UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO

Renato Betti

ALCUNE PROPRIETA' DELLE CATEGORIE BASATE SU UNA BICATEGORIA

QUADERNO 28/S(II) 1982

Istituto Matematico „F. Enriques„ - Via C. Saldini 50, 20133 MILANO

Summary. In this paper we show how a part of classical category theory can be developed also in the frame of base bicategories. For sake of simplicity we assume that the base is locally partially ordered. The aspects considered are: controvariant functors into the base, colimitis indexed by bimodules and left Kan extensions. Main properties are studied and examples given.

Introduzione. In questo lavoro si prosegue lo studio iniziato in [1], relativo alla teoria generale delle categorie basate su una bicategoria. A [1] si fà esplicito ricorso per la terminologia e le notazioni. Si tratta di uno sviluppo del programma generale indicato da Lawvere [5] secondo il quale "le strutture fondamentali della matematica sono esse stesse categorie". Assumere come base le bicategorie corrisponde a una generalizzazione della teoria delle categorie al proprio interno.

Questa generalizzazione sta fornendo applicazioni in vari campi. Ai risultati iniziali sulla teoria dei fasci (Walters [8] e [9], Betti, Carboni [2]) si sono aggiunte recentemente altre proprietà ed altre nozioni: in particolare in [4] si studia il problema della simmetria del completamento secondo Cauchy e in [3] si introduce una nozione di topologia nella base, che generalizza quella di basi del tipo Rel C (si veda [2], [9]); Kasangian e Walters considerano i processi astratti di incollamento di dati come la costruzione di B-categorie.

Nei lavori citati la base è (per comodità e per evitare inutili generalizzazioni) una bicategoria che localmente è un preordine, di modo che le 2-celle si riducono a $\leq$. Alla teoria generale si è rivolto in seguito Street [6], considerando un altro caso rilevante di B-categoria, utile nella costruzione della coomologia non abeliana: quello degli "stack", preparato anche da alcune considerazioni di Walters. Ulteriori esempi in cui la bicategoria di base non è localmente un preordine sono in sviluppo: con Carboni, Street e Walters sono state rappresentate le fibrazioni come categorie basate su una bicategoria, Carboni ha iniziato recentemente uno studio degli aspetti logici delle B-categorie, mettendo in evidenza l'universalità del passaggio da B ai "B-spazi" (= categoria delle B-categorie complete nel senso di Cauchy).

In questo lavoro si torna al caso dei preordini locali, pur consci che gli argomenti trattati funzionano bene anche nel caso generale (e una parte è già stata sviluppata da Street [6]). L'accento è più su "quanta" parte della teoria classica si estende che sulla "tecnica" dell'estensione.

In particolare si introduce la categoria $B^{C^{op}}$ dei funtori controvarianti nella base e la nozione di cocompletezza per le B-categorie. Le proprietà

che si dimostrano sono quelle attese: relative all'immmersione di Yoneda e all'estensione di Kan di funtori $C \longrightarrow X$ lungo l'immersione di Yoneda e quando X è cocompleta. Inoltre si dimostra che, quando $B^{C^{op}}$ è piccola, allora è totale (nel senso di Street, Walters [7]), vale a dire l'immersione di Yoneda ha un aggiunto sinistro.

Nel seguito si suppone che la base B sia localmente un preordine completo e cocompleto,tale che le somme siano conservate per composizione. Inoltre si suppone che, come bicategoria, B sia chiusa, cioè dotata di estensioni destre di Kan. Il supporto di ogni B-categoria è denotato, senza ambiguità, sempre con e.

1. Immersione di Yoneda per le B-categorie

Def. Sia C una B-categoria piccola, cioè tale che sia piccolo l'insieme degli oggetti che hanno lo stesso supporto. Un funtore controvariante da C alla base B associa ad ogni oggetto x di C una freccia $Fx: ex \longrightarrow a$ ($a=a_F$ dipende da F ma non da x) in modo tale che valga

$$C(y,x)\cdot Fx \leq Fy$$

per ogni coppia di oggetti x e y in C.

