vander
LOUVAIN

LES DISTRIBUTEURS

d'après le cours de "Questions spéciales de mathématique"

par
J. BENABOU

Rapport n^{o} 33, janvier 1973
Séminaires de Mathématique Pure



INSTITUT DE MATHÉMATIQUE PURE ET APPLIQUÉE
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Bâtiment Sc. I, Avenue du Cyclotron, 2 1348 Louvain-La-Neuve

Ce texte a été rédigé par Jean-Roger ROISIN à partir de notes prises au cours oral du professeur BENABOU. Il n'a pas été relu par le professeur BENABOU avant son impression.

LES DISTRIBUTEURS

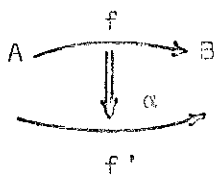
1. Les Bicatégories.

1.1. Définition.

Une bicatégorie $\mathbb{A}$ est déterminée par les données suivantes :

(i) Une classe $Ob(\mathbb{A})$ dont les éléments A, B, C, ... sont appelés les objets de $\mathbb{A}$.

(ii) Pour tout couple (A, B) d'objets, une catégorie $\mathbb{A}(A, B)$; un objet f de $\mathbb{A}(A, B)$ est appelé une flèche et noté $A \xrightarrow{f} B$; un morphisme α de la flèche f vers la flèche f' est appelé une 2-cellule et on écrira

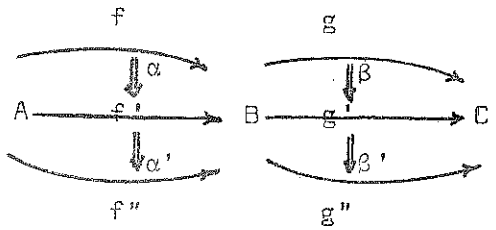


(iii) Pour tout triplet (A, B, C), un bifoncteur "de composition"

$$C(A, B, C) : \mathbb{A}(B, C) \times \mathbb{A}(A, B) \longrightarrow \mathbb{A}(A, C) ;$$

cette composition sera notée brièvement $\otimes$, la notation habituelle étant réservée pour la composition au sein de chacune des catégories citées en (ii).

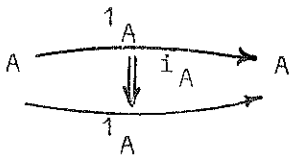
Pour la situation ci-dessous



on aura donc

$$(\beta' \otimes \alpha') \circ (\beta \otimes \alpha) = (\beta' \circ \beta) \otimes (\alpha' \circ \alpha).$$

(iv) Pour chaque objet A, une flèche notée 1_A, prise dans $\mathcal{A}(A, A)$ et appelée "flèche identique sur A". L'identité sur 1_A sera notée i_A



(v) Pour chaque quadruplet (A, B, C, D), un isomorphisme naturel d'associativité, noté a(A, B, C, D) de

C(A, B, D) ∘ [C(B, C, D) x Id] vers

C(A, C, D) ∘ [Id x C(A, B, C)].

Pour f : A ⟶ B, g : B ⟶ C et h : C ⟶ D, on écrira a(A, B, C, D)(f, g, h) plus brièvement a(f, g, h) ou même a (si aucune confusion n'est à craindre).

(vi) Pour chaque couple (A, B), deux isomorphismes naturels r(A, B) de C(A, A, B) ∘ (Id x 1_A) vers le foncteur canonique

$$\mathbb{A}(A, B) \times 1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}(A, B),$$

et $l(A, B)$ de $C(A, B, B) \circ (1_B \times Id)$

vers le foncteur canonique

$$1 \times \mathbb{A}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}(A, B).$$

La 2-cellule $r(A, B)(f) : f \otimes 1_A \xrightarrow{\sim} f$ se note aussi $r(f)$ ou r, et $l(A, B)(f) : 1_B \otimes f \xrightarrow{\sim} f$ s'écrit aussi $l(f)$ ou l.

On suppose que les isomorphismes naturels cités en (v) et (vi) sont "cohérents" - ce qui signifie en gros que tout diagramme où ne figurent que des 2-cellules de ce genre est commutatif. Cette exigence se ramène à la commutativité des diagrammes de deux types (cf. par exemple J. Benabou [1], p. 6).

1.2. Exemples.

a. Une 2-catégorie est une bicatégorie particulière, où les isos indiqués en (v) et (vi) sont des identités. En particulier, Cat - la 2-catégorie des petites catégories - est une bicatégorie.

b. Une catégorie multiplicative $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ peut être considérée comme une bicatégorie à un seul objet $*$. On pose $\mathbb{A}(*, *) = \mathcal{C}$, $C(*, *, *) = \otimes$, $1_* = I$, etc.

Réciproquement, à tout objet d'une bicatégorie est associé canoniquement une catégorie multiplicative. En particulier, à chaque objet $\mathcal{A}$ de Cat est associé la c.m. $\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ des endofoncteurs de $\mathcal{A}$.

c. La situation où une c.m. $\mathcal{C}$ opère à droite sur une catégorie $\mathcal{Q}$ peut être décrite par la donnée d'une bicatégorie à 2 objets - 0 et 1 disons - telle que

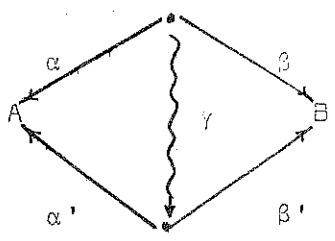
$\mathbb{A}(0, 0) = \mathcal{C}$, $\mathbb{A}(0, 1) = \mathcal{Q}$, $\mathbb{A}(1, 1) = \mathbb{1}$, $\mathbb{A}(1, 0) = \mathbb{0}$

($\mathbb{0}$ la catégorie vide) ; $C(0, 0, 0)$ est la multiplication et $C(0, 0, 1)$ l'action de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{Q}$.

Réciproquement, si A et B sont deux objets d'une bicatégorie, la c.m. associée à A opère canoniquement à droite sur la catégorie $\mathbb{A}(A, B)$.

d. Un exemple important, parce qu'il servira de guide pour la suite, est celui des bimodules. La bicatégorie $\mathbb{B}$im a pour objets les anneaux unitaires, pour flèches les bimodules et pour 2-cellules les homomorphismes de bimodules. La composition est le produit tensoriel : si M est un (A, B)-bimodule et N un (B, C)-bimodule, alors $M \underset{B}{\otimes} N$ est canoniquement muni d'une structure de (A, C)-bimodule. La flèche identique sur A est A lui-même considéré comme (A, A)-bimodule.

e. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie à produits fibrés choisis, on peut définir la bicatégorie Span($\mathcal{C}$) dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$, les flèches de A vers B les couples (α, β) de flèches de même source et de buts respectifs A et B, et les 2-cellules de (α, β) vers (α', β') les flèches γ telles que $\alpha'\gamma = \alpha$ et $\beta'\gamma = \beta$.
La composition se fait par produit fibré. La flèche identique sur A est le couple $(1_A, 1_A)$.



1.3. Morphismes de bicatégories.

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$ 2 bicatégories. Un morphisme (F, ϕ) de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{A}'$ consiste en la donnée :

(i) d'une application $F : Ob(\mathbb{A}) \longrightarrow Ob(\mathbb{A}')$;

(ii) d'une famille de foncteurs $F_{A, B} : \mathbb{A}(A, B) \longrightarrow \mathbb{A}'(FA, FB)$;

(iii) d'une 2-cellule dans $\mathbb{A}'(FA, FA)$ pour tout $A \in Ob(\mathbb{A})$, soit

$$\phi_A : 1'_{FA} \longrightarrow F_{AA}(1_A) ;$$

(iv) d'une transformation naturelle pour tout triple (A, B, C) d'objets de $\mathbb{A}$, soit

$$\phi_{A, B, C} : C'(FA, FB, FC) \circ (F_{B, C} \times F_{A, B}) \longrightarrow F_{A, C} \circ C(A, B, C) ;$$

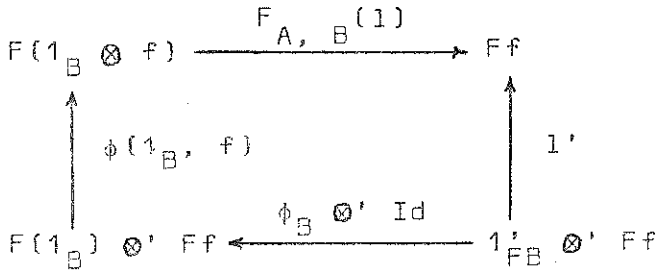
la composante correspondant au couple (g, f) sera notée $\phi(g, f)$ ou même ϕ - au lieu de $\phi_{A, B, C}(g, f)$.

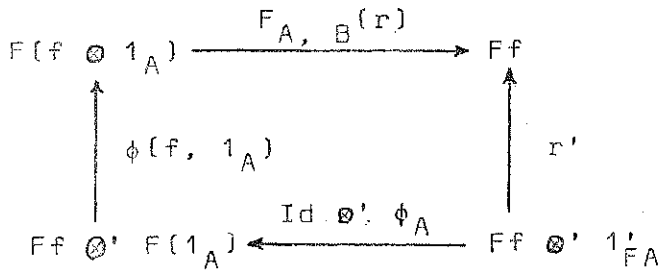
On suppose que ces données sont cohérentes au sens suivant :

(M1) pour tous f, g, h composables, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(Fh \otimes' Fg) \otimes' Ff & \xrightarrow{a'(Ff, Fg, Fh)} & Fh \otimes' (Fg \otimes' Ff) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\phi(h, g) \otimes' Id & & Id \otimes' \phi(g, f) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F(h \otimes g) \otimes' Ff & & Fh \otimes' F(g \otimes f) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\phi(h \otimes g, f) & & \phi(h, g \otimes f) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F((h \otimes g) \otimes f) & \xrightarrow{F(a(f, g, h))} & F(h \otimes (g \otimes f))
\end{array}$$

(M2) pour tout f pris dans $\mathbb{A}(A, B)$ on a la commutativité des diagrammes





1.4. Exemples de morphismes.

a. Les 2-foncteurs entre 2-catégories sont des morphismes pour lesquels les transformations naturelles indiquées en (iii) et (iv) sont des identités.

b. Les morphismes de catégories multiplicatives correspondent exactement aux morphismes entre les bicatégories qui leur sont canoniquement associées.

c. Si $\mathbb{1}$ désigne la bicatégorie à un objet $*$ telle que $\mathbb{1}(*, *)$ soit la catégorie finale $\mathbb{1}$, on appelle monade dans la bicatégorie $\mathbb{A}$ tout morphisme de $\mathbb{1}$ vers $\mathbb{A}$. La donnée d'une monade dans $\mathbb{A}$ revient à la donnée d'un monoïde dans la catégorie multiplicative $\mathbb{A}(F(*), F(*))$.

d. Si $\mathbb{E}$ est une bicatégorie localement ponctuelle, c'est-à-dire telle que pour tous A, B dans $Ob(\mathbb{E})$, $\mathbb{E}(A, B)$ est la catégorie finale $\mathbb{1}$, on appelle <u>polyade</u> dans la bicatégorie $\mathbb{A}$ tout morphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}$ est la bicatégorie à un objet associée à une c.m. $\mathcal{C}$, la donnée d'une polyade dans $\mathbb{A}$ revient à la donnée d'une catégorie relative à $\mathcal{C}$ (ayant pour ensemble d'objets $Ob(\mathbb{E})$).

Pour les détails concernant ces exemples, on pourra se reporter à J. BENABOU [1], pp. 37 à 52.

1.5. <u>Flèches adjointes</u>.

a. Soient $f : A \longrightarrow B$ et $u : B \longrightarrow A$ deux flèches de la bicatégorie $\mathbb{A}$.

On dit que f est adjointe à gauche de u (et on écrit $f \dashv u$) s'il existe des 2-cellules $\eta : 1_A \Longrightarrow u \otimes f$ et

$$\varepsilon : f \otimes u \Longrightarrow 1_B$$

telles que les diagrammes suivants (où les indices ont été omis) commutent

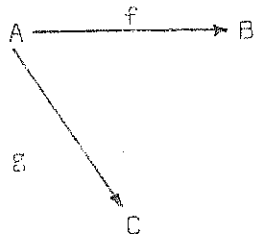
$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{\sim} & 1_A \otimes u & \xrightarrow{\eta \otimes u} & (u \otimes f) \otimes u \\ \| & & & & \downarrow s \\ u & \xleftarrow{\sim} & u \otimes 1_B & \xleftarrow{u \otimes \varepsilon} & u \otimes (f \otimes u) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f & \xrightarrow{\sim} & f \otimes 1_A & \xrightarrow{f \otimes \eta} & f \otimes (u \otimes f) \\ \| & & & & \downarrow s \\ f & \xleftarrow{\sim} & 1_B \otimes f & \xleftarrow{\varepsilon \otimes f} & (f \otimes u) \otimes f \end{array}$$

b. Pour une flèche donnée, il n'existe pas toujours d'adjointe - il suffit de penser à $\mathbb{C}$at. Mais la théorie des catégories de fractions peut suggérer le problème : "Peut-on plonger la bicatégorie $\mathbb{C}$at dans une bicatégorie où (l'image de) tout foncteur se verrait attribuer une flèche adjointe ? Y a-t-il de tels plongements pour d'autres bicatégories que $\mathbb{C}$at ?" La théorie des distributeurs fournit une réponse à ce problème. Nous verrons d'abord comment il a été résolu pour $\mathbb{C}$at et nous indiquerons quelques propriétés importantes de la bicatégorie $\mathbb{D}$ist mise en évidence dans cette voie.

1.6. Bicatégories fermées et exactes.

a. On dit qu'une bicatégorie $\mathbb{B}$ est fermée à droite si pour tout diagramme

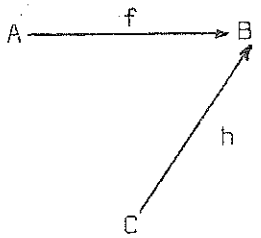


il existe une flèche unique, notée $\mathrm{Hom}_A(f, g)$, de B vers C telle que pour tout $k : B \longrightarrow C$ on ait la bijection (naturelle)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}(B, C)}[k, \mathrm{Hom}_A(f, g)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}(A, C)}(k \otimes f, g).$$

Autrement dit, on veut que pour tout f, le foncteur $(-) \otimes f$ ait un adjoint à droite.

On dit que $\mathbb{B}$ est fermée à gauche si pour tout diagramme



il existe une flèche unique, notée $\mathrm{Hom}^{\mathbb{B}}(f, h)$ de C vers A, telle que pour tout $l : C \longrightarrow A$ on ait la bijection (naturelle)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}(C,\ A)}[l,\ \mathrm{Hom}^{\mathbb{B}}(f,h)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}(C,\ B)}[f \otimes l,\ h].$$

Autrement dit, on veut que le foncteur $f \otimes (-)$ ait toujours un adjoint à droite.

On dit que $\mathbb{B}$ est <u>fermée</u> si elle est à la fois fermée à droite et à gauche.

b. On dit qu'une bicatégorie $\mathbb{B}$ est <u>exacte</u> si elle est <u>fermée</u> et si pour tous objets $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, la catégorie $\mathbb{B}(A, B)$ admet des <u>limites</u> projectives et inductives <u>finies</u>.

c. <u>Exemples</u>.

1° Toute catégorie multiplicative $\mathcal{C}$ symétrique et fermée fournit un exemple de bicatégorie fermée (à un seul objet). Celle-ci est exacte si $\mathcal{C}$ admet des limites finies.

Réciproquement, à tout objet d'une bicatégorie exacte - nous en verrons plusieurs exemples importants dans la suite - est associée une catégorie multiplicative fermée, généralement non symétrique.

2° La bicatégorie $\mathbb{B}\mathrm{im}$ est fermée. Si M est un (A, B) - bimodule et N un (A, C) - bimodule, l'ensemble des applications A-linéaires de M dans N se munit d'une structure de (B, C) - bimodule. Si P est un (C, B) - bimodule, l'ensemble des applications B-linéaires de P dans M se munit d'une structure de (C, A) - bimodule.

En outre $\mathbb{B}im$ est localement complète, donc en particulier exacte.

Ceci s'obtiendra plus loin comme cas particulier d'un résultat plus général (cf. 4.3.).

2. La bicatégorie $\mathbb{D}ist$.

2,1. Définition de $\mathbb{D}ist$.

- Les objets de $\mathbb{D}ist$ sont les petites catégories : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ...

- Une flèche de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, appelée un distributeur, est un bifoncteur $\Phi : \mathcal{B}^* \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}ns$.

  Considérons des flèches $\alpha : A \longrightarrow A'$, $\alpha' : A' \longrightarrow A''$ dans $\mathcal{A}$, et des flèches $\beta : B' \longrightarrow B$, $\beta' : B'' \longrightarrow B'$ dans $\mathcal{B}$.

