UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO

Renato Betti

BICATEGORIE DI BASE

QUADERNO 2/S(II) 1981

Istituto Matematico „F. Enriques" - Via C Saldini 50„ 20133 MILANO

In questo lavoro si introduce la nozione di categoria i cui hom sono assunti in una bicategoria B (brevemente B-categoria). Si tratta di una generalizzazione diretta del caso in cui le categorie assumano valore per gli hom in una categoria monoidale V, pur di considerare che V è una bicategoria con un solo oggetto, e corrisponde ad assumere una "base variabile", dipendente dal dominio e dal codominio. Le condizioni che permettono una tale generalizzazione sono esattamente quelle di bicategoria e le nozioni direttamente collegate a quella di B-categoria (B-funtore, trasformazioni naturali di B-funtori, cambiamento di base) estendono in maniera naturale le nozioni ormai classiche nel caso di categorie monoidali di base.

Sorte dalla necessità di estendere agli automi ad albero una teoria categoriale degli automi sequenziali, le B-categorie stanno rivelandosi utili in altre applicazioni. In [9] Walters mostra che, se (C,J) è un sito, la categoria dei fasci su C è equivalente a una categoria del tipo B-cat, per una B opportuna costruita a partire da (C,J), con condizioni aggiuntive (che si tratti di B-categorie "complete nel senso di Cauchy"). In [4] si dimostra che il funtore "fascio associato" corrisponde al processo generale di completamento nel senso di Cauchy per le B-categorie (introdotto da Lawvere in [7] nel caso delle categorie monoidali di base). Altri sviluppi sono in corso [5] sulla teoria generale delle B-categorie e le loro principali applicazioni, in particolare nella direzione di interpretarle come "spazi generalizzati".

Qui si intende semplicemente esplicitare la maniera in cui la nozione di B-categoria, le nozioni collegate e le principali costruzioni ad essa relative (completamento nel senso di Cauchy, estensioni di Kan, funtore dimenticante) si estendono direttamente da quelle date in [7] da Lawvere, e riportate in maggior dettaglio anche in [3].

1. BICATEGORIE DI BASE

Nel seguito sia B una bicategoria fissata. La terminologia e le notazioni sono quelle di [6]. La composizione "orizzon-

tale" di 2-celle è notata con $\circ$, mentre $\cdot$ denota, senza ambiguità, sia la composizione di 1-celle che la composizione "verticale" di 2-celle.

Def. Una B-categoria X è data da oggetti a,b,..., una legge $X_{(-)}$ che ad ogni oggetto a associa un oggetto della base X_a, una legge X(-,-) che a ogni coppia ordinata $\langle a,b\rangle$ di oggetti associa la 1-cella dei morfismi

$$X(a,b): X_a \longrightarrow X_b;$$

inoltre per ogni terna ordinata di oggetti $\langle a,b,c\rangle$ è assegnata una 2-cella di "composizione":

$$\mu_{abc}: X(a,b)\cdot X(b,c) \longrightarrow X(a,c),$$

e per ogni oggetto a è assegnata una 2-cella "identità"

$$\eta_a: 1_{X_a} \longrightarrow X(a,a).$$

La composizione e l'identità devono soddisfare le usuali leggi associativa e di unità, che si esprimono mediante diagrammi commutativi di 2-celle in B.

Def. Se X e Y sono B-categorie, un B-funtore $f: X \longrightarrow Y$ è una corrispondenza sugli oggetti $a \longmapsto fa$ tale che $X_a = Y_{fa}$ per ogni a, insieme a una famiglia f_{ab}: $X(a,b) \longrightarrow Y(fa,fb)$ di 2-celle soddisfacenti le usuali proprietà dei funtori:

$$\begin{array}{ccc} X(a,b)\cdot X(b,c) & \xrightarrow{\mu_{abc}} & X(a,c) \\ {\scriptstyle f_{ab}\cdot f_{bc}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{ac}} \\ Y(fa,fb)\cdot Y(fb,fc) & \longrightarrow & Y(fa,fc) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & {\scriptstyle \eta_a} \nearrow & X(a,a) \\ 1_{X_a} & & \downarrow{\scriptstyle f_{ab}} \\ & \searrow & Y(fa,fb) \end{array}$$

La prima osservazione riguardo alle B-categorie è che estendono le nozioni corrispondenti delle V-categorie, con V monoidale. In altre parole, tenendo conto del fatto che una categoria monoidale V è una bicategoria con un solo oggetto, si ha che le V-categorie nel nuovo senso dato sopra coincidono con le precedenti. Lo stesso vale per i funtori forti.

Un'altra generalizzazione è possibile mediante la nozione di morfismo fra bicategorie: nel caso di basi con un solo oggetto si riduce alla nozione di funtore monoidale.

