QUELQUES POINTS ESSENTIELS DE LA MÉTAMATHÉMATIQUE

PAR

P. BERNAYS (Zurich).

---

1. — Une application du théorème fondamental de Herbrand à l'axiomatique.

L'axiomatique usuelle s'appuie sur l'arithmétique qu'elle envisage comme appartenant, pour ainsi dire, à la logique.

Les démonstrations de non-contradiction que l'on a données pour les systèmes axiomatiques de la géométrie et de la physique consistent à montrer qu'une contradiction dans l'un de ces systèmes devrait entraîner une contradiction dans l'arithmétique.

Cette réduction à l'arithmétique ayant été déjà faite, M. HILBERT concentrait, dans la théorie de la démonstration, son effort à démontrer, de son point de vue fini, la non-contradiction de l'arithmétique.

Mais puisque pour le moment ce problème n'est pas encore résolu, la question se pose s'il est nécessaire pour l'axiomatique, en particulier celle de la géométrie élémentaire, de démontrer la non-contradiction de l'arithmétique, soit dans le sens de l'analyse infinitésimale ou du moins dans le sens de la théorie axiomatique des nombres.

La question se pose d'autant plus que le modèle arithmétique de la géométrie euclidienne peut être donné dans le cadre de la théorie des nombres algébriques, — du moins quand on fait abstraction du deuxième axiome de continuité qui n'est pas employé

dans la géométrie élémentaire. On peut même se restreindre à ces nombres qu'on obtient en adjoignant aux quatre opérations élémentaires du calcul celle de prendre la racine carrée d'un nombre positif.

Cette partie de l'arithmétique peut être traitée directement selon les exigences du point de vue fini.

En constatant ce fait, on est tenté de croire que le problème de la non-contradiction de la géométrie élémentaire axiomatique est déjà résolu, puisque le modèle arithmétique appartient au domaine de la mathématique intuitive.

Mais il faut considérer que, de l'interprétation intuitive des axiomes, il ne dérive pas sans autre une interprétation pareille des démonstrations. En effet, les démonstrations de la géométrie axiomatique s'appuient sur la supposition que les points, de même que les droites et les plans, forment des ensembles complets fermés. En vertu de cette supposition, les affirmations concernant l'existence d'un point (d'une droite, d'un plan) d'une certaine propriété ont un sens immédiat, et le *tertium non datur* est généralement valable; on peut donc appliquer les raisonnements de la logique classique formalisés par le calcul logique ordinaire.

Cette supposition de la totalité, que la géométrie axiomatique fait pour les domaines d'individus, n'est pas contenue dans l'interprétation arithmétique intuitive. Aussi cette interprétation ne nous permet pas de vérifier toutes les démonstrations de la géométrie axiomatique, et nous ne pouvons donc pas au moyen d'elle nous assurer immédiatement que la géométrie axiomatique est non-contradictoire.

Cependant on peut surmonter cette difficulté à l'aide d'un théorème logique de J. HERBRAND.

Pour expliquer cette méthode, nous considérons, au lieu des axiomes de la géométrie, un système d'axiomes plus simple se rapportant à un seul domaine d'individus et un seul prédicat Φ à deux sujets (fonction logique binaire). Les axiomes sont les suivants:

1) $\Phi(x, x)$ n'est valable pour aucun x.
2) Si $\Phi(x, y)$ et $\Phi(y, z)$, alors $\Phi(x, z)$.
3) Pour chaque x il existe au moins un y tel que $\Phi(x, y)$.

On voit d'abord que ces axiomes ne peuvent être remplis pour un domaine fini d'individus. D'autre part, on obtient une interprétation des axiomes pour le domaine des nombres entiers en prenant pour $\Phi(x, y)$ le prédicat $x < y$. C'est une interprétation intuitive; en particulier l'affirmation existentielle peut être précisée en la remplaçant par l'inégalité $x < x + 1$, valable pour tous les x.

De cette interprétation ne découle pas immédiatement l'impossibilité d'une contradiction déduite des trois axiomes par les raisonnements de la logique classique. Nous allons montrer comment cette impossibilité, du moins pour la logique du premier ordre, résulte du dit théorème de Herbrand [1].

Pour cela il faut introduire les symboles logiques:

&	« et »,	signe de la conjonction.
$\overline{}$	« non »,	» » » négation.
$\longrightarrow$	« si — alors »	» » l'implication.
$\vee$	« ou bien »,	» » la disjonction.
(x)	« pour chaque x »,	» » » généralité.
$(\mathrm{E}x)$	« pour quelque x »,	» » l'existence.

Au moyen de ces signes on représente les trois axiomes considérés par les formules

1) $(x)\,\overline{\Phi(x, x)}$.
2) $(x)\,(y)\,(z)\,(\Phi(x, y)\ \&\ \Phi(y, z) \longrightarrow \Phi(x, z))$.
3) $(x)\,(\mathrm{E}y)\,\Phi(x, y)$.

En joignant les trois formules par la conjonction, nous obtenons une seule formule $\mathfrak{A}(\Phi)$ représentant le système des axiomes 1), 2), 3).

Si ce système d'axiomes entraînait une contradiction par les raisonnements de la logique classique s'exprimant dans le calcul logique ordinaire, alors la formule $\mathfrak{A}(\Phi)$ (négation de $\mathfrak{A}(\Phi)$) serait déductible par le calcul logique, sans l'emploi d'un axiome; de la même manière on pourrait déduire la formule $\overline{\mathfrak{A}(\mathrm{P})}$ avec une variable P à deux arguments représentant un prédicat quelconque à deux sujets.

---

[1] Dans ce cas simple, qui nous sert ici seulement d'exemple, on pourrait aboutir au même résultat par une méthode plus directe.

Or $\mathfrak{A}(P)$ étant la formule

$$(x)\ \overline{P(x, x)}\ \&\ (x)(y)(z)(P(x, y)\ \&\ P(y, z) \longrightarrow P(x, z))$$
$$\&\ (x)(Ey)\,P(x, y)$$

sa négation se transforme, d'après les règles du calcul logique, en

$$(Ex)\,P(x, x)\ \vee\ (Ex)(Ey)(Ez)(P(x, y)\ \&\ P(y, z)\ \&\ P(x, z))$$
$$\vee\ (Ex)(y)\,\overline{P(x, y)}$$

et encore en

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\{P(x, x)\ \vee\ (P(x, y)\ \&\ P(y, z)$$
$$\&\ \overline{P(x, z)})\ \vee\ \overline{(P(x, u)}\}\ .$$

Cette formule, que nous dénoterons d'une manière abrégée par

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\quad \mathfrak{B}(x, y, z, u)\ ,$$

devrait donc être déductible par le calcul logique ordinaire, si on pouvait déduire une contradiction des axiomes 1), 2), 3).