  La fonctorialité de Φ en la seconde variable s'écrit

  $$[\Phi(B, \alpha') \circ \Phi(B, \alpha)](\phi) = \Phi(B, \alpha'\alpha)(\phi) \text{ et } \Phi(B, 1_A)(\phi) = \phi$$

  pour tout $\phi \in \Phi(B, A)$. Plus brièvement on pourrait écrire (en se rappelant les opérations à effectuer) $\alpha'(\alpha\phi) = (\alpha'\alpha)\phi$ et $1_A\phi = \phi$. De même la fonctorialité par rapport à la première variable s'écrit en abrégé $(\phi\beta)\beta' = \phi(\beta\beta')$ et $\phi 1_B = \phi$. La relation $\alpha(\phi\beta) = (\alpha\phi)\beta$ achève alors d'exprimer que Φ est un bifoncteur.

- Soient $\Phi : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ et $\Psi : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{C}$ deux distributeurs.

  Pour définir le composé on s'inspire du fait suivant : à Φ correspond $\bar{\Phi} : \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}$ et à Ψ correspond $\bar{\Psi} : \mathcal{B} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$;

ce dernier foncteur s'étend, par le théorème de Kan, en un foncteur $\hat{\Psi}$ de $\hat{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{C}$. On peut alors prendre le bifoncteur de $\mathcal{C}^* \times \mathcal{A}$ vers $\mathcal{E}ns$ correspondant à $\hat{\Psi} \circ \bar{\Phi}$ et l'appeler le composé de Ψ et Φ.

En faisant le calcul explicitement (à l'aide de la catégorie de représentation de $\Phi(-, A)$ et en évaluant pour chaque C la limite inductive des $\Psi(-, B_i)$ - pour B_i objet de $R_{\Phi(-, A)}$ - on trouve que

$$(\Psi \otimes \Phi)(C, A) = \frac{\coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} \Phi(B, A) \times \Psi(C, B)}{R}$$

où R désigne la relation d'équivalence engendrée par la relation $(\phi\beta, \psi) \sim (\phi, \beta\psi)$ (ϕ et ψ désignant respectivement un élément quelconque de $\Phi(B', A)$ et de $\Psi(C, B)$, β une flèche de B vers B').

Si on note $\phi' \otimes \psi'$ la classe d'un couple (ϕ', ψ'), l'équivalence donne $\phi\beta \otimes \psi = \phi \otimes \beta\psi$.

La définition de $\Psi \otimes \Phi$ se complète par les clauses :

$$\alpha(\phi \otimes \psi) = (\alpha\phi) \otimes \psi$$

$$\text{et} \quad (\phi \otimes \psi)\gamma = \phi \otimes (\psi\gamma).$$

On vérifie trivialement que cette définition n'est pas ambiguë.

- Une 2-cellule λ entre les distributeurs Φ et Φ' est une transformation naturelle entre ces bifoncteurs.

La composition définie pour les distributeurs se prolonge

aisément aux 2-cellules (on obtient facilement une flèche entre sommes ; le caractère naturel en B des 2-cellules permet d'assurer l'indépendance vis-à-vis du choix du représentant ; les autres naturalités se transportent au composé pour en faire une 2-cellule).

- Pour chaque objet $\mathcal{A}$, on choisit le distributeur particulier $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -)$.

On peut alors vérifier que ces éléments s'organisent bien en une bicatégorie.

2.2. Morphisme canonique de $\mathbb{C}$at vers $\mathbb{D}$ist.

a. On envoie les objets sur eux-mêmes.
Au foncteur $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ on associe le distributeur

$\Phi_f : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ défini par $\Phi_f(-, -) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, f(-))$.

A la transformation $\alpha : f \Longrightarrow f'$ on associe la 2-cellule

$$\Phi_\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, f(-)) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, f'(-))$$

telle que $\Phi_\alpha(B, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \alpha_A)$.

On vérifie facilement, en utilisant le lemme de Yoneda, que l'association $f \longrightarrow \Phi_f$, $\alpha \longrightarrow \Phi_\alpha$ détermine un foncteur de $\mathbb{C}$at$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ dans $\mathbb{D}$ist$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ qui est un plongement (donc pleinement fidèle et injectif sur les objets).

Remarque : On aurait pu envoyer f sur $\Phi^f = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f(-), -)$ et $\alpha : f \Longrightarrow f'$ sur $\Phi^\alpha : \Phi^{f'} \longrightarrow \Phi^f$ telle que

$$\Phi^\alpha(B, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\alpha_A, B)$$

et obtenir de la sorte un plongement de

$$\mathbb{C}at(\mathcal{A}, \mathcal{B})^* \text{ dans } \mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

b. On veut montrer que le plongement défini localement ci-dessus donne lieu à un morphisme de $\mathbb{C}at$ vers $\mathbb{D}ist$ (en tant que bicatégories).

Par définition on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -) = \Phi_{1_{\mathcal{A}}}$.

On vérifie en outre que $\Phi_g \otimes \Phi_f \simeq \Phi_{g \circ f}$

En fait ce dernier point s'obtient aisément à partir de l'énoncé suivant.

Lemme 1 : *Dans la situation* $\mathcal{A} \xrightarrow[\Phi_\delta]{\delta} \mathcal{B} \xrightarrow[\Phi]{} \mathcal{C}$.

on a de façon naturelle

$$(\Phi \otimes \Phi_\delta)(C, A) \simeq \Phi(C, \delta A).$$

Par définition de la composition on a

$$(\Phi \otimes \Phi_f)(C, A) = \coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} \frac{\mathrm{Hom}(B, fA) \times \Phi(C, B)}{R},$$

Si à $\phi_\circ \in \Phi(C, fA)$ on fait correspondre $1_{fA} \otimes \phi_\circ$ et si à $\beta \otimes \phi$ on fait correspondre $\beta\phi$, il est facile de voir que la deuxième application est bien définie et qu'elle détermine avec la première une bijection.

On montrerait de la même façon l'énoncé analogue :

Lemme 2 : *Dans la situation* $\mathcal{B} \xrightarrow[\Phi]{} \mathcal{C} \xleftarrow[\Phi^\delta]{\delta} \mathcal{A}$

on a de façon naturelle

$$(\Phi^\delta \otimes \Phi)(A, B) \simeq \Phi(\delta A, B).$$

c. Si on suppose $\mathcal{A} = \mathbb{1}$, on voit immédiatement que le plongement de $\mathbb{C}at(\mathbb{1}, \mathcal{B}) \simeq \mathcal{B}$ dans

$$\mathbb{D}ist(\mathbb{1}, \mathcal{B}) \simeq \mathcal{N}at(\mathcal{B}^* \times \mathbb{1}, \mathcal{E}ns) \simeq \hat{\mathcal{B}}$$

revient au plongement de Yoneda habituel.

2.3. Propriétés de $\mathbb{D}ist$.

2.3.1. *Proposition.*

Pour tout foncteur $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, le distributeur $\Phi_f : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ a un adjoint à droite. C'est Φ^f.

Il faut définir

$\eta : 1_{\mathcal{A}} \longrightarrow \Phi^f \otimes \Phi_f$, donc pour tous $A, A' \in |\mathcal{A}|$

$$\eta_{AA'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \left\{ \phi \otimes \psi \;\middle|\; \begin{matrix} \phi \in \mathrm{Hom}(B, fA') \\ \psi \in \mathrm{Hom}(fA, B) \end{matrix} \right\} ;$$

on pose pour $\alpha : A \longrightarrow A'$, $\eta_{AA'}(\alpha) = 1_{fA'} \otimes f(\alpha)$.

On définit ensuite

$\varepsilon : \Phi_f \otimes \Phi^f \longrightarrow 1_{\mathcal{B}}$, donc pour tous $B, B' \in |\mathcal{B}|$

$$\varepsilon_{BB'} : \left\{ \phi \otimes \psi \;\middle|\; \begin{matrix} \phi \in \mathrm{Hom}(fA, B') \\ \psi \in \mathrm{Hom}(B, fA) \end{matrix} \right\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B')$$

en posant $\varepsilon_{BB'}(\phi \otimes \psi) = \phi.\psi$. Cette définition ne dépend pas du choix du représentant car

$$\varepsilon_{BB'}(\phi\beta \otimes \psi) = (\phi\beta).\psi = (\phi.f(\beta)).\psi$$

et $$\varepsilon_{BB'}(\phi \otimes \beta\psi) = \phi.(\beta\psi) = \phi.(f(\beta).\psi), \text{ pour } \beta : A' \longrightarrow A.$$

On vérifie sans peine que ces 2-cellules satisfont les relations voulues (cf. 1.5.).

Remargue : Si f admet un adjoint à droite g, alors Φ_g est l'adjoint à droite de Φ_f.

En effet, dans ce cas

$$\Phi_g = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(-, g(-)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(f(-), -) = \Phi^f.$$

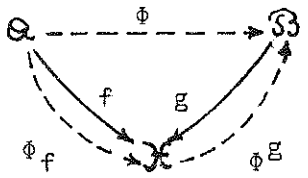
2.3.2. *Proposition.*

Pour tout distributeur $\Phi : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B}$, il existe des catégories $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ et des foncteurs $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{X}$, $g : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{X}$, $f' : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{A}$ et $g' : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tels que

$$\Phi \simeq \Phi^g \otimes \Phi_f \simeq \Phi_{g'} \otimes \Phi^{f'}.$$

a. Construction de $\mathfrak{X}$.

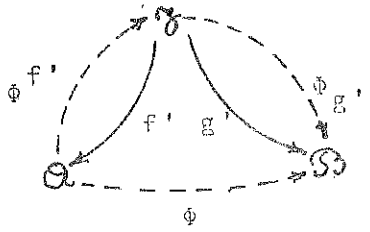
On fait la somme des catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ et on ajoute comme flèches pour chaque couple (B, A) l'ensemble $\Phi(B, A)$. Les composés d'un $\phi \in \Phi(B, A)$ avec
$\alpha : A \longrightarrow A'$ ou avec
$\beta : B' \longrightarrow B$ sont respectivement les éléments $\alpha\phi$ et $\phi\beta$.



Les foncteurs f et g sont les plongements évidents de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{X}$. La relation $\Phi \simeq \Phi^g \otimes \Phi_f$ résulte trivialement des lemmes 2.2, b. (1 et 2).

b. Construction de $\mathcal{Y}$.

On prend pour $\mathcal{Y}$ la catégorie comma pour les foncteurs g et f, munie de ses foncteurs canoniques $f' : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{A}$ et $g' : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{B}$.



De façon explicite, un objet de $\mathcal{Y}$ est un triple formé d'un objet B de $\mathcal{B}$, d'un objet A de $\mathcal{A}$ et d'un élément γ de $\Phi(B, A)$; une flèche dans $\mathcal{Y}$ de (B_1, A_1, γ_1) vers (B_2, A_2, γ_2) est un couple (β, α) tel que $\alpha\gamma_1 = \gamma_2\beta$. Le foncteur f' envoie (B_i, A_i, γ_i) sur A_i et (β, α) sur α ; le foncteur g' envoie (B_i, A_i, γ_i) sur B_i et (β, α) sur β.

Vérifions par exemple que pour A, B quelconques on a

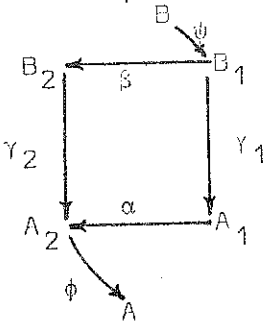
$$\Phi(B, A) \simeq \frac{\coprod_{(B_i, A_i, \gamma_i) \in Ob(\mathcal{Y})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(f'(\gamma_i), A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, g'(\gamma_i))}{R}$$

où R est la relation d'équivalence engendrée par la relation

$$(\phi(\beta, \alpha), \psi) \sim (\phi, (\beta, \alpha)\psi).$$

A $\gamma \in \Phi(B, A)$ on associe le couple $(1_A, 1_B)$.

Réciproquement, à un couple (ϕ, ψ) - où $\phi : A' \longrightarrow A$ et $\psi : B \longrightarrow B'$ - tel qu'il existe $\gamma' \in \Phi(B', A')$, on associe le composé (dans $\mathcal{X}$) $\phi\gamma'\psi$. Cette dernière application ne dépend pas du choix du représentant. En effet, si dans $\mathcal{X}$ on a le diagramme ci-dessous avec $\gamma_2\beta = \alpha\gamma_1$



donc $(\phi\alpha, \psi) \sim (\phi, \beta\psi)$

ou encore $(\phi(\beta, \alpha), \psi) \sim (\phi, (\beta, \alpha)\psi)$

on a aussi $(\phi\alpha)\gamma_1\psi = \phi\gamma_2(\beta\psi)$

(par associativité de la loi de composition dans $\mathcal{K}$).

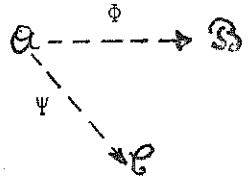
Remarque : Le but visé en construisant $\mathbb{D}$ist était d'ajouter des adjoints pour tous les foncteurs (les flèches de $\mathbb{C}$at). Ce but est atteint de la façon la plus économique possible : tout distributeur peut être représenté par un couple formé d'un foncteur et du distributeur adjoint d'un autre foncteur. On a même deux représentations différentes. La situation est analogue au cas où en théorie des fractions on peut dire qu'on a un calcul des fractions à gauche et à droite.

2.3.3. *Proposition.*

$\mathbb{D}$ist est une bicatégorie fermée.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois objets de $\mathbb{D}$ist.

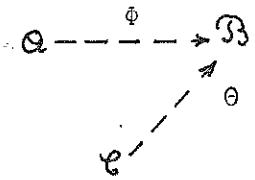
Pour le diagramme



le distributeur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi, \Psi)$ est défini par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi, \Psi)(C, B) = \mathrm{Nat}[\Phi(B, -), \Psi(C, -)].$$

Dans la situation



le distributeur $\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, \Theta)$ est défini par

$$\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, \Theta)(A, C) = \mathrm{Nat}[\Phi(-, A), \Theta(-, C)].$$

Supposons en effet donnée une transformation naturelle

$$\lambda_{C, B} : \Theta(C, B) \longrightarrow \mathrm{Nat}[\Phi(B, -), \Psi(C, -)]$$

$$\theta \rightsquigarrow \lambda_{C, B}(\theta) : A \rightsquigarrow (\phi \longrightarrow \bar{\theta}_A(\phi))$$

[où $\bar{\theta}_A(\phi)$ est une abréviation pour $\lambda_{C, B}(\theta)_A(\phi)$] ;

on lui associe les applications

$$\mu_{C, A} : (\Theta \otimes \Phi)(C, A) \longrightarrow \Psi(C, A)$$

$$\phi \otimes \theta \rightsquigarrow \bar{\theta}_A(\phi).$$

On vérifie que les $\mu_{C, A}$ sont bien définies (ce qui résulte de la naturalité par rapport à B des $\lambda_{C, B}$) et qu'elles sont naturelles par rapport à C et A.

Réciproquement, si l'on s'est donné une famille naturelle $\mu_{C, A}$, on lui associe la famille $\lambda_{C, B}$ telle que

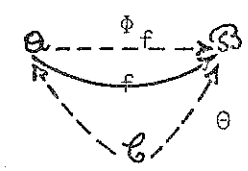
$$\lambda_{C, B}(\theta)_A(\phi) = \mu_{C, A}(\phi \otimes \theta).$$

On montre ainsi pas à pas l'existence d'une bijection naturelle entre les ensembles

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Dist}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}[\Theta, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi, \Psi)] \text{ et } \mathrm{Hom}_{\mathrm{Dist}(\mathcal{A}, \mathcal{C})}[\Theta \otimes \Phi, \Psi].$$

Cas particuliers.

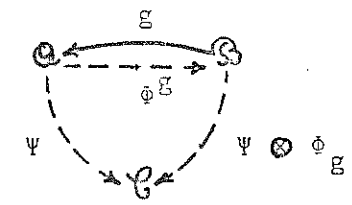
a. Si $\Phi = \Phi_f$, on voit facilement que $\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, \Theta) \simeq \Phi^f \otimes \Theta$,



car $\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, \Theta)(A, C)$
$= \mathrm{Nat}[\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, fA), \Theta(-, C)]$
$\simeq \Theta(fA, C)$
$\simeq [\Phi^f \otimes \Theta](A, C)$.

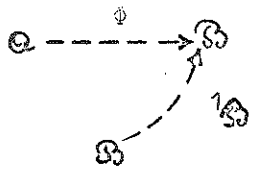
$\Phi^f \otimes \Theta$

De même, si $\Phi = \Phi^g$, on voit que



$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi, \Psi)(C, B)$
$= \mathrm{Nat}[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(gB, -), \Psi(C, -)]$
$\simeq \Psi(C, gB)$
$\simeq [\Psi \otimes \Phi_g](C, B)$.
Donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi, \Psi) \simeq \Psi \otimes \Phi_g$.

b. Dans la situation ci-dessous



$\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, 1_{\mathcal{B}})$ est noté $D\Phi$ et on l'appelle le dual de Φ. Si $\Phi = \Phi_f$, alors $D\Phi_f = \Phi^f$.

