l'avons déjà fait remarquer, cela est inutile dans les recherches théoriques, où il s'agit seulement d'arriver à la forme des formules de Frenet, en prévoyant les différents cas qui peuvent se présenter. A ce point de vue, les équations de structure jouent un rôle fondamental, *même dans la théorie des courbes.*

Revenons au problème traité aux n^{os} 28 et suivants. On a attaché à chaque point M de la variété V à trois dimensions la famille des repères d'origine M ; pour tout déplacement infinitésimal d'un tel repère, on a les relations (33)

$$\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + a_{i3}\omega_3 \quad (i = 4, \ldots, n). \tag{33}$$

Il s'agit de prévoir de quelle manière les coefficients a_{ij} dépendent des paramètres secondaires et à quelles valeurs numériques on pourra les réduire. Imaginons pour cela, *le point M restant fixe*, une variation élémentaire, représentée par le symbole δ, du repère d'ordre zéro. On aura, d'après les équations de structure, et en désignant par δa_{ij} la variation élémentaire subie par le coefficient a_{ij},

$$\delta a_{i_1}\omega_1 + \delta a_{i_2}\omega_2 + \delta a_{i_3}\omega_3 = \delta\omega i - a_{i_1}\delta\omega_1 - a_{i_2}\delta\omega_2 - a_{i_3}\delta\omega_3,$$

d'où

$$\delta a_{i_1} = \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n} (c_{\alpha ki} - a_{i_1}c_{\alpha k_1} - a_{i_2}c_{\alpha k_2} - a_{i_3}c_{\alpha k_3})a_{k_1},$$

$$\delta a_{i_2} = \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n} (c_{\alpha ki} - a_{i_1}c_{\alpha k_1} - a_{i_2}c_{\alpha k_2} - a_{i_3}c_{\alpha k_3})a_{k_2},$$

$$\delta a_{i_3} = \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n} (c_{\alpha ki} - a_{i_1}c_{\alpha k_1} - a_{i_2}c_{\alpha k_2} - a_{i_3}c_{\alpha k_3})a_{k_3}.$$

Les seconds membres sont donc les variations élémentaires subies par les coefficients a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} par l'effet d'un groupe, dont on connaît ainsi les transformations infinitésimales; ce groupe est du reste un groupe homographique. Si l'on sait remonter des transformations infinitésimales aux transformations finies, *ce qui dans les applications courantes est facile*, on sera ramené à chercher à quelles valeurs numériques on peut réduire les a_{ij} par une transformation de ce groupe ([11]). On sait par exemple que par le groupe orthogonal à trois variables, on peut réduire deux des variables à 0, la troisième ayant alors une valeur déterminée, à moins que l'on ne soit dans le domaine complexe, auquel cas il peut arriver que l'on puisse réduire les trois variables aux valeurs 1, i, 0, à moins encore que les trois variables ne soient toutes nulles.

Il est donc théoriquement possible, grâce aux équations de structure, de prévoir les différents cas irréductibles entre eux qui peuvent se présenter et d'en déduire dans chaque cas la nature

([11]) Il est du reste théoriquement inutile de remonter aux transformations finies du groupe. On doit à S. Lie une méthode permettant de trouver, sur la seule donnée des transformations infinitésimales, un point représentatif de chaque famille de points homologues entre eux par le groupe considéré.

des repères du premier ordre. La même méthode servira pour le passage des repères d'un ordre quelconque aux repères de l'ordre immédiatement supérieur.

34. — Appliquons ce qui vient d'être dit à l'étude des courbes planes en géométrie affine unimodulaire. Avec les notations du n° 12, les composantes du déplacement infinitésimal du repère étant désignées par ω^1, ω^2, ω_1^1, ω_1^2, ω_2^1, on a les équations de structure

$$36)\quad \begin{cases} d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) = \begin{vmatrix} \omega^1(d) & \omega_1^1(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega_1^1(\delta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega^2(d) & \omega_2^1(d) \\ \omega^2(\delta) & \omega_2^1(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega^2(\delta) - \delta\omega^2(d) = \begin{vmatrix} \omega^1(d) & \omega_1^2(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega_1^2(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega^2(d) & \omega_1^1(d) \\ \omega^2(\delta) & \omega_1^1(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_1^1(\delta) - \delta\omega_1^1(d) = \begin{vmatrix} \omega_1^2(d) & \omega_2^1(d) \\ \omega_1^2(\delta) & \omega_2^1(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_1^2(\delta) - \delta\omega_1^2(d) = 2 \begin{vmatrix} \omega_1^1(d) & \omega_1^2(d) \\ \omega_1^1(\delta) & \omega_1^2(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_2^1(\delta) - \delta\omega_2^1(d) = 2 \begin{vmatrix} \omega_2^1(d) & \omega_1^1(d) \\ \omega_2^1(\delta) & \omega_1^1(\delta) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

On peut tout de suite partir des repères du premier ordre satisfaisant à $\omega^2 = 0$; on a alors, en remarquant que $\omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = 0$,

$$\delta\omega^2 = -e_1^2\omega^1,$$

d'où

$$e_1^2 = 0 ;$$

par suite, en faisant varier le point sur la courbe, on a une relation de la forme

$$\omega_1^2 = \alpha\omega^1.$$

D'autre part, par une variation des repères du premier ordre, le point M restant fixe, ($e^1 = e^2 = e_1^2 = 0$), on a

$$\delta\omega_1^2 = 2e_1^1\omega_1^2, \quad \delta\omega^1 = -e_1^1\omega^1,$$

d'où

$$\delta\alpha = 3e_1^1\alpha.$$

Cette relation prouve que, par une variation infinitésimale du repère du premier ordre, le coefficient α est multiplié par la constante $1 + 3e_1^1$ infiniment voisine de 1 ; par suite, par une variation finie, il est multiplié par une constante arbitraire. Deux cas sont alors possibles :

1° Ou bien $\alpha = 0$ (cas d'une droite), et alors on ne peut plus différencier les uns des autres les repères du premier ordre ;

2° Ou bien $\alpha \neq 0$ et alors on peut choisir, parmi les repères du premier ordre, une famille partielle telle que α devienne égale à 1 : ce sont les repères du second ordre.