A cette conséquence s'adjoint l'application du théorème de Herbrand. Ce théorème nous apprend que d'une déduction de la formule

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\quad \mathfrak{B}(x, y, z, u)$$

on obtiendrait (par un certain procédé qu'il n'importe d'indiquer ici) une disjonction

$$\mathfrak{B}(a_1, b_1, c_1, d_1)\ \vee\ \mathfrak{B}(a_2, b_2, c_2, d_2)\ \vee\ \quad\quad \vee\ \mathfrak{B}(a_r, b_r, c_r, d_r)$$

ayant les propriétés suivantes:

1. Les arguments dénotés par

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \ \ldots\ a_r, b_r, c_r, d_r$$

sont des variables, entre lesquelles des égalités peuvent avoir lieu; cependant d_i doit être différent de a_i, b_i, c_i et aussi de a_h, b_h, c_h, d_h pour $h < i$.

2. Appelons les diverses expressions $P(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, desquelles la formule est composée (au moyen de la conjonction, de la dis-

jonction et de la négation), les « composants » de la formule; attribuons à chaque composant d'une manière quelconque une des valeurs v (« vrai »), f (« faux »); de plus donnons

à $\overline{v}$ la valeur f,
à $\overline{f}$ la valeur v,
à $v \,\&\, f$, $f \,\&\, v$, $f \,\&\, f$ la valeur f,
à $v \,\&\, v$ la valeur v,
à $v \vee v$, $v \vee f$, $f \vee v$ la valeur v,
à $f \vee f$ la valeur f.

Nous obtenons alors la valeur v.

Mais une telle disjonction ne peut pas exister. Cela découle de notre modèle intuitif. En effet, étant donné une formule

$$\mathfrak{B}(a_1, b_1, c_1, d_1) \quad \vee \ \ldots \ \vee \quad \mathfrak{B}(a_r, b_r, c_r, d_r)$$

des dites propriétés 1., 2., nous pourrions remplacer chacune des variables

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \ \ldots\ , a_r, b_r, c_r, d_r,$$

en conservant les égalités, par des numéros de telle sorte que (pour $i = 1, 2, \ldots, r$) a_i, d_i soient remplacés par des numéros consécutifs (ce qui est possible en vertu de la propriété 1.); attribuons ensuite à chacun des composants ainsi modifiés $\mathrm{P}(k, l)$ la valeur v pour $k < l$ et la valeur f pour $l \leqq k$; alors on aurait pour chaque membre de la disjonction — comme on le voit aisément — la valeur f, et il en serait de même pour la disjonction entière.

Nous reconnaissons ainsi que la formule $\overline{\mathfrak{A}(\mathrm{P})}$ ne peut être déduite par le calcul logique ordinaire et qu'il est par conséquent impossible de déduire des axiomes 1), 2), 3) une contradiction par des raisonnements de la logique classique.

La méthode exposée ici s'applique à des systèmes d'axiomes quelconques pourvu que ce soient des axiomes « propres », c'est-à-dire qu'ils ne contiennent d'autres généralités ni d'autres formes existentielles que celles qui se rapportent aux domaines d'individus pris pour base de la théorie.

Donc pour de tels systèmes d'axiomes la méthode des modèles tirés de la théorie intuitive des nombres est généralement recon-

nue suffisante pour démontrer la non-contradiction sans qu'il faille pour cela démontrer la non-contradiction de l'arithmétique.

En particulier, nous reconnaissons de cette manière la non-contradiction de la géométrie axiomatique, à l'exception des axiomes de la continuité, tous les autres axiomes étant des axiomes propres. (Quant à l'axiome d'Archimède, c'est une affirmation existentielle se rapportant aux nombres entiers, alors que les nombres ne font pas partie d'un domaine d'individus de la géométrie axiomatique; ce n'est donc pas un axiome propre.) La méthode s'applique aussi à la géométrie non-euclidienne.

Cependant il faut se rendre compte que cette manière de traiter la question de la non-contradiction ne regarde que les raisonnements exprimables par le calcul logique ordinaire, c'est-à-dire ceux de la logique du premier ordre, où n'interviennent pas des notions générales comme celle d'un nombre quelconque, celle d'une fonction quelconque ou celle d'un ensemble quelconque. Ce n'est donc que dans un sens restreint que la non-contradiction est démontrée par cette méthode.

II. — **Les démonstrations de non-contradiction se rattachant à l'axiome du ε.**

Les recherches tendant à la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique se faisant par étapes, le formalisme arithmétique qui s'offre comme le premier objet de la recherche est celui de la théorie axiomatique des nombres.

Ce formalisme est constitué des éléments suivants:

1° le calcul logique ordinaire;

2° le signe de l'égalité avec les axiomes

$$a = a$$
$$a = b \longrightarrow (\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(b)) ;$$

3° le symbole 0 et le symbole ′ représentant le passage d'un nombre au suivant, pour lesquels on a les axiomes de Peano

$$a' \neq 0$$
$$a' = b' \longrightarrow a = b$$
$$\mathrm{A}(0) \ \& \ (x)(\mathrm{A}(x) \longrightarrow \mathrm{A}(x')) \longrightarrow \mathrm{A}(a) ,$$

le dernier représentant le principe de l'induction complète;

4° les symboles de la somme et du produit $+$, $\cdot$, avec les équations récurrentes

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 0 = 0$$
$$a + b' = (a + b)' \qquad a \cdot b' = a \cdot b + a \ .$$

A propos de cette énumération faisons quelques remarques:

α) L'axiome

$$a = b \longrightarrow (\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(b))$$

peut être remplacé par les deux axiomes plus spéciaux

$$a = b \longrightarrow (a = c \longrightarrow b = c) \ ,$$
$$a = b \longrightarrow a' = b' \ .$$

β) Le principe de l'induction complète peut être formalisé aussi par le schéma

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(n) \longrightarrow \mathfrak{A}(n')}{\mathfrak{A}(a)} \ .$$

γ) On peut généralement éviter les variables de propositions et de prédicats en remplaçant chaque formule initiale contenant une telle variable par un schéma correspondant. Par exemple la formule

$$a = b \longrightarrow (\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(b))$$

peut être remplacée par le schéma

$$a = b \longrightarrow (\mathfrak{A}(a) \longrightarrow \mathfrak{A}(b)) \ ,$$

indiquant des formules d'une certaine forme qui peuvent servir de formules initiales [1].

δ) Au lieu des variables libres d'individus, comme a, b, on pourrait dans les axiomes mettre des variables liées par des signes de généralité. Par exemple la formule

$$a = a$$

pourrait être remplacée par

$$(x)\,(x = x) \ .$$

---

[1] La lettre $\mathfrak{A}$ (.) indique une formule quelconque (du formalisme considéré) contenant un argument, tandis que A (.) est une variable de prédicat appartenant elle-même au formalisme.

ε) Les équations récurrentes sont appelées ordinairement définitions récurrentes; mais il faut se rendre compte que ce ne sont pas des définitions nominales.