Si de plus $\mathcal{A} = 1$ et $F : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathcal{E}ns$ est le foncteur associé à Φ, on trouve que $D\Phi$ correspond à un foncteur covariant de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}ns$, noté DF, et défini par

$$DF(B) = \mathrm{Nat}[F(-), \mathrm{Hom}(-, B)].$$

2.3.4. *Proposition.*

$\mathcal{D}ist$ est localement complète.

Ceci signifie que pour chaque couple $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ d'objets de $\mathcal{D}ist$, la catégorie $\mathcal{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est complète. Ceci résulte du fait que $\mathcal{E}ns$ est complète bien sûr.

Corollaire. $\mathcal{D}ist$ est une bicatégorie exacte.

3. La bicatégorie $\mathbb{D}ist(\mathcal{V})$.

Dans toute cette étude nous supposerons que $\mathcal{V}$ est une catégorie multiplicative bien complète à droite (on suppose donc que $\mathcal{V}$ possède des limites inductives et que la multiplication commute à ces limites).

3.1. $\mathcal{V}$-foncteurs vers $\mathcal{V}$.

Si $\mathcal{V}$ est fermée, donc si elle est elle-même une $\mathcal{V}$-catégorie, on sait ce qu'est un $\mathcal{V}$-foncteur. Sinon, on peut poser les définitions suivantes.

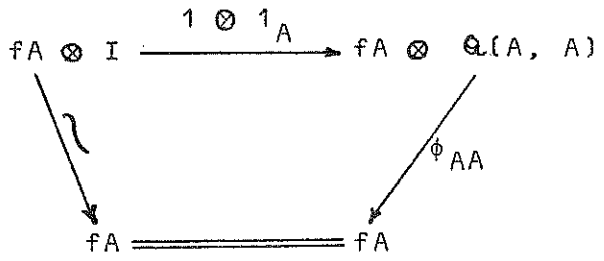
a. On appelle $\mathcal{V}$-foncteur covariant de la $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{V}$ un couple (f, ϕ), où

f est une application de $Ob(\mathcal{A})$ dans $Ob(\mathcal{V})$,

et ϕ une famille de flèches $\phi_{AA'} : fA \otimes \mathcal{A}(A, A') \longrightarrow fA'$,

indexée par les couples d'objets de $\mathcal{A}$, telle que les diagrammes suivants commutent toujours

$$\begin{array}{ccc}
[fA \otimes \mathcal{A}(A, A')] \otimes \mathcal{A}(A', A'') & \xrightarrow{\sim} & fA \otimes [\mathcal{A}(A, A') \otimes \mathcal{A}(A', A'')] \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_{AA'} \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \mu} \\
fA' \otimes \mathcal{A}(A', A'') & & fA \otimes \mathcal{A}(A, A'') \\
& {\scriptstyle \phi_{A'A''}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \phi_{AA''}} & \\
& fA'' &
\end{array}$$



Exemples.

1° Si $\mathcal{V}$ = Ab et si $\mathcal{Q}$ a un seul objet A (donc si $\mathcal{Q}$ est un anneau) un $\mathcal{V}$-foncteur de $\mathcal{Q}$ vers Ab est simplement un A-module à droite.

2° Plus généralement, si $\mathcal{Q}$ est une $\mathcal{V}$-catégorie à un seul objet (ce qui équivaut à un monoïde dans $\mathcal{V}$), un $\mathcal{V}$-foncteur de $\mathcal{Q}$ vers $\mathcal{V}$ est un module à droite sur ce monoïde.

3° Pour tout objet A_o de $\mathcal{Q}$ on peut définir le $\mathcal{V}$-foncteur $\mathcal{Q}(A_o, -)$ par $f : A \longrightarrow \mathcal{Q}(A_o, A)$ et

$\phi_{AA'} = \mu : \mathcal{Q}(A_o, A) \otimes \mathcal{Q}(A, A') \longrightarrow \mathcal{Q}(A_o, A')$.

Si $\mathcal{V} = \mathcal{E}ns$, on retrouve les foncteurs de Yoneda covariants habituels.

b. La notion de $\mathcal{V}$-foncteur contravariant de $\mathcal{Q}$ vers $\mathcal{V}$ peut se définir de manière analogue.

Si $\mathcal{V}$ est symétrique on peut parler de la $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{Q}^*$, duale de $\mathcal{Q}$, et dans ce cas définir un tel foncteur comme $\mathcal{V}$-foncteur covariant de $\mathcal{Q}^*$ vers $\mathcal{V}$.

c. Si $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{B}$ sont deux $\mathcal{V}$-catégories, un $\mathcal{V}$-bifoncteur covariant en $\mathcal{Q}$ et contravariant en $\mathcal{B}$, vers $\mathcal{V}$, est défini par la donnée d'un triple $\Phi = (f, \alpha, \beta)$, où

f est une application de $Ob(\mathcal{B}) \times Ob(\mathcal{A})$ vers $Ob(\mathcal{V})$

$$\alpha = \left(\alpha^{B}_{AA'} \;\middle|\; \begin{matrix} A, A' \in Ob(\mathcal{A}) \\ B \in Ob(\mathcal{B}) \end{matrix} \right) \text{ avec } \alpha^{B}_{AA'} : f(B,A) \otimes \mathcal{A}(A,A') \longrightarrow f(B,A')$$

$$\beta = \left(\beta^{A}_{B'B} \;\middle|\; \begin{matrix} B, B' \in Ob(\mathcal{B}) \\ A \in Ob(\mathcal{A}) \end{matrix} \right) \text{ avec } \beta^{A}_{B'B} : \mathcal{B}(B',B) \otimes f(B, A) \longrightarrow f(B',A),$$

ces données étant telles que

(i) pour tout $B \in Ob(\mathcal{B})$ l'application $f(B, -)$ et la famille $\alpha^{B}_{AA'}$, forment un $\mathcal{V}$-foncteur covariant de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{V}$;

(ii) pour tout $A \in Ob(\mathcal{A})$ l'application $f(-, A)$ et la famille $\beta^{A}_{B'B}$ forment un $\mathcal{V}$-foncteur contravariant de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{V}$;

(iii) pour tous A, A', B, B' le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B}(B', B) \otimes f(B,A) \otimes \mathcal{A}(A, A') & \xrightarrow{\beta^{A}_{B'B} \otimes 1} & f(B',A) \otimes \mathcal{A}(A,A') \\
\Big\downarrow 1 \otimes \alpha^{B}_{AA'} & & \Big\downarrow \alpha^{B'}_{AA'} \\
\mathcal{B}(B', B) \otimes f(B,A') & \xrightarrow{\beta^{A'}_{B'B}} & f(B', A')
\end{array}$$

Exemples.

1° Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux Ab-catégories à un objet, identifiables à des anneaux A et B, un bifoncteur du type indiqué est un (A, B)-bimodule (à gauche sur A et à droite sur B).

2° Si $\mathcal{V} = \mathcal{E}ns$, on retrouve les bifoncteurs habituels.

3.2. Définition de $\mathbb{D}ist(\mathcal{V})$.

- Les objets sont les $\mathcal{V}$-catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ...

- Une flèche de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, appelée un distributeur, est un $\mathcal{V}$-bifoncteur vers $\mathcal{V}$, contravariant en $\mathcal{B}$ et covariant en $\mathcal{A}$.

- Une 2-cellule λ entre deux distributeurs $\Phi, \Psi : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ consiste en la donnée d'une famille $(\lambda_{BA} \mid A \in Ob(\mathcal{A}), B \in Ob(\mathcal{B})$ de flèches de $\mathcal{U}$, donnée compatible avec les actions de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \Phi(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A') & \xrightarrow{\Phi_{AA'}} & \Phi(B, A') \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_{BA} \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{BA'}} \\ \Psi(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A') & \xrightarrow{\Psi_{AA'}} & \Psi(B, A') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(B', B) \otimes \Phi(B, A) & \xrightarrow{\Phi_{B'B}} & \Phi(B', A) \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \lambda_{BA}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{B'A}} \\ \mathcal{B}(B', B) \otimes \Psi(B, A) & \xrightarrow{\Psi_{B'B}} & \Psi(B', A) \end{array}$$

(on a écrit $\Phi_{AA'}$, pour $\alpha^{B}_{\Phi_{AA'}}$, etc., en vue d'alléger les notations).

- Soient $\Phi : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ et $\Psi : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{C}$ deux distributeurs. On se propose de définir leur composé de manière à obtenir comme cas particuliers le produit tensoriel de bimodules ou le composé défini plus haut de bifoncteurs vers $\mathcal{E}ns$ (cf. 2.1.). On pose $(\Psi \otimes \Phi)(C, A)$ égal au conoyau de 2 flèches d_0 et d_1 de

$$\coprod_{B, B' \in Ob(\mathcal{B})} \Psi(C, B) \otimes \mathcal{B}(B, B') \otimes \Phi(B', A) \text{ vers}$$

$$\coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} \Psi(C, B) \otimes \Phi(B, A),$$

d_0 étant la factorisation canonique des flèches

$$\Psi_{BB'} \otimes id_{\Phi(B', A)}$$

et d_1 celle des flèches

$$id_{\Psi(C, B)} \otimes \Phi_{BB''}$$

Les flèches décrivant l'action de $\mathcal{Q}(A, A')$ et de $\mathcal{C}(C, C')$ sur ce conoyau s'obtiennent à partir de l'action de $\mathcal{Q}(A, A')$ sur les $\Phi(B, A)$ et de l'action de $\mathcal{C}(C, C')$ sur les $\Psi(C, B)$, puisque la multiplication commute aux sommes et aux conoyaux. Il faut montrer qu'on a bien défini de la sorte un bifoncteur. La vérification des propriétés (i), (ii) et (iii) ne pose guère de problème, bien qu'elle soit longue à écrire.

- Pour étendre la composition aux 2-cellules, on obtient facilement une flèche entre les sommes, et les compatibilités avec les actions assurent l'une la factorisation à travers les conoyaux, l'autre la compatibilité de la flèche définie avec cette action-là.

- Pour chaque objet $\mathcal{Q}$, on choisit le distributeur particulier défini par $f(A', A'') = \mathcal{Q}(A', A'')$,

$$\alpha_{A'A''} = \mu : \mathcal{Q}(A, A') \otimes \mathcal{Q}(A', A'') \longrightarrow \mathcal{Q}(A, A''),$$

$$\beta_{A''A} = \mu : \mathcal{Q}(A'', A) \otimes \mathcal{Q}(A, A') \longrightarrow \mathcal{Q}(A'', A').$$

On peut alors vérifier que ces éléments s'organisent bien en une bicatégorie.

3.3. Morphisme canonique de $\mathbb{C}at(\mathcal{V})$ vers $\mathbb{D}ist(\mathcal{V})$.

a. On envoie les objets sur eux-mêmes.

Si $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un $\mathcal{V}$-foncteur, on lui associe le distributeur Φ_f défini par

$\Phi_f(B, A) = \mathcal{B}(B, fA)$;

$\Phi_{f,\, AA'} = \mu \circ (1 \otimes f_{AA'}) : \mathcal{B}(B, fA) \otimes \mathcal{A}(A, A')$

$\xrightarrow{id \otimes f_{AA'}}$ $\mathcal{B}(B, fA) \otimes \mathcal{B}(fA, fA')$

$\xrightarrow{\mu}$ $\mathcal{B}(B, fA')$

$\Phi_{f,\, B'B} = \mu : \mathcal{B}(B', B) \otimes \mathcal{B}(B, fA) \longrightarrow \mathcal{B}(B', fA)$.

Si $\alpha : f \Longrightarrow g$ est une $\mathcal{V}$-transformation naturelle, on lui associe la 2-cellule Φ_α définie par

$\Phi_{\alpha,\, BA} : \mathcal{B}(B, fA) \underline{\sim} \mathcal{B}(B, fA) \otimes I \xrightarrow{1 \otimes \alpha_A} \mathcal{B}(B, fA) \otimes \mathcal{B}(fA, gA)$

$\xrightarrow{\mu}$ $\mathcal{B}(B, gA)$.

Les distributeurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ et les 2-cellules entre ceux-ci forment une catégorie $\mathbb{D}ist(\mathcal{V})(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Si on désigne par $\mathbb{C}at(\mathcal{V})(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie des $\mathcal{V}$-foncteurs et $\mathcal{V}$-transformations naturelles de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, on peut vérifier que l'associa-

tion $f \longrightarrow \Phi_f$, $\alpha \longrightarrow \Phi_\alpha$ décrite ci-dessus détermine un foncteur de $\mathbb{C}at(\mathcal{V})(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ vers $\mathbb{D}ist(\mathcal{V})(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, lequel est pleinement fidèle et injectif sur les objets.

b. On veut montrer que le plongement défini en a. donne lieu à un morphisme de $\mathbb{C}at(\mathcal{V})$ vers $\mathbb{D}ist(\mathcal{V})$ (en tant que bicatégories).

Par définition on a $\Phi_{1_\mathcal{A}}$ égal au distributeur identique sur $\mathcal{A}$. On vérifie alors que pour deux $\mathcal{V}$-foncteurs composables f et g on a la relation

$$\Phi_g \otimes \Phi_f \simeq \Phi_{g \circ f}.$$

Ceci s'obtient comme conséquence du lemme suivant :

Lemme 1. *Dans la situation* $\mathcal{A} \xrightarrow[\Phi_f]{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}$

on a de façon naturelle

$$(\phi \otimes \Phi_f)(C, A) \simeq \phi(C, fA).$$

La démonstration est analogue à celle esquissée pour le cas $\mathcal{V} = \mathcal{E}ns$.

On définit une flèche ϕ de $\coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} \Phi(C, B) \otimes \mathcal{B}(B, fA)$ vers $\Phi(C, fA)$: c'est celle déterminée par l'action de $\mathcal{B}$ sur Φ.

Elle égalise d_0 et d_1 (l'action étant associative) et se factorise donc à travers leur conoyau ; soit ϕ_1 cette factorisation.

Désignons d'autre part par ϕ' le composé suivant :

$$\Phi(C, fA) \xrightarrow{\sim} \Phi(C, fA) \otimes I \xrightarrow[id \otimes 1_{fA}]{} \Phi(C, fA) \otimes \mathcal{B}(fA, fA)$$

$$\Phi(C, fA) \otimes \mathcal{B}(fA, fA) \xrightarrow{i_{fA}} \coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} \Phi(C, B) \otimes \mathcal{B}(B, fA).$$

En la faisant suivre de la projection sur le conoyau, on obtient ϕ_2.

Vérifions que ϕ_1 et ϕ_2 sont inverses l'une de l'autre.

$\phi_1 \circ \phi_2 = 1_{\Phi(C,\, fA)}$ car c'est le composé

$$\Phi(C,\, fA) \xrightarrow{\sim} \Phi(C,\, fA) \otimes I \xrightarrow[1 \otimes 1_{fA}]{} \Phi(C,\, fA) \otimes \mathfrak{B}(fA,\, fA) \downarrow {}^{\Phi}{}_{fA,\, fA} \Phi(C,\, fA).$$

$\phi_2 \circ \phi_1 = 1_{(\Phi \otimes \Phi_f(C,\, A)}$ car $\phi'\phi$ et l'identité sur la somme

sont égalisées par le conoyau. En effet, ces deux flèches peuvent s'obtenir en faisant précéder d_0 et d_1 respectivement de l'injection déterminée par les flèches composées

$$\Phi(C,\, B) \otimes \mathfrak{B}(B,\, fA) \xrightarrow{\sim} \Phi(C,\, B) \otimes \mathfrak{B}(B,\, fA) \otimes I \downarrow {\scriptstyle id \otimes id \otimes 1_{fA}} \Phi(C,\, B) \otimes \mathfrak{B}(B,\, fA) \otimes \mathfrak{B}(fA,\, fA).$$

c. On aurait pu envoyer le $\mathcal{V}$-foncteur $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ sur le distributeur $\Phi^f : \mathfrak{B} \dashrightarrow \mathfrak{A}$ défini par $\Phi^f(A, B) = \mathfrak{B}(fA, B)$ sur les objets, et ainsi de suite. A ce propos, on notera le lemme suivant

Lemme 2. *Dans la situation* $\mathfrak{B} \overset{\Phi}{\dashrightarrow} \mathfrak{C} \underset{\Phi\delta}{\overset{\delta}{\dashleftarrow}} \mathfrak{A}$

on a de façon naturelle,

$$(\Phi\delta \otimes \Phi)(A,\, B) \simeq \Phi(\delta A,\, B).$$

Remargue : Si M est un (B, C)-bimodule et si f : A ⟶ B est un homomorphisme d'anneaux, auquel on associe une structure de (A, B)-bimodule sur B, alors le (A, C)-bimodule obtenu en faisant le produit tensoriel sur B coïncide avec le (A, C)-bimodule $f^*(M)$ obtenu "par restriction de l'anneau des scalaires" au moyen de f. Si on considère un (C, A)-bimodule N, le produit tensoriel sur A de N et du (A, B)-bimodule cité donne le (C, B)-bimodule obtenu par "extension de l'anneau des scalaires".