Le coefficient α étant réduit à 1, $\delta\alpha$ étant donc nul pour une variation du repère du second ordre, on a $e_1^1 = 0$, ce qui entraîne

$$\omega_1^1 = \beta\omega^1.$$

Faisons varier le repère du second ordre, le point M restant fixe (alors $e^1 = e^2 = e_1^2 = e_1^1 = 0$). On a

$$\delta\omega_1^1 = -e_2^1\omega_1^2 = -e_2^1\omega^1, \quad \delta\omega^1 = 0,$$

d'où

$$\delta\beta = -e_2^1.$$

Par suite le coefficient β est augmenté de la quantité infiniment petite $-e_2^1$; donc, par une variation finie du repère, il est augmenté d'une quantité finie arbitraire. On peut donc s'arranger pour le rendre nul. Le repère sera alors parfaitement déterminé (repère du troisième ordre), et on aura

$$\omega_2^1 = k\omega^1,$$

k étant le premier invariant différentiel (courbure affine), qui est du quatrième ordre.

On retrouve les résultats déjà obtenus par deux autres procédés (n^{os} **12** et **13**).

35. — Les considérations précédentes, appuyées des quelques exemples par lesquels nous les avons illustrées, montrent bien que *les équations de structure du groupe* G *contiennent en elles toute la géométrie différentielle de l'espace doué du groupe fondamental* G, à la seule condition de connaître les relations linéaires à coefficients constants entre les ω_i qui définissent les points de l'espace ; la classification des courbes, des surfaces et de toutes les sortes de variétés ponctuelles pourra se faire en partant des équations de structure, sans nécessiter logiquement aucune intuition géométrique.

On sait qu'en géométrie projective, l'étude de l'espace *réglé*, c'est-à-dire considéré comme engendré par des droites, s'est

développée parallèlement à l'étude de l'espace ponctuel. On peut naturellement, dans toute géométrie au sens de Klein, prendre comme éléments générateurs de l'espace tout ensemble de figures jouissant des deux propriétés caractéristiques suivantes :

1° Les figures considérées sont transformées entre elles transitivement par le groupe fondamental G ;

2° Il n'existe aucune transformation du groupe G laissant fixes toutes les figures de l'ensemble.

La méthode du repère mobile s'applique sans modification quand on substitue aux points d'autres éléments générateurs. Prenons par exemple la géométrie euclidienne à trois dimensions. Si nous prenons la droite pour élément générateur, il suffira d'associer à chaque repère une droite déterminée qui jouera le rôle de droite-origine pour ce repère ; ce sera par exemple l'axe des z du trièdre trirectangle mobile. Quand le repère varie de manière que sa droite origine reste fixe, nous savons qu'il y a quatre relations linéaires à coefficients constants entre les composantes ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} du déplacement infinitésimal du repère. En remarquant que le point M se déplace alors sur l'axe des z et que cet axe reste fixe, on trouve en effet

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{23} = \omega_{31} = 0.$$

Ce sont les quatre équations différentielles des droites de l'espace, ou plutôt les équations définissant les familles de repères ayant même droite origine. Les composantes ω_1, ω_2, ω_{23}, ω_{31} sont celles qui joueront, dans l'application de la méthode du repère mobile, le rôle que jouaient, dans l'exposé fait au parag. VII, les n composantes ω_1, ω_2, ..., ω_n.

D'une manière générale, à tout choix d'un élément générateur correspond un système *complètement intégrable* d'équations aux différentielles totales établissant des relations linéaires à coefficients constants entre ω_1, ω_2, ..., ω_r. La réciproque est facile à démontrer ([12]).

Ce qui précède montre encore mieux qu'auparavant le rôle joué par les équations de structure du groupe G.

([12]) A un autre point de vue, tout choix d'éléments générateurs correspond au choix d'un sous-groupe déterminé de G, celui qui laisse invariant l'élément générateur origine. Réciproquement à tout sous-groupe correspond une famille d'éléments générateurs.

IX

36. — On peut encore envisager d'un autre point de vue les équations de structure d'un groupe. Imaginons dans l'espace ordinaire un système quelconque de coordonnées curvilignes u_1, u_2, u_3. Supposons attaché à chaque point de l'espace un trièdre trirectangle déterminé. Si nous connaissons, en fonctions linéaires de du_1, du_2, du_3, les six composantes relatives ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} du déplacement infinitésimal de ce trièdre, nous pourrons reconstruire par voie différentielle tout l'espace euclidien, sous la condition nécessaire et suffisante que les six formes données satisfassent aux équations de structure de Darboux et que les trois formes ω_1, ω_2, ω_3 soient linéairement indépendantes. Si nous nous donnons le point de l'espace euclidien qui correspond aux coordonnées (u_1^0, u_2^0, u_3^0) et si nous nous donnons en ce point un trièdre trirectangle, nous pourrons déterminer quel est le point de l'espace qui correspond à des coordonnées arbitraires et quel est le trièdre trirectangle qu'il convient de lui attacher. On peut donc dire, à un autre point de vue, que *la donnée, dans un continuum à trois dimensions, de six formes différentielles* ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} *satisfaisant aux équations de structure du groupe euclidien permet d'organiser euclidiennement ce continuum* (et même d'une infinité de manières), et d'en faire en quelque sorte un espace euclidien à chaque point duquel on a attaché un trièdre trirectangle déterminé.