Le formalisme indiqué suffit pour représenter et déduire les relations de la théorie des nombres. Mais il y a encore une lacune en ceci qu'on ne peut pas représenter directement les fonctions arithmétiques, mais seulement les prédicats correspondants. Par exemple on n'obtient pas une expression pour le plus grand diviseur commun de a et b (fonction de deux arguments), mais seulement pour le prédicat correspondant « le plus grand diviseur commun de a et b est égal à c » (prédicat de trois sujets).

Pour exprimer les fonctions arithmétiques, il faut ajouter au symbolisme du calcul logique un symbole $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, représentant la notion « celui qui », avec la règle suivante (« règle du ι »):

Si pour une formule $\mathfrak{A}(c)$ on a déduit

$$(\mathrm{E}x)\ \mathfrak{A}(x) \tag{1}$$

et

$$(x)\,(y)\,(\mathfrak{A}(x)\ \&\ \mathfrak{A}(y) \longrightarrow x = y)\ , \tag{2}$$

alors on peut introduire l'expression

$$\iota_x \mathfrak{A}(x)$$

(représentant l'individu unique ξ, pour lequel $\mathfrak{A}(\xi)$ est valable); et on a

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x))\ .$$

Cette règle comprend aussi le cas où la formule $\mathfrak{A}(c)$ contient outre la variable c d'autres variables comme paramètres; l'expression $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ représente alors une fonction de ces paramètres.

A l'aide de la règle du ι et du principe de l'induction complète on parvient à introduire, par une définition nominale, un symbole, écrivons-le $\mu_x \mathrm{A}(x)$, contenant un prédicat variable, repré-, sentant ou le plus petit nombre n, pour lequel $\mathrm{A}(n)$ est vrai s'il y a un tel nombre, ou autrement le nombre nul. Au moyen de ce symbole nous obtenons les expressions des fonctions arithmétiques.

La question de la non-contradiction posée pour notre formalisme complété par l'introduction de la règle du ι peut être rame-

née à celle concernant le formalisme antérieur. La réduction se fait en démontrant que l'application de la règle du ι peut être éliminée. Cette démonstration part de la remarque suivante faite déjà par Russell et Whitehead: Si pour un prédicat représenté par une formule $\mathfrak{A}(c)$ les conditions (1), (2) sont remplies, alors une affirmation $\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$ (« l'individu qui a la propriété $\mathfrak{A}(.)$, a aussi la propriété $\mathfrak{B}(.)$ ») peut être remplacée par

$$(x)\,(\mathfrak{A}(x) \longrightarrow \mathfrak{B}(x))\ .$$

et aussi par

$$(\mathrm{E}x)\,(\mathfrak{A}(x) \quad \& \quad \mathfrak{B}(x))\ .$$

Il s'agit ensuite de prouver que par ce remplacement, éloignant les expressions de la forme $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, une déduction ne change que d'une manière telle qu'on en puisse regagner une déduction en ajoutant certains passages, dans lesquels la règle du ι n'intervient pas. On peut le démontrer, bien que la preuve en soit un peu pénible.

Mais ce n'est pas de cette manière que M. Hilbert a procédé. M. Hilbert a introduit dès le commencement le symbole $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ avec l'axiome

$$\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(\varepsilon_x \mathrm{A}(x)) \qquad (\text{« axiome du } \varepsilon\text{ »})$$

Cela revient à une généralisation du symbole $\mu_x \mathrm{A}(x)$ au delà de la théorie des nombres.

Je veux montrer ici, comment on peut passer de la règle du ι à l'axiome du ε. Le passage se fait en deux pas. D'abord nous omettons de la règle du ι la deuxième des conditions (1), (2) de l'introduction du symbole $\iota_x \mathfrak{A}(x)$. La règle ainsi modifiée permet d'introduire pour chaque prédicat $\mathfrak{A}(c)$, valable pour au moins un individu, un symbole représentant « un certain x, pour lequel $\mathfrak{A}(x)$ ». Soit $\eta_x \mathfrak{A}(x)$ ce symbole, alors la règle nouvelle peut être indiquée brièvement par le schéma

$$\frac{(\mathrm{E}x)\ \mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{A}(\eta_x \mathfrak{A}(x))}\ .$$

De ce schéma nous faisons maintenant une application spéciale. Prenons pour $\mathfrak{A}(c)$ l'expression

$$(\mathrm{E}y)\ \mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(c)\ ;$$

alors $(\mathrm{E}x)\,\mathfrak{A}(x)$ devient

$$(\mathrm{E}x)\,(\,(\mathrm{E}y)\,\mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(x)\,)\ .$$

Cette formule peut être déduite par le calcul logique ordinaire; donc nous pouvons introduire

$$\eta_x\,(\,(\mathrm{E}y)\,\mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(x)\,)\ ,$$

et en nous servant de l'abréviation $\varepsilon_x\,\mathrm{A}(x)$ définie par l'équation

$$\varepsilon_x\,\mathrm{A}(x) \;=\; \eta_x\,((\mathrm{E}y)\,\mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(x)\,)\ ,$$

nous obtenons suivant notre schéma la formule

$$(\mathrm{E}y)\,\mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(\varepsilon_x\,\mathrm{A}(x)\,)\ ;$$

or celle-ci est équivalente, d'après le calcul logique, à

$$\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(\varepsilon_x\,\mathrm{A}(x)\,)\ ,$$

ce qui est l'axiome du ε.

De cette réduction résulte aussi les formules

$$(\mathrm{E}x)\,\mathrm{A}(x) \;\rightleftarrows\; \mathrm{A}(\varepsilon_x\,\mathrm{A}(x)\,)$$

$$(x)\,\mathrm{A}(x) \;\rightleftarrows\; \mathrm{A}(\varepsilon_x\,\overline{\mathrm{A}(x)}\,)$$

($\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$ indique le couple des deux formules

$$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}\ ,\quad \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A})\ .$$

Par ces formules, un changement du formalisme nous est suggéré; en effet, on peut les regarder comme des définitions exprimant l'existence et la généralité au moyen du symbole ε. De plus il se montre que si nous acceptons ce point de vue, tout le calcul concernant la généralité et l'existence se fait par l'application de l'axiome du ε et de la règle qu'une expression $\varepsilon_x\,\mathfrak{A}(x)$ peut être substituée à une variable d'individus.

On peut donc éliminer du tout les signes (x), $(\mathrm{E}x)$ et on ne retient aucun autre schéma logique que celui du « modus ponens »

$$\frac{\mathfrak{S} \qquad \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

le reste du calcul logique se faisant par des formules initiales, des répétitions et des substitutions.

(Quant à l'axiome de l'induction complète, il peut être remplacé, au moyen du symbole ε, par la formule suivante

$$\varepsilon_x \mathfrak{A}(x) = b' \longrightarrow \overline{\mathfrak{A}(b)} \ ;$$

celle-ci exprime que, pour un prédicat $\mathfrak{A}(c)$ quelconque, le nombre représenté par $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ ou bien est égal à zéro ou bien succède à un nombre b pour lequel $\mathfrak{A}(b)$ est faux.)