Anche in questo caso la nozione di morfismo $F: B \longrightarrow B'$ di bicategorie riassume le proprietà che consentono di trasferire tutta la struttura B-categoriale in analoghe nozioni B'-categoriali. Infatti, se

$$\varphi_a: 1_{F_a} \longrightarrow F(1_a) \quad \text{e} \quad \varphi_{gh}: Fg \cdot Fh \longrightarrow F(g \cdot h)$$

sono le 2-celle canoniche assegnate dal morfismo F, è sufficiente assumere:

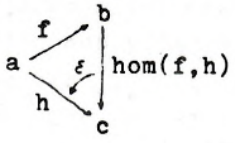
$X'_a = F(X_a)$, $X'(a,b) = F(X(a,b))$, $\mu'_{abc} = \varphi_{X(a,b),X(b,c)} F(\mu_{abc})$

$\eta'_a = \varphi_{X_a} \circ F(\eta_a)$, per ottenere una B'-categoria i cui oggetti sono gli stessi della categoria X.

La più semplice rappresentazione di una B-categoria è quella di una famiglia di monadi in B (una "poliade", secondo la terminologia di [1]). Una tale famiglia di monadi è indiciata da un insieme X i cui elementi sono gli oggetti della B-categoria. Ad ogni oggetto a in X corrisponde un oggetto X_a in B e, dalla definizione, si vede facilmente che X_a è il supporto di una monade X(a,a). Due monadi della famiglia, X(a,a) e X(b,b), sono connesse poi da una 1-cella X(a,b), la quale è un'algebra per la prima monade e una coalgebra per la seconda. Viceversa la nozione di famiglia di monadi descritta sopra dà luogo a una B-categoria. E' facile vedere che le due nozioni coincidono. La categoria Alg(t) delle algebre per la monade t non è che una B-categoria di tipo particolare, che sarà studiato nel prossimo paragrafo, precisamente di tipo B_a quando a è il supporto della monade.

2. BICATEGORIE CHIUSE

Supponiamo che B sia chiusa (o estensionale, nella terminologia di [8]). Ciò significa che B ammette le estensioni destre di Kan $\langle \hom(f,h), \varepsilon \rangle$ per ogni coppia ordinata di 1-celle f ed h aventi lo stesso dominio:



cioè vale la corrispondenza biunivoca fra 2-celle:

$$\frac{f\cdot g \longrightarrow h}{g \longrightarrow \hom(f,h)} \qquad (f\cdot - \longrightarrow \hom(f,-))$$

naturale rispetto a f ed h.

Proposizione. Per ogni oggetto a di B, la categoria B_a delle 1-celle aventi comune dominio a è una B-categoria in maniera canonica.

Dimostrazione. Gli oggetti di B_a sono le 1-celle $f: a \longrightarrow b$ e il "supporto" di f è dato dal codominio: $B_a(f)=b$. La 1-cella dei morfismi fra f ed h è data da hom(f,h). Le 2-celle di composizione sono date dalla proprietà di chiusura:

$$\frac{\hom(f,g)\cdot\hom(g,h) \longrightarrow \hom(f,h)}{f\cdot\hom(f,g)\cdot\hom(g,h) \xrightarrow{\varepsilon\cdot 1} g\cdot\hom(g,h) \xrightarrow{\varepsilon} h}$$

e analogamente per le 2-celle identità:

$$\frac{1_b \longrightarrow \hom(f,f)}{f\cdot 1_b \xrightarrow{\ 1_f\ } f}$$

Vale la pena di osservare che, mettendo insieme tutte le B-categorie di tipo B_a, la struttura risultante è quella di un "sistema di estensione", nel senso di [8], pag. 156: la condizione ii) dei sistemi di estensione vale perchè B è una bicategoria, per la condizione iii) è sufficiente assumere $y_a = 1_a$, inoltre la proprietà universale di hom permette di estenderla a un bifuntore

$$B(x,a)^{op} \times B(x,b) \xrightarrow{[\varepsilon,\ ]} B(x,a)$$

com'è richiesto dalla condizione iv).

Le 2-celle che entrano nella condizione v) dei sistemi di estensione sono date dalle composizioni e dalle identità in ogni categoria del tipo B_a. Inoltre le condizioni ES1) e ES2) esprimono esattamente la loro compatibilità, associatività della composizione e leggi di unità a destra e a sini-

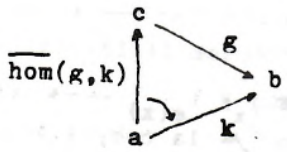
stra. Infine la condizione ES3) esprime la proprietà universale degli hom:

$$\frac{f \longrightarrow g}{1_a \longrightarrow \hom(f,g)}$$

In tal modo la proprietà di V di essere essa stessa una V-categoria (vera quando V è monoidalmente chiusa) diventa quella di essere, per B, un sistema di estensione. Anche questa generalizzazione è diretta pur di osservare che "un sistema di estensione con esattamente un oggetto è una categoria chiusa" (si veda [8], pag. 157).