Se donner les six formes considérées, c'est aussi, si l'on veut, associer à chaque couple de points infiniment voisins du continuum un déplacement euclidien infinitésimal, celui dont les paramètres sont précisément ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}. En ce sens *un continuum organisé euclidiennement est un support de déplacements euclidiens infinitésimaux*. Mais il faut bien remarquer que ces déplacements associés aux différents couples de points infiniment voisins ne sont pas arbitraires, puisque leurs composantes doivent satisfaire aux équations de structure.

La donnée des six composantes ω_i, ω_{ij} correspond à un choix des trièdres associés aux différents points de l'espace ; elle est donc arbitraire jusqu'à un certain point. Comme le déplacement infi-

nitésimal associé à deux points infiniment voisins est de la forme $S_u^{-1} S_{u+du}$, en désignant par S_u et S_{u+du} les déplacements qui amènent le repère origine en coïncidence avec les repères attachés à ces deux points, on pourra substituer à S_u tout autre déplacement amenant l'origine au point considéré ; or ces déplacements sont de la forme $S_u R$, en désignant par R une rotation arbitraire autour de l'origine. Il en résulte qu'en associant suivant une loi quelconque à chaque point (u_1, u_2, u_3) du continuum une rotation euclidienne R_u autour de l'origine, au déplacement infinitésimal $S_u^{-1} S_{u+du}$ sera substitué le déplacement infinitésimal $R_u^{-1}(S_u^{-1} S_{u+du}) R_{u+du}$.

Le résultat précédent peut s'énoncer de la manière suivante. *Si on substitue au déplacement infiniment petit* $T_{u;du}$ *associé à deux points infiniment voisins le déplacement*

$$T'_{u;du} = R_u^{-1} T_{u;du} R_{u+du},$$

on aura la même organisation euclidienne du continuum. Le changement des données correspond à un simple changement des trièdres attachés aux différents points de l'espace.

Plus généralement on pourrait, au lieu de R_u, prendre une rotation *arbitraire* dépendant de trois paramètres v_1, v_2, v_3, et on aurait ainsi doué le continuum d'un système complet de repères, dépendant de six paramètres ; on connaîtrait les composantes linéairement indépendantes ω_i, ω_{ij} du déplacement infinitésimal de ce repère et on pourrait par suite appliquer la méthode du repère mobile avec les coordonnées curvilignes données.

37. — Eclaircissons ce qui précède en indiquant explicitement comment les choses se passeraient dans le plan. Nous avons donc un continuum à deux dimensions, défini au moyen de deux coordonnées u et v, et nous nous donnons un système de trois formes

$$\omega_1 = \xi du + \xi_1 dv, \quad \omega_2 = \eta du + \eta_1 dv, \quad \omega_{12} = r du + r_1 dv,$$

satisfaisant aux équations de structure

$$(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r\eta_1, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = -\xi r_1 + r\xi_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Les quantités ω_1, ω_2, ω_{12} sont : les deux premières, les composantes d'une translation parallèle aux axes (mobiles), et la dernière la composante d'une rotation autour de l'origine (mobile).

Si nous changeons l'orientation des axes, si par exemple nous les faisons tourner d'un angle θ, nous obtenons les valeurs plus générales

$$(38)\quad \varpi_1 = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta, \quad \varpi_2 = -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta,$$
$$\varpi_{12} = \omega_{12} + d\theta,$$

qui permettent d'appliquer la méthode du repère mobile. Par exemple les droites sont caractérisées par la propriété qu'on peut leur attacher un repère dont le premier axe est fixe, ce qui donne

$$\varpi_2 = 0, \quad \varpi_{12} = 0;$$

on en déduit

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \text{d'où} \quad \omega_{12} + \frac{\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 0.$$

On obtient ainsi l'équation différentielle des droites en remplaçant ω_1, ω_2, ω_{12} par leurs valeurs données.

Une circonférence de rayon a sera de même caractérisée par les équations

$$\varpi_2 = 0, \quad \varpi_{12} = \frac{1}{a}\varpi_1,$$

etc.

Tout cela s'appliquerait naturellement à n'importe quel espace de Klein défini en coordonnées curvilignes quelconques.

38. — Il nous reste à montrer, pour préparer l'introduction des espaces généralisés, quelle est la signification géométrique profonde des équations de structure.

Prenons un espace de Klein et attachons à chaque couple de points infiniment voisins (u_i) et $(u_i + du_i)$ un déplacement infinitésimal $T_{u;\,du}$ satisfaisant aux équations de structure. Cela revient à attacher à chaque point un repère (R_u) ; si ce repère se déduit du repère origine par le déplacement S_u, on a

$$T_{u;\,du} = S_u^{-1} S_{u+du}.$$

Imaginons dans l'espace un circuit fermé, ou cycle, que nous partagerons en un grand nombre d'arcs très petits par des points de

subdivision M_o, M_1, ..., M_{n-1}. Appelons (R_i) le repère attaché au point M_i et S_i le déplacement qui amène le repère initial (R_o) en (R_i). Le déplacement qui amène (R_o) en (R_1) est $S_o^{-1} S_1$; celui qui amène (R_o) en (R_2) est

$$S_o^{-1} S_2 = (S_o^{-1} S_1)(S_1^{-1} S_2),$$

et ainsi de suite ; le déplacement qui amène (R_o) en (R_p) est

$$(S_o^{-1} S_p) = (S_o^{-1} S_1)(S_1^{-1} S_2) \dots (S_p^{-1} S_p);$$

tous ces déplacements sont rapportés à (R_0). Finalement, quand on aura décrit le cycle, on sera revenu au repère (R_o) par un déplacement, nécessairement nul, qui sera le produit des déplacements infiniment petits attachés aux arcs dans lesquels le cycle a été décomposé.