Il est vrai que cette façon de manier le calcul logique n'est pas avantageuse pour les déductions effectives, mais pour les considérations métamathématiques elle apporte une certaine simplification.

C'est le formalisme ainsi modifié de la théorie axiomatique des nombres dont M. Hilbert s'est appliqué à prouver la non-contradiction. Il a saisi le problème par deux méthodes qui ont été poursuivies plus loin, l'une par M. Ackermann et M. von Neumann [1], l'autre par M. Ackermann. Mais on ne parvient par ces méthodes à démontrer la non-contradiction que pour un formalisme restreint. En effet, il faut faire une restriction à l'égard de l'axiome de l'induction complète (représenté ou par une formule ou par le schéma). Par exemple, c'est une restriction suffisante que l'induction complète ne soit appliquée qu'à des formules élémentaires (ne contenant pas de variables liées).

Donc les démonstrations attachées à l'axiome du ε ne nous ont pas conduit à reconnaître la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres.

Cependant la deuxième des dites méthodes de M. Hilbert nous fournit une démonstration assez simple et naturelle du théorème mentionné de Herbrand. D'autre part, de ce théorème découle comme Herbrand l'a montré [2], la non-contradiction du formalisme restreint qui dérive de celui de la théorie axiomatique des nombres par la restriction indiquée tantôt. (Ce résultat n'équivaut pas à celui de Ackermann et von Neumann parce que le formalisme du ε n'y est pas enfermé.)

---

[1] Le formalisme traité par von Neumann est un peu plus général que celui de MM. Hilbert et Ackermann; cette différence n'est pas considérable; mais il y a aussi une différence dans la manière de procéder entre M. Ackermann et M. von Neumann.

[2] Une autre démonstration de ce fait a été donnée récemment par M. GENTZEN.

III. — Le théorème de Gödel concernant les démonstrations de non-contradiction.

A la fin de la conférence précédente, il a été dit qu'on n'a pas réussi à démontrer, par la méthode se rattachant à l'axiome du ε, la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres (à moins qu'on ne fasse des restrictions). Plus généralement, il se trouve qu'aucune des méthodes établies dans le cadre des raisonnements élémentaires combinatoires, prescrit par le programme primordial de la métamathématique de M. HILBERT, ne nous livre cette démonstration cherchée de non-contradiction.

Ce n'est pas faute d'une découverte, que nous nous trouvons dans cette situation. Un théorème de M. GÖDEL nous montre, au contraire (comme je l'ai déjà mentionné), qu'il y a ici un obstacle essentiel. Le raisonnement de M. Gödel, qui conduit à ce théorème, est inspiré de l'idée qui conduit à l'antinomie de RICHARD.

Les divers énoncés de cette antinomie forment un deuxième groupe de paradoxes se distinguant du paradoxe de RUSSELL-ZERMELO.

Il y a une correspondance entre les deux sortes de paradoxes et deux conceptions philosophiques: celle de PLATON du monde des idées et celle de LEIBNIZ d'une langue universelle scientifique.

Le paradoxe de Russell-Zermelo exclut le platonisme absolu, le paradoxe de Richard exclut la réalisation parfaite de l'idée de Leibniz; son sens est environ le suivant: Chaque langue exacte devient sujet à une considération mathématique de ses moyens d'expression. Les éléments dont se constituent les expressions de la langue et les formes de leurs combinaisons engendrent un formalisme dénombrable, et la pensée mathématique dépasse ce formalisme. De là il dérive qu'en joignant les exigences d'une langue exacte à celles d'une langue universelle on rencontre des contradictions. D'autre part, la langue usuelle semble suffire aux deux exigences pourvu qu'on s'en serve d'une manière appropriée. C'est ainsi qu'apparaît le caractère suggestif de l'antinomie.

Dans les formes originaires de cette antinomie, il s'agit

toujours des possibilités de définitions. M. Finsler a remarqué qu'on peut transformer l'antinomie de Richard en une autre concernant les démonstrations. Pour cette antinomie modifiée comme pour l'antinomie primitive de Richard, il est encore possible de présenter certaines objections plus ou moins subtiles. Aussi c'était une opinion répandue que l'antinomie de Richard n'avait d'autre signification que celle d'un sophisme reposant sur des inexactitudes de langage, et qu'il suffirait de préciser la langue pour que le paradoxe disparaisse [1].

Il est vrai qu'en précisant la langue, nous faisons disparaître les contradictions résultant du raisonnement de Richard; mais alors on obtient des résultats qui restreignent la possibilité de constituer dans sa totalité une langue universelle, dans le sens même indiqué déjà par l'antinomie de Richard.

C'est ce qui a été mis en évidence par l'argumentation de Gödel qu'il s'agit maintenant d'exposer.

L'argumentation commence par remplacer les prémisses de l'antinomie de Richard par d'autres d'une nature proprement mathématique.

Au lieu de la langue usuelle on considère un formalisme rigoureux $\mathfrak{F}$, comme ceux que la métamathématique a pour objet, c'est-à-dire un formalisme qui traduit les raisonnements d'un certain domaine de la mathématique dans des suites de formules, nommées déductions, et qui sont formées d'après certaines règles; les règles sont supposées telles qu'il soit possible de contrôler machinallement les déductions; cela veut dire que pour une suite donnée de formules on peut décider, par une série d'épreuves se faisant par des comparaisons de figures, si c'est une déduction selon les règles du formalisme ou non.

Quant au domaine de la mathématique représenté par le formalisme $\mathfrak{F}$, nous supposons seulement qu'il contienne la théorie des nombres. Ou plus en détail:

1. La relation d'égalité entre nombres doit être exprimable dans $\mathfrak{F}$, et chaque équation numérique vraie, de même que chaque inégalité numérique juste, doit être déductible dans $\mathfrak{F}$.

---

[1] Il se trouve cependant quelques mathématiciens pour reconnaître dès l'abord, comme L. Chwistek, le sérieux de l'antinomie de Richard.

2. Les définitions par récurrence d'une fonction $\varphi(n)$ ou $\varphi(n, c)$ d'après l'un des schéma que voici [1]:

$$\mathcal{R}\begin{cases} \varphi(0) = \mathfrak{a} & \varphi(0, c) = \mathfrak{a}(c) \\ \varphi(n+1) = \mathfrak{b}(n, \varphi(n)) & \varphi(n+1, c) = \mathfrak{b}(n, c, \varphi(n, c)) \end{cases}$$

(où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des expressions introduites plus tôt) doivent être représentées dans $\mathfrak{F}$ de la façon suivante: A chaque équation

$$\psi(a) = b\ ,$$

où ψ est une fonction définie par des schéma de la dite structure et par des substitutions, il correspond dans $\mathfrak{F}$ une expression $\mathfrak{B}(a, b)$, dont on obtient une formule déductible en substituant à la variable a le signe représentant un nombre naturel $\mathfrak{k}$, et à b le signe représentant la valeur de $\psi(\mathfrak{k})$.