La definizione precedente si motiva considerando la corrispondenza biunivoca

$$\frac{X(y,x)\cdot Fx \leq Fy}{X(y,x) \leq B^a(Fx,Fy)}$$

dove B^a denota, quando esiste, il lifting destro in B di frecce con uguale codominio a (si osservi che in tale caso B^a definisce una struttura di B^{op}-categoria in tale insieme di frecce). In questo modo, quando B^a esiste, un funtore controvariante da C a B è un (usuale) B-funtore $C \longrightarrow B^a$.

Una definizione equivalente di funtore controvariante nella base si ottiene assegnado F come bimodulo $C \longrightarrow \hat{a}$, dove $\hat{a}$ denota la B-categoria con un solo oggetto avente come supporto a.

I funtori controvarianti da C a B costituiscono una B-categoria (che denotiamo $B^{C^{op}}$) quando si assuma:

i) $eF = a_F$,

ii) $B^{C^{op}}(F,G) = \prod_c B_{ec}(Fc,Gc)$

(qui B_{ec} denota l'estensione destra di Kan in B), e la definizione stessa di funtore controvariante da C nella base garantisce che assegnare un B-funtore $\hat{a} \longrightarrow B^{C^{op}}$, cioè un oggetto di $B^{C^{op}}$ con supporto a, equivale ad assegnare un bimodulo $C \nrightarrow \hat{a}$. Più in generale si ha che tutti i B-funtori verso $B^{C^{op}}$ classificano i bimoduli.

Proposizione. I B-funtori $D \longrightarrow B^{C^{op}}$ sono in corrispondenza biunivoca coi bimoduli $C \nrightarrow D$.

Dim. Al B-funtore $F: D \longrightarrow B^{C^{op}}$ si associa il bimodulo $\Phi: C \nrightarrow D$ dato da $\Phi(c,d) = Fd(c): ec \longrightarrow a$, e viceversa. La funtorialità di F e la proprietà universale di B_{ec} sono corrispondenti delle proprietà di bimodulo per Φ.

Per ogni B-categoria piccola C l'immersione di Yoneda è data dal B-funtore pieno e fedele $Y: C \longrightarrow B^{C^{op}}$ dato da $c \longmapsto C(-,c)$.

Proposizione. La corrispondenza $C \longmapsto B^{C^{op}}$ si estende a un funtore di B-categorie. Y è la componente di una B-trasformazione naturale.

Dim. Se $F: C \longrightarrow D$ è un B-funtore, allora $\overline{F}: B^{D^{op}} \longrightarrow B^{C^{op}}$ è definito nella seguente maniera: $\overline{F}H(c) = H_{Fc}$ per ogni funtore controvariante H da D a B e per ogni oggetto c di C.

Verifichiamo la funtorialità della corrispondenza $F \longmapsto \overline{F}$; sia $\tau: 1_{ec} \leq D(gc,fc)$ una B-trasformazione naturale $G \longrightarrow F$, allora si determina $\overline{\tau}: \overline{F} \longrightarrow \overline{G}$; le componenti $1_{a_H} \leq B^{C^{op}}(\overline{FH},\overline{GH})$ di $\overline{\tau}$ sono date come segue: per ogni oggetto H di $B^{D^{op}}$ e per ogni oggetto c di C, si ha

$$H_{Fc} \leq D(gc,fc) \cdot H_{Fc} \leq H_{Gc}$$

perchè H è un funtore controvariante di D. Per aggiunzione si ottiene

$$1_{a_H} \leq B_{ec}(H_{Fc}, H_{Gc})$$

e quindi

$$1_{a_H} \leq \prod_c B_{ec}(H_{Fc}, H_{Gc}) = B^{C^{op}}(\overline{FH},\overline{GH}).$$

La funtorialità di Y segue da un calcolo analogo.