Si donc on appelle $T_{i,\,i+1}$ *le déplacement infiniment petit, rapporté à* (R_i), *qui amène* (R_i) *en* (R_{i+1}), *on a*

$$T_{0,1} T_{1,2} \dots T_{n-2,\,n-1} T_{n-1,0} = 1. \tag{39}$$

39. — *La relation précédente, supposée vraie pour tous les cycles d'un continuum à* n *dimensions, suffit pour que les composantes du déplacement infinitésimal* $T_{u\,;\,du}$ *associé aux couples de points infiniment voisins de ce continuum satisfassent aux équations de structure.* En effet faisons correspondre à un point particulier (u_i^o) du continuum un point déterminé A_o de l'espace de Klein et un repère déterminé (R_o) d'origine A_o. Soit maintenant (u_i) un point quelconque du continuum ; joignons par un chemin continu (u_i^o) à (u_i) et partageons ce chemin en un grand nombre d'arcs partiels. A chacun de ces arcs est attaché un déplacement infinitésimal $T_{u\,;\,du}$; construisons alors, en partant de (R_o), les repères successifs qui se déduisent les uns des autres par le déplacement infinitésimal donné correspondant, ce déplacement étant toujours supposé défini analytiquement par rapport au repère qu'on déplace. On arrivera ainsi à un repère final (R_u), qui sera bien déterminé lorsque, à la limite, on aura augmenté indéfiniment le nombre des arcs partiels, chacun d'eux tendant vers zéro. Le repère (R_u) ainsi attaché au point (u_i) du continuum ne dépend pas du chemin suivi dans le continuum pour aller du point (u_i^o) au point (u_i), et cela précisément à cause de l'hypothèse, traduite par la relation (39), qui a été faite sur les cycles du continuum.

On montre ensuite facilement que le déplacement qui amène (R_u) en (R_{u+du}) est précisément, si on le rapporte à (R_u), le déplacement donné $T_{u;du}$. Cela suffit évidemment pour que les composantes de $T_{u;du}$ satisfassent aux équations de structure.

40. — Il semblerait, d'après ce qui précède, qu'il y ait équivalence absolue entre les équations de structure et les relations (39). En réalité les équations de structure ne sont autres que les relations (39) *appliquées à un cycle infiniment petit arbitraire*. Un examen plus approfondi montre que si on se donne arbitrairement le déplacement $T_{u;du}$ de composantes ω_i, et si on considère un parallélogramme élémentaire de sommets

$$(u_i^0) = (u_i), \quad (u_i^1) = (u_i + du_i),$$
$$(u_i^2) = (u_i + du_i + \delta u_i + d\delta u_i), \quad (u_i^3) = (u_i + \delta u_i),$$

où d et δ sont deux symboles de différentiation échangeables entre eux, les composantes du déplacement

$$T_{0,1}T_{1,2}T_{2,3}T_{3,0}$$

sont précisément les quantités

$$\Omega_i = d\omega_i(\delta) - \delta\omega_i(d) - \sum_{j,h} c_{jhi}\,\omega_j(d)\,\omega_h(\delta).$$

Il est à peu près évident que les relations (39), supposées vraies pour les cycles infiniment petits, sont encore vraies pour les cycles finis, mais à condition que ces cycles soient réductibles à un point par déformation continue. *Les équations de structure n'entraînent donc pas nécessairement les relations* (39) *pour les cycles qui ne satisfont pas à cette condition.*

X

41. — Nous sommes maintenant en mesure de comprendre comment on peut généraliser la notion d'espace de Klein.

La première généralisation de ce genre remonte à Gauss, qui naturellement ne pouvait se placer au même point de vue que nous. Reprenons les équations de Darboux (37) relatives au plan. La connaissance en fonction de deux paramètres u et v des composantes ξ, ξ_1, η, η_1, r, r_1 d'un déplacement dans le plan suffit pour retrouver l'organisation euclidienne du plan. Mais nous

pouvons remarquer que la connaissance de ξ, ξ_1, η, η_1 suffit, car les deux premières équations (37) permettent d'en déduire les valeurs de r et r_1. D'autre part, au lieu de se donner les deux formes ω_1 et ω_2 que définissent ξ, ξ_1, η, η_1, on peut se donner aussi bien, comme nous l'avons vu au n° 37, les deux formes

$$\varpi_1 = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta, \quad \varpi_2 = -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta ;$$

cela revient à dire que la seule connaissance de la forme quadratique $\omega_1^2 + \omega_2^2$ suffit pour retrouver l'organisation euclidienne du plan. Cette forme quadratique n'est autre que le ds^2 du plan, carré de la distance de deux points infiniment voisins. C'est un résultat bien connu, dont la raison profonde est qu'on peut fonder la géométrie euclidienne sur la seule notion de distance.

Le ds^2 ne peut pas être donné arbitrairement, si l'on veut que les équations de structure soient vérifiées. Donnons-nous cependant un ds^2 arbitraire, c'est-à-dire donnons-nous pour ξ, ξ_1, η, η_1 des fonctions arbitraires de u et v ; nous pourrons encore tirer r et r_1 des deux premières équations de structure, mais la troisième ne sera plus vérifiée. Le continuum à deux dimensions doué du ds^2 donné pourra, nous le savons, être assimilé à une surface et jouira de toutes les propriétés géométriques des surfaces qui sont attachées à leur ds^2. Sur une telle surface, *la théorie des courbes sera identiquement la même que dans le plan et rien ne sera changé à l'application de la méthode du repère mobile.* En introduisant le repère le plus général avec les composantes ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} du déplacement infinitésimal, on attachera à une courbe un repère mobile avec la condition $\varpi_2 = 0$, qui nous fournira la courbure (*courbure géodésique* au sens de Gauss)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varpi_{12}}{\varpi_1}.$$

La différence entre la surface et le plan se marquera par le fait que la troisième équation de structure (37) ne sera plus vérifiée ; on aura

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = K(\xi\eta_1 - \eta_1\xi_1),$$

ou, avec nos notations,

$$d\omega_{12}(\delta) - \delta\omega_{12}(d) = -K \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_2(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_2(\delta) \end{vmatrix} ;$$

le coefficient K est la *courbure totale*. On peut l'interpréter en imaginant un cycle infiniment petit et un repère attaché aux différents points du cycle et se déplaçant de proche en proche sans rotation ; en revenant au point de départ, il prendra une position différente de la position initiale et qui s'en déduit par la rotation $Kd\sigma$, où $d\sigma$ désigne l'aire limitée par le cycle.