3. $\mathfrak{F}$ contient le calcul ordinaire logique (du premier ordre) [2].

4. Le principe de l'induction complète est représenté dans $\mathfrak{F}$, soit par une règle ou une formule initiale, ou aussi par un procédé de déduction.

Pour exprimer brièvement les conditions faites, nous dirons que $\mathfrak{F}$ doit être un formalisme rigoureux et suffisant pour la théorie des nombres.

De ces propriétés on peut d'abord conclure que les relations métamathématiques concernant le formalisme $\mathfrak{F}$ peuvent être exprimées dans $\mathfrak{F}$ par des formules. D'abord les symboles et les variables [3] peuvent être numérotés. A partir de cette numérotation on en obtient une autre pour les expressions; et ceci par le procédé suivant. A la suite composée de symboles et variables ayant successivement les numéros

$$n_1\ ,\ \ldots\ n_k\ ,$$

---

[1] Le cas de plusieurs paramètres fixes peut être réduit à celui d'un seul paramètre.

[2] On peut affaiblir cette condition. Par exemple il suffirait d'exiger à sa place que $\mathfrak{F}$ contienne le calcul logique de M. HEYTING.

[3] Le formalisme peut contenir plusieurs genres de variables, et de plus les variables libres peuvent être séparées des variables liées.

on attribue le numéro m, dont la décomposition en nombres premiers est donnée par

$$p_1^{n_1} \dots p_h^{n_h}$$

(où p_r dénote le $r$ième nombre premier).

De la même manière on passe de la numérotation des expressions à la numérotation des suites d'expressions [1].

Pour tout n qui appartient à une expression, nous désignons par $\mathfrak{A}_n$ l'expression, dont n est le numéro, et de même, si n appartient à une suite d'expressions, par $\mathfrak{R}_n$ la suite ayant le numéro n.

Parmi les expressions il y a les « formules » de $\mathfrak{F}$, et parmi les suites d'expressions il y a les déductions de $\mathfrak{F}$.

Puisque $\mathfrak{F}$ est un formalisme rigoureux, les affirmations métamathématiques sur $\mathfrak{F}$ se transforment, au moyen des numérotations faites en des propositions arithmétiques élémentaires. En particulier, l'énoncé « m est le numéro d'une suite d'expressions, n celui d'une expression et $\mathfrak{R}_m$ une déduction, dont la formule finale est $\mathfrak{A}_n$ » peut être exprimé par une équation

$$\psi(m, n) = 0,$$

$\psi(.,.)$ étant une fonction arithmétique définissable au moyen de récurrences d'après les schéma ($\mathcal{R}$) et de substitutions.

En vertu de notre supposition que le formalisme $\mathfrak{F}$ est suffisant pour la théorie des nombres, à l'équation

$$\psi(m, n) = 0$$

il correspond dans $\mathfrak{F}$ une formule contenant m, n, mais pas d'autres variables libres. Dénotons cette formule pour rappeler l'interprétation métamathématique (« $\mathfrak{R}_m$ est déduction de $\mathfrak{A}_n$ ») par $\mathrm{Déd}(m, n)$ ou aussi par $\mathrm{Déd}_m(\mathfrak{A}_n)$ [2].

Afin d'arriver au point essentiel du raisonnement de M. Gödel, il suffit d'ajouter un petit corrolaire au dernier résultat. Consi-

---

1 A un nombre donné il ne correspond pas toujours une expression, mais seulement à chaque expression appartient un numéro et un seul. Et le même vaut pour les suites d'expressions.

2 Pour bien comprendre cette forme d'indication, il faut observer que $\mathfrak{A}_n$ n'est pas une partie constituante de la formule $\mathrm{Déd}_m(\mathfrak{A}_n)$.

dérons l'énoncé « $\mathfrak{R}_m$ est une déduction, dont la formule finale s'obtient de $\mathfrak{A}_n$ en substituant pour la variable libre a, à chaque place où elle intervient dans $\mathfrak{A}_n$, le chiffre dénotant le numéro n ».

Cet énoncé, de même que celui considéré tout à l'heure, s'exprime par une équation

$$\chi(m, n) = 0 ,$$

où $\chi(m, n)$ est une fonction du même caractère élémentaire que $\psi(m, n)$. Et dans le formalisme $\mathfrak{F}$ l'équation $\chi(m, n) = 0$ est aussi représentée par une formule que nous dénotons par

$$\text{Déd} * (m, n) .$$

Pour des chiffres donnés $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, on peut évaluer $\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, et décider si l'équation $\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = 0$ est vraie ou fausse.

Dans le premier cas, d'après nos suppositions sur le formalisme $\mathfrak{F}$, la formule

$$\text{Déd} * (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) ,$$

dans l'autre la négation

$$\overline{\text{Déd} * (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})}$$

est déductible par le formalisme $\mathfrak{F}$. De plus, dans le premier cas, nous pouvons construire la suite d'expressions $\mathfrak{R}_m$, et celle-ci est une déduction (dans $\mathfrak{F}$) de la formule qui s'obtient de l'expression $\mathfrak{A}_\mathfrak{n}$ en substituant le chiffre $\mathfrak{n}$ à la variable a.

Soit maintenant $\mathfrak{k}$ le numéro de la formule

$$(x)\ \overline{\text{Déd}*\ (x, a)} .$$

Supposé que pour un chiffre donné $\mathfrak{m}$ l'équation

$$\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}) = 0$$

soit vraie, alors la formule

$$\text{Déd}*\ (\mathfrak{m}, \mathfrak{k})$$

serait déductible dans $\mathfrak{F}$; de plus, la suite d'expressions $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ serait une déduction de la formule

$$(x)\ \overline{\text{Déd}*\ (x, \mathfrak{k})}$$

(qu'on obtient de $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$, en substituant $\mathfrak{f}$ pour a); et de cette formule découlerait

$$\overline{\text{Déd}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{f})};$$

mais alors le formalisme $\mathfrak{F}$ serait contradictoire. Donc, si le formalisme $\mathfrak{F}$ n'implique pas de contradictions, il faut que pour chaque chiffre $\mathfrak{m}$ l'équation

$$\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) = 0$$

soit fausse, et que la formule

$$\overline{\text{Déd}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{f})}$$

soit déductible dans $\mathfrak{F}$.

D'autre part, sous la même supposition de la non-contradiction de $\mathfrak{F}$, la formule

$$(x)\ \overline{\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f})}$$

ne peut pas être déductible dans $\mathfrak{F}$. Car cette formule s'obtient de $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ en substituant $\mathfrak{f}$ pour a. Donc, si nous avions pour elle une déduction, dont le numéro (dans la numérotation des suites d'expressions) était $\mathfrak{m}$, alors la formule

$$\text{Déd}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{f})$$

serait déductible, et il y aurait une contradiction dans $\mathfrak{F}$.