Chiaramente la Proposizione precedente è dualizzabile alle 1-celle aventi comune codominio b; queste costituiscono una categoria basata su B^{op} (solo le 1-celle sono rovesciate) se la categoria B ammette "lifting" destri, vale a dire se il funtore $-\cdot g$ ammette un aggiunto destro $\overline{\hom}(g,-)$:

$$\frac{f\cdot g \longrightarrow k}{f \longrightarrow \overline{\hom}(g,k)}$$



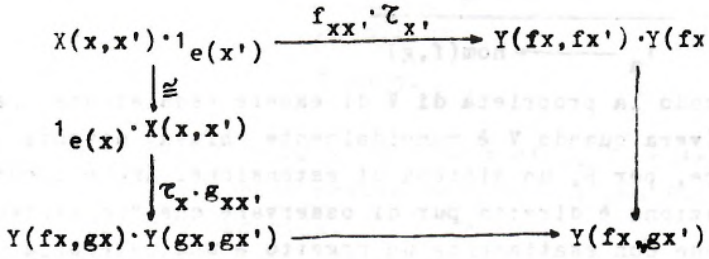
Una teoria completamente duale potrebbe essere sviluppata: una B-cocategoria è un B^{op}-categoria, vale a dire $X(x,x')$ è una 1-cella $e(x') \longrightarrow e(x)$, ecc. Nel seguito non svilupperemo questo punto di vista, anche se nel paragrafo sulle estensioni di Kan dei bimoduli saranno richiesti sia le estensioni di Kan in B che i "lifting" destri in B.

3. B-TRASFORMAZIONI NATURALI

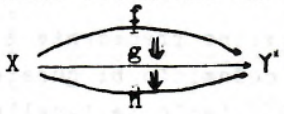
Una trasformazione naturale fra due B-funtori $\tau: f \longrightarrow g$ è data da una famiglia di 2-celle

$$1_{e(x)} \xrightarrow{\tau_x} Y(fx,gx)$$

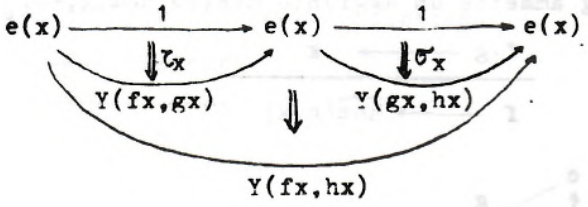
'ndiciata dagli oggetti di X, per cui valgono le seguenti :ompatibilità:



La composizione verticale di trasformazioni naturali

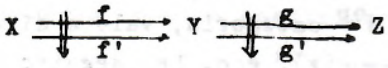


è data dal "pasting" rappresentato nella figura:

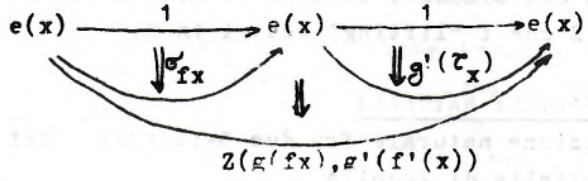


vale a dire ha le componenti $(\tau\circ\sigma)_x : 1_{e(x)} \longrightarrow Y(fx,hx)$ date da $(\tau_x \circ \sigma_x)\cdot \mu_{fx,gx,hx}$, essendo μ la composizione in Y.

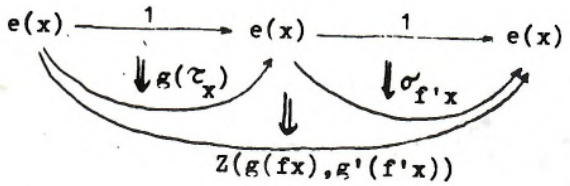
La composizione orizzontale di trasformazioni naturali



è data da una dei due seguenti (equivalenti) "pastings":



oppure



Nei precedenti diagrammi $g(\tau_x)$ è definita mediante la composizione

$$1 \xrightarrow{\tau_x} Y(fx,fx') \xrightarrow{g_{fx,f'x}} Z(g(fx),g(f'x))$$

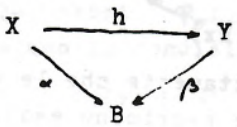
(immagine di τ_x rispetto a g). Analogamente si definisce $g'(\tau_x)$. I diagrammi precedenti sono uguali perchè σ è una trasformazione naturale.