Proposizione (Lemma di Yoneda).

$$B^{C^{op}}(C(-,c),F) \simeq Fc.$$

Dim. Per definizione

$$B^{C^{op}}(C(-,c),F) = \prod_d B_{ed}(C(d,c),Fd)$$

e basta considerare il fattore relativo a d=c per avere (componendo con l'unità di C)

$$B^{C^{op}}(C(-,c),F) \leq B_{ec}(C(c,c),Fc) \leq Fc.$$

Viceversa si ha:

$$C(d,c)\cdot Fc \leq Fd$$

perchè F è un funtore controvariante nella base. Quindi:

$$Fc \leq \prod_d B_{ed}(C(d,c),Fd).$$

Proposizione. Per ogni funtore controvariante nella base e per ogni oggetto di C vale la seguente formula di rappresentabilità:

$$Fc = \sum_d C(c,d)\cdot Fd.$$

Dim. Vale sempre $\geq$ perchè F è un funtore. Viceversa basta prendere l'addendo relativo a d=c.

2. Cocompletezza

Def. La B-categoria X si dice cocompleta se per ogni famiglia $\{x_i\}$ di oggetti con lo stesso supporto esiste un oggetto Σx_i per cui si ha:

$$X(\Sigma x_i, y) = \prod_i X(x_i, y)$$

per ogni y, ed inoltre tale che il B-funtore $X(x,-): X \longrightarrow B_{ex}$ abbia un aggiunto destro $x \otimes - : B_{ex} \longrightarrow X$ per ogni x.

Nella definizione precedente l'aggiunzione va intesa nel senso delle B-categorie, e può essere rappresentata come segue:

$$X(x \otimes f, y) = B_{ex}(f, X(x,y))$$

per ogni freccia f in B con dominio ex.

Lemma. Se X è una B-categoria cocompleta, allora si ha:

i) $1 \leq X(x_i, \Sigma x_i)$,

ii) $b \leq X(x, x \otimes b)$

per ogni famiglia di oggetti $\{x_i\}$ e per ogni freccia b di B.

Dim. i) si ottiene da $X(\Sigma x_i, y) = \prod_I X(x_i, y)$ ponendo $y = \Sigma x_i$. ii) si ottiene da $X(x \otimes b, y) = B_{ex}(b, X(x,y))$ ponendo $y = x \otimes b$.

Lemma. i) se $b \leq b'$ allora per ogni x per cui ha senso vale

$$1 \leq X(x \otimes b, x \otimes b').$$

ii) Se vale $1 \leq X(x,x')$, allora per ogni b per cui ha senso vale

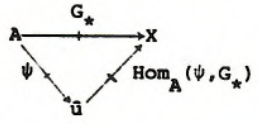
$$1 \leq X(x \otimes b, x \otimes b').$$

Dim. i) si ottiene dalla seconda proprietà del lemma precedente e dall'ipotesi: $b \leq b' \leq X(x, x \otimes b')$ e quindi $1 \leq B_{ex}(b, X(x, x \otimes b') \leq X(x \otimes b, x \otimes b')$.

Per ii) si ha $X(x \otimes b, x' \otimes b) = B_{ex}(b, X(x, x' \otimes b)$ e dunque basta dimostrare che vale $b \leq X(x, x' \otimes b)$. Infatti dalla seconda proprietà del lemma precedente e dall'ipotesi si ha:

$$b \leq X(x', x' \otimes b) \leq X(x,x') \cdot X(x', x' \otimes b) \leq X(x, x' \otimes b).$$

Si supponga che X sia cocompleta e siano dati un funtore $G: A \longrightarrow X$ e un bimodulo $\psi : A \longrightarrow \hat{u}$. Nella categoria dei bimoduli fra B-categorie, l'estensione destra di Kan $\mathrm{Hom}_A(\psi, G_*)$ è allora rappresentabile. L'oggetto che rappresenta $\mathrm{Hom}_A(\psi, G_*)$ è $\Sigma Ga \otimes \psi a$.