De là le résultat : S'il peut être montré que le formalisme $\mathfrak{F}$ est non-contradictoire, alors il y a une proposition élémentaire arithmétique démontrable qui peut être exprimée, mais pas déduite de $\mathfrak{F}$. En effet, on démontre alors que pour chaque chiffre $\mathfrak{m}$ l'équation $\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) = 0$ est fausse, tandis que la formule exprimant ce théorème dans le formalisme $\mathfrak{F}$, savoir

$$(x)\ \overline{\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f})}$$

n'est pas déductible dans $\mathfrak{F}$.

Voilà un résultat fort et remarquable. Mais ce n'est pas celui des résultats de M. Gödel, auquel j'ai fait allusion au commencement de cette conférence. Pour y parvenir, il faut renforcer le raisonnement, moyennant la supposition que le formalisme $\mathfrak{F}$ contient le calcul logique et le principe de l'induction complète.

Je me contente ici d'indiquer en peu de mots le cours du raisonnement.

En vertu de la relation entre les fonctions $\psi(m, n)$ et $\chi(m, n)$, la formule

$$\text{Déd}^*(m, \mathfrak{f}) \longrightarrow \text{Déd}_m((x)\,\overline{\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f})}),$$

(où m est une variable de nombre), peut être déduite dans $\mathfrak{F}$. De cette formule on tire par le calcul logique

$$(\text{E}x)\,\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f}) \longrightarrow (\text{E}y)\,\text{Déd}_y((x)\,\overline{\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f})}). \qquad (1)$$

D'autre part, puisque la fonction $\chi(m, n)$ est définie par récurrence selon les schéma ($\mathcal{R}$), on peut déduire dans $\mathfrak{F}$ une formule

$$\text{Déd}^*(m, \mathfrak{f}) \longrightarrow (\text{E}y)\,\text{Déd}(y, \zeta(m)),$$

où m est de nouveau une variable de nombre et $\zeta(m)$ est une fonction arithmétique définie par récurrence, dont la valeur pour un chiffre donné $\mathfrak{a}$ est le numéro de l'expression $\text{Déd}^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$. De cette formule découle

$$(\text{E}x)\,\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f}) \longrightarrow (\text{E}y)\,\text{Déd}_y(\overline{(x)}\,\overline{\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f})}). \qquad (2)$$

Les formules (1), (2) donnent

$$(\text{E}x)\,\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f}) \longrightarrow (\text{E}y)\,\text{Déd}_y(0 \neq 0),$$

et de cette formule on déduit par le calcul logique

$$(x)\,\overline{\text{Déd}_x(0 \neq 0)} \longrightarrow (x)\,\overline{\text{Déd}^*(x, \mathfrak{f})}.$$

A l'aide de cette formule déductible dans $\mathfrak{F}$ on peut passer de l'antécédent au conséquent. Mais l'antécédent est la formule exprimant la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{F}$; et quant au conséquent, nous avons constaté tantôt qu'il n'est pas déductible par le formalisme $\mathfrak{F}$, à moins que celui-ci ne soit contradictoire.

Nous sommes donc conduits à l'énoncé suivant: Si le formalisme $\mathfrak{F}$ est non-contradictoire, alors la formule exprimant la non-contradiction de $\mathfrak{F}$ ne peut pas être déduite dans le formalisme $\mathfrak{F}$ même.

Ce résultat s'applique à chaque formalisme rigoureux et suffisant pour la théorie des nombres, c'est-à-dire satisfaisant

aux conditions 1. — 4. indiquées tout à l'heure. Déjà le formalisme de la théorie axiomatique des nombres possède les dites propriétés. En effet on peut montrer que les définitions récurrentes se faisant d'après les schéma ($\mathcal{R}$) ont leur représentation dans ce formalisme; et quant aux autres conditions, il est évident qu'elles y sont remplies.

A fortiori nos suppositions se trouvent réalisées par les formalismes plus étendus, desquels la théorie axiomatique des nombres peut être déduite, comme celui de l'analyse infinitésimale, ceux de la théorie axiomatique des ensembles, et celui des « Principia Mathematica », soit dans la forme originaire (avec l'axiome de la réductibilité) ou dans la forme simplifiée.

Aucun de ces formalismes, pourvu qu'il soit non-contradictoire, ne permet de déduire le théorème arithmétique équivalent à l'affirmation métamathématique de sa non-contradiction.

En particulier, un raisonnement démontrant la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres ne peut pas être traduit dans cette théorie là.

Ce résultat explique le fait, qui nous a étonnés, que tous les essais de démontrer la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres par les méthodes élémentaires combinatoires n'ont pas réussi.

En effet, il faudrait, pour atteindre ce but, trouver un raisonnement élémentaire combinatoire qui ne puisse être formalisé dans la théorie axiomatique des nombres. Mais, à ce qu'il semble, il n'y a pas de tels raisonnements.

Selon toute apparence, le cadre dans lequel M. Hilbert enfermait les méthodes inspirées du « point de vue fini » n'est pas assez large pour une théorie de la démonstration. La question est donc de savoir si ce cadre peut être élargi sans abandon du but que poursuit la métamathématique. Nous verrons que c'est bien le cas.

IV. — La relation entre la théorie axiomatique des nombres et l'arithmétique intuitionniste.

Le théorème général de Gödel sur les démonstrations de non-contradiction s'applique en particulier, comme nous l'avons

constaté, à la théorie axiomatique des nombres. Dénotons désormais, pour abréger, le formalisme de cette théorie par $\mathfrak{N}$.

Nous avons obtenu le résultat que le théorème arithmétique, dans lequel l'énoncé de la non-contradiction de $\mathfrak{N}$ est traduit au moyen d'une numérotation des symboles et variables de $\mathfrak{N}$, puis des expressions et encore des suites d'expressions de $\mathfrak{N}$, ne peut être déduit par le formalisme $\mathfrak{N}$.

D'autre part, nous sommes conduits, par diverses épreuves faites, à croire que chaque démonstration d'un théorème arithmétique suffisant aux exigences du point de vue fini (comme il a été caractérisé par M. Hilbert) peut être formalisée dans $\mathfrak{N}$.

Donc en maintenant ces exigences pour la méthode de la métamathématique, on ne parviendra pas à démontrer la non-contradiction de $\mathfrak{N}$.

Ainsi nous sommes amenés à nous demander s'il n'y a pas la possibilité d'élargir le « point de vue fini », tout en conservant le but de la métamathématique.

Rappelons-nous comment M. Hilbert lui-même a introduit ce point de vue. Dans l'exposition des idées fondamentales de la métamathématique, il présente la théorie élémentaire et intuitive des nombres comme une méthode qui possède une pleine sûreté, qui n'exige pas de suppositions ni d'axiomes, et qui est libre des difficultés attachées à la notion de l'infini.

De la même manière il tend à faire les raisonnements métamathématiques. Et la possibilité de s'en tenir à un tel cadre lui semble être garantie par le fait que le problème de démontrer la non-contradiction d'un formalisme rigoureux a la forme d'un problème élémentaire concernant les nombres entiers.