E' possibile un'altra descrizione delle B-categorie, dei B-funtori e delle trasformazioni naturali fra queste:

i) una B-categoria è un funtore "lax" $\alpha : X \longrightarrow B$, quando X è una categoria caotica (cioè per ogni coppia di elementi esiste esattamente una freccia);

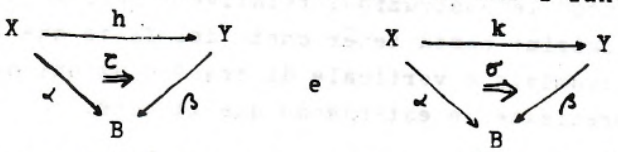
ii) se $\alpha : X \longrightarrow B$ e $\beta : Y \longrightarrow B$ sono due B-categorie, un B-funtore è una coppia (h, τ) tale che:

- $h: X \longrightarrow Y$ sia un funtore che rende commutativo sugli oggetti il seguente diagramma $\alpha(x) = \beta(hx)$:

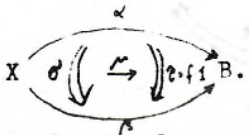


- τ è una trasformazione quasi-naturale $\alpha \longrightarrow h\beta$ tale che ciascuna componente sia l'identità $\alpha(x) \longrightarrow \alpha(x)$.

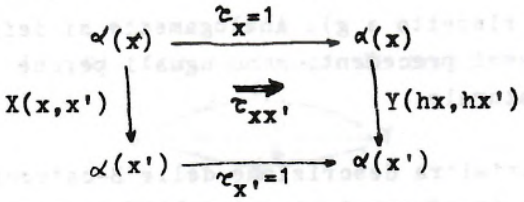
iii) Una trasformazione naturale fra due B-funtori



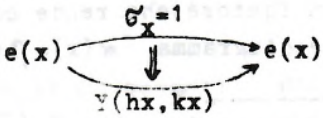
è una modificazione μ da σ a $\alpha \xrightarrow{\tau} h\beta \xrightarrow{f \cdot 1} k$, dove f è l'unica trasformazione naturale $h \longrightarrow k$:



Si calcola facilmente che, se h è definito come in ii), allora è la corrispondenza sugli oggetti di un B-funtore, mentre $\tau_{xx'}$ (la componente di τ rispetto all'unico morfismo $x \longrightarrow x'$) ne è la corrispondenza sulle frecce:



Per quanto riguarda le trasformazioni naturali, per vedere che una modificazione come la μ di iii) corrisponde a una famiglia di 2-celle di B, come definite in precedenza, si osservi che le componenti di μ hanno i voluti dominio e codominio, precisamente:



Inoltre si calcola direttamente che le condizioni perchè μ sia una modificazione esprimono esattamente la commutatività dei diagrammi richiesta dalla nozione di trasformazione naturale fra B-funtori.

In conclusione del paragrafo osserviamo che, estendendo "punto a punto" le costruzioni relative a Cat, anche B-cat è una bicategoria: basta tener conto del fatto che le composizioni orizzontale e verticale di trasformazioni naturali sono date precisamente estendendo quelle note.

4. BIMODULI E L'IMMERSIONE DI YONEDA

Nel seguito considereremo il caso particolare in cui la bicategoria di base B è localmente un preordine, vale a di-

re, per ogni coppia a,b di oggetti, la categoria B(a,b) è un preordine che ammette arbitrari estremi superiori. Supponiamo inoltre che gli estremi superiori siano conservati per composizione. Con queste ulteriori ipotesi sulla bicategoria di base, molte proprietà date in precedenza si semplificano: precisamente tutte le commutatività di 2-celle sono ora automaticamente verificate. Le 2-celle stesse saranno allora denotate semplicemente con $\leq$.

Def. Se X e Y sono B-categorie, un <u>bimodulo</u> $\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ è definito assegnando per ogni coppia ordinata di oggetti, x in X e y in Y, una 1-cella

$$\varphi(y,x): e(y) \longrightarrow e(x)$$

soggetta alle seguenti "azioni":

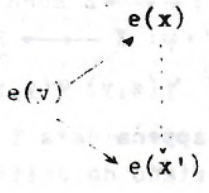
$$\varphi(y,x)\cdot X(x,x') \leq (y,x')$$
$$Y(y,y')\cdot\varphi(y',x) \leq (y,x).$$

<u>Proposizione</u>. Se $\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ è un bimodulo, la corrispondenza $\varphi_y : x \longmapsto \varphi(y,x)$, per ogni oggetto y, è un B-funtore $X \longrightarrow B_{e(y)}$.
Il bimodulo φ è univocamente determinato da una famiglia di B-funtori $\varphi_y : X \longrightarrow B_{e(y)}$ se e solo se essi soddisfano la condizione

(*) $\quad Y(y',y)\cdot\varphi_y(x) \leq \varphi_{y'}(x)$

per ogni oggetto x.