La même observation vaut "de l'autre côté" (situation du lemme 2).

3.4. Propriétés de $\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$.

3.4.1. *Proposition.*

Pour tout $\mathcal{U}$-foncteur $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, le distributeur Φ_f a un adjoint à droite, c'est Φ^f.

Il faut définir une 2-cellule de

$\eta : 1_{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Phi^f \otimes \Phi_f$, donc pour tous $A, A' \in |\mathcal{A}|$

$\eta_{AA'} : \mathcal{A}(A, A') \longrightarrow (\Phi^f \otimes \Phi_f)(A, A')$.

On prend la flèche composée suivante

$$\mathcal{A}(A, A') \longrightarrow \mathcal{B}(fA, fA') \otimes I \xrightarrow[id \times 1_{fA'}]{} \mathcal{B}(fA, fA') \otimes \mathcal{B}(fA', fA')$$

$$\downarrow i_{fA'}$$

$$\coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} \mathcal{B}(fA, B) \otimes \mathcal{B}(B, fA')$$

qu'on fait suivre de la projection sur le conoyau.

On définit ensuite

$\varepsilon : \Phi_f \otimes \Phi^f \longrightarrow 1_{\mathcal{B}}$, donc pour tous $B, B' \in |\mathcal{B}|$

$\varepsilon_{BB'} : (\Phi_f \otimes \Phi^f)(B, B') \longrightarrow \mathcal{B}(B, B')$ comme factorisation à travers le conoyau de la flèche

$$\coprod_{A \in Ob(\mathcal{A})} \Phi_f(B, A) \otimes \Phi^f(A, B') \longrightarrow \mathcal{B}(B, B')$$

induite par les flèches de composition dans $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}(B, fA) \otimes \mathcal{B}(fA, B') \longrightarrow \mathcal{B}(B, B').$$

Il faut alors vérifier que les 2-cellules satisfont bien les relations voulues pour que l'on ait $\Phi_f \dashv \Phi^f$.

Remarque : Dans la définition de η on aurait pu prendre la flèche composée

$$\mathcal{A}(A, A') \longrightarrow I \otimes \mathcal{B}(fA, fA') \longrightarrow \mathcal{B}(fA, fA) \otimes \mathcal{B}(fA, fA')$$

$$\downarrow i_{fA}$$

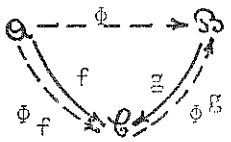
$$\coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} \mathcal{B}(fA, B) \otimes \mathcal{B}(B, fA').$$

Celle-ci et la flèche ci-dessus sont égalisées par le conoyau.

3.4.2. *Proposition.*

Pour tout distributeur $\Phi : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$, il existe une catégorie $\mathcal{C}$ et des $\mathcal{V}$-foncteurs $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$, $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ tels que $\Phi \simeq \Phi^g \otimes \Phi_f$.

On prend $Ob(\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{A}) \amalg Ob(\mathcal{B})$.



$\mathcal{C}(A,A') = \mathcal{Q}(A, A')$ $(A, A' \in Ob(\mathcal{Q}))$

$\mathcal{C}(B,B') = \mathcal{B}(B,B')$ $(B, B' \in Ob(\mathcal{B}))$

$\mathcal{C}(B,A) = \Phi(B,A)$

$\mathcal{C}(A,B) = 0$ (l'objet initial de $\mathcal{V}$).

La composition comme dans $\mathcal{Q}$ ou comme dans $\mathcal{B}$ quand c'est possible. Sinon elle est définie par l'action de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{B}$ sur Φ. Le caractère bifonctoriel de Φ assure justement qu'on a bien une $\mathcal{V}$-catégorie.

Les foncteurs f et g sont les plongements évidents de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$. L'isomorphisme annoncé résulte aisément du lemme 3.3., b, 1.

3.4.3. Il n'est plus vrai que $\mathbb{D}ist(\mathcal{V})$ soit - en général - une bicatégorie fermée. Nous verrons plus loin qu'on peut retrouver ce résultat en mettant des hypothèses supplémentaires sur $\mathcal{V}$. Il pourra alors s'obtenir comme cas particulier d'un théorème plus général sur les bicatégories exactes.

On exigera par exemple que $\mathcal{V}$ soit fermée. Cette condition paraîtra naturelle si l'on se reporte au cas de Ab : chaque groupe abélien peut être considéré comme un $\mathbb{Z}$ - $\mathbb{Z}$-bimodule, donc si l'on veut pouvoir parler de l'objet des homomorphismes entre bimodules en général, il faut au moins pouvoir parler de l'objet des homomorphismes entre deux groupes abéliens.

3.4.4. *Proposition.*

Pour toutes $\mathcal{V}$-catégories $\mathcal{Q}$, $\mathcal{B}$, la catégorie $\mathbb{D}ist(\mathcal{Q},\mathcal{B})$ admet des limites inductives.

Si on se donne un diagramme de distributeurs, ayant pour sommets la famille $(\Phi_i \mid i \in I)$, on peut définir la limite inductive Φ

en posant

$$\Phi(B,A) = \varinjlim \Phi_i(B,A).$$

L'action de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ sur Φ se définit aisément à partir de l'action sur les Φ_i, puisque la multiplication commute aux limites inductives.

3.4.5. *Proposition.*

Si $\mathcal{U}$ admet des limites projectives, alors pour toutes $\mathcal{U}$-catégories $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, la catégorie $\mathcal{D}ist(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ admet des limites projectives.

Pour un diagramme de sommets $(\Phi_i \mid i \in I)$ on définit la limite projective Φ en posant

$$\Phi(B,A) = \varprojlim \Phi_i(B,A).$$

Il est à noter que pour définir l'action de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ sur Φ il n'est pas nécessaire de supposer que la multiplication commute aux limites projectives (ce qui n'est d'ailleurs généralement pas le cas) : pour obtenir une flèche de

$$(\varprojlim \Phi_i(B, A)) \otimes \mathcal{Q}(A, A') \text{ vers } \varprojlim \Phi_i(B, A')$$

il suffit de considérer le cône projectif

$$\begin{array}{ccc} (\varprojlim \Phi_i(B, A)) \otimes \mathcal{Q}(A, A') & \xrightarrow{pr_i \otimes id} & \Phi_i(B, A) \otimes \mathcal{Q}(A, A') \\ & & \downarrow \Phi_i, AA' \\ & & \Phi_i(B, A'). \end{array}$$

4. Distributeurs pour un cosmos.

Nous supposerons maintenant que $\mathcal{V}$ est un cosmos c'est-à-dire une catégorie multiplicative symétrique fermée complète à gauche et à droite.

4.1. *Proposition.*

Pour toutes $\mathcal{V}$-catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est une $\mathcal{V}$-catégorie.

a. Soient Φ et Φ' deux distributeurs : $\mathcal{A} \overset{\Phi}{\underset{\Phi'}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$.

Il faut définir un objet $D(\Phi, \Phi')$ de $\mathcal{V}$ qui représente l'ensemble des 2-cellules de Φ vers Φ'. Cet objet sera l'égalisateur du couple δ_0, δ_1

$$\prod_{(A,B)\in Ob(\mathcal{A}\times\mathcal{B})} \mathcal{V}(\Phi(B,A), \Phi'(B,A)) \overset{\delta_0}{\underset{\delta_1}{\rightrightarrows}} \prod_{A,B,A',B'} \mathcal{V}[\mathcal{B}(B',B) \otimes \Phi(B,A) \otimes \mathcal{A}(A,A'), \Phi'(B',A')]$$

où δ_0 est définie à partir du cône suivant :

on prend la projection d'indice (A', B') et on la fait suivre de la flèche correspondant par adjonction (de fermeture) au composé

$$\mathcal{V}(\Phi(B', A'), \Phi'(B', A')) \otimes \mathcal{B}(B', B) \otimes \Phi(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A')$$

$$\downarrow \text{id} \otimes (\Phi_{B'B} \circ \Phi_{AA'})$$

$$\mathcal{V}(\Phi(B', A'), \Phi'(B', A')) \otimes \Phi(B', A')$$

$$\downarrow \text{ev}$$

$$\Phi'(B', A'),$$

et où δ_1 est définie par le cône suivant :

on prend la projection d'indice (A, B) et on la fait suivre de la flèche correspondant par adjonction (de fermeture) au composé

$$\mathcal{U}(\Phi(B,A), \Phi'(B,A)) \otimes \mathcal{B}(B', B) \otimes \Phi(B,A) \otimes \mathcal{Q}(A, A')$$

$$\downarrow \sigma \otimes id \otimes id$$

$$\mathcal{B}(B' , B) \otimes \mathcal{U}(\Phi(B,A), \Phi'(B,A)) \otimes \Phi(B, A) \otimes \mathcal{Q}(A, A')$$

$$\downarrow id \otimes ev \otimes id$$

$$\mathcal{B}(B' , B) \otimes \Phi'(B,A) \otimes \mathcal{Q}(A, A')$$

$$\downarrow \Phi'_{B'B} \circ \Phi'_{AA'}$$

$$\Phi'(B', A').$$

b. Il faut maintenant encore définir pour tout triple de distributeurs Φ, Φ', Φ'' une composition de

$$D(\Phi, \Phi') \otimes D(\Phi', \Phi'') \text{ vers } D(\Phi, \Phi'')$$

et pour tout distributeur Φ définir la 2-cellule identique sur Φ par une flèche de I vers $D(\Phi, \Phi)$. Ceci ne présente pas de difficulté essentielle. Remarquons par exemple qu'on peut obtenir une flèche "de composition" à partir d'une bonne flèche dans le produit

$$\prod_{A,\,B} \mathcal{U}(\Phi(B, A), \Phi''(B, A))$$

et celle-ci à partir d'un cône convenable. On n'a pas besoin

de la commutation de la multiplication aux noyaux (cette condition n'est d'ailleurs en général pas vérifiée).

Il faut ensuite montrer que les axiomes des $\mathcal{U}$-catégories sont bien vérifiés.

4.2. *Proposition.*

$\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est $\mathcal{U}$-complète à droite et à gauche.

On sait déjà, d'après les hypothèses faites sur $\mathcal{U}$ et les propositions 3.4.4. et 3.4.5., que $\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est complète à droite et à gauche. Conformément aux définitions de $\mathcal{U}$-complétude, il faut encore montrer l'existence pour tout $U \in |\mathcal{U}|$ et tout $\Phi \in |\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})|$

(i) d'un objet $U \otimes \Phi$ de $\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tel que l'on ait

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}ist(\mathcal{A},\mathcal{B})}(U \otimes \Phi, \Phi') \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, D(\Phi, \Phi'))$$

pour tout $\Phi' \in |\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})|$;

(ii) d'un objet Φ^U de $\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tel que l'on ait

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}ist(\mathcal{A},\mathcal{B})}(\Phi', \Phi^U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, D(\Phi', \Phi))$$

pour tout $\Phi' \in |\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})|$.

Pour cela on pose

$$(U \otimes \Phi)(B, A) = U \otimes \Phi(B, A) \text{ et}$$

$$\Phi^U(B, A) = \mathcal{U}(U, \Phi(B, A)),$$

ces définitions se complétant de manière très naturelle en ce qui

concerne les actions de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{B}$.

Les vérifications sont laissées au lecteur.

Corollaire.

Si on prend $\mathcal{Q} = \mathbb{1}$, on obtient en particulier le fait que la catégorie $\mathcal{C} = \mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathbb{1}, \mathcal{Q})$ est une $\mathcal{U}$-catégorie, $\mathcal{U}$-complète à droite et à gauche.

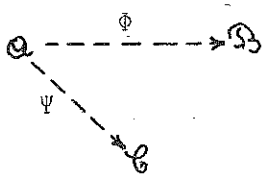
4.3. *Proposition.*

$\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$ est une bicatégorie fermée.

On peut mettre ce résultat en évidence de deux manières différentes, selon l'usage que l'on fait des hypothèses sur $\mathcal{U}$.

Première manière (plus élémentaire mais plus longue).

Soit la situation ci-dessous, où il faut définir le distributeur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\Phi, \Psi)$ tel que l'on ait la bijection naturelle



$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{B},\mathcal{C})}[\Theta, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\Phi, \Psi)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{Q},\mathcal{C})}[\Theta \otimes \Phi, \Psi].$$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\Phi, \Psi)(C, B)$ est défini comme noyau des flèches suivantes

$$\prod_{A} \mathcal{U}(\Phi(B, A), \Psi(C, A)) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \prod_{A,A'} \mathcal{U}[\Phi(B, A) \otimes \mathcal{Q}(A, A'), \Psi(C, A')]$$

où ∂_0 s'obtient à partir des flèches correspondant par adjonction de fermeture aux composés

$$\mathcal{U}(\Phi(B, A), \Psi(C, A)) \otimes \Phi(B, A) \otimes \mathcal{Q}(A, A')$$

$$\downarrow \quad ev \otimes id$$

$$\Psi(C, A) \otimes \mathcal{Q}(A, A')$$

$$\downarrow \quad \Psi_{AA'}$$

$$\Psi(C, A')$$

et où ∂_1 s'obtient à partir des correspondants des composés

$$\mathcal{U}(\Phi(B, A'), \Psi(C, A')) \otimes \Phi(B, A) \otimes \mathcal{Q}(A, A')$$

$$\downarrow \quad id \otimes \Phi_{AA'}$$

$$\mathcal{U}(\Phi(B, A'), \Psi(C, A')) \otimes \Phi(B, A')$$

$$\downarrow \quad ev$$

$$\Psi(C, A').$$

Il faut définir l'action de $\mathcal{D}$ à droite et de $\mathcal{C}$ à gauche.

Regardons comment on peut mettre en évidence la bijection indiquée.

Une 2-cellule $\lambda : \Theta \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\Phi, \Psi)$ étant donnée, on en déduit la famille de flèches composées

$$\lambda_{CBA} : \Theta(C, B) \xrightarrow{\lambda_{CB}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\Phi, \Psi)(C, B)$$

$$\downarrow$$

$$\prod_A \mathcal{U}(\Phi(B, A), \Psi(C, A))$$

$$\downarrow \quad p_A$$

$$\mathcal{U}(\Phi(B,A), \Psi(C,A)).$$

Celles-ci correspondent par adjonction à des flèches

$$\mu_{CBA} : \Theta(C, B) \otimes \Phi(B, A) \longrightarrow \Psi(C, A) ;$$

d'où une famille de flèches

$$\mu_{CA} : \coprod_B \Theta(C, B) \otimes \Phi(B, A) \longrightarrow \Psi(C, A)$$

se factorisant à travers $(\Theta \otimes \Phi)(C, A)$ à cause de la naturalité en B des λ_{CB}, et naturelles par rapport à C et A vu que chaque λ_{CB} égalise un ∂_0 et un ∂_1 tels que définis ci-dessus.

Réciproquement, si l'on se donne une famille de flèches

$$\mu'_{CA} : (\Theta \otimes \Phi)(C, A) \longrightarrow \Psi(C, A),$$

on en déduit la famille

$$\mu'_{CBA} : \Theta(C, B) \otimes \Phi(B, A) \xrightarrow{i_B} \coprod_B \Theta(C, B) \otimes \Phi(B, A) \longrightarrow (\Theta \otimes \Phi)(C,A)$$

$$\downarrow \mu'_{CA}$$

$$\Psi(C, A)$$

correspondant par adjonction à la famille

$$\lambda'_{CBA} : \Theta(C, B) \longrightarrow \mathcal{G}(\Phi(B, A), \Psi(C, A)) ; \text{ d'où les}$$

$$\lambda'_{CB} : \Theta(C, B) \longrightarrow \prod_A \mathcal{G}(\Phi(B, A), \Psi(C, A))$$

qui se factorisent bien à travers le noyau $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi, \Psi)(C, B)$ vu la naturalité en A et sont naturelles en C et B puisque chaque μ'_{CA} égalise un d_0 et un d_1 tels que définis plus tôt (cf. la définition du composé de 2 distributeurs).

Le reste de la vérification se fait par un calcul sans difficulté de principe.

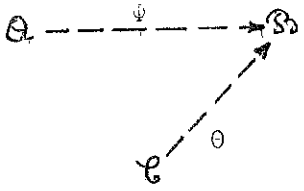
Deuxième manière.