Infatti si dimostra (si veda [1]) che il bimodulo $\mathrm{Hom}_A(\psi, G_*)$ è definito su ogni oggetto dalla formula:

$$\mathrm{Hom}_A(\psi, G_*)y = \prod_a B_{ea}(\psi a, G_* a) = \prod_a B_{ea}(\psi a, X(Ga, y)).$$

Si ha dunque:

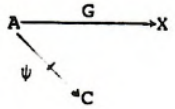
$$\mathrm{Hom}_A(\psi, G_*)y = \prod_a X(Ga \otimes \psi a, y) = X(\Sigma Ga \otimes \psi a, y).$$

Si ricordi che i bimoduli $A \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \hat{u}$ costituiscono gli oggetti di supporto u nella bicategoria $B^{A^{op}}$, in cui l'hom è dato proprio dalle estensioni destre di Kan. Quando X è cocompleta si ha dunque:

$$X(\mathrm{colim}(\psi, G), y) = B^{A^{op}}(\psi, X(G-, y))$$

come nel caso consueto delle basi monoidali.

Def. Dato il diagramma



il colimite di G indiciato da ψ ,se esiste, è un B-funtore $\psi*G$ che rappresenta $\mathrm{Hom}_A(\psi,G_*)$, cioè tale che $(\psi*G)_*=\mathrm{Hom}_A(\psi,G_*)$.

Teorema. X è una B-categoria cocompleta esattamente quando ammette tutti i colimiti $\psi*G$ indiciati da bimoduli.

Dim. Se X è cocompleta, il teorema è già stato dimostrato rispetto ai bimoduli del tipo $A\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\tilde{u}$ Consideriamo ora il caso più generale $\psi: A\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow C$. Per ogni oggetto c di C, esiste il colimite $\psi(-,c)*G$ e vale $\Sigma Ga \otimes \psi(a,c)$. Si dimostra che la corrispondenza $c\longrightarrow\psi(-,c)*G$ si estende a un B-funtore $\psi*G: C\longrightarrow X$ il quale inoltre rappresenta $\mathrm{Hom}_A(\psi,G_*)$.

Occorre mostrare che vale:

$$C(c,d) \leq X(\textstyle\sum_a Ga \otimes \psi(a,c),\ \sum_b Gb \otimes \psi(b,d)).$$

Cioè occorre dimostrare che, per ogni a, si ha:

$$C(c,d) \leq B_{ea}(\psi(a,c), X(Ga, \textstyle\sum Gb \otimes \psi(b,d))$$

ovvero:

$$\psi(a,c)\cdot C(c,d) \leq X(Ga, \textstyle\sum Gb \otimes \psi(b,d)).$$

Per questo è sufficiente mostrare che vale:

$$\psi(a,d) \leq X(Ga, \textstyle\sum_b Gb \otimes \psi(b,d)).$$

Infatti, utilizzando i lemmi precedenti, si ha

$$\begin{aligned}\psi(a,d) &\leq X(Ga, Ga \otimes \psi(a,d)) \leq \\ &\leq X(Ga, Ga \otimes \psi(a,d))\cdot X(Ga \otimes \psi(a,d), \textstyle\sum_b Gb \otimes \psi(b,d)) \leq \\ &\leq X(Ga, \textstyle\sum_b Gb \otimes \psi(b,d)).\end{aligned}$$

Dimostriamo ora che il B-funtore $\psi*G$ rappresenta $\mathrm{Hom}_A(\psi,G_*)$:

$$\begin{aligned}(\psi*G)_*(c,x) &= X(\textstyle\sum_a Ga \otimes \psi(a,c), x) \simeq \prod_a X(Ga \otimes \psi(a,c), x) \simeq \\ &\simeq \textstyle\prod_a B_{ea}(\psi(a,c), X(Ga,x)) = \mathrm{Hom}_A(\psi,G_*)(c,x).\end{aligned}$$

Viceversa, perchè X sia cocompleta, in base alla definfzione, è sufficiente che ammetta i colimiti indiciati da bimoduli del tipo $0\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\tilde{u}$ (che forniscono il $\otimes$) e da bimoduli $A\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\tilde{u}$ tali che $\psi a=1_u$ per ogni a (che forniscono le somme; si osservi a questo proposito che $x \otimes 1 \simeq x$ nel senso delle B-categorie).