<u>Dimostrazione</u>. Dato il bimodulo φ, la corrispondenza φ_y associa a x l'oggetto $\varphi(y,x): e(y) \longrightarrow e(x)$ di $B_{e(y)}$ il quale ammette come elemento sottostante e(x):



La funtorialità di φ_y è una conseguenza della corrispondenza biunivoca:

$$\frac{X(x,x') \leq B_{e(y)}(\varphi_y(x), \varphi_y(x'))}{\varphi(y,x)\cdot X(x,x') \leq \varphi(y,x')}$$

avendo posto $\hom(-,-)=B_a(-,-)$ (e nel seguito, nel corso delle estensioni di Kan, si userà anche la notazione B^a al posto di $\overline{\hom}$). Inoltre le condizioni (*) dell'enunciato derivano direttamente dall'altra "azione" sul bimodulo.

Viceversa, data una famiglia di funtori φ_y soddisfacenti alle condizioni (*), si può ritrovare un unico bimodulo φ: $X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ prendendo $\varphi(y,x)=\varphi_y(x)$. L'azione di X è fornita dalla funtorialità, l'azione di Y dalle condizioni (*).

Possiamo ora "ripetere" l'immersione di Yoneda considerando la famiglia di B-funtori che corrisponde al bimodulo identico $X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X$:

yon_x: $X \longrightarrow B_{e(x)}$ è assegnato da $x' \longmapsto X(x,x')$.

Ogni B-funtore $f: X \longrightarrow Y$ diventa un bimodulo f_*: $X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ componendo con l' "immersione di Yoneda":

$$X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[\mathrm{yon}_y]{} B_{e(y)}$$

è un B-funtore $(f_*)_y$ tale che $(f_*)_y(x)=f_*(y,x)=Y(y,fx)$ per il quale si verificano facilmente le condizioni (*) della Proposizione precedente:

$$Y(y',y)\cdot(f_*)_y(x)=Y(y',y)\cdot Y(y,fx) \leq Y(y',fx)=(f_*)_{y'}(x).$$

Dunque i funtori $(f_*)_y$ si "incollano" in un unico bimodulo f_*. L'essenza dei bimoduli del tipo f_* è quella di ammettere un aggiunto destro f^*: $Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X$ definito mediante $f^*(x,y)=Y(fx,y)$, nel senso delle definizioni seguenti.

Def. Se $\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ e $\psi: Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Z$ sono due bimoduli, la loro <u>composizione</u> $\psi\cdot\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Z$ è definita da

$$(\psi\cdot\varphi)(z,x)=\bigvee_y \psi(z,y)\cdot\varphi(y,x).$$

Rispetto alla definizione appena data i bimoduli identici $X(x,x')$ e $Y(y,y')$ si comportano da unità. Inoltre si stabilisce facilmente una relazione di preordine fra bimoduli paralleli: $\varphi \leq \psi$ se e solo se $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$ per ogni

componente.

Def. I bimoduli $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightleftarrows}} Y$ si dicono aggiunti se e solo se valgono le seguenti relazioni (α a sinistra, β a destra): $1_X \leq \beta \circ \alpha$

$$\alpha \circ \beta \leq 1_Y$$

Proposizione. f_* è aggiunto sinistro a f^*.

Dimostrazione. Occorre verificare che valgono le relazioni

$$X(x,x') \leq \bigvee_y f^*(x,y) \cdot f_*(y,x')$$

$$\bigvee_x f_*(y,x) \cdot f^*(x,y) \leq Y(y,y').$$

Infatti si ha:

$$\bigvee_y f^*(x,y) \cdot f_*(y,x') = \bigvee_y Y(fx,y) \cdot Y(y,fx') \geq$$

$Y(fx,fx') \geq X(x,x')$ perchè f è un funtore. E anche:

$\bigvee_x Y(y,fx) \cdot Y(fx,y') \leq Y(y,y')$ per la composizione in Y.

In conclusione di paragrafo mostriamo come anche la nozione di "completamento nel senso di Cauchy di una categoria", introdotto da Lawvere in [6], si estenda direttamente al caso delle B-categorie.

Def. Una B-categoria Y si dice completa nel senso di Cauchy se ogni coppia di bimoduli aggiunti

$$X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightleftarrows}} Y$$

proviene da un funtore: $\alpha = f_*$ e $\beta = f^*$.

In pratica risulta comoda una formulazione equivalente; a questo scopo notiamo con $\hat{b}$ la B-categoria con un solo oggetto avente come oggetto sottostante b.

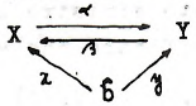
Proposizione. Y è completa nel senso di Cauchy se e solo se ogni coppia di bimoduli aggiunti della forma

$$\hat{b} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightleftarrows}} Y$$

proviene da un funtore $\hat{b} \longrightarrow Y$.

Dimostrazione. In una direzione la dimostrazione è banale.

Nell'altra, supponiamo che valga la condizione. Sia x un oggetto di X tale che e(x)=b. Consideriamo x come un B-funtore $\hat{b} \longrightarrow X$ e quindi la coppia di bimoduli aggiunti $\langle x_*, x^* \rangle$ a cui dà luogo. La composizione con α e β rispettivamente costituisce ancora una coppia di bimoduli aggiunti $\langle \alpha \circ x_*, x^* \circ \beta \rangle$ che, per ipotesi, proviene da un funtore:



Sia $y: \hat{b} \longrightarrow Y$ il funtore tale che $y_* = \alpha \cdot x_*$ e $y^* = x^* \circ \beta$. La corrispondenza $x \longmapsto y$ è la funzione sugli oggetti di un B-funtore $f: X \longrightarrow Y$, inoltre $f_* = \alpha$ e $f^* = \beta$:

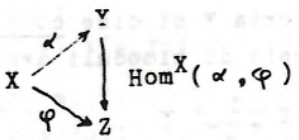
$$f_*(y,x) = (\alpha \circ x_*)(y) = \bigvee_{x'} \alpha(y,x') \cdot X(x',x) = \alpha(y,x)$$

(e analogamente per f^*). La funtorialità di f proviene da:

$$X(x,x') \leq X(x,x') \cdot Y(fx',fx') = X(x,x') \cdot f^*(x',fx') \leq$$
$$\leq f^*(x,fx') = Y(fx,fx').$$

5. ESTENSIONI DI KAN

Il senso con cui vanno intese le estensioni di Kan è il seguente. Dati due bimoduli α e φ con lo stesso dominio, esiste un "miglior" bimodulo $Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\bullet\ Z$ (denotato $\mathrm{Hom}^X(\alpha, \varphi)$)



nel senso che per ogni altro bimodulo $\beta: Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\bullet\ Z$ e per ogni oggetto z di Z, vale

$$\mathrm{Nat}(\beta_z, \mathrm{Hom}^X(\alpha, \varphi)_z) \cong \mathrm{Nat}((\beta \circ \alpha)_z, \varphi_z).$$

Osserviamo che nel caso di categorie monoidali di base è possibile parlare di estensioni di Kan

$$\frac{\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}^X(\alpha, \varphi)}{\beta \circ \alpha \longrightarrow \varphi}$$

confrontando trasformazioni naturali in due argomenti: infatti β e $\mathrm{Hom}^X(\alpha,\varphi)$ sono V-funtori $Z^{op}\otimes Y \longrightarrow V$, e analogamente $\beta\circ\alpha$ e $\varphi : Z^{op}\otimes X \longrightarrow V$.

Nel nostro caso non ha alcun senso un $\otimes$ fra B-categorie e (eventuali) B^{op}-categorie. Allora la miglior maniera di assegnare le estensioni di Kan è quella di fissare un argomento (ad esempio z) e di assegnarle mediante B-trasformazioni naturali (una per ogni z). Le seguenti definizioni e le dimostrazioni che seguono, tenuto conto di necessari cambiamenti, sono essenzialmente quelle contenute in Lawvere [7].

Si pone

$$\mathrm{Hom}^X(\alpha,\varphi)_z(y) = \prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x))$$

e si verifica che $\mathrm{Hom}^X(\alpha,\varphi)_z$ è una famiglia di B-funtori che soddisfa le condizioni (*) della Proposizione di pag. 9, di modo che dà luogo a un unico bimodulo $Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\; Z$.

Per la funtorialità si considera la seguente catena di corrispondenze biunivoche:

per ogni y,y': $\quad Y(y,y') \leq$

$$B^{e(z)}\left[\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x)),\ \prod_{x'} B^{e(x')}(\alpha(y',x'),\varphi(z,x'))\right]$$

se e solo se

$$\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x))\cdot Y(y,y') \leq \prod_{x'} B^{e(x')}(\alpha(y',x'),\varphi(z,x')),$$

se e solo se

$$\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x))\cdot Y(y,y') \leq B^{e(x')}(\alpha(y',x'),\varphi(z,x')) \quad \text{(per ogni } x')$$

se e solo se

$$\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x))\cdot Y(y,y')\cdot\alpha(y',x') \leq \varphi(z,x'),$$ se e solo se

$$\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x))\cdot\alpha(y,x') \leq \varphi(z,x')$$

e questa equivale a

$$B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x)) \leq B^{e(x')}(\alpha(y,x'),\varphi(z,x')).$$

E' allora sufficiente prendere $x=x'$ per ricostruire quan-

to si voleva.

In maniera analoga, per dimostrare le condizioni (*), si considera la seguente catena di corrispondenze biunivoche:

$$Z(z',z)\cdot\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x)) \leq$$

$$\prod_{x'} B^{e(x')}(\alpha(y,x'),\varphi(z',x'))$$ se e solo se, per ogni x',

$$Z(z',z)\cdot\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x)) \leq$$

$B^{e(x')}(\alpha(y,x'),\varphi(z',x'))$, cioè se e solo se vale

$$Z(z',z)\cdot\prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(x,z))\cdot\alpha(y,x') \leq \varphi(z',x'),$$

se e solo se, per ogni x', si ha:

$$Z(z',z)\ B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x))\cdot\alpha(y,x) \leq \varphi(z',x);$$

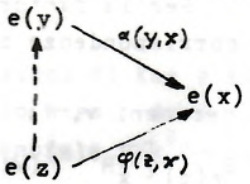
basta allora prendere x'=x per ritrovare la relazione voluta a partire da $Z(z',z)\cdot\varphi(z,x) \leq \varphi(z',x)$.

Dimostriamo ora che $\mathrm{Hom}^X(\alpha,\varphi)$ soddisfa la condizione richiesta dalle estensioni di Kan: una trasformazione naturale

$$\beta_z \longrightarrow \mathrm{Hom}^X(\alpha,\varphi)_z$$

è una famiglia

$$\prod_{e(y)} \longrightarrow B_{e(z)}(\beta_z(y),\mathrm{Hom}^X(\alpha,\varphi)_z(y)).$$



Da questa famiglia otteniamo la famiglia:

$$\beta_z(y) \longrightarrow \mathrm{Hom}^X(\alpha,\varphi)_z(y) = \prod_x B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x)).$$

Per ogni y, per proiezione, si ha

$$\beta_z(y) \longrightarrow B^{e(x)}(\alpha(y,x),\varphi(z,x))$$

e quindi

$$\beta(z,y)\cdot\alpha(y,x) \longrightarrow \varphi(z,x).$$

Considerando contemporaneamente queste frecce rispetto a y si ottiene

$$\bigvee_y \beta(z,y)\cdot\alpha(y,x) \longrightarrow \varphi(z,x)$$

e quindi: $(\beta\circ\alpha)(z,x)=(\beta\circ\alpha)_z(x) \longrightarrow \varphi_z(x)$.

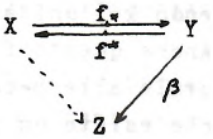
Il viceversa si ottiene rovesciando tutto il ragionamento.

Lemma. Se $f: X \longrightarrow Y$ è un B-funtore, per ogni bimodulo $\beta: Y \longrightarrow\!\!\!\!\!+\; Z$ la composizione con f_* è un bimodulo isomorfo a $\mathrm{Hom}^{Y}(f^*, \beta)$.

Dimostrazione. Occorre dimostrare che vale:

$$(\beta \circ f_*)(z,x) = \mathrm{Hom}^{Y}(f^*, \beta)(z,x)$$

per ogni coppia di oggetti z e x



Infatti il primo membro diventa:

$$(\beta \circ f_*)(z,x) = \bigvee_y \beta(z,y) \cdot Y(y,fx) =$$

$$= \beta(z,fx).$$

Il secondo membro:

$$\mathrm{Hom}^{Y}(f^*, \beta)(z,x) = \prod_y B^{e(y)}(f^*(x,y), \beta(z,y)) =$$

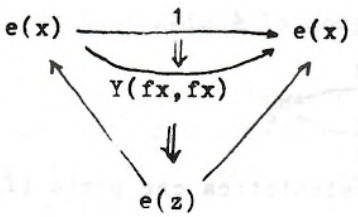
$$\prod_y B^{e(y)}(Y(fx,y), \beta(z,y)).$$

Mostriamo che anche quest'ultimo termine è uguale a $\beta(z,fx)$. Infatti:

$\beta(z,fx) \leq B^{e(y)}(Y(fx,y), \beta(z,y))$ vale per ogni y a causa dell'azione di Y; dunque vale

$$\beta(z,fx) \leq \prod_y B^{e(y)}(Y(fx,y), \beta(z,y)).$$

D'altro lato, ponendo y=fx, il termine corrispondente del prodotto è $B^{e(fx)}(Y(fx,fx), \beta(z,fx))$ il quale è $\beta(z,fx)$ utilizzando il "pasting" con l'identità di Y:



Teorema (Kan, Lawvere). Se f è un B-funtore $X \longrightarrow Y$, per ogni coppia di bimoduli $\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\!+\; Z$ e $\beta: Y \longrightarrow\!\!\!\!\!+\; Z$ si ha:

$$\mathrm{Nat}((\varphi \circ f^*)_z, \beta_z) \cong \mathrm{Nat}(\varphi_z, (\beta \circ f_*)_z).$$

Dimostrazione. $\mathrm{Nat}((\varphi \circ f^*)_z, \beta_z) \cong \mathrm{Nat}(\varphi_z, \mathrm{Hom}^{Y}(f^*, \beta_z)) \cong$

$\cong \mathrm{Nat}(\varphi_z, (\beta \circ f_*)_z)$.

6. IL FUNTORE DIMENTICANTE

E' noto che a ogni V-categoria X è possibile associare una (ordinaria) categoria sottostante X' con gli stessi oggetti di X, assumendo come insieme dei morfismi

$X'(a,b) = \{k \longrightarrow X(a,b)\}$

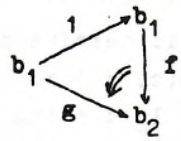
essendo k l'unità del prodotto tensoriale in V.

Anche questo funtore dimenticante si estende in maniera naturale alle B-categorie. A questo scopo occorre osservare che esiste un funtore canonico di bicategorie da ogni bicategoria B alla categoria (monoidale con x) degli insiemi, considerata come bicategoria con un solo oggetto.

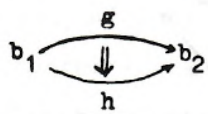
Proposizione. Sia B una bicategoria e sia S la bicategoria (con un solo oggetto) degli insiemi dotata del prodotto cartesiano. La corrispondenza che associa a ogni oggetto b di B l'unico oggetto di S, a ogni 1-cella

$$b_1 \xrightarrow{\ g\ } b_2$$

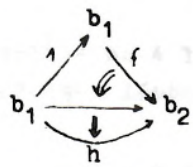
l'insieme delle coppie (f, τ) come nel diagramma seguente



e a ogni 2-cella



l'applicazione insiemistica che porta (f, τ) nel "pasting"



è un funtore di bicategorie $B \xrightarrow{F} S$.

Dimostrazione. Le 2-celle canoniche $1_{Fa} \longrightarrow F(1_a)$ e $Fg \cdot Fh \longrightarrow F(g \cdot h)$ sono rispettivamente l'applicazione che porta il singleton nella coppia (1,1) e nell'applicazione insiemistica che associa alle coppie (f, τ) e (f', τ') il loro pasting $(ff', \tau \cdot \tau')$. Le verifiche sono immediate.

In base alla proposizione precedente e grazie alla proprietà che permette di trasportare le nozioni B-categoriali in equivalenti B'-categoriali in presenza di un funtore di bicategorie $B \longrightarrow B'$ (pag. 3), il funtore F permette di associare a ogni B-categoria una (ordinaria) categoria con gli stessi oggetti.

Una diretta descrizione della categoria sottostante è quella che segue:

X' ha gli stessi oggetti di X, inoltre

$$X'(a,b) = \{(f, \tau) \mid \tau : f \longrightarrow X(a,b)\}.$$

L'identità in $X'(a,a)$ è data dalla coppia $(1, \eta)$, dove $\eta : 1 \longrightarrow X(a,a)$ è l'identità di X. Analogamente la composizione delle frecce $\tau : f \longrightarrow X(a,b)$ e $\tau : f' \longrightarrow X(b,c)$ è data da

$$f \cdot f' \xrightarrow{\tau \cdot \tau'} X(a,b) \cdot X(b,c) \xrightarrow{\mu} X(a,c)$$

dove l'ultimo passaggio è la composizione in X.

E' facile verificare che se B ha soltanto un oggetto, il funtore F coincide con l'usuale $V \longrightarrow S$ e quindi il passaggio appena descritto è quello dell'usuale funtore dimenticante $V\text{-cat} \longrightarrow \text{cat}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Bénabou, Introduction to bicategories, in "Reports of the Midwest Category Seminar", Lec. Notes in Math. 47, Springer, 1967, p. 1-77.

[2] R. Betti, Automi e categorie chiuse, Boll. Un. Mat. Italiana, (5), 17-B (1980), p.44-58.

[3] R. Betti, Applicazioni delle categorie chiuse alla logica quantitativa, Quaderno 44/S, Ist. Mat. Università di Milano, marzo 1980.

[4] R. Betti, A. Carboni, Cauchy-Completion and the Associated sheaf, manoscritto sottoposto per pubblicazione.

[5] R. Betti, R.F.C. Walters, Categories based on a bicategory, in preparazione.

[6] M.G. Kelly, R. Street, Review of the elements of 2-categories, in "Category Seminar", Lec. Notes in Math. 420, Springer, 1974, p. 75-103.

[7] F.W. Lawvere, Metric Spaces, Generalized Logic, and Closed Categories, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, (43), 1973, p. 135-166.

[8] R. Street, Elementary Cosmoi, in "Category Seminar", Lec. Notes in Math. 420, Springer, 1974, p. 134-180.

[9] R.F.C. Walters, Sheaves on Sites as Cauchy-Complete Categories, in corso di stampa su "Journal of Pure and Applied Algebra".