On pourrait imaginer d'autres généralisations du plan euclidien en associant à tout couple de points infiniment voisins d'un continuum à deux dimensions un déplacement euclidien infinitésimal $T_{u\,;\,du}$ pour lequel les deux premières équations de structure ne seraient pas vérifiées. Par exemple on pourrait se donner arbitrairement les fonctions ξ, ξ_1, η, η_1 en prenant $r = r_1 = 0$. Les repères euclidiens attachés aux différents points du continuum se déduiraient donc les uns des autres par une simple translation ; on aurait *un espace à connexion euclidienne doué d'un parallélisme absolu*. Dans cet espace la théorie des courbes est encore la même que dans le plan euclidien. En introduisant les repères les plus généraux, on aurait

$$\varpi_1 = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta, \quad \varpi_2 = -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta, \quad \varpi_{12} = d\theta ;$$

les *droites* seraient définies par

$$\varpi_2 = \varpi_{12} = 0,$$

ou

$$\eta + \eta_1 \frac{dv}{du} = C\left(\xi + \xi_1 \frac{dv}{du}\right),$$

C étant une constante arbitraire, définissant la direction de la droite. Sur une surface donnée par son ds^2, on peut définir une *connexion euclidienne* à parallélisme absolu en décomposant son ds^2 en une somme de deux carrés $\omega_1^2 + \omega_2^2$ et prenant $\omega_{12} = 0$; par exemple, pour une sphère rapportée à sa longitude, et à sa colatitude θ, on pourrait prendre

$$\omega_1 = d\theta, \quad \omega_2 = \sin\theta d\varphi, \quad \omega_{12} = 0 ;$$

les *droites* seraient les loxodromies admettant pour pôles les deux pôles de la sphère et définies par l'équation

$$\sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} = C.$$

Dans cette généralisation, distincte de celle de Gauss, le déplacement $T_{01}T_{12}\ldots$ associé à un cycle n'est pas une simple rotation, mais est une translation de composantes

$$\Omega_1 = d\omega_1(\delta) - \delta\omega_1(d) + \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix},$$

$$\Omega_2 = d\omega_2(\delta) - \delta\omega_2(d) - \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix};$$

c'est la *torsion* de l'espace, opposée à la *courbure* de Gauss ([13]).

Enfin l'espace à deux dimensions le plus général à connexion euclidienne s'obtiendrait en prenant pour ξ, ξ_1, η, η_1, r, r_1 des fonctions absolument arbitraires de u, v; il aurait alors *courbure* et *torsion*. Mais là encore la théorie des courbes et l'application de la méthode du repère mobile seraient identiquement les mêmes que dans le plan euclidien.

42. — Si l'on passe du plan euclidien à l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, on retrouve en particulier la géométrie riemannienne classique. Les équations de structure de l'espace euclidien peuvent être partagées en deux :

1° les équations, écrites sous forme condensée,

$$\omega'_i = \sum_h \left[\omega_h \omega_{hi}\right]; \tag{40}$$

2° les équations

$$\omega'_{ij} = \sum_h \left[\omega_{ih}\omega_{hj}\right]. \tag{41}$$

Si l'on se donne dans un continuum à n dimensions les n formes ω_i (composantes de la translation), supposées linéairement indépendantes en du_1, ..., du_n, les équations (40) permettent d'en déduire sans ambiguïté les formes ω_{ij} (composantes de la rotation du repère mobile). D'autre part, par un changement du repère attaché à un point, les ω_i subissent une substitution orthogonale arbitraire, de sorte que la donnée du

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2$$

de l'espace suffit pour l'organiser euclidiennement, à condition bien entendu que les équations de structure (41) soient vérifiées.

([13]) Avec les notations de Darboux, la torsion est définie analytiquement par les deux coefficients a et b des équations

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = a(\xi\eta_1 - \eta\xi_1),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = b(\xi\eta_1 - \eta\xi_1).$$

Si l'on se donne arbitrairement le ds^2, on obtient un espace de Riemann; on peut encore s'arranger pour satisfaire aux équations de structure (40), ce qui permet, suivant une loi intrinsèquement liée au ds^2 donné, de définir le déplacement euclidien infinitésimal qui amène en coïncidence deux repères rectangulaires infiniment voisins ou, ce qui revient au même, de définir l'angle de deux directions issues de deux points infiniment voisins de l'espace. On arrive ainsi à la notion du *parallélisme* de proche en proche de M. Levi-Civita ([14]). Les équations de structure (41) ne sont plus en général vérifiées; il faut ajouter au second membre des termes complémentaires qui définissent la *courbure riemannienne* de l'espace.

Dans l'espace riemannien, l'application de la méthode du repère mobile à la théorie des courbes est identiquement la même que dans l'espace euclidien; la classification des courbes, la notion de courbure et de torsion sont les mêmes. Autrement dit *toutes les opérations de la géométrie différentielle euclidienne qui se rapportent à l'étude des courbes gardent leur signification en géométrie riemannienne.* L'application de la méthode du repère mobile à la théorie des surfaces se fera aussi de la même manière qu'en géométrie euclidienne, mais les résultats ne seront pas les mêmes, en ce sens qu'en géométrie euclidienne comme en géométrie riemannienne, on doit tenir compte des valeurs des covariants bilinéaires ω'_i et ω'_{ij} et que ces expressions ne sont pas les mêmes dès que le nombre des variables dépasse l'unité. C'est ainsi que les notions de droite, de circonférence, d'hélice, etc., se généralisent automatiquement en passant de la géométrie euclidienne à la géométrie riemannienne, mais que la notion de *plan* n'existe pas en général en géométrie riemannienne, si du moins on veut définir le plan par les mêmes propriétés *différentielles* qu'en géométrie euclidienne. Ces propriétés différentielles se traduisent en effet, dans l'espace à trois dimensions, par les équations

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = 0,$$

et ces équations ne sont plus complètement intégrables si les équations de structure cessent d'être vérifiées.