Dimostriamo ora la cocompletezza di alcune B-categorie.

Proposizione. Per ogni oggetto u della base la B-categoria B_u delle frecce che hanno dominio u è cocompleta.

Dim. Se $x_i : u \longrightarrow v$ è una famiglia di oggetti di B_u con uguale supporto v, il sup Σx_i soddisfa la proprietà corrispondente del colimite. L'altra proprietà si riduce a quella dell'estensione destra di Kan in B pur di prendere come tensore la composizione:

$$x \otimes b = x \cdot b.$$

Proposizione. $B^{C^{op}}$ è una B-categoria cocompleta.

Dim. Se $\{T_i\}$ è una famiglia di oggetti di $B^{C^{op}}$ tali che $eT_i = d$ per ogni i, si pone:

$$(\Sigma T_i)x = \Sigma (T_i x) : ex \longrightarrow d.$$

Si verifica facilmente che ΣT_i è un funtore controvariante nella base. Inoltre, applicando la proposizione precedente, si ottiene:

$$B^{C^{op}}(\Sigma T_i, S) = \prod_x B_{ex}(\Sigma (T_i x), Sx) \simeq \prod_i \prod_x B_{ex}(T_i x, Sx)$$
$$\simeq \prod_i B^{C^{op}}(T_i, S).$$

Si ha anche che il funtore

$$B^{C^{op}}(T, -) : B^{C^{op}} \longrightarrow B_d$$

ammette come aggiunto il funtore $T \otimes -$ dato nella seguente maniera: per ogni oggetto s in B_d, $T \otimes s$ è il funtore controvariante nella base che vale

$$(T \otimes s)x = Tx \cdot s : ex \longrightarrow d \longrightarrow d'.$$

La verifica che $T \otimes s$ è un funtore controvariante nella base è un semplice calcolo. Verifichiamo la funtorialità di $T \otimes -$:

$$B_d(s, s') \leq B_{ex}((T \otimes s)x, (T \otimes s')x) = B_{ex}(Tx \cdot s, Tx \cdot s')$$

vale per ogni x, e dunque

$$B_d(s, s') \leq B^{C^{op}}(T \otimes s, T \otimes s').$$

Rimane da verificare l'aggiunzione:

$$B_d(s, Nat(T, F)) \simeq B^{C^{op}}(T \otimes s, F).$$

Infatti dalla proposizione precedente si ha:

$$B_d(s, \prod_x B_{ex}(Tx, Fx)) \simeq \prod_x B_{ex}(Tx \cdot s, Fx)$$
$$\simeq \prod_x B_d(s, B_{ex}(Tx, Fx)).$$

Per ogni fattore del prodotto si ha una freccia

$$s \cdot B_d(s, B_{ex}(Tx,Fx)) \longrightarrow B_{ex}(Tx,Fx)$$

dunque complessivamente una sola freccia

$$s \cdot \prod_x B_d(s, B_{ex}(Tx,Fx)) \longrightarrow \prod_x B_{ex}(Tx,Fx)$$

vale a dire $\prod_x B_d(s, B_{ex}(Tx,Fx)) \longrightarrow B_d(s, B_{ex}(Tx,Fx))$.

Il viceversa è analogo,

Quando $B^{C^{op}}$ è una categoria piccola vale la seguente proprietà:

Teorema. $B^{C^{op}}$ è una categoria totale, vale a dire la sua immersione di Yoneda ha un aggiunto sinistro.