Sous les hypothèses données sur $\mathcal{U}$ on peut définir un distributeur Φ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ (Ψ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{C}$) comme $\mathcal{U}$-foncteur de $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{A}$ vers $\mathcal{U}$, (de $\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{A}$ vers $\mathcal{U}$) et prendre

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi, \Psi)(C, B) = \mathrm{Nat}[\Phi(B, -), \Psi(C, -)]$$

c'est-à-dire l'objet des flèches dans $\mathcal{U}^{\mathcal{A}}$ de $\Phi(B, -)$ vers $\Psi(C, -)$.

De même, dans la situation

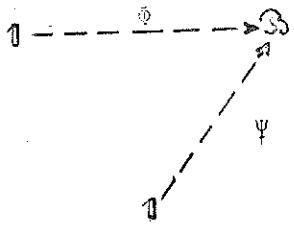


on peut définir le distributeur $\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, \Theta)$ par

$$\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, \Theta)(A, C) = \mathrm{Nat}[\Phi(-, A), \Theta(-, C)],$$

Cas particuliers.

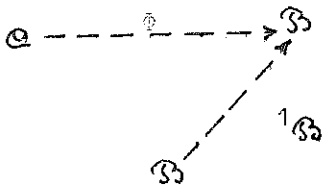
a. Si l'on a la situation ci-dessous, Φ et Ψ correspondant respectivement aux $\mathcal{U}$-foncteurs



$F : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathcal{U}$ et $G : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathcal{U}$,

$\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, \Psi) = \mathrm{Nat}(F, G)$.

b. Dans la situation



$\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\Phi, 1_{\mathcal{B}})$

est aussi noté $D\Phi$ est appelé le distributeur dual (à droite) de Φ.

Corollaire.

Si $\mathcal{U}$ est un cosmos, $\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{U})$ est une bicatégorie exacte. C'est aussi vrai pour $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathcal{U})$, la bicatégorie obtenue en ne retenant

comme objets que les $\mathcal{U}$-catégories à un objet, c'est-à-dire les monoïdes de $\mathcal{U}$. En particulier pour $\mathcal{U}$ = Ab, on obtient le fait que Bim est une bicatégorie exacte.

4.4. *Proposition.*

Le plongement de $\mathfrak{Cat}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *dans* $\mathfrak{Dist}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *est un* $\mathcal{U}$*-foncteur pleinement fidèle en tant que* $\mathcal{U}$*-foncteur.*

Si f et f' sont deux $\mathcal{U}$-foncteurs de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$, montrons que l'objet $\mathrm{Nat}_{\mathcal{U}}(f, f')$ est isomorphe à l'objet $D(\Phi_f, \Phi_{f'})$.

Rappelons que $\mathrm{Nat}_{\mathcal{U}}(f, f')$ peut être défini comme le noyau des flèches ∂_0 et ∂_1 du diagramme suivant

$$\coprod_A \mathfrak{B}(fA, f'A) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \coprod_{A, A'} \mathcal{U}[fA \otimes \mathfrak{A}(A, A'), f'A'],$$

∂_0 étant induite par les composés

$$\begin{array}{ccc} fA \otimes \mathfrak{A}(A, A') \otimes \mathfrak{B}(fA, f'A) & & \\ \downarrow & & \\ fA \otimes \mathfrak{B}(fA, f'A) \otimes \mathfrak{A}(A, A') & & \\ \downarrow & & \\ f'A \otimes \mathfrak{A}(A, A') & \longrightarrow & f'A', \end{array}$$

∂_1 par les composés

$$\begin{array}{ccc} fA \otimes \mathfrak{A}(A, A') \otimes \mathfrak{B}(fA', f'A') & & \\ \downarrow & & \\ fA' \otimes \mathfrak{B}(fA', f'A') & \longrightarrow & f'A'. \end{array}$$

Pour $D(\Phi_f, \Phi_{f'})$, rappelons que c'est le noyau de flèches au départ de

$$\coprod_{A, B} \mathcal{U}[\mathfrak{B}(B, fA), \mathfrak{B}(B, f'A)].$$

En vue de montrer que ces noyaux sont isomorphes, construisons une flèche σ de

$$\prod_A \mathcal{B}(fA, f'A)$$

vers

$$\prod_{A,B} \mathcal{U}[\mathcal{B}(B, fA), \mathcal{B}(B, f'A)] :$$

on envoie $\mathcal{B}(fA, f'A)$ dans

$$\mathcal{U}[\mathcal{B}(B, fA), \mathcal{B}(B, f'A)]$$

en transposant

$$\mathcal{B}(B, fA) \otimes \mathcal{B}(fA, f'A) \xrightarrow{C} \mathcal{B}(B, f'A) ;$$

construisons une flèche τ dans l'autre sens :

on prend la projection d'indice (A, fA) et on fait suivre du composé

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}[\mathcal{B}(fA, fA), \mathcal{B}(fA, f'A)] & \xrightarrow{\sim} & I \otimes \mathcal{U}[\mathcal{B}(fA, fA), \mathcal{B}(fA, f'A)] \\ & & \downarrow \\ & & 1_{fA} \otimes id \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{B}(fA, fA) \otimes \mathcal{U}[\mathcal{B}(fA, fA), \mathcal{B}(fA, f'A)] \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{B}(fA, f'A). \end{array}$$

Le reste de la démonstration est du calcul.

Remarque : La possibilité de définir $\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$ comme bicatégorie où pour tout couple d'objets $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathbb{D}ist(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ soit une $\mathcal{U}$-catégorie dépend de l'existence dans $\mathcal{U}$ de limites à gauche et à

droite finies, de sommes et de produits indexés par les objets de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...

On pourrait améliorer la théorie précédente en prenant comme objets de $\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$ non seulement les petites $\mathcal{U}$-catégories, mais celles qui sont <u>raisonnablement</u> petites par rapport à $\mathcal{U}$ au sens suivant : $\mathcal{A}$ est raisonnablement petite par rapport à $\mathcal{U}$ si pour toute application 1 de $Ob(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{U}$ la somme

$$\coprod_{A \in Ob(\mathcal{A})} 1(A) \quad \text{et le produit} \quad \prod_{A \in Ob(\mathcal{A})} 1(A)$$

existent dans $\mathcal{U}$.

5. La bicatégorie $\mathbb{D}ist(\mathcal{E})$.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ désignera toujours une catégorie à limites à gauche finies et à limites à droite finies, préservées par les foncteurs "image réciproque".

5.1. <u>Définition de $\mathbb{D}ist(\mathcal{E})$</u>.

- Les objets sont les catégories internes à $\mathcal{E}$

  $\mathcal{A} = (A_1, A_o, \partial_o, \partial_1, \mu, \varepsilon)$, $\mathcal{B} = (B_1, B_o, \partial_o, \partial_1, \mu, \varepsilon)$, ...

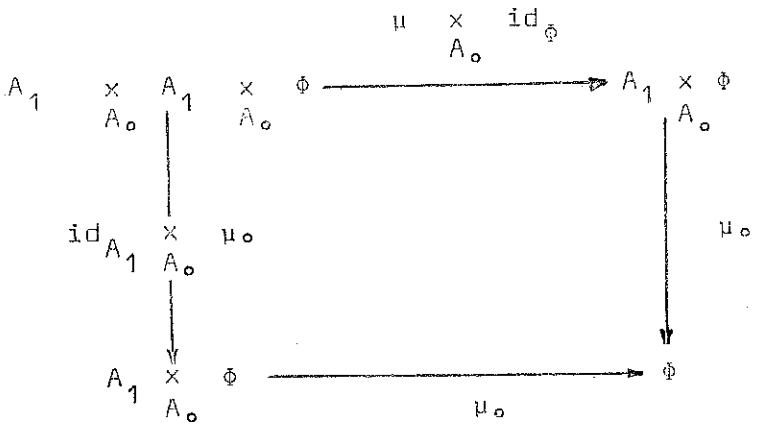
  (avec un abus de notations clair).

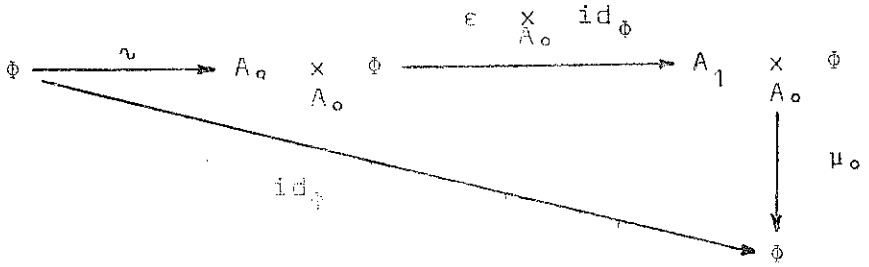
- Une flèche de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$, appelée un distributeur, est un objet Φ de $\mathcal{E}$ muni de flèches

  $\partial_o : \Phi \longrightarrow A_o$, $\partial_1 : \Phi \longrightarrow B_o$,

  $\mu_o : A_1 \underset{A_o}{\times} \Phi \longrightarrow \Phi$, $\mu_1 : \Phi \underset{B_o}{\times} B_1 \longrightarrow \Phi$;

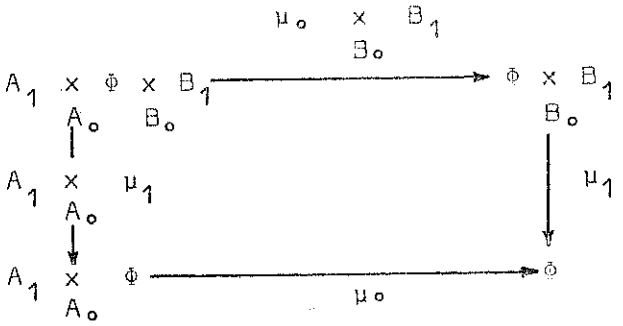
c'est donc un objet à la fois au-dessus de A_o et de B_o, sur lequel opèrent à la fois $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et muni de flèches de structure (μ_o et μ_1) précisant ces opérations. Elles doivent être "associatives" et présenter un caractère "unitaire", ce qui s'exprime par la commutativité des diagrammes suivants :





et deux diagrammes analogues pour l'action de $\mathcal{B}$.

De plus, ces opérations doivent être "compatibles", ce qui s'écrit :



commute.

- Soient Φ et Ψ deux distributeurs de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ respectivement.

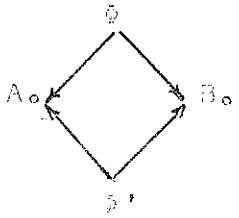
Pour définir leur composé $\Phi \otimes \Psi$ on prend le conoyau des flèches suivantes

$$\Phi \underset{B_0}{\times} B_1 \underset{B_0}{\times} \Psi \rightrightarrows \Phi \underset{B_0}{\times} \Psi \longrightarrow \Phi \otimes \Psi .$$

les deux flèches parallèles étant $\mu_1 \times \Psi$ et $\Phi \times \mu_0$.

On définit l'action de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{C}$ sur cet objet à partir des actions sur Φ et Ψ respectivement, ce qui est possible vu les hypothèses générales sur $\mathcal{E}$.

- Une 2-cellule entre ces distributeurs Φ et Φ' de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$ est une flèche $\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi'$ compatible avec les actions de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire telle que les diagrammes suivants commutent :



$$\begin{array}{ccc} A_1 \underset{A_0}{\times} \Phi & \xrightarrow{\mu_0} & \Phi \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 \underset{A_0}{\times} \Phi' & \xrightarrow{\mu_0'} & \Phi' \end{array}$$

et un diagramme analogue pour l'action de $\mathcal{B}$.

Pour tout couple $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ de catégories internes à $\mathcal{E}$, les distributeurs de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$ et les 2-cellules entre eux forment une catégorie $\mathbb{D}\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. La composition définie pour les distributeurs

s'étend facilement aux 2-cellules de manière à fournir pour toutes catégories internes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, un bifoncteur

$$\otimes : \mathbb{D}\mathrm{ist}\,\mathcal{K}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \times \mathbb{D}\,\mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{D}\,\mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{A}).$$

Avec ces éléments on obtient bien une bicatégorie (avec des isomorphismes d'associativité et des isomorphismes concernant les distributeurs identiques - définis de façon évidente).

5.2. Nous pourrions entreprendre ici une étude analogue à celle faite à propos de $\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{V})$, mais nous ne le ferons pas car les principaux résultats peuvent s'obtenir - comme ceux de l'étude précédente d'ailleurs - comme corollaires de résultats plus généraux sur les bicatégories exactes.

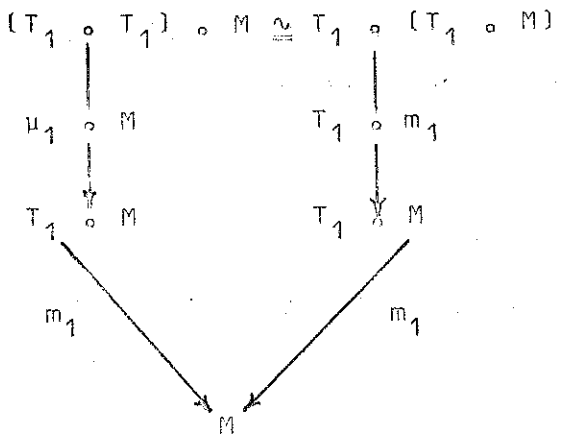
6. Distributeurs pour une bicatégorie exacte.

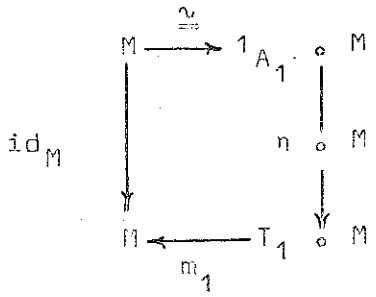
6.1. La bicatégorie $\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathfrak{K})$.

Soit $\mathfrak{K}$ une bicatégorie exacte. On va définir une nouvelle bicatégorie, $\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathfrak{K})$, et montrer qu'elle est exacte elle-aussi.

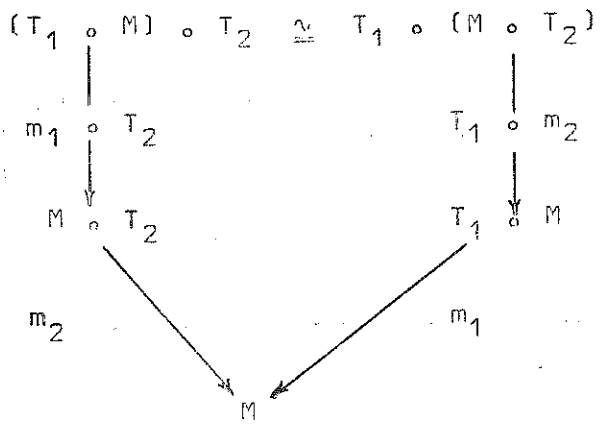
6.1.1. Les objets de $\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathfrak{K})$ sont les <u>monades</u> de $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire les morphismes de la bicatégorie $\mathbb{1}$ vers $\mathfrak{K}$, ou encore les couples formés d'un objet A de $\mathfrak{K}$ et d'un triple (T, μ, η) sur cet objet. On écrira plus brièvement (A, T), (A', T'), ...

Une flèche de (A_1, T_1) vers (A_2, T_2) - appelée un distributeur - est une flèche de A_2 vers A_1, dans $\mathfrak{K}$, soit M, munie de 2-cellules $m_1 : T_1 \circ M \longrightarrow M$ et $m_2 : M \circ T_2 \longrightarrow M$ telles que les diagrammes suivants commutent :





(on a deux diagrammes analogues pour T_2)



On appelle une telle flèche également un (A_1, A_2)-bimodule (en sous-entendant les triples T_1 et T_2).

Une 2-cellule dans $\mathfrak{K}$ de M vers M' - tous deux (A_1, A_2)-bimodules, sera une 2-cellule de $\mathbb{D}ist(\mathfrak{K})$ si elle est compatible avec les opérations m_1 et m_2 des triples.

Pour chaque couple (A_1, A_2) d'objets, flèches et bimodules forment une catégorie $\mathbb{B}im(A_1, A_2)$.

On veut définir une composition de

$$\mathbb{B}im(A_2, A_3) \times \mathbb{B}im(A_1, A_2) \text{ vers } \mathbb{B}im(A_1, A_3).$$

Au couple (N, M) on fait correspondre l'objet $N \otimes M$ défini comme conoyau dans $\mathbb{B}im(A_1, A_3)$ des 2-cellules ci-dessous

$$M \circ T_2 \circ N \underset{m_2 \circ N}{\overset{M \circ n_2}{\rightrightarrows}} M \circ N \longrightarrow N \otimes M.$$

L'action de T_1 et de T_3 sur ce conoyau se définit aisément à partir des actions respectives sur M et sur N : suite aux hypothèses d'exactitude faite sur $\mathfrak{K}$, la composition y commute aux conoyaux.