Ainsi l'introduction du point de vue fini, faite par M. Hilbert, consistait simplement à caractériser, au moyen d'un exemple, une méthode satisfaisante pour la métamathématique. Mais ce n'est pas une délimitation précise. Et il y avait en effet une incertitude sur l'étendue des méthodes finies.

Quelques mathématiciens, notamment MM. v. Neumann, Kalmár et Herbrand, ont envisagé le point de vue fini comme non différent de la méthode intuitionniste de M. Brouwer. Ce qui était en faveur de cette interprétation c'est que les restrictions faites par la méthode intuitionniste sont justement celles qui

sont nécessaires pour la métamathématique; car cette méthode est pleinement caractérisée par l'exigence d'éviter les suppositions reposant sur les analogies de l'infini au fini, en particulier celle de la totalité des nombres entiers.

Toutefois, dans les démonstrations métamathématiques, on s'en est toujours tenu à un cadre plus étroit en raison de la tendance naturelle à une évidence élémentaire. On est resté dans le domaine de ces raisonnements qui peuvent être formalisés sans l'emploi de variables liées.

C'est par cette limitation qu'on est tombé dans les dites difficultés. En effet, notre thèse qu'on peut formaliser dans $\mathfrak{N}$ chaque démonstration d'un théorème arithmétique, laquelle est conforme au point de vue fini, n'est valable que si le point de vue fini est interprété dans le sens restreint.

Nous allons voir qu'il y a des démonstrations intuitionnistes qui ne peuvent pas être formalisées dans $\mathfrak{N}$. Pour la recherche d'une telle démonstration faisons d'abord la réflexion suivante.

Comme nous le savons par le théorème de Gödel, la formule exprimant, dans le formalisme $\mathfrak{N}$, la non-contradiction de $\mathfrak{N}$ n'est pas déductible dans $\mathfrak{N}$. Mais il se trouve qu'elle est déductible à l'aide d'un formalisme $\mathfrak{N}^*$ qu'on obtient de $\mathfrak{N}$ en ajoutant certaines définitions récurrentes non-élémentaires, comme par exemple

$$\Psi(k, 0) \rightleftarrows \mathfrak{B}(k)$$

$$\Psi(k, n+1) \rightleftarrows (Ex)(\Psi(x, n) \quad \& \quad \mathfrak{B}(k, x, n)) ,$$

où $\Psi(k, n)$ est la fonction propositionnelle qu'il s'agit de définir, et $\mathfrak{B}(k)$, $\mathfrak{B}(k, x, n)$ sont des expressions connues [1].

De là découle que cette sorte de définitions récurrentes dépasse le formalisme $\mathfrak{N}$. D'autre part, une telle définition récurrente intervient aussi dans la déduction formelle du principe de l'induction transfinie appliqué à un ordre du type ordinal $\lim_n \alpha_n$, où

$$\alpha_0 = 1 , \quad \alpha_{k+1} = \omega^{\alpha_k} (k = 0, 1 . \ldots) .$$

---

1 Qu'il y ait ici des équivalences récurrentes au lieu d'équations récurrentes, ce n'est pas un point essentiel. Généralement les équations récurrentes peuvent être remplacées par des équivalences récurrentes. Inversement, on pourrait ici, en introduisant le symbole $\iota_x \mathfrak{A}x$, réduire les équivalences récurrentes définissant $\Psi(k, n)$, à des équations récurrentes définissant une fonction arithmétique de k et n.

Ce type d'ordre peut être réalisé pour les nombres entiers par un ordre

$$a \prec b$$

définissable par des récurrences élémentaires. Et le dit principe s'exprime, pour cet ordre, par la formule

$$(x)\,\{(y)\,(y \prec x \longrightarrow \mathrm{A}(y)) \longrightarrow \mathrm{A}(x)\} \longrightarrow (x)\,\mathrm{A}(x)\ ,$$

dans laquelle on peut substituer pour A (.) une formule $\mathfrak{A}$ (.) quelconque du formalisme $\mathfrak{N}$ contenant une place d'argument.

Pour déduire cette formule, il suffit d'employer, outre les règles du formalisme $\mathfrak{N}$, une définition récurrente de la forme indiquée tantôt. A ce qu'il semble, une telle définition ne peut pas être évitée ici, à moins qu'on étende le symbolisme de $\mathfrak{N}$, par exemple en introduisant des variables liées de propositions, c'est-à-dire en s'élevant au formalisme logique du deuxième ordre.

Mais, d'autre part, on peut démontrer le principe représenté par cette formule dans la mathématique intuitionniste.

Donc, selon toute apparence, le cas spécial considéré du principe de l'induction transfinie est déjà un exemple d'un théorème démontrable par la mathématique intuitionniste, mais pas déductible dans $\mathfrak{N}$.

Ainsi il se pourrait, en concordance avec le théorème de Gödel, qu'on trouve une démonstration intuitionniste de la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$, dans laquelle la seule partie non-formalisable dans $\mathfrak{N}$ serait l'application du dit principe d'induction transfinie.

Pour le moment ce n'est qu'une possibilité. Mais d'une autre manière on a réussi à démontrer du point de vue intuitionniste la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$.

Cette démonstration repose sur une généralisation d'une remarque faite par M. Glivenko. Il a comparé le calcul ordinaire des propositions à un calcul conforme à la logique intuitionniste des propositions, et il a constaté la relation suivante: si une formule $\mathfrak{A}$ est déductible par le calcul ordinaire des propositions, alors $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ est déductible par le calcul intuitionniste; et si

$\overline{\mathfrak{A}}$ est déductible par le calcul ordinaire, alors elle est aussi déductible par le calcul intuitionniste.

Si cet énoncé pouvait être étendu directement au calcul entier, alors la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$ résulterait immédiatement du point de vue intuitionniste. Cependant la thèse de Glivenko n'est plus valable, quand les formes de la généralité et de l'existence se joignent.

Mais il suffit de modifier un peu l'affirmation de Glivenko pour qu'elle puisse être étendue à toute l'arithmétique intuitionniste, telle qu'elle a été formalisée par M. Heyting. En effet, M. Gentzen a démontré l'énoncé suivant: Soit $\mathfrak{A}$ une formule déductible par le formalisme $\mathfrak{N}$; soit de plus $\mathfrak{A}^*$ la formule que nous obtenons de $\mathfrak{A}$ en appliquant la double négation à chaque partie de la composition logique de $\mathfrak{A}$ et aussi à la formule $\mathfrak{A}$ elle-même; alors $\mathfrak{A}^*$ est déductible par le calcul intuitionniste de M. Heyting.

De là suit aisément qu'une contradiction se trouvant dans le formalisme $\mathfrak{N}$ devrait entraîner une contradiction dans la mathématique intuitionniste. Car s'il y avait une formule $\mathfrak{A}$ telle que $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{A}}$ seraient déductibles dans $\mathfrak{N}$, alors, d'après l'énoncé formulé tantôt, $\mathfrak{A}^*$ et $(\overline{\mathfrak{A}})^*$ seraient déductibles par le formalisme de Heyting. Mais $(\overline{\mathfrak{A}})^*$ c'est $\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}}$, et de $\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}}$ on déduit $\overline{\mathfrak{A}^*}$ dans le calcul de Heyting. Donc il y aurait une contradiction aussi dans le calcul intuitionniste.