([14]) T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* (Rendiconti Circ. mat. Palermo, 42, 1917).

On pourra naturellement envisager des espaces à *connexion euclidienne* plus généraux que les espaces riemanniens, les premières équations de structure (40) cessant d'être vérifiées. *Les espaces riemanniens à parallélisme absolu* retrouvés par M. Einstein sont ceux pour lesquels les dernières équations de structure (41) sont vérifiées, mais non les premières (40). Ils ne comportent pas de courbure, mais ils ont une torsion.

43. — On voit facilement maintenant comment à chaque groupe G à n variables on peut attacher une infinité d'espaces généralisés admettant G pour groupe fondamental; ces espaces peuvent être regardés comme des continuums à n dimensions dans lesquels on a attaché à chaque couple de points infiniment voisins (u_i) et $(u_i + du_i)$ une transformation infinitésimale déterminée $T_{u;du}$ du groupe G, de manière que les équations de structure cessent d'être vérifiées ([15]). Dans ces espaces les opérations de la géométrie différentielle de l'espace de Klein de groupe G continuent à garder leur signification; la théorie des courbes y est la même que dans l'espace de Klein; la méthode du repère mobile s'y applique aussi de la même manière. Mais la classification des surfaces n'y est pas la même, ainsi que certaines de leurs propriétés.

A tout cycle de l'espace généralisé dont on se donne le point initial A_0 est associée une transformation du groupe G. On peut se la représenter de la manière suivante. Imaginons une suite d'observateurs échelonnés le long du cycle, se figurant tous être dans un espace de Klein et adoptant chacun un repère déterminé. L'observateur placé en A_0 pourra essayer de se représenter, dans l'espace de Klein auquel il croit appartenir, la suite des positions des repères de ses collègues, pourvu que chacun d'eux lui transmette la position, par rapport à son propre repère, du repère infiniment voisin. Quand l'observateur placé en A arrivera à la fin du cycle, il constatera qu'il devrait attribuer à son propre repère une position différente de celle qu'il a réellement; le déplacement

([15]) On pourrait plus généralement, dans un continuum à $m \neq n$ dimensions dont chaque point serait défini par un système quelconque de coordonnées $u_1, \ldots, u_m$, attacher à chaque couple de points infiniment voisins un déplacement infinitésimal $T_{u;du}$ du groupe G; on aurait un espace qui garderait encore quelques-unes des notions de la géométrie différentielle de l'espace de Klein dont G est le groupe fondamental.

nécessaire pour revenir à cette position initiale est le déplacement associé au cycle doué de l'origine A_0. Il est évident que ce déplacement, considéré au point de vue purement géométrique par l'observateur placé en A_0, ne dépend pas de la suite des repères choisis par les observateurs intermédiaires, mais son expression analytique dépend du choix du repère d'origine A_0. On peut fonder sur la considération des déplacements associés aux différents cycles *d'origine donnée* A_0, une notion importante, celle du *groupe d'holonomie* de l'espace. Mais nous n'entrerons pas dans ce sujet.

Si le cycle est un parallélogramme élémentaire, les composantes du déplacement infinitésimal associé au cycle sont les termes complémentaires qu'il faut ajouter aux seconds membres des équations de structure pour que ces équations deviennent exactes. Ce sont des expressions bilinéaires alternées par rapport aux deux séries de différentielles du_i et δu_i, ou encore par rapport aux deux séries de composantes $\omega_i(d)$ et $\omega_i(\delta)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si l'on suppose que les équations différentielles des points s'obtiennent en annulant les n premières formes ω_i ([16]). L'espace est *sans torsion* si les termes complémentaires relatifs aux n premières équations sont tous nuls ; c'est ce qui se passe pour les espaces riemanniens classiques, le déplacement associé à un cycle élémentaire d'origine A_0 étant une rotation autour de son origine du repère attaché à A_0.

44. — La géométrie kleinéenne de groupe fondamental G peut revêtir plusieurs aspects différents suivant *l'élément générateur* choisi. Dans ce qui précède, nous avons supposé que c'était le point. Avec un choix différent de l'élément générateur, on aura des géométries généralisées *essentiellement différentes* des précédentes. Si, dans la géométrie ordinaire, on regarde l'espace comme un lieu de plans, la notion de point subsiste, le point étant regardé comme une famille particulière de plans dépendant de trois paramètres ; mais, de même que dans un espace de Riemann, qui est un espace *ponctuel* à connexion euclidienne, la notion de plan disparaît ; de même dans un *espace de plans* à con-

([16]) Ces expressions bilinéaires ne sont pas quelconques ; elles satisfont à des identités (identités de Bianchi en géométrie riemannienne) qui constituent *le théorème de la conservation de la courbure et de la torsion*.

nexion euclidienne, la notion de point disparaîtra, et la géométrie dans un tel espace sera tout à fait différente de la géométrie riemannienne.