Ainsi obtient-on facilement la factorisation de droite dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc}
T_1 \circ M \circ T_2 \circ N & \underset{T_1 \circ m_2 \circ N}{\overset{T_1 \circ M \circ n_2}{\rightrightarrows}} & T_1 \circ M \circ N & \longrightarrow & T_1 \circ (N \otimes M) \\
\downarrow & & \downarrow & & \vdots \\
m_1 \circ T_2 \circ N & & m_1 \circ N & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \vdots \\
M \circ T_2 \circ N & \underset{m_2 \circ N}{\overset{M \circ n_2}{\rightrightarrows}} & M \circ N & \longrightarrow & N \otimes M
\end{array}$$

A tout objet (A, T) de $\mathbb{D}ist(\mathfrak{K})$ on associe le (A, A)-bimodule T comme flèche identique sur (A, T). On vérifie alors que ces éléments s'organisent bien en une bicatégorie (isomorphismes cohérents d'associativité et relatifs aux unités).

6.1.2. *Proposition.*

Pour tout couple (A, A') d'objets de $\mathfrak{K}$, $\mathbb{B}im(A, A')$ a des limites finies.

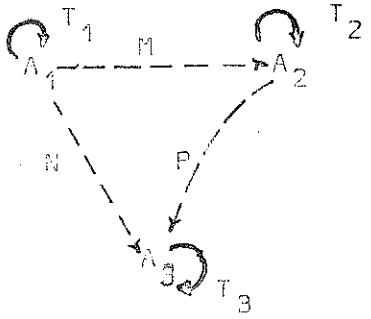
L'existence de limites à droite résulte de leur existence dans $\mathfrak{K}(A', A)$ et du fait que la composition dans $\mathfrak{K}$ commute aux limites inductives : pour définir les opérations sur la limite dans $\mathfrak{K}(A', A)$, il suffit de prendre la limite inductive des flèches structurelles.

L'existence de limites à gauche résulte de leur existence dans $\mathcal{H}(A', A)$; on peut les obtenir de manière analogue à ce qui a été fait pour $\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$ (proposition 3.4.5.).

6.1.3. *Proposition.*

$\mathbb{D}ist(\mathcal{H})$ est une bicatégorie fermée.

Considérons la situation ci-contre. On doit définir un distributeur $\mathrm{Hom}_{(A_1, T_1)}(M, N)$ tel que l'on ait la bijection naturelle



$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}im(A_2, A_3)}[P, \mathrm{Hom}_{(A_1, T_1)}(M, N)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}im(A_1, A_3)}[P \otimes M, N].$$

On prend le noyau des flèches suivantes

$$\mathrm{Hom}^{A_1}(M, N) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}^{A_1}(T_1 M, N),$$

où ∂_1 est la flèche adjointe (par fermeture à gauche de $\mathcal{H}$) de

$$\begin{array}{ccc} T_1 \circ M \circ \mathrm{Hom}^{A_1}(M, N) & \xrightarrow{m_1 \circ \mathrm{Hom}^{A_1}(M, N)} & M \circ \mathrm{Hom}^{A_1}(M, N) \\ & & \downarrow ev \\ & & N \end{array}$$

et où ∂_0 est l'adjointe de

$$\begin{array}{ccc} T_1 \circ M \circ \mathrm{Hom}^{A_1}(M, N) & \xrightarrow{T_1 \circ ev} & T_1 \circ N \\ & & \downarrow n_1 \\ & & N \end{array}$$

.

L'action à gauche de T_2 sur le noyau s'obtient à partir d'une flèche de

$$T_2 \circ \mathrm{Hom}_{(A_1,\ T_1)}(M,\ N) \text{ vers } \mathrm{Hom}^{A_1}(M,\ N)$$

ou de $\quad M \circ T_2 \circ \mathrm{Hom}_{(A_1,\ T_1)}(M,\ N)$ vers N

qui est

$$M \circ T_2 \circ \mathrm{Hom}_{(A_1,T_1)}(M,\ N) \xrightarrow{m_2^-} M \circ \mathrm{Hom}_{(A_1,T_1)}(M,\ N)$$

$$\downarrow \quad A_1$$

$$M \circ \mathrm{Hom}^{A_1}(M,\ N)$$

$$\downarrow \quad ev$$

$$N$$

L'action à droite de T_3 s'obtient à partir d'une flèche de

$$\mathrm{Hom}_{(A_1,T_1)}(M,\ N) \circ T_3 \text{ vers } \mathrm{Hom}^{A_1}(M,\ N)$$

ou de $\quad M \circ \mathrm{Hom}_{(A_1,T_1)}(M,\ N) \circ T_3$ vers N

qui est la composée

$$M \circ \mathrm{Hom}_{(A_1,T_1)}(M,\ N) \circ T_3 \longrightarrow M \circ \mathrm{Hom}^{A_1}(M,\ N) \circ T_3$$

$$\downarrow \quad ev \circ T_3$$

$$N \circ T_3$$

$$\downarrow \quad n_3$$

$$N$$

Le lecteur pourra poursuivre lui-même les vérifications d'usage, en s'inspirant éventuellement de ce qui a été fait pour la proposition 4.3.

La fermeture à gauche s'obtient de manière analogue. Les propositions 6.1.2. et 6.1.3. donnent ensemble le résultat suivant.

6.1.4. *Théorème.*

$\mathbb{D}ist(\mathcal{K})$ est une bicatégorie exacte.

6.2. La bicatégorie $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$.

$\mathcal{U}$ désigne comme précédemment une catégorie multiplicative bien complète à droite. Dans l'étude précédente de $\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$, on était parti de $\mathbb{C}at(\mathcal{U})$, que l'on voulait compléter du point de vue de l'existence de flèches adjointes. On avait montré que sous des hypothèses supplémentaires sur $\mathcal{U}$, on obtenait une bicatégorie exacte. Cette fois on se propose d'utiliser le résultat précédent (6.1.4.) en retrouvant $\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$ comme catégorie de distributeurs pour la bicatégorie $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$ -exacte sous les hypothèses en question sur $\mathcal{U}$.

6.2.1. Définition.

Les objets de $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$ sont les ensembles : I, J, K, ...
Une flèche de I dans J est une famille $(A_{ij} \mid i \in I, j \in J)$ d'objets de $\mathcal{U}$. Une 2-cellule de (A_{ij}) vers (B_{ij}) est une famille $(f_{ij} \mid f_{ij} : A_{ij} \longrightarrow B_{ij})$. Les flèches de I vers J et les 2-cellules forment une catégorie $\mathbb{M}at(I, J) = \mathcal{U}^{I \times J}$.

On définit le composé d'une flèche $A = (A_{ij}) : I \longrightarrow J$ et d'une flèche $B = (B_{ij}) : J \longrightarrow K$ - composé noté BA - par la condition

$$(BA)_{ik} = \coprod_{j \in J} A_{ij} \otimes B_{jk}.$$

Cette composition s'étend facilement aux 2-cellules. A tout objet I on associe la flèche identique $\delta_{ij}\, 1$, qui vaut 1 (l'unité de $\mathcal{U}$) si i = j et vaut 0 (l'objet initial de $\mathcal{U}$) si i ≠ j.

Ces données s'organisent en une bicatégorie $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$ - la bicatégorie "des matrices à coefficients dans $\mathcal{U}$".

6.2.2. *Proposition.*

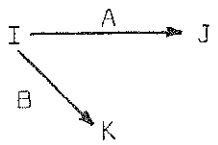
Si $\mathcal{U}$ est un cosmos (symétrique fermée avec des limites projectives) alors $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$ est exacte.

a. Pour tous objets I, J, $\mathbb{M}at(I, J)$ possède des limites finies.

Ceci découle immédiatement de l'existence de ces limites dans $\mathcal{U}$ et du calcul des limites dans $\mathcal{U}^{I \times J}$.

b. $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$ est fermée.

Dans la situation



on peut définir $\mathrm{Hom}_I(A, B)$ avec la propriété universelle voulue. Il suffit de poser

$$\mathrm{Hom}_I(A, B)_{j,\,k} = \prod_i \mathcal{U}(A_{ij}, B_{ik}).$$

La vérification peut se faire directement. Nous remarquons qu'il s'agit d'un cas particulier de la situation étudiée en 4.3., cas où les $\mathcal{U}$-catégories considérées sont discrètes.

Le caractère fermé à gauche s'obtient de la même manière.

Exemple.

Si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Heyting complète, donc une catégorie cartésienne fermée et complète, alors $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$ est exacte et même localement complète. C'est vrai en particulier si $\mathcal{U} = 2$ (la catégorie à une flèche - ou l'algèbre de Boole à 2 éléments), auquel cas $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$ n'est autre que la catégorie des relations dans les ensembles.

Corollaire.

Si $\mathcal{U}$ est un cosmos, alors $\mathbb{D}ist(\mathbb{M}at(\mathcal{U}))$ est exacte.

6.2.3. Ce dernier résultat permet de retrouver le fait que $\mathbb{D}ist(\mathcal{U})$ est exacte lorsque $\mathcal{U}$ est un cosmos. On remarque en effet les choses suivantes :

a. *Une $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{A}$ peut être considérée comme un objet muni d'un triple dans $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$.*

Donner une $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{A}$, c'est donner un ensemble $I = Ob(\mathcal{A})$ et pour chaque couple d'éléments de I, un objet A_{ij} de $\mathcal{U}$.

C'est donc donner une flèche A de I vers I dans $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$. C'est aussi donner une composition, donc pour tous i, j, k $\in$ I une flèche de $A_{ij} \otimes A_{jk}$ vers A_{ik}, ou pour tous i, k $\in$ I une flèche de

$$\coprod_{j \in I} A_{ij} \otimes A_{jk} \text{ vers } A_{ik},$$

ou encore une 2-cellule μ de AA vers A. C'est enfin donner des unités, c'est-à-dire une flèche de l'unité de $\mathcal{U}$ vers A_{ii} pour tout i $\in$ I, ou encore une 2-cellule ε de δ_{ij} 1 vers A_{ij}.

Les relations exprimant que (A, μ, ε) est un triple sur I reviennent aux propriétés disant que $\mathcal{A}$ est une catégorie relative.

b. *Un distributeur Φ entre les $\mathcal{U}$-catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ peut être considéré comme un $(Ob(\mathcal{A}), Ob(\mathcal{B}))$-bimodule.*

Il suffit de retourner aux définitions pour s'en convaincre.

Les notions de 2-cellule entre distributeurs et d'homomorphisme de bimodules se correspondent également.

6.3. La bicatégorie $\mathcal{S}pan(\mathcal{E})$.

$\mathcal{E}$ désignera le même type de catégorie qu'au paragraphe 5. On va montrer que sous certaines hypothèses supplémentaires la bicatégorie $\mathcal{S}pan(\mathcal{E})$ est exacte et comme on constate aisément que la catégorie des distributeurs de $\mathcal{S}pan(\mathcal{E})$ n'est autre que la bicatégorie $\mathcal{D}ist(\mathcal{E})$ définie en 5, cette dernière est donc exacte sous les hypothèses en question.

6.3.1. La bicatégorie $\mathcal{S}pan(\mathcal{E})$ ayant été définie plus haut (cf. 1.2.), indiquons seulement que les bicatégories $\mathcal{S}pan(\mathcal{E}ns)$ et $\mathcal{M}at(\mathcal{E}ns)$ coïncident.

6.3.2. *Proposition.*

Si dans $\mathcal{E}$ les foncteurs "image réciproque" ont un adjoint à droite et si $\mathcal{E}$ admet des limites finies, alors $\mathcal{S}pan(\mathcal{E})$ est une bicatégorie exacte.

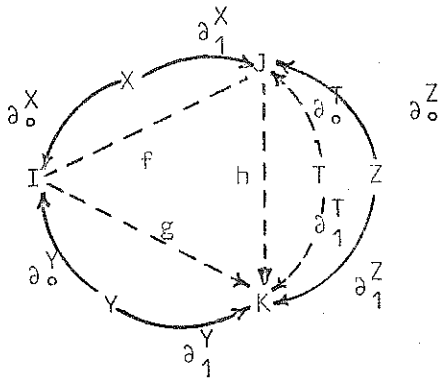
Démonstration.

a. L'existence de limites finies à droite et à gauche dans chaque catégorie $\mathcal{S}pan(I, J)$ découle aisément des hypothèses sur $\mathcal{E}$.

On a $\mathcal{S}pan(I, J) \simeq \mathcal{C}_{/I \times J}$, qui admet les limites en question.

b. Montrons que $\mathcal{S}pan(\mathcal{C})$ est fermée.

Si on donne une flèche f de I vers J et une flèche g de I vers K, il faut trouver une flèche de J vers K, soit $\mathrm{Hom}_I(f, g)$, telle que l'on ait la bijection naturelle



$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{/J \times K}}[Z, \mathrm{Hom}_I(f, g)]$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{/I \times K}}[X \underset{J}{\times} Z, Y]$$

pour toute flèche $h = (\partial_\circ^Z, \partial_1^Z)$ de J vers K.

Si $\mathcal{C}$ était $\mathcal{E}ns$, on poserait

$$\mathrm{Hom}_I(f, g)_{(j, k)} = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(X_{ij}, Y_{ik}).$$

Compte tenu de la formule donnant $\prod_t X'$ dans $\mathcal{E}ns$

$$\left[\text{on a } \left(\prod_t X'\right)_y = \prod_{x \in t^{-1}(y)} X'_x\right] \qquad \begin{array}{ccc} X' & & \\ \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{\ t\ } & Y \end{array}$$

on est amené à poser

$$\mathrm{Hom}_I(f, g) = \prod_{\partial_1^X \times K} (X \underset{I}{\times} Y) \text{ : en effet, dans } \mathcal{E}ns,$$

$$\left[\prod_{\partial_1^X \times K} (X \underset{I}{\times} Y)\right]_{(j, k)} = \prod_{x \in \coprod_i X_{ij}} [\{x\} \times Y_{ik}].$$

Pour $\mathcal{C}$ en général, on note les bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/J \times K}\Big[Z, \overline{\prod_{\partial^{\times}_{1} \times K}} (X \underset{I}{\times} Y)\Big] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/X \times K}\Big[(X \underset{J \times K}{\times} K) \underset{I}{\times} Z, X \underset{I}{\times} Y\Big]$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/X \times K}\Big[X \underset{J}{\times} Z,\ X \underset{I}{\times} Y\Big]$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I \times K}\Big[X \underset{J}{\times} Z,\ Y\Big].$$

On montre de façon analogue la fermeture à gauche.

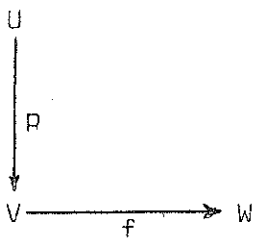
6.3.3. On notera la <u>réciproque</u> suivante.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie à limites à gauche finies telle que $\mathcal{S}\mathrm{pan}(\mathcal{C})$ soit une bicatégorie exacte, alors $\mathcal{C}$ possède toutes les limites finies et les foncteurs "image réciproque" ont un adjoint à droite.

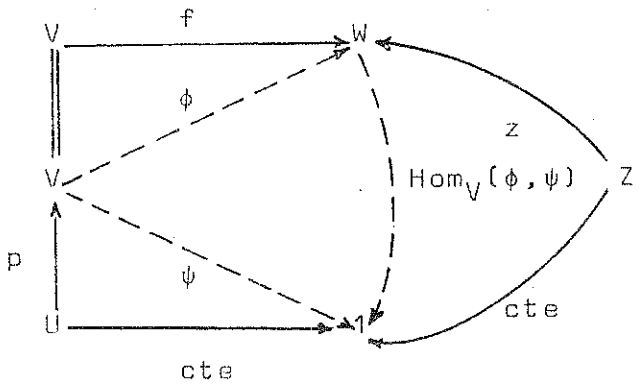
a. Comme $\mathcal{S}\mathrm{pan}(1, 1)$ coïncide avec $\mathcal{C}/_{1 \times 1}$ ou $\mathcal{C}$, l'existence des limites finies est claire.

b. Il faut encore montrer que dans la situation ci-contre on peut définir un objet $\prod_f(p)$ au-dessus de W tel que l'on ait

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/W}\Big[z, \prod_f (p)\Big] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/V}[f^{*}(z), p].$$



Il suffit de prendre $\mathrm{Hom}_V(\phi, \psi)$, où ϕ est la flèche (id_V, f) et ψ la flèche (p, cte). La bijection de fermeture donne la relation voulue.



7. Applications.

7.1. La considération de distributeurs fournit d'intéressantes perspectives dans l'étude des catégories fibrées, vu la bonne correspondance entre les catégories au-dessus d'une catégorie $\mathcal{B}$ fixée et les morphismes de $\mathcal{B}^*$, considérée comme bicatégorie, dans **Dist**.