En regardant la démonstration de M. Gentzen, on remarque qu'on n'a pas besoin de tant de négations. Par une modification éliminant les doubles négations on parvient au résultat suivant, trouvé déjà un peu plus tôt par M. Gödel:

Etant donnée, dans le formalisme $\mathfrak{N}$, une déduction d'une formule $\mathfrak{A}$ ne contenant:

1° aucune variable de proposition,
2° aucune disjonction $\vee$,
3° aucun signe d'existence (Ex),

on peut en tirer une déduction de $\mathfrak{A}$ par le calcul intuitionniste.

En effet sous les conditions faites on peut d'abord éliminer du tout les variables de propositions, les disjonctions et les signes d'existence de la déduction donnée. Cela se fait:

a) en remettant les substitutions aux formules initiales,

b) en remplaçant chaque expression $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ par $\overline{\overline{\mathfrak{B}} \;\&\; \overline{\mathfrak{C}}}$,

c) en remplaçant chaque expression $(\mathrm{Ex})\,\mathfrak{B}(x)$ par $\overline{(x)\,\overline{\mathfrak{B}(x)}}$.

Or le formalisme $\mathfrak{N}$ ne dépasse le formalisme de Heyting que par la formule logique

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \longrightarrow \mathfrak{A} .$$

Cette formule a été remplacée par les opérations *a*), *b*), *c*), à chaque place où elle intervient dans la déduction donnée, par une formule $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \longrightarrow \mathfrak{A}$, ne contenant ni des variables de propositions ni les symboles $\vee$, (Ex). Dans chacune de ces formules, $\mathfrak{A}$ est composé d'équations élémentaires au moyen des opérations &, $\longrightarrow$, $\overline{}$, (x). Mais pour une formule $\mathfrak{A}$ composée ainsi on peut déduire

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

dans le calcul intuitionniste.

En effet, on a d'abord

$$\overline{\overline{\overline{a = b}}} \longrightarrow a = b ,$$

et généralement

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \longrightarrow \overline{\mathfrak{B}} ;$$

de plus, si on a deux formules

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \longrightarrow \mathfrak{B} , \quad \overline{\overline{\mathfrak{C}}} \longrightarrow \mathfrak{C} ,$$

on en déduit

$$\overline{\overline{\mathfrak{B} \;\&\; \mathfrak{C}}} \longrightarrow \mathfrak{B} \;\&\; \mathfrak{C} , \quad \overline{\overline{\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}}} \longrightarrow (\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}) ;$$

et d'une formule

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}(a)}} \longrightarrow \mathfrak{B}(a)$$

on déduit

$$\overline{\overline{(x)\,\mathfrak{B}(x)}} \longrightarrow (x)\,\mathfrak{B}(x) .$$

Ces déductions se font au moyen des relations

$$\mathfrak{B} \longrightarrow \overline{\overline{\mathfrak{B}}}\,, \quad (\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}) \longrightarrow (\overline{\mathfrak{C}} \longrightarrow \overline{\mathfrak{B}})\,,$$

qui sont généralement valables dans la logique intuitionniste.

Nous parvenons donc à une déduction de $\mathfrak{A}$ par le calcul intuitionniste.

A ce résultat nous pouvons donner encore une autre forme. Observons qu'à chaque formule $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{N}$, ne contenant pas des variables de propositions, il correspond une formule $\mathfrak{A}'$ qu'on obtient de $\mathfrak{A}$ en remplaçant chaque partie de la forme $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ par $\overline{\overline{\mathfrak{B}}\,\&\,\overline{\mathfrak{C}}}$ et chaque partie de la forme (Ex) $\mathfrak{B}(x)$ par $\overline{(x)\,\overline{\mathfrak{B}(x)}}$.

Cette formule $\mathfrak{A}'$ est équivalente à la formule $\mathfrak{A}$ dans la théorie axiomatique des nombres, puisqu'on peut déduire dans $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{A}\,.$$

D'autre part, $\mathfrak{A}'$ satisfait aux suppositions du théorème démontré tantôt; et de là découle que si cette formule est déductible dans $\mathfrak{N}$, elle est aussi déductible par le calcul intuitionniste.

Par conséquent si une formule $\mathfrak{A}$, ne contenant pas de variables de propositions, est déductible dans le formalisme $\mathfrak{N}$, alors la formule correspondante $\mathfrak{A}'$ est déductible par le calcul intuitionniste.

On peut donc dire que le passage de la théorie axiomatique des nombres à une partie de la mathématique intuitionniste se fait par un simple changement de l'interprétation des propositions.

En particulier, la non-contradiction de l'intuitionnisme entraîne celle de la théorie axiomatique des nombres.

Ainsi le problème de démontrer la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres, qui n'a pas de solution formelle dans le cadre du formalisme $\mathfrak{N}$ même et qui dépasse, à ce qu'il semble, les forces des méthodes élémentaires combinatoires, admet une solution assez simple, si on étend les méthodes de la métamathématique en adjoignant certains raisonnements intuitionnistes.

Il est vrai qu'il y a peu d'espérance que la forme de la solution trouvée puisse être généralisée de façon qu'on en tire une démonstration de la non-contradiction de l'analyse infinitésimale. Mais outre la méthode spéciale, par laquelle la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$ a été démontrée, il y a encore, comme les considérations précédentes nous le montrent, d'autres possibilités de faire valoir le point de vue élargi de la métamathématique.

Je me permets d'exprimer ma reconnaissance à M. le Prof. Wavre et M. le Prof. Gonseth de l'aimable aide qu'ils ont bien voulu me prêter quant à l'amélioration du texte de cet article.

SUR LA NATURE DE LA LOGIQUE, DE SES CATÉGORIES ET DE SES VÉRITÉS [1]

PAR

Paul HERTZ.

Quelle est la nature de la logique, de ses catégories et de ses vérités ?

Il ne faut pas croire que les lois de la logique sont surtout des lois psychologiques de la pensée. Elles sont aussi des « lois » au sens originaire du mot, des *normes* qui prescrivent comment ont doit penser, pour être sûr d'arriver à des résultats vérifiés par la réalité des choses. Mais de tels précepts seraient impossibles s'il n'y avait pas de *liaisons objectives* qui y correspondent.

---

[1] Résumé de la communication présentée le 22 juin 1934 dans la série des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève. Une publication plus complète paraîtra en allemand dans les *Abhandlungen der Fries'ischen Schule, Neue Folge*, 6. Band, 2. Heft, Berlin. — Les pensées développées dans la dernière partie de cette conférence sont contenues dans la Note parue dans *Vom Wesen der logischen Erkenntnis*, t. II, 1932, p. 369.