Il est intéressant, pour ne pas rester dans ces généralités, de voir comment on pourrait concevoir analytiquement un espace réglé à connexion euclidienne. Si dans l'espace euclidien on associe à chaque trièdre trirectangle le 3e axe comme *droite origine*, les composantes du déplacement infinitésimal du trièdre qui s'annulent lorsque la droite origine reste fixe sont, comme nous l'avons vu (n° 35),

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_{13},\ \omega_{23}.$$

On définira un espace réglé à connexion euclidienne en se donnant six formes différentielles à 4 variables u_1, u_2, u_3, u_4, les quatre formes ω_1, ω_2, ω_{13}, ω_{23} étant linéairement indépendantes. On peut remarquer ici que la connaissance, dans l'espace euclidien, de ces quatre formes entraîne celle des deux autres. Avec les notations de Darboux, on se donne ξ_i, η_i, p_i, q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ; les équations

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u_j} - \dfrac{\partial \xi_j}{\partial u_i} = \eta_i r_j - r_i \eta_j - \zeta_i q_j + q_i \zeta_j, \\ \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u_j} - \dfrac{\partial \eta_j}{\partial u_i} = \zeta_i p_j - p_i \zeta_j - \xi_i r_j + r_i \xi_j, \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial u_j} - \dfrac{\partial p_j}{\partial u_i} = q_i r_j - r_i q_j, \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial u_j} - \dfrac{\partial q_j}{\partial u_i} = r_i p_j - p_i r_j \end{cases}$$

déterminent sans ambiguïté les ζ_i et les r_i.

Pour avoir un espace réglé à connexion euclidienne *sans torsion*, il faudra se donner des fonctions ξ_i, η_i, p_i, q_i, ζ_i, r_i satisfaisant aux 24 équations précédentes. Mais nous savons qu'il y a une infinité de manières de choisir les fonctions pour un même espace, suivant le choix particulier qu'on a fait des repères. En ce qui concerne les formes ω_1, ω_2, ω_{13}, ω_{23}, on constate que ce qui ne varie pas avec le choix du repère, ce sont les deux formes quadratiques

$$\omega_{13}^2 + \omega_{23}^2 \quad \text{et} \quad \omega_1\omega_{23} - \omega_2\omega_{13},$$

dont la première représente le carré de l'angle de deux droites infiniment voisines et la seconde le produit de cet angle par la

plus courte distance. Mais ces deux formes différentielles quadratiques ne peuvent pas être choisies arbitrairement, si l'on veut que les équations (42) soient vérifiées par un choix convenable des ξ_i et des r_i. En particulier il faut que la première forme $\omega_{13}^2 + \omega_{23}^2$ puisse s'exprimer comme forme différentielle quadratique à deux variables seulement. Une manière particulièrement simple de choisir les deux formes quadratiques fondamentales consiste à prendre

$$\omega_{13}^2 + \omega_{23}^2 = du_1^2 + du_2^2, \tag{43}$$
$$\omega_1\omega_{23} - \omega_2\omega_{13} = du_2du_3 - du_1du_4.$$

Les variables u_1 et u_2 définissent la *direction* de la droite. On verrait que dans la géométrie réglée correspondante, la notion de point (considéré comme centre d'une gerbe de droites) et la notion de plan (considéré comme réseau de droites) subsistent [17]. La condition pour que deux droites (u_i) et (u'_i) *appartiennent à un même point* ou pour que deux droites (u_i) et $u'_i)$ *appartiennent à un même plan* est la même, à savoir

$$(u'_2 - u_2)(u'_3 - u_3) - (u'_1 - u_1)(u'_4 - u_4) = 0 \ [18].$$

45. — Il est clair qu'un grand nombre de géométries généralisées ne sont jusqu'à présent que des curiosités géométriques. Elles ont cependant le double avantage de jeter une vive lumière sur les fondements mêmes de la géométrie différentielle, et de fournir un réservoir de schémas géométriques dans lequel les Mathématiques et la Physique mathématique pourront venir puiser un jour. C'est ainsi du reste que la géométrie riemannienne à parallélisme absolu, qui est à la base des récentes recherches de M. Einstein, entre dans le schéma général que nous avons exposé. De même les espaces de Weyl sont des espaces sans torsion admettant pour groupe fondamental le groupe des similitudes ; la théorie des courbes, dans ces espaces, est donnée par les formules de Frenet (8). Jusqu'à présent ce sont surtout, en dehors des espaces riemanniens et des espaces de Weyl, les espaces à connexion affine, à connexion projective et à connexion

---

[17] Si l'espace est sans torsion, la notion de plan subsiste nécessairement, mais il n'en est pas de même en général de la notion de point.

[18] Cette géométrie réglée est liée d'une manière très étroite à la cinématique classique du plan, la droite représentant un mouvement rectiligne et uniforme. Voir E. CARTAN, *La cinématique newtonienne et les espaces à connexion euclidienne* (Bull. math. Soc. roumaine des Sciences, 35, 1933).

conforme qui ont été étudiés. Les deux dernières catégories peuvent être rattachées à des problèmes d'Analyse qui sont très anciens, mais qu'on peut ainsi revêtir d'une forme géométrique suggestive. Etant donné par exemple un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre à n variables, dont $n - 1$ dépendantes et une indépendante, peut-on regarder les courbes intégrales de ce système comme jouant, dans un continuum doué d'une connexion projective, le rôle des droites ? On voit immédiatement que cela n'est possible que si les équations ont une forme particulière, par exemple, dans le cas $n = 2$, si l'équation différentielle donnée est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\frac{dy}{dx} + D, \tag{44}$$

avec des coefficients A, B, C, D, fonctions données de x, y. Le problème comporte alors une infinité de solutions ; mais, parmi toutes les connexions projectives répondant à la question, il en existe une et une seule liée d'une manière intrinsèque à l'équation donnée ; cela veut dire que la loi suivant laquelle on associe cette connexion projective à l'équation différentielle reste invariante par un changement de variables quelconque ([19]). La géométrie de l'espace à deux dimensions (x, y) à connexion projective, dite *normale*, ainsi définie, fournit toutes les propriétés de l'équation (44) qui ne dépendent pas du choix des variables x, y.

Si l'équation différentielle n'est pas de la forme particulière (44), mais est quelconque, on peut encore en regarder les courbes intégrales comme jouant le rôle de droites dans un espace à connexion projective, mais à condition de prendre comme élément générateur de la géométrie non le point, mais l'*élément linéaire* (ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point), le groupe fondamental étant toujours le groupe projectif du plan ; là encore, parmi toutes les connexions projectives faisant des intégrales de l'équation différentielle des droites, une est privilégiée, et la géométrie correspondante fournit toutes les propriétés de l'équation différentielle qui ne dépendent pas du choix des variables x, y.