7.1.1. Si l'on se donne un foncteur $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$, on peut lui associer le morphisme $\Phi : \mathcal{B}^* \longrightarrow$ **Dist** défini comme suit.

Pour chaque objet B de $\mathcal{B}$, $\Phi(B)$ est la fibre au-dessus de B - c'est-à-dire la sous-catégorie de $\mathcal{E}$ envoyée par p sur l'objet B et la flèche 1_B - notée aussi $\mathcal{E}_B$.

Si $\beta : B \longrightarrow B'$ (dans $\mathcal{B}$), alors $\Phi_\beta : \mathcal{E}_{B'} \dashrightarrow \mathcal{E}_B$ est défini par

$$\Phi_\beta(E, E') = \{f : E \longrightarrow E' \mid p(f) = \beta\},$$

les flèches de $\mathcal{E}_B$, et $\mathcal{E}_B$ opérant par composition.

Si $\beta' : B' \longrightarrow B''$ et si $\Phi_{\beta'} : \mathcal{E}_{B''} \dashrightarrow \mathcal{E}_{B'}$ est le distributeur

y associé, on peut définir une 2-cellule de $\Phi_\beta \otimes \Phi_{\beta'}$ dans $\Phi(\beta.\beta')$ en envoyant chaque élément de

$$\coprod_{E' \in |\mathcal{C}_{B'}|} \Phi_{\beta'}(E', E'') \times \Phi_\beta(E, E')$$

sur le composé dans $\mathcal{C}$ des 2 flèches qui le constituent. Il est trivial de voir que cette application est compatible avec la relation d'équivalence définissant $(\Phi_\beta \otimes \Phi_{\beta'})(E, E'')$ et avec les actions des flèches de $\mathcal{C}_{B''}$ et $\mathcal{C}_{B'}$.

Il faut encore indiquer pour chaque objet $B \in |\mathcal{B}|$ une 2-cellule du distributeur identique sur $\mathcal{C}_B$ vers $\Phi(1_B)$, donc vers lui-même : ce sera simplement l'identité $i_{\mathcal{C}_B}$. Un morphisme de bicatégories pour lequel cette dernière propriété est vraie est dit unitaire.

7.1.2. Réciproquement, si l'on se donne un morphisme $\Phi : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathbb{D}ist$, on peut lui associer la catégorie $\mathcal{C}$ suivante

$$Ob(\mathcal{C}) = \coprod_{B \in Ob(\mathcal{B})} Ob(\Phi(B)).$$

Si $E \in |\Phi(B)|$ et $E' \in |\Phi(B')|$, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[E, E'] = \{(\beta, \phi) \mid \beta : B \longrightarrow B' \text{ dans } \mathcal{B} \text{ et } \phi \in \Phi_\beta(E, E')\}.$$

Le composé de $(\beta, \phi) : E \longrightarrow E'$ et de $(\beta', \phi') : E' \longrightarrow E''$ sera le couple formé du composé $\beta'\beta$ (dans $\mathcal{B}$) et de l'image du couple (ϕ, ϕ') par la composante d'indice (E, E'') de la 2-cellule canonique de

$$\Phi_\beta(E, E') \otimes \Phi_{\beta'}(E', E'') \text{ vers } \Phi_{\beta\beta'}(E, E'').$$

A l'objet $E \in |\Phi(B)|$ on associe comme flèche identique le couple formé de 1_B et de l'image de 1_E par la 2-cellule canonique de

$$1_{\Phi(B)} = \mathrm{Hom}_{\Phi(B)} \text{ vers } \Phi_{1_B}.$$

On vérifie facilement que l'ensemble de ces données s'organise en une catégorie, laquelle se projette de manière évidente sur $\mathcal{B}$.

7.1.3. Il peut se faire que pour tout $\beta : B \longrightarrow B'$ dans $\mathcal{B}$ le distributeur Φ_β soit représentable, c'est-à-dire qu'il existe un foncteur $\beta^* : \Phi(B') \longrightarrow \Phi(B)$ tel que l'on ait pour tout E' dans $\Phi(B')$ l'équivalence naturelle

$$\Phi_\beta(-, E') \underline{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}[-, \beta^* E'] ;$$

si de plus la 2-cellule canonique de $\Phi_\beta \otimes \Phi_\beta$, dans $\Phi(\beta\beta')$ est toujours une équivalence naturelle, alors Φ revient à un pseudo-foncteur de $\mathcal{B}^*$ dans $\mathbb{C}$at et la catégorie $\mathcal{E}$ correspondante est cofibrée (au sens de Grothendieck).

7.1.4. Si l'on se donne un morphisme Φ de la bicatégorie $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$at - donc une catégorie munie d'un triple - la catégorie $\mathcal{E}$ correspondant à Φ suivi du plongement dans $\mathbb{D}$ist, est exactement la catégorie de Kleisli du triple. En effet, si $\Phi(*) = \mathcal{A}$ et $\Phi_1 = T$, on observe que

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{E}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, A') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, TA')$$

et que le composé de $\phi : A \longrightarrow TA'$ et de $\psi : A' \longrightarrow TA''$ (flèches dans $\mathcal{A}$) s'obtient en faisant suivre le résultat de l'action de ψ sur ϕ - c'est-à-dire le composé $T(\psi).\phi$ (dans $\mathcal{A}$) - de la multiplication μ du triple au niveau A" (cf. 2.2., b, lemme 1, et a.).

Si l'on s'était donné directement un morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{D}$ist - une catégorie munie d'un protriple - on aurait pu reconnaître dans $\mathcal{E}$ la catégorie de Kleisli associée à ce protriple.

7.1.5. Comme pour tout triple sur une catégorie on peut construire

non seulement la catégorie de Kleisli mais aussi la catégorie d'Eilenberg et Moore des algèbres sur le triple, on est amené à rechercher une construction analogue pour un morphisme quelconque $\Phi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}at$.

Un objet de la catégorie qu'on a en vue sera une famille d'objets $(C_B \mid B \in |\mathfrak{B}| \text{ et } C_B \in \Phi(B))$ munis pour tout $\beta : B \longrightarrow B'$ dans $\mathfrak{B}$ d'une flèche $\xi_\beta : \Phi_\beta(C_B) \longrightarrow C_{B'}$, ces flèches vérifiant certaines conditions de compatibilité :

pour tout couple (β, β') tel que $B \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{\beta'} B''$ le carré

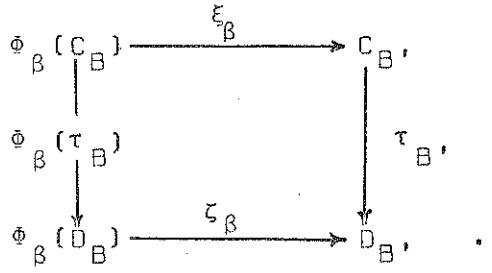
$$\begin{array}{ccc} \Phi_\beta,(\Phi_\beta(C_B)) & \xrightarrow{\mu_{C_B}} & \Phi_{\beta'\beta}(C_B) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_\beta,(\xi_\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{\beta'\beta}} \\ \Phi_\beta,(C_{B'}) & \xrightarrow{\xi_{\beta'}} & C_{B''} \end{array}$$

commute et pour tout objet B de $\mathfrak{B}$ le triangle

$$\begin{array}{ccc} C_B & \xrightarrow{\eta_B} & \Phi_{1_B}(C_B) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \xi_{1_B}} \\ & & C_B \end{array}$$

commute également.

Une flèche de l'objet (C_B, ξ_β) vers l'objet (D_B, ζ_β) sera une famille de flèches $\tau_B : C_B \longrightarrow D_B$ compatibles avec les flèches structurelles (ξ_β et ζ_β) donc telle que chaque carré du type ci-dessous soit commutatif



7.2. Plusieurs constructions classiques peuvent être décrites en termes de distributeurs.

La donnée d'un type de diagramme dans $\mathcal{E}ns$ par exemple revient à celle d'une flèche T dans $\mathcal{S}pan(\mathcal{E}ns)$ de source et but confondus - soit T_0. Dans la catégorie multiplicative fermée complète $\mathcal{S}pan(T_0, T_0)$ on peut former le monoïde libre engendré par T - donné par $\coprod_{n\in N} T^n$ - ; on obtient ainsi la catégorie libre sur le type de diagramme donné.

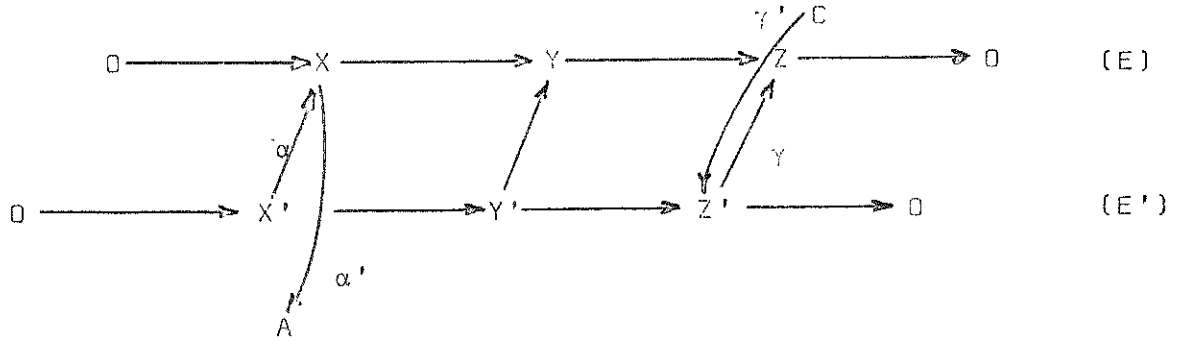
Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, $\mathcal{B}$ la catégorie des suites exactes courtes dans $\mathcal{A}$, ∂_0 et ∂_1 les foncteurs associant à une telle suite son premier et son dernier terme respectivement, alors le composé

$$\Phi_{\partial_1} \otimes \Phi^{\partial_0}$$

donne le bifoncteur Ext^1 à valeurs dans les ensembles. Vérifions par exemple que $Ext^1(C, A)$ est en bijection avec

$$(\Phi_{\partial_1} \otimes \Phi^{\partial_0})(C, A).$$

A cet effet, considérons le diagramme suivant



où $(\alpha, , \gamma)$ est un morphisme entre les suites exactes courtes (E') et (E). Les couples $(\alpha', \gamma\gamma')$ et $(\alpha'\alpha, \gamma')$ sont équivalents modulo la relation $\sim$ définissant le composé des deux distributeurs. A partir de l'un d'eux on peut former un élément de $\mathrm{Ext}^1(C, A)$: prenons par exemple $\alpha'(E(\gamma\gamma'))$; cette suite exacte courte décrit la position du couple $(1_A, 1_C)$ dans la classe d'équivalence de $(\alpha', \gamma\gamma')$; en partant du couple $(\alpha'\alpha, \gamma')$, on aurait trouvé le même élément de $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ [cf. par exemple B. Mitchell, [3], p.164, Lemme 1.3.]. A tout élément de

$$(\Phi_{\partial_1} \otimes \Phi^{\partial_0})(C, A)$$

correspond donc un élément unique de $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ tandis que chaque extension situe le couple $(1_A, 1_C)$ dans une classe pour la relation $\sim$.

7.3. Si $\mathcal{C} = (F, O, \partial_0, \partial_1, \mu, \eta)$ est une catégorie interne à un topos $\mathcal{E}$, on peut définir un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ comme une algèbre sur le triple défini par $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}/O$.

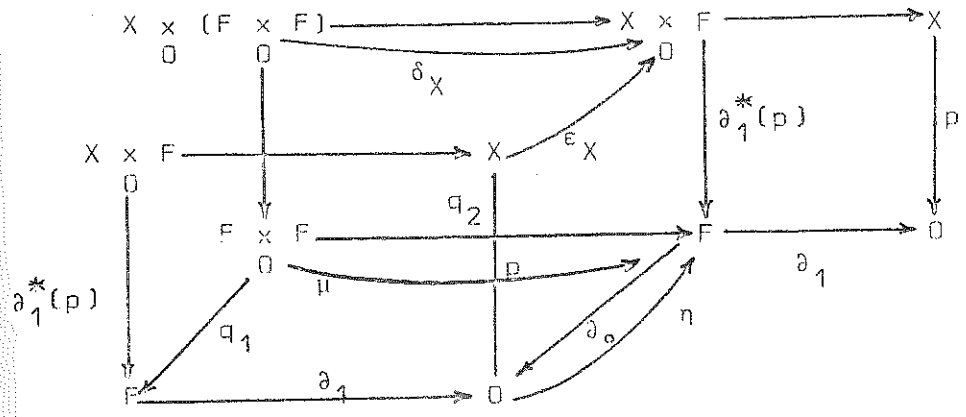
Rappelons que le foncteur de ce triple envoie $p : X \longrightarrow O$ sur le composé $\partial_0 \circ \partial_1^*(p)$, que l'unité est donnée par les flèches $\varepsilon_X : X \longrightarrow X \underset{O}{\times} F$ factorisant les couples $(\eta p, 1_X)$ et que la multiplication est donnée par les flèches

$$\delta_X : X \underset{O}{\times} (F \underset{O}{\times} F) \longrightarrow X \underset{O}{\times} F$$

factorisant les couples

$$(\mu(\partial_1 q_2)^*(p), (\partial_1^*(p))^*(q_2))$$

comme l'indique brièvement le diagramme que voici.



Supposons que p soit le support d'une algèbre sur ce triple et que $\xi : \partial_0\, \partial_1^*(p) \longrightarrow p$ soit sa flèche structurelle. Les relations caractéristiques $\xi\varepsilon_X = 1_X$ et $\xi\delta_X = \xi\partial_1^*(\xi)$ sont donc vérifiées.

On peut associer à p une catégorie interne $\mathcal{S}$, la "sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ engendrée par la famille $X \xrightarrow{p} O$", de la manière suivante.

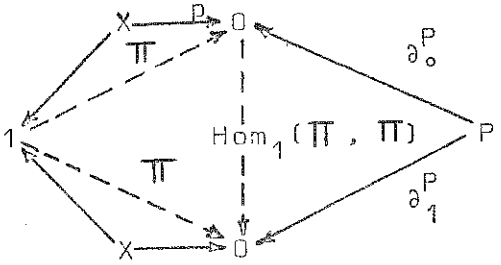
Puisque $\mathcal{S}pan(\mathcal{C})$ est fermée, on peut considérer la flèche

$$\mathrm{Hom}_1(\Pi, \Pi) = (\partial_0^P, \partial_1^P) .$$

qui, d'après la formule donnée en 6.3.2., s'écrit

$$(p_1 \underset{p\times O}{\Pi} (X \times p),\ p_2 \underset{p\times O}{\Pi} (X \times p)).$$

(Si $\mathcal{C} = \mathcal{E}ns$, la fibre au-dessus du couple $(i, j) \in O \times O$ est l'ensemble $X_j{}^{X}{}_i$).



Cette flèche est canoniquement munie d'un triple d'après le lemme suivant - de sorte que nous sommes bien en présence d'une catégorie interne.

Lemme. *Si $f : A \longrightarrow B$ est une flèche d'une bicatégorie $\mathbb{A}$ fermée, la flèche $\mathrm{Hom}_A(f, f)$ est munie d'un triple dans $\mathbb{A}(B, B)$.*

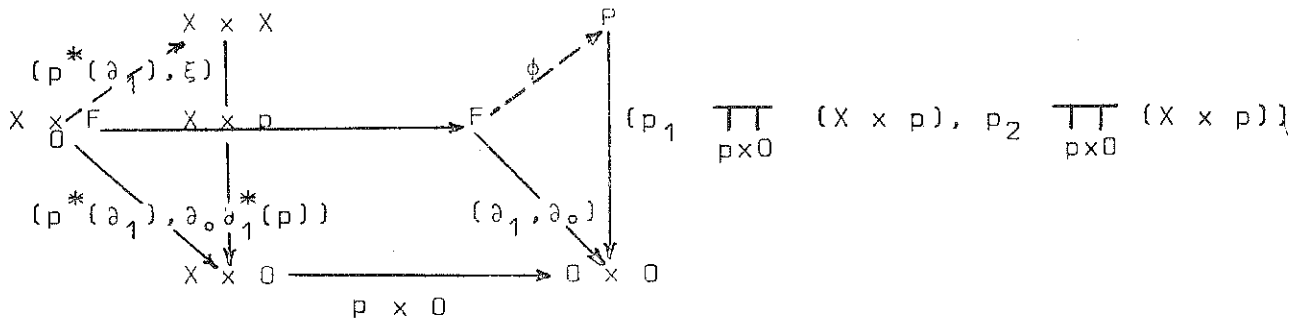
L'unité de ce triple $1_B \Longrightarrow \mathrm{Hom}_A(f, f)$ est la flèche adjointe de $l(f) : 1_B \otimes f \Longrightarrow f$.