Dim. Sia $X=B^{C^{op}}$ e si consideri un oggetto F di $B^{X^{op}}$. Allora, per ogni oggetto x di X si hanno le componenti $Fx: ex \longrightarrow a_F$. A sua volta x avrà componenti rispetto ad ogni oggetto c di C:

$$x_c : ec \longrightarrow a_x = ex.$$

Ad F si associa il funtore controvariante nella base F' dato da $F'c = \sum_x x_c \cdot Fx$. Considerando che X è cocompleta e tenendo presente le formule della proposizione precedente, si ha:

$$F' = \int^x x \otimes Fx.$$

Verifichiamo che la corrispondenza $F \longrightarrow F'$ definisce un B-funtore $B^{X^{op}} \longrightarrow X$. A questo scopo occorre verificare che vale:

$$B^{X^{op}}(F,G) = \prod_x B_{ex}(Fx,Gx) \leq \prod_c B_{ec}(F'c,G'c)$$

ed è sufficiente verificare che per ogni c esiste un x tale che valga:

$$B_{ex}(Fx,Gx) \leq B_{ec}(F'c,G'c).$$

Si consideri $x=C(-,c)$. Si ha ex=ec ed inoltre:

$$F'c \cdot B_{ec}(F(C(-,c)), G(C(-,c)) \leq G'c.$$

Infatti: $\sum_x x_c \cdot Fx \cdot B_{ec}(F(C(-,c), G(C(-,c)) =$ per il lemma di Yoneda

$= \sum_x X(C(-,c),x) \cdot Fx \cdot B_{ex}(F(C(-,c), G(C(-,c)) =$ per la rappresentabilità

$= F(C(-,c)) \cdot B_{ex}(F(C(-,c), G(C(-,c)) \leq G(C(-,c)) =$

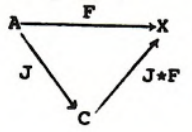
$= \sum_x X(C(-,c),x) \cdot Gx = G'c.$

La verifica dell'aggiunzione è immediata:

$$X(F',x') = X(\int^x x \otimes Fx, x') \simeq \prod_x X(x \otimes Fx, x')$$
$$\simeq \prod_x B_{ex}(Fx, X(x,x')) \simeq B^{X^{op}}(F, X(-,x')).$$

3. Estensioni sinistre di Kan e colimiti

In questo paragrafo si suppone che X sia una B-categoria cocompleta. Allora in particolare X ammette i colimiti indiciati da funtori. In base al teorema del paragrafo precedente relativo ai colimiti, se $J: A \longrightarrow C$ è un B-funtore, il colimite J*F si può descrivere nella seguente maniera:



$$(J*F)c \simeq \int^a Fa \otimes C(Ja,c).$$

Come nel caso delle basi monoidali, il colimite può anche essere ottenuto in termini di estensioni sinistre di Kan.

Proposizione. J*F è l'estensione sinistra di Kan di F lungo il funtore J:

$$J*F = \mathrm{Lan}_J F.$$

Dim. Cominciamo col determinare una B-trasformazione naturale $\tau: F \longrightarrow J(J*F)$:

$$1 \leq X(Fa, Fa \otimes C(Ja,Ja)) \leq$$
$$\leq X(Fa, Fa \otimes C(Ja,Ja)) \cdot X(Fa \otimes C(Ja,Ja), \int^b Fb \otimes C(Jb,Ja)) \leq$$
$$\leq X(Fa, \int^b Fb \otimes C(Jb,Ja)).$$

Verifichiamo che la B-trasformazione τ è universale: sia data

$$\sigma: 1 \leq X(Fa, G(Ja)),$$

allora si ha

$$X(\int^b Fb \otimes C(Jb,Ja), G(Ja)) \simeq \prod_b B_{eb}(C(Jb,Ja), X(Fb,G(Ja)))$$

e dunque basta mostrare che vale

$$C(Jb,Ja) \leq X(Fb,G(Ja)).$$

Infatti:
$$C(Jb,Ja) \leq X(G(Jb),G(Ja)) \leq$$
$$\leq X(Fb,G(Jb)) \cdot X(G(Jb),G(Ja)) \leq X(Fb,G(Ja)).$$

Dopo questa proposizione, è facile verificare che, come nel caso classico, quando J è pieno e fedele, la B-trasformazione naturale τ è un isomorfismo: $F \simeq J(J*F)$.