([19]) La détermination de cette connexion projective intrinsèque rentre dans la méthode générale du repère mobile, mais appliquée ici au cas d'un groupe G *infini*, à savoir le groupe de toutes les transformations ponctuelles à deux variables.

On pourrait de même regarder les courbes intégrales d'une équation différentielle arbitraire du 3e ordre comme les circonférences d'un plan, en regardant le continuum des points (x, y) comme un espace généralisé dont le groupe fondamental serait le groupe des transformations de contact qui changent un cercle orienté en un cercle orienté. Il existe encore une connexion privilégiée et la géométrie correspondante fournit toutes les propriétés de l'équation différentielle invariantes par une transformation de contact arbitraire.

46. — Un dernier exemple va nous ramener à la géométrie euclidienne. On sait que Riemann a envisagé, pour définir la distance de deux points infiniment voisins, des expressions plus générales que la racine carrée d'une forme différentielle quadratique. Dans le cas de deux dimensions, on pourrait prendre une fonction quelconque homogène et du premier degré en dx, dy, qu'on peut toujours écrire $F(x, y, y')dx$, en posant $y' = \frac{dy}{dx}$. D'autre part, le calcul des variations, dans le cas le plus simple d'une intégrale $\int F(x, y, y')dx$, conduit à des notions, qui sont très analogues à des notions de géométrie élémentaire ; la transversalité par exemple a une grande analogie avec la perpendicularité. Certains auteurs ont développé une généralisation de la géométrie riemannienne fondée sur des considérations de cette nature. Cette généralisation rentre dans notre schéma général. On peut faire des extrémales de l'intégrale $\int F(x, y, y')dx$ des *droites* euclidiennes en introduisant une connexion euclidienne, mais il faut prendre alors comme élément générateur, non le point, mais l'élément linéaire. Cela tient à ce que c'est au voisinage d'un élément linéaire, considéré comme élément d'extrémale, que l'espace a les caractères d'un plan euclidien, mais ce caractère se perd si on considère le voisinage d'un point, c'est-à-dire l'ensemble des éléments linéaires dont le centre est voisin d'un point donné. On peut donc définir euclidiennement l'angle de deux éléments linéaires infiniment voisins, la distance de leurs centres, etc. ; mais il importe de remarquer que la distance des centres pourra varier si on fait tourner les deux éléments linéaires autour de leurs centres fixes ([20]).

([20]) Voir Elie Cartan, *Les espaces de Finsler* (Exposés de Géométrie, II, 1934).

Le fait qu'on puisse fonder d'une manière intrinsèque une géométrie à connexion euclidienne sur la donnée de l'expression analytique de la distance de deux points infiniment voisins pose la question de savoir si l'on ne pourrait pas réaliser quelque chose d'analogue en se donnant, dans un continuum à trois dimensions, l'expression analytique de l'aire d'un élément de surface ([21]). Il est très remarquable que cela est possible en général ; on peut associer, suivant une loi intrinsèque, à une intégrale $\int\int F(x, y, z, p, q)dxdy$ une connexion euclidienne dans laquelle cette intégrale représenterait l'aire euclidienne d'une surface. Mais il y a ici des cas d'exception ; je citerai seulement le cas de l'intégrale $\int\int(p^2 + q^2)dxdy$. Comme cette intégrale est invariante par le groupe infini de transformations ponctuelles

$$(45) \qquad \begin{cases} x' + iy' = f(x + iy), \\ z' = z + a, \end{cases}$$

où $f(x + iy)$ désigne une fonction analytique arbitraire et a une constante arbitraire, il est certain qu'il est impossible de lui associer suivant une loi intrinsèque (c'est à-dire invariante par un changement quelconque de variables) une connexion euclidienne, car toute connexion euclidienne ne peut rester invariante que par un groupe à six paramètres au maximum, tandis qu'elle devrait rester invariante par le groupe infini (45) ([22]).

L'exemple précédent est assez suggestif. Il montre d'abord la possibilité de fonder la géométrie différentielle euclidienne dans l'espace sur la seule notion d'aire, de même qu'il est possible de la fonder sur la seule notion de longueur. Mais il montre aussi que si, en généralisant l'expression analytique euclidienne de la *longueur*, on peut toujours fonder une géométrie conservant les notions fondamentales de la géométrie euclidienne différentielle, il n'en est pas toujours de même en généralisant l'expression analytique euclidienne de l'aire. Et cela même n'est pas sans nous ouvrir de nouveaux horizons sur les fondements mêmes de la géométrie élémentaire.

([21]) Pendant la correction des épreuves, M. L. Koschmieder me signale des mémoires (*Math. Ann.*, 94, 1925 ; *Math. Zeitsch.*, 24, 1925 ; *Math. Zeitsch.*, 25, 1926 ; *Proc. Akad.*, Amsterdam, 31, 1928) dans lesquels il a abordé ce problème et obtenu d'intéressants résultats.

([22]) Voir E. Cartan, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire* (Exposés de Géométrie, I, 1933).

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	3
I. — La méthode du trièdre mobile	5
II. — Application de la méthode du trièdre mobile à l'étude des courbes minima	8
III. — La théorie des courbes planes en géométrie affine	16
IV. — La méthode des équations réduites	20
V. — La notion de repère dans une géométrie de groupe donné . .	25
VI. — Les équations de structure de Darboux Maurer-Cartan . . .	33
VII. — Méthode générale du repère mobile	38
VIII. — La méthode du repère mobile fondée sur les équations de structure.	45
IX. — Les équations de structure envisagées comme principe d'organisation de l'espace	50
X. — Les espaces généralisés.	54

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

IMPRIMERIE BARNÉOUD
— LAVAL (FRANCE) —