La multiplication $\mathrm{Hom}_A(f, f) \otimes \mathrm{Hom}_A(f, f) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_A(f, f)$ s'obtient par adjonction à partir du composé

$$\mathrm{Hom}_A(f, f) \otimes \mathrm{Hom}_A(f, f) \otimes f \xrightarrow[\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}]{} \mathrm{Hom}_A(f, f) \otimes f \xrightarrow[\mathrm{ev}]{} f$$

où ev est l'adjointe de l'identité sur $\mathrm{Hom}_A(f, f)$.

Considérons alors le diagramme ci-dessous.

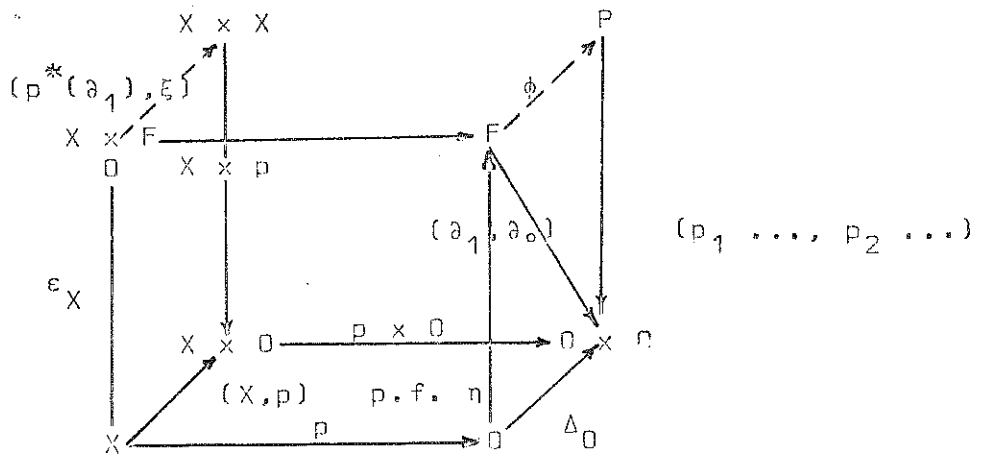


Comme la base est un produit fibré, il montre qu'il y a une bijection entre les flèches

$$\xi : X \underset{0}{\times} F \longrightarrow X \text{ telles que } p\xi = \partial_0 \partial_1^*(p)$$

et les flèches $\phi : F \longrightarrow P$ compatibles avec les flèches source et but (de manière contravariante).

On vérifie ensuite que ξ est la flèche structurelle d'une algèbre si et seulement si ϕ est un foncteur interne. La condition sur les neutres par exemple peut se traduire par le fait que l'adjointe de $\phi\eta$ est la flèche $\Delta_X : (X, p) \longrightarrow X \times p$, donc par la condition $\xi\varepsilon_X = 1_X$ finalement.

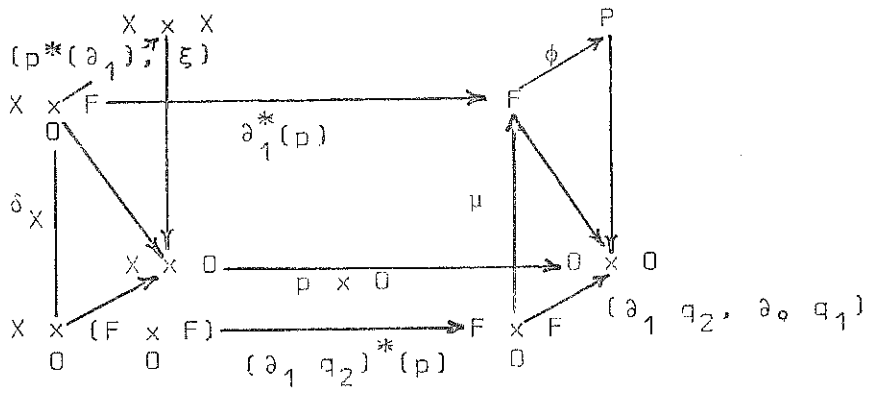


Quant à la condition sur la préservation de la composition, elle revient à dire que l'adjointe de

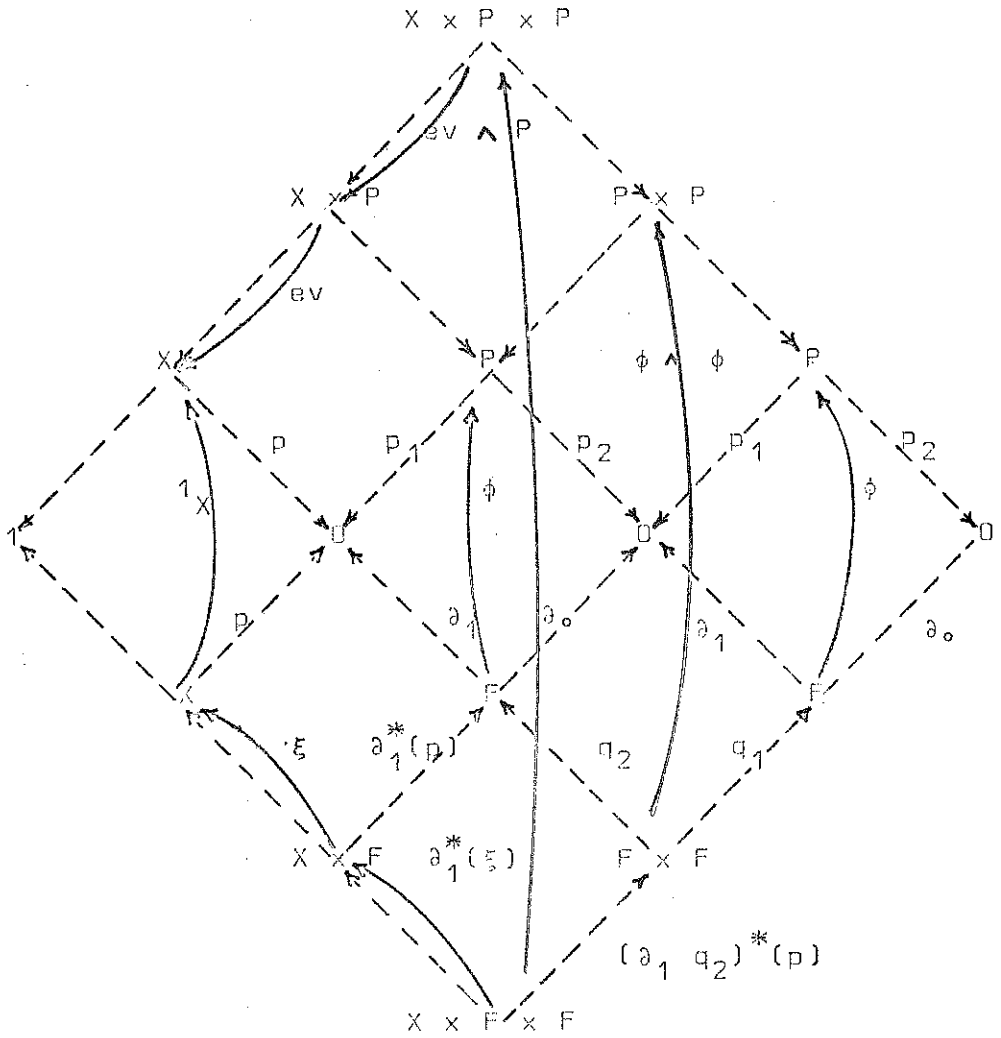
$$\phi\mu : (\partial_1 q_2, \partial_0 q_1) \longrightarrow \underset{p \times 0}{\top\top} (X \times p)$$

- c'est-à-dire la flèche $(p^*(\partial_1), \xi)\delta_X$ - coïncide dans sa seconde composante avec la factorisation à travers p de $\partial_0 q_1 (\partial_1 q_2)^*(p)$ - c'est-à-dire $\xi\, \partial_1^*(\xi)$.

Ceci s'éclaire par l'examen du diagramme que voici

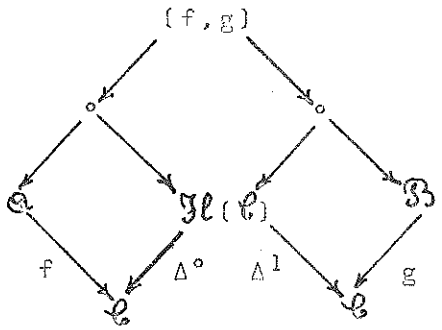


(où les carrés parallèles à p × O sont des produits fibrés) et du diagramme suivant (où les trois carrés supérieurs et inférieurs sont des produits fibrés) qui montre que le composé formant la partie de droite du bas du contour - cité ci-dessus - n'est autre que p ev(ev ∧ P)(X ∧ φ ∧ φ) - à considérer d'après le lemme.


X x P x P
ev ^ P
X x P
P x P
ev
P
φ ^ φ
P
p
p1
p2
p1
p2
1X
φ
φ
U
U
U
p
∂1
∂o
∂1
∂o
X
F
F
ξ
∂1*(p)
q2
q1
X x F
∂1*(ξ)
F x F
(∂1 q2)*(p)
X x F x F

Annexe. La catégorie comma.

a. Si $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ et $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont deux foncteurs donnés, on peut former une catégorie notée (f, g) - "la catégorie comma de f et g" - à l'aide du diagramme suivant où tous les carrés sont des produits fibrés dans $\mathbb{C}at$, où Δ^0 et Δ^1 sont les foncteurs source et but pour les flèches de $\mathcal{C}$.



Un objet de (f, g) est un triple formé d'un objet A de $\mathcal{A}$, d'un objet B de $\mathcal{B}$ et d'une flèche de fA dans gB.

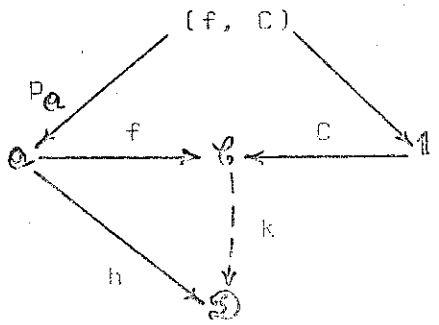
Une flèche de (A, B, γ) vers (A', B', γ') est un couple formé d'une flèche $\alpha : A \longrightarrow A'$ et d'une flèche $\beta : B \longrightarrow B'$ telles que l'on ait $g(\beta)\gamma = \gamma' f(\alpha)$.

La catégorie (f, g) admet des projections canoniques $p_{\mathcal{A}}$ et $p_{\mathcal{B}}$ vers $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement et les flèches γ, γ' ... déterminent une transformation naturelle ϕ du composé $f \circ p_{\mathcal{A}}$ vers $g \circ p_{\mathcal{B}}$. Cette propriété est universelle au sens suivant : pour toute catégorie $\mathcal{X}$ et tout couple $q_{\mathcal{A}}$, $q_{\mathcal{B}}$ de foncteurs munis d'une transformation naturelle ψ de $f \circ q_{\mathcal{A}}$ vers $g \circ q_{\mathcal{B}}$, il existe un foncteur unique q de $\mathcal{X}$ vers (f, g) tel que l'on ait $\psi = \phi * q$.

b. Notons les cas particuliers suivants.

Si $\mathcal{A} = 1$, donc si la donnée de f revient à celle d'un objet F de $\mathcal{C}$, et si $g = 1_{\mathcal{C}}$, alors on trouve pour $(f, 1_{\mathcal{C}})$ la catégorie en-dessous de F ; de même $(1_{\mathcal{C}}, f)$ est la catégorie au-dessus de F.

Si $\mathcal{B} = 1$, donc si g est défini par un objet C de $\mathcal{C}$, le calcul de l'extension de Kan k de f par le foncteur $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$, au point C de $\mathcal{C}$, peut se faire en prenant la limite du composé $g \circ p_{\mathcal{A}}$ dans le diagramme ci-dessous. On peut utiliser l'écriture suggestive suivante : $k(C) = \varinjlim_{f(A) \to C} h(A)$.



c. Une utilisation intéressante de la catégorie comma est la suivante. Soit $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}$ un foncteur et $\langle F \rangle$ le "point" correspondant dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$; notons Δ le foncteur diagonal $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ et formons $(\langle F \rangle, \Delta)$. Désignons par $\hat{F}$ la projection sur $\mathcal{A}$. Il revient au même de dire qu'un objet L de $\mathcal{A}$ est limite à droite de F ou qu'il est limite à gauche de $\hat{F}$.

Si L est limite à gauche de $\hat{F}$, il est sommet d'un cône inductif dans $\mathcal{A}$, de base F, car chaque point de cette base est sommet d'un cône projectif de base $\hat{F}$ et donne donc une flèche de factorisation unique vers L. Mais alors L est dans la base de $\hat{F}$ et celle-ci contient exactement une flèche de L vers chacun de ses sommets ; ceci montre l'universalité du cône inductif trouvé ci-dessus.

Réciproquement, si L est limite à droite de F, par la propriété d'universalité, il est point initial de la base de $\hat{F}$, donc limite à gauche pour ce foncteur.

d. L'utilisation de la catégorie comma nous avait fourni une seconde décomposition pour les flèches de $\mathbb{D}$ist (cf. 2.3.2.). Dans l'étude générale de $\mathbb{D}$ist($\mathcal{V}$) nous n'avons mis en évidence qu'une seule décomposition. Il est toutefois possible d'en obtenir une seconde lorsque $\mathcal{V}$ a suffisamment de bonnes propriétés pour permettre une construction analogue à la catégorie comma. C'est par exemple le cas si $\mathcal{V}$ est un cosmos. Dans ces conditions, en effet, on peut former la $\mathcal{V}$-catégorie des flèches d'une $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{A}$ donnée : la catégorie (ordinaire) $\mathfrak{Fl}(\mathcal{A})$ est isomorphe à celle des $\mathcal{V}$-foncteurs et transformations naturelles de L(2) (la $\mathcal{V}$-catégorie libre sur 2) vers $\mathcal{A}$; cette seconde catégorie est sous-jacente à la $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{A}^{L(2)}$ - dont l'existence résulte du caractère fermé de $\mathbb{C}$at($\mathcal{V}$). Et comme $\mathbb{C}$at($\mathcal{V}$) possède des produits fibrés, on peut former la $\mathcal{V}$-catégorie comma des $\mathcal{V}$-foncteurs f et g indiqués en 3.4.2. On peut ensuite transposer la démonstration du 2.3.2., b.

BIBLIOGRAPHIE.

++++++++++++

[1] J. BENABOU - "Introduction to Bicategories" in Reports Midwest Category Seminar , L.N. 47 , Springer , 1967 , pp. 1 à 77.

[2] J. BENABOU - "Les catégories multiplicatives" , notes rédigées par F. BORCEUX, J. DEWULF et M. ZANDARIN , Rapport Sém. Math. pure, n° 27 , Louvain , 1972.
Ce texte comporte une large bibliographie couvrant plusieurs recherches voisines.

[3] B. MITCHELL - "Theory of categories" , Academic Press , 1965.

TABLE DES MATIERES

§ 1. Les bicatégories.

1.1. Définition.
1.2. Exemples.
1.3. Morphismes de bicatégories.
1.4. Exemples de morphismes.
1.5. Flèches adjointes.
1.6. Bicatégories fermées et exactes.

§ 2. La bicatégorie $\mathbb{D}$ist.

2.1. Définition de $\mathbb{D}$ist.
2.2. Morphisme canonique de $\mathbb{C}$at vers $\mathbb{D}$ist.
2.3. Propriétés de $\mathbb{D}$ist.

§ 3. La bicatégorie $\mathbb{D}$ist($\mathcal{U}$).

3.1. $\mathcal{U}$-foncteurs.
3.2. Définition de $\mathbb{D}$ist($\mathcal{U}$).
3.3. Morphisme canonique de $\mathbb{C}$at($\mathcal{U}$) vers $\mathbb{D}$ist($\mathcal{U}$).
3.4. Propriétés de $\mathbb{D}$ist($\mathcal{U}$).

§ 4. Distributeurs pour un cosmos.

4.1. Caractère relatif.
4.2. Caractère $\mathcal{U}$-complet.
4.3. Caractère fermé.

4.4. $\mathcal{U}$-pleine fidélité du plongement.

§ 5. La bicatégorie $\mathbb{D}$ist($\mathcal{E}$).

5.1. Définition de $\mathbb{D}$ist($\mathcal{E}$).

5.2. Remarque.

§ 6. Distributeurs pour une bicatégorie exacte.

6.1. La bicatégorie $\mathbb{D}$ist($\mathcal{K}$).

6.2. La bicatégorie $\mathbb{M}$at($\mathcal{U}$).

6.3. La bicatégorie $\mathcal{S}$pan($\mathcal{E}$).

§ 7. Applications.

Annexe. La catégorie comma.

Bibliographie.