Infatti:

$$J(J*F)a = \int^{b} Fb \otimes C(Jb,Ja) = \int^{b} Fb \otimes A(b,a) = Fa.$$

Quando si assuma per J l'immersione di Yoneda $A \longrightarrow B^{A^{op}}$, l'estensione $Lan_Y F$ assume la forma:

$$(Lan_Y F)T = \int^{a} Fa \otimes Ta,$$

essendo T un funtore controvariante da A nella base.

Teorema. I B-funtori $A \longrightarrow X$ sono in corrispondenza biunivoca con i B-funtori $X \longrightarrow B^{A^{op}}$ che sono aggiunti destri.

Dim. Dato il B-funtore $F: A \longrightarrow X$, si dimostra che $Lan_Y F$ ammette come aggiunto destro $F_+ : X \longrightarrow B^{A^{op}}$ dato da $(F_+ x)a = X(Fa,x)$.

Infatti, si verifica facilmente quanto segue: 1) $F_+ x$ è un funtore controvariante nella base:

$$A(b,a) \cdot (F_+ x)a = A(b,a) \cdot X(Fa,x) \leq X(Fb,Fa) \cdot X(Fa,x) \leq$$

$$\leq X(Fb,x) = (F x)b.$$

2) $F_+ : X \longrightarrow B^{A^{op}}$ è un B-funtore:

$$X(x,y) \leq B^{A^{op}}(F_+ x, F_+ y) = \prod_a B_{ea}(X(Fa,x), X(Fa,y))$$

poichè, per ogni a, si ha:

$$X(Fa,x) \cdot X(x,y) \leq X(Fa,y).$$

3) F_+ è aggiunto destro a $Lan_Y F$:

$$B^{A^{op}}(T, F_+ x) = \prod_a B_{ea}(Ta, X(Fa,x)) = \prod_a X(Fa \otimes Ta, x)$$

$$= X(\int^{a} Fa \otimes Ta, x) = X((Lan_Y F)T, x).$$

Viceversa, a ogni funtore $G: X \longrightarrow B^{A^{op}}$ che ammetta un aggiunto sinistro G^+, si associa il B-funtore F ottenuto dalla composizione $Y \cdot G^+$. E' facile verificare allora che $F_+ \simeq G$; infatti:

$$(F_+ x)a = X(G^+(Ya), x) \simeq X(A(-,a), Gx) \simeq (Gx)a.$$

Bibliografia

[1] R. Betti, Bicategorie di base, Quaderno 2/S (II), Ist. Mat. Univ. di Milano, 1981.

[2] R. Betti, A. Carboni, Cauchy-completion and the associated sheaf, in corso di stampa su "Cahiers de top. et de géom. diff." (1982).

[3] R. Betti, A. Carboni, A notion of topology for bicategories, in corso di stampa su "Cahiers de top. et de géom. diff." (1983).

[4] R. Betti, R.F.C. Walters, The symmetry of the Cauchy-completion of a category, in corso di stampa su "Proc. of the Gummersbach Conf. on Categories" (1981).

[4] F.W.Lawvere, Metric Spaces, Generalized Logic, and Closed Categories, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, XLIII (1973), p. 135-166.

[6] R. Street, Enriched Categories and Cohomology, in corso di stampa su "Quaestiones Mathematicae",(1982).

[7] R. Street, R.F.C. Walters, Yoneda Structures on 2-categories, J. of Algebra, 50 (1978), p. 350-379.

[8] R.F.C. Walters, Sheaves and Cauchy-complete categories, "Cahiers de Top. et de géom. diff.", XXII-3 (1981), p. 283-286.

[9] R.F.C. Walters, Sheaves on sites as Cauchy-complete categories,"J. of Pure and App. Algebra", 24 (1982), p. 